ISSN 0453-8048

ВЕСТНИК ХАРЬКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

ХГУ

315 '88

УПРАВЛЯЕМЫЕ СИСТЕМЫ

«ВИЩА ШКОЛА»

1 р. 10 к.

048. Вестн. Харьк. ун-та. 1988. № 315.
системы. 1—112.

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ УССР

ВЕСТНИК ХАРЬКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 315

УПРАВЛЯЕМЫЕ СИСТЕМЫ

Основан в 1965 г.

Харьков
Издательство при Харьковском
Государственном университете
Издательского объединения
«Вища школа»
1988

УДК 517.977

В вестнике опубликованы статьи по математической теории управляемых процессов, некоторым вопросам прикладной математики и алгебры.

Для научных работников и специалистов.

Адрес редакционной коллегии: 310077 Харьков, пл. Дзержинского, 4, университет, механико-математический факультет, тел. 45-72-40

Редакция литературы по естественным наукам и филологии
Зав. редакцией *Е. П. Иващенко*

Издано по заказу Харьковского государственного университета

У $\frac{1704020000-038}{М226(04)-88}$

УДК 517.934

В. И. КОРОБОВ,
А. В. ЛУЦЕНКО

КРИТЕРИИ СТАБИЛИЗИРУЕМОСТИ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

Рассмотрим систему вида

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{1}$$

где $x \in E_n$; $u \in E_r$; A — постоянная $(n \times n)$-матрица, B — постоянная $(n \times r)$-матрица; $\operatorname{rank} B = r$.

Будем говорить, что система (1) является α-стабилизируемой, если существует управление вида $u = Fx$, где F — постоянная $(r \times \times n)$-матрица, такое, что каждое решение $x(t)$ системы $\dot{x} = (A + +BF)x$ удовлетворяет условию $x(t)e^{-\alpha t} \to 0$ при $t \to \infty$.

Другими словами, система (1) является α-стабилизируемой, если существует постоянная матрица F, такая, что $A+BF$ является α-устойчивой матрицей, т. е. $\sigma(A+BF) \subset C_\alpha^-$, где $\sigma(\cdot)$—спектр матрицы, стоящей в скобках, $C_\alpha^- = \{\lambda \in C{:}\operatorname{Re}\lambda < \alpha\}$.

Приводимая ниже теорема содержит 6 эквивалентных условий стабилизируемости, объединяя в единое целое материал, который можно представить как несколько отдельных теорем. В нее включены условия, полученные в работах [1, 2], и ранее не публиковавшиеся.

Теорема. *Для того чтобы система (1) была α-стабилизируема, необходимо и достаточно выполнения одного из следующих условий:*

1) *существует симметрическая положительно определенная матрица R, являющаяся решением уравнения Риккати:*

$$A^*R + RA - 2\alpha R - RBB^*R + I = 0; \tag{2}$$

2) *не существует неособой матрицы T, такой, чтобы матрицы $\hat{A} = TAT^{-1}$, $\hat{B} = TB$ имели вид*

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}, \ \hat{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

и чтобы $\sigma(A_{22}) \cap C_\alpha^+ \neq \varnothing$, где A_{11} — квадратная матрица порядка $k < n$, B_1 — матрица размеров $k \times r$, $C_\alpha^+ = \{\lambda \in C{:} \operatorname{Re}\lambda \geqslant \alpha\}$;

3) *не существует A-инвариантного подпространства размерности меньше n, содержащего все векторы, которые являются столбцами матрицы B, и такого, что его ортогональное дополнение не содержит ни одного собственного вектора матрицы A^*, соответ-*

ствующего собственному числу λ, *удовлетворяющему условию* $\lambda \in C_\alpha^+$;

4) *не существует собственного вектора матрицы* A^*, *соответствующего собственному числу* $\lambda \in C_\alpha^+$, *ортогонального столбцам матрицы* B;

5) *для собственных чисел* λ *матрицы* A, *удовлетворяющих условию* $\lambda \in C_\alpha^+$, *выполняется соотношение* $\operatorname{rank}(A-\lambda I,\ B)=n$;

6) *корневые подпространства* $K(\lambda_i)=\{x\in E_n:(A-\lambda_i I)^{n_i}x=0,\ n_i$ — *кратность собственного числа* $\lambda_i\}$, *соответствующие собственным числам* $\lambda_i \in C_\alpha^+$, *принадлежат подпространству* $L=\operatorname{Lin}(B,\ AB,\ \dots,\ A^{n-1}B)$.

Для доказательства теоремы понадобятся два вспомогательных факта, которые оформим в виде лемм. Один из них касается специального метода приведения системы (1) к канонической форме, впервые примененного в работе [3] и впоследствии неоднократно применявшегося при решении разнообразных задач теории управляемых систем [4—6]. Второй касается вопроса о стабилизируемости системы, соответствующей скалярному уравнению $y^{(n)}=u$.

Лемма 1. *Если* $\operatorname{rank}(B, AB,\ \dots,\ A^{n-1}B)=m<n$, *то существует неособое преобразование* $z=Tx$, *приводящее систему* (1) *к канонической форме следующего вида:*

$$\dot z_1=\sum_{l=1}^{\mu_0}\alpha_{1l}z_l;$$
$$\dots\dots \qquad (4)$$
$$\dot z_{\mu_0}=\sum_{l=1}^{\mu_0}\alpha_{\mu_0 l}z_l;$$

$$\dot z_{\mu_0+1}=z_{\mu_0+2};$$
$$\dot z_{\mu_0+2}=z_{\mu_0+3};$$
$$\dots\dots$$
$$\dot z_{\mu_0+\mu_1}=\sum_{l=1}^{n}\gamma_{1l}z_l+u_1+\sum_{l=2}^{r}\delta_{1l}u_l; \qquad (5)$$
$$\dot z_{\mu_0+\mu_1+1}=z_{\mu_0+\mu_1+2};$$
$$\dots\dots$$
$$\dot z_{\mu_0+\mu_1+\mu_2}=\sum_{l=1}^{n}\gamma_{2l}z_l+u_2+\sum_{l=3}^{r}\delta_{2l}u_l; \qquad (6)$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\dot z_{\mu_0+\dots+\mu_{r-1}+1}=z_{\mu_0+\dots+\mu_{r-1}+2};$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

$$\dot{z}_{\mu_0+\ldots+\mu_r} = \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ri} z_i + u_r, \tag{7}$$

где $\mu_i \geqslant 1,\ \sum_{i=1}^{r} \mu_i = m,\ \mu_0 = n - m,\ \mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \ldots \geqslant \mu_r.$

Доказательство. Подпространство $L = \mathrm{Lin}(B, AB, \ldots, A^{n-1}B)$ имеет размерность m, следовательно, $\dim L^{\perp} = \mu_0$. Обозначим базис подпространства $L^{\perp}$ через $d_1, \ldots, d_{\mu_0}$. Базис подпространства L определим следующим образом. Пусть $b_1, \ldots, b_r$—столбцы матрицы B. Рассмотрим систему векторов, составленную из столбцов матрицы $(B, AB, \ldots, A^{n-1}B)$:

$$\begin{matrix} b_1 & b_2 & \ldots & b_r; \\ Ab_1 & Ab_2 & \ldots & Ab_r; \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A^{n-1}b_1 & A^{n-1}b_2 & \ldots & A^{n-1}b_r. \end{matrix} \tag{8}$$

Произведем прореживание системы (8) с помощью следующей процедуры. Векторы $b_1, \ldots, b_r$ сохраняем. Затем проверяем, зависит ли вектор Ab_1 от векторов $b_1, \ldots, b_r$. Если да, то этот вектор и векторы $A^2b_1, \ldots, A^{n-1}b_1$ удаляем из (8) (так как каждый из них линейно зависим от предыдущих). Если нет, то этот вектор сохраняем. Затем проверяем, зависит ли вектор Ab_2 от всех предыдущих, оставшихся после первой проверки. Если да, то векторы $Ab_2, \ldots, A^{n-1}b_2$ удаляем из (8). Если нет, то Ab_2 сохраняем. Если вектор A^ib_j оказывается удаленным, то удаляются и векторы $A^{i+1}b_j, \ldots, A^{n-1}b_j$. В результате прореживания останутся m линейно независимых векторов, образующих базис в L:

$$\begin{matrix} b_1, & Ab_1, & \ldots, & A^{\mu_1-1}b_1; \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_r, & Ab_r, & \ldots, & A^{\mu_r-1}b_r, \end{matrix} \tag{9}$$

где $\sum_{i=1}^{r} \mu_i = m$. Не ограничивая общности, можно считать, что $\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \ldots \geqslant \mu_r$. Выберем далее в пространстве E_n векторы $c_1, \ldots, c_r$ следующим образом. Вектор c_i, $i = \overline{1, r}$ выбирается так, чтобы он был ортогонален всем векторам базиса (9) за исключением вектора $A^{\mu_i-1}b_i$ и чтобы $c_i^* A^{\mu_i-1} b_i = 1$. После этого систему (1) подвергнем преобразованию $z = Tx$, где

$$T^* = (d_1, \ldots, d_{\mu_0}, c_1, A^*c_1, \ldots, (A^*)^{\mu_1-1}c_1, \ldots, c_r, \ldots, (A^*)^{\mu_r-1}c_r). \tag{10}$$

Нетрудно проверить, что матрица T неособая. Действительно, пусть

$$\sum_{i=1}^{\mu_0} \alpha_i d_i^* + \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=0}^{\mu_i-1} \gamma_{ij} c_i^* A^j = 0. \tag{11}$$

Умножая это равенство поочередно на векторы системы (9), получаем $\gamma_{ij}=0$, $i=\overline{1, r}$, $j=\overline{0, \mu_i-1}$. Тогда (11) принимает вид $\sum_{i=1}^{\mu_0}\alpha_i d_i^*=0$, откуда в силу линейной независимости векторов d_i следует, что $\alpha_i=0$, $i=\overline{1, \mu_0}$.

В результате преобразования $z=Tx$ будем иметь

$$z_i=d_i^*x, \ i=\overline{1, \mu_0}; \tag{12}$$

$$z_{\mu_0+\ldots+\mu_{j-1}+1}=c_j^*x;$$

$$z_{\mu_0+\ldots+\mu_{j-1}+2}=c_j^*Ax;$$

$$z_{\mu_0+\ldots+\mu_j}=c_j^*A^{\mu_j-1}x. \tag{13}$$

Из соотношений (12) получаем для $i=\overline{1, \mu_0}$:

$$\dot{z}_i=d_i^*\dot{x}=d_i^*(Ax+Bu)=d_i^*Ax.$$

Так как $A^*d_i\in L^{\perp}$, то $d_i^*A=\sum_{j=0}^{\mu_0}\alpha_{ij}d_j^*$, поэтому

$$\dot{z}_i=\sum_{j=1}^{\mu_0}\alpha_{ij}z_j, \ i=\overline{1, \mu_0}.$$

Из соотношений (13) получаем для $j=\overline{1, r}$:

$$\dot{z}_{\mu_0+\ldots+\mu_{j-1}+1}=c_j^*(Ax+Bu)=c_j^*Ax=z_{\mu_0+\ldots+\mu_{j-1}+2};$$

$$\dot{z}_{\mu_0+\ldots+\mu_{j-1}+2}=c_j^*A(Ax+Bu)=c_j^*A^2x=z_{\mu_0+\ldots+\mu_{j-1}+3};$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\dot{z}_{\mu_0+\ldots+\mu_j}=c_j^*A^{\mu_j-1}(Ax+Bu)=c_j^*A^{\mu_j}x+c_j^*A^{\mu_j-1}Bu=$$

$$=c_j^*A^{\mu_j}T^{-1}z+c_j^*A^{\mu_j-1}Bu=\sum_{i=1}^{n}\gamma_{ji}z_i+$$

$$+\sum_{i=1}^{r}c_j^*A^{\mu_j-1}b_iu_i=\sum_{i=1}^{n}\gamma_{ji}z_i+u_j+\sum_{i=j+1}^{r}\delta_{ji}u_i.$$

Здесь $\delta_{ji}=0$ при $j=r$.

Таким образом, система (1) перешла в систему (4)—(7).

Лемма 2. *Система*

$$\dot{x}_1=x_2;$$

$$\cdots\cdots$$

$$\dot{x}_{n-1}=x_n; \tag{14}$$

$$\dot{x}_n=u$$

является α-стабилизируемой.

Доказательство. Возьмем любой многочлен $\varphi(\lambda)=\lambda^n-\gamma_n\lambda^{n-1}-\ldots-\gamma_2\lambda-\gamma_1$ с действительными коэффициентами, корни которого удовлетворяют условию $\mathrm{Re}\lambda<\alpha$. Тогда при управлении $u=Fx$, где $F=(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, система (14) является α-устойчивой.

Доказательство теоремы. Сначала докажем, что если система (1) является α-стабилизируемой, то выполняется условие 1.

Заменим уравнение (2) системой двух уравнений относительно матриц Q и R:

$$(A-\alpha I+BQ)^*R+R(A-\alpha I+BQ)+Q^*Q+I=0; \tag{15}$$

$$Q=-B^*R. \tag{16}$$

Построим теперь последовательность матриц Q_k, R_k, используя следующий алгоритм:

а) выбираем Q_1 так, чтобы матрица $A-\alpha I+BQ_1$ была 0-устойчивой, т. е. чтобы $\sigma(A-\alpha I+BQ_1)\subset \boldsymbol{C}_0^-$;

б) выбрав $Q_1, \ldots, Q_k$, находим R_k как решение уравнения

$$A_k^*R_k+R_kA_k+Q_k^*Q_k+I=0, \tag{17}$$

где $A_k=A+BQ_k-\alpha I$;

в) вычисляем $Q_{k+1}=-B^*R_k$ (18).

Проверим, что указанный алгоритм действительно позволяет определить последовательность Q_k, R_k, матрицы R_k положительно определены и последовательность R_k монотонно не возрастает. Так как система (1) является α-стабилизируемой, то можно выбрать Q_1 так, что матрица $A+BQ_1-\alpha I$ будет 0-устойчивой. Тогда уравнение (17) имеет при $k=1$ в силу теоремы Ляпунова [7] единственное решение R_1, и матрица R_1 — положительно определена.

Предположим, что матрицы $R_1, \ldots, R_k$ найдены и положительно определены. Тогда из (18) определяем матрицу Q_{k+1}. Нетрудно непосредственно убедиться в справедливости равенства

$$A_{k+1}^*R_k+R_kA_{k+1}+Q_{k+1}^*Q_{k+1}=A_k^*R_k+R_kA_k+Q_k^*Q_k-$$
$$-(Q_k-Q_{k+1})^*(Q_k-Q_{k+1}),$$

откуда в силу (17) получаем

$$A_{k+1}^*R_k+R_kA_{k+1}=Q, \tag{19}$$

где

$$Q=-I-Q_{k+1}^*Q_{k+1}-(Q_k-Q_{k+1})^*(Q_k-Q_{k+1}).$$

Так как матрица Q отрицательно определена, то в силу упомянутой выше теоремы Ляпунова матрица $A_{k+1}=A+BQ_{k+1}-\alpha I$ является 0-устойчивой. Тогда из (17) получаем, что R_{k+1} положительно определена. Для доказательства монотонности последовательности R_k поступим следующим образом: в (17) заменим k на

$k+1$ и вычтем это равенство из (19), после чего полученное выражение умножим слева на $\exp(A_{k+1}^* t)$, справа на $\exp(A_{k+1} t)$. В результате будем иметь

$$\frac{d}{dt}\left(e^{A_{k+1}^* t}(R_k - R_{k+1})\, e^{A_{k+1} t}\right) = -S(t). \tag{20}$$

Здесь

$$S(t) = e^{A_{k+1}^* t}(Q_k - Q_{k+1})^*(Q_k - Q_{k+1})\, e^{A_{k+1} t}.$$

Интегрируя равенство (20) от 0 до ∞, получим

$$R_k - R_{k+1} = \int_0^\infty S(t)\, dt \geqslant 0.$$

Следовательно, последовательность R_k не возрастает. Так как матрицы R_k положительно определены, то существует [7] предел $R_0 = \lim\limits_{k\to\infty} R_k$, причем из соотношения $x^* R_0 x = \lim\limits_{k\to\infty} x^* R_k x$ следует, что матрица R_0 неотрицательна. Из сходимости последовательности R_k следует в силу (18) существование предела $Q_0 = \lim\limits_{k\to\infty} Q_k = -B^* R_0$. Переходя в равенстве (17) к пределу, получаем, что матрицы Q_0, R_0 удовлетворяют уравнениям (15)—(16) и, следовательно, уравнению (2). Умножив равенство $A_0^* R_0 + R_0 A_0 + Q_0^* Q_0 + I = 0$, где $A_0 = A + BQ_0 - \alpha I$, слева на $\exp(A_0^* t)$, справа на $\exp(A_0 t)$, будем иметь

$$\frac{d}{dt}\left(e^{A_0^* t} R_0 e^{A_0 t}\right) = -e^{A_0^* t} S_0 e^{A_0 t},$$

где $S_0 = I + Q_0^* Q_0$. Интегрируя, получаем

$$R_0 = e^{A_0^* t} R_0 e^{A_0 t} + \int_0^t e^{A_0^* \tau} S_0 e^{A_0 \tau} d t.$$

Так как первое слагаемое представляет собой неотрицательную матрицу, второе — положительно определенную, то R_0 является положительно определенной матрицей.

Докажем теперь, что если выполнено условие 1, то выполнено и условие 2. Если условие 2 не выполняется, то найдется неособое преобразование $z = Tx$, приводящее систему (1) к виду

$$\dot{z}_1 = A_{11} z_1 + A_{12} z_2 + B_1 u; \quad \dot{z}_2 = A_{22} z_2. \tag{21}$$

Решения второго уравнения этой системы имеют вид $z_2(t) = \exp(A_{22} t)\, z_2(0)$, и так как $\sigma(A_{22}) \cap C_\alpha^+ \neq \varnothing$, то не все функции $e^{-\alpha t} z_2(t)$ будут стремиться к нулю при $t \to \infty$. Это, в свою очередь, означает, что какое бы управление ни брать, найдется решение $z(t)$ системы (21), такое, что функция $e^{-\alpha t} z(t)$ и, следовательно, функция $e^{-\alpha t} x(t) = e^{-\alpha t} T^{-1} z(t)$ не будет стремиться к нулю при $t\to\infty$. Однако, так как выполнено условие 1, существует симметрическая положительно определенная матрица R_0, удовлетворяющая соотношению $A_0^*R_0+R_0A_0+Q_0^*Q_0+I=0$, где $A_0=A+BQ_0-\alpha I$, $Q_0=-B^*R_0$. Тогда в силу теоремы Ляпунова матрица $A_0=A-BB^*R_0-\alpha I$ является 0-устойчивой, а значит, матрица $A-BB^*R_0$ является α-устойчивой. Таким образом, при управлении $u=-B^*R_0x$ все решения системы (1) будут удовлетворять соотношению $e^{-\alpha t}x(t)\to 0$ при $t\to\infty$.

Теперь докажем, что если выполнено условие 2, то выполнено и условие 3. Если условие 3 не выполняется, то найдется A-инвариантное подпространство $M\subset E_n$, $\dim M<n$, содержащее столбцы матрицы B, и такое, что его ортогональное дополнение $M^\perp$ содержит собственный вектор матрицы A^*, соответствующий собственному числу λ с $\mathrm{Re}\lambda\geqslant\alpha$. Выберем в E_n базис из векторов $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$, где $e_1, \dots, e_k$ — базис подпространства M, а остальные векторы — базис $M^\perp$. В системе (1) сделаем замену $y=Tx$, где $T^{-1}=(e_1, \dots, e_n)$. При такой замене матрицы системы (1) преобразуются в матрицы $\hat{A}=TAT^{-1}$, $\hat{B}=TB$, откуда получаем $T^{-1}\hat{B}=B$, $T^{-1}\hat{A}=AT^{-1}$ **(22).**

Столбцы матрицы B принадлежат подпространству M. Следовательно, каждый из них представляет собой линейную комбинацию векторов $e_1, \dots, e_k$. Поэтому в силу (22) матрица $\hat{B}$ должна иметь вид

$$\hat{B}=\begin{pmatrix}B_1\\0\end{pmatrix},$$

где B_1—$(k\times r)$-матрица. В силу A-инвариантности подпространства M получаем, что $Ae_j\in M$, $j=\overline{1, k}$. В таком случае, как следует из (22),

$$T^{-1}\hat{A}=AT^{-1}=\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_{1i}e_i, \dots, \sum_{i=1}^{k}\alpha_{ki}e_i, \sum_{i=1}^{n}\alpha_{k+1i}e_i, \dots, \sum_{i=1}^{n}\alpha_{ni}e_i\right),$$

т. е. матрица $\hat{A}$ должна иметь вид

$$\hat{A}=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ 0 & A_{22}\end{pmatrix},$$

где A_{22} — квадратная матрица порядка $n-k$. Так как

$$\hat{A}^*=\begin{pmatrix}A_{11}^* & 0\\ A_{12}^* & A_{22}^*\end{pmatrix}$$

и $M^\perp$ содержит собственный вектор A^*, соответствующий собственному числу λ с $\mathrm{Re}\,\lambda\geqslant\alpha$, то для этого λ выполняется включение $\lambda\in\sigma(A_{22}^*)=\sigma(A_{22})$.

Теперь докажем, что если выполнено условие 3, то выполнено условие 4. Если условие 4 не выполняется, то существует собственный вектор x_0 матрицы A^*, соответствующий собственному числу λ с $\mathrm{Re}\lambda \geqslant \alpha$, ортогональный всем столбцам матрицы B. Множество $M=\{x \in E_n : \overset{*}{x_0} x = 0\}$ представляет собой A-инвариантное подпространство, что следует из соотношения $\overset{*}{x_0} A x = \bar{\lambda} \overset{*}{x_0} x$. Размерность этого подпространства меньше n, оно содержит столбцы матрицы B, вектор x_0 принадлежит ортогональному дополнению подпространства M и соответствует собственному числу λ матрицы A^* с $\mathrm{Re}\lambda \geqslant \alpha$.

Докажем теперь, что если выполнено условие 4, то выполнено условие 5. Если условие 5 не выполняется, то существует собственное число λ матрицы A, удовлетворяющее условию $\mathrm{Re}\lambda \geqslant \alpha$, такое, что $\mathrm{rank}(A-\lambda I,\ B) < n$. Тогда найдется ненулевой вектор $x_0 \in E_n$, для которого $\overset{*}{x_0}(A-\lambda I,\ B) = 0$, или в эквивалентной форме $x_0^*(A-\lambda I)=0$, $x_0^* B = 0$. Последние равенства означают что x_0 является собственным вектором матрицы A^*, соответствующим собственному числу $\bar{\lambda}$ и ортогональным столбцам матрицы B.

Теперь докажем, что если выполнено условие 5, то выполнено условие 6. Так как для $\lambda \in C_\alpha^+$ выполняется соотношение $\mathrm{rank}(A-\lambda I,\ B) = n$, то для любой неособой матрицы T при $\lambda \in C_\alpha^+$ будет $\mathrm{rank}(T^{-1}AT - \lambda T,\ T^{-1}B) = n$ **(23)**. Выберем матрицу T так, чтобы преобразование $x=Ty$ приводилс систему (1) к виду

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} u, \tag{24}$$

или

$$\dot{y}_1 = A_1 y_1 + B_1 u; \tag{25}$$

$$\dot{y}_2 = A_2 y_2 + B_2 u, \tag{26}$$

где $(m \times m)$-матрица A_1 удовлетворяет условию $\sigma(A_1) \subset C_\alpha^+$, а матрица A_2 — условию $\sigma(A_2) \subset C_\alpha^-$. Тогда соотношение (23) примет вид

$$\mathrm{rank} \begin{pmatrix} A_1 - \lambda I & 0 & B_1 \\ 0 & A_2 - \lambda I & B_2 \end{pmatrix} = n,$$

откуда $\mathrm{rank}(A_1 - \lambda I,\ B_1) = m$. Последнее равенство означает, что система (25) полностью управляема и, следовательно, α-стабилизируема. Таким образом, существует $(r \times m)$-матрица F_1, такая, что $A_1 + B_1 F_1$ является α-устойчивой матрицей. Очевидно, матрица

$$\begin{pmatrix} A_1 + B_1 F_1 & 0 \\ B_2 F_1 & A_2 \end{pmatrix} -$$

α-устойчива, так как α-устойчивы ее диагональные блоки. Следовательно, система (24) является α-стабилизируемой управлением $u = F_1 y_1$. Введем матрицу

$$P = \begin{pmatrix} e_1^* \\ \cdots \\ e_m^* \end{pmatrix},$$

где $e_i^* = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \dots, \delta_{in})$, δ_{ij} — символ Кронекера и получим $y_1 = PT^{-1}x$. Это означает, что система (1) является α-стабилизируемой управлением $u = Fx$, где $F = F_1PT^{-1}$, т. е. при таком выборе управления все ее решения $x(t)$ обладают свойством $e^{-\alpha t}x(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Отметим, что тогда будут стремиться к нулю и произведения $d_j^* x(t) e^{-\alpha t}$, $d_j \in E_n$. Если условие 6 не выполняется, то найдется, по крайней мере, одно подпространство $K(\lambda_l)$, $\lambda_l \in C_\alpha^+$, не принадлежащее L, т. е. найдется вектор $x_0 \in K(\lambda_l)$, такой, что $x_0 \bar{\in} L$. Обозначим через $d_1, \dots, d_{\mu_0}$ базис подпространства $L^\perp$, через $x(t)$ — решение следующей задачи Коши: $\dot{x} = Ax + BFx$; $x(0) = x_0$.
Тогда

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} BFx(\tau)\,d\tau = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} \times$$
$$\times (\varphi_1(\tau) b_1 + \dots + \varphi_r(\tau) b_r)\,d\tau,$$

где $b_1, \dots, b_r$ — столбцы матрицы B. Так как $e^{A(t-\tau)} b_i \in L$, то, как следует из разложения $\exp(At)$ в степенной ряд,

$$d_j^* x(t) = d_j^* e^{At} x_0 = e^{\lambda_l t} \sum_{k=0}^{n_l - 1} \frac{t^k}{k!} d_j^* x_{0k},$$

где $x_{00} = x_0$, $x_{0k} = (A - \lambda_l I)^k x_0$, $k = 1, 2, \dots$. Так как $x_0 \bar{\in} L$, то хотя бы для одного j будет $d_j^* x_0 \neq 0$, а значит, $d_j^* x(t) e^{-\alpha t}$ не может стремиться к нулю при $t \to \infty$.

Теперь докажем, что если выполнено условие 6, то система (1) является α-стабилизируемой. Заменой $z = Tx$, где T из (10), приводим систему (1) к виду (4)—(7). Покажем, что для всех решений неуправляемой системы (4) выполняется соотношение $e^{-\alpha t} z_j(t) \to 0$, $j = \overline{1, \mu_0}$ при $t \to \infty$. Так как $z_j(t) = d_j^* x(t)$, то в силу формулы Коши, учитывая, что $A^m b_i \in L$, получаем

$$z_j(t) = d_j^* e^{At} x_0 + \int_0^t d_j^* e^{A(t-\tau)} Bu(\tau)\,d\tau = d_j^* e^{At} x_0.$$

Пространство E_n раскладывается [8] в прямую сумму корневых подпространств. Поэтому вектор x_0 можно представить в виде $x_0 = \xi_1 + \dots + \xi_k$, где $\xi_i \in K(\lambda_i)$. Тогда

$$z_j(t) = d_j^* \sum_{l=1}^k e^{At} \xi_l = \sum_{l=1}^k e^{\lambda_l t} d_j^* (\xi_l + t\xi_{l1} + \dots + \frac{t^{n_l - 1}}{(n_l - 1)!} \xi_{ln_l - 1}) =$$

$$= \sum_{\lambda_l \in C_\alpha^-} e^{\lambda_l t} d_j^* (\xi_l + t\xi_{l1} + \dots + \frac{t^{n_l - 1}}{(n_l - 1)!} \xi_{ln_l - 1}),$$

где $\xi_{lm} = (A - \lambda_l I)^m \xi_l$. Таким образом, $e^{-\alpha t} z_j(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Покажем теперь, что управление $u = Fx$ можно выбрать так, чтобы стремились к нулю при $t \to \infty$ функции $e^{-\alpha t} z_{\mu_0+1}(t)$, ..., $e^{-\alpha t} z_n(t)$. Для этого рассмотрим вначале подсистему (7). Если обозначить через $\widehat{u} = \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ri} z_i + u_r$ (27), то подсистема (7) превратится в систему вида (14) и поэтому найдется в силу леммы 2 управление $\widehat{u} = q_r^* z$, α-стабилизирующее (7). Или, возвращаясь с помощью (27) к исходному управлению, получаем, что подсистему (7) α-стабилизирует управление $u_r = q^* z - \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ri} z_i = p_r^* z$. Аналогично, если рассмотреть предпоследнюю подсистему из (4) — (7) и положить

$$\widehat{u} = \sum_{i=1}^{n} \gamma_{r-1i} z_i + u_{r-1} + \delta_{rr} p_r^* z,$$

то найдется управление $\widehat{u} = q_{r-1}^* z$, или $u_{r-1} = q_{r-1}^* z - \sum_{i=1}^{n} \gamma_{r-1i} z_i - \delta_{rr} p_r^* z = p_{r-1}^* z$, α-стабилизирующее эту подсистему. Продолжая этот процесс, на r-м шаге получим управление $u_1 = p_1^* z$, α-стабилизирующее подсистему (5). Таким образом, при управлении

$$u = \begin{pmatrix} p_1^* \\ \cdots \\ p_r^* \end{pmatrix} z = Pz$$

функции $e^{-\alpha t} z_j(t)$, $j = \overline{\mu_0 + 1, n}$ стремятся к нулю при $t \to \infty$. Следовательно, управление $u = PTx$, α-стабилизирует исходную систему. Теорема доказана.

Список литературы: 1. *Гальперин Е. А., Красовский Н. Н.* О стабилизации установившихся движений нелинейных управляемых систем//Прикл. математика и механика. 1963. **27**. Вып. 6. С. 25—30. 2. *Габелая А. Г.* Единый подход к задачам управляемости и стабилизируемости линейных автономных систем// Сообщ. АН ГССР. 1977. **85**, № 2. С. 333—336. 3. *Коробов В. И.* Сведение задачи управляемости к граничной задаче//Дифференц. уравнения. 1976. **12**, № 7. С. 1310—1312. 4. *Коробов В. И., Луценко А. В., Подольский Е. Н.* Стабилизация линейной автономной системы относительно подпространства. I, II// Вестн. Харьк. ун-та. 1976. № 134: Математика и механика. С. 114—123; 1977. № 148. С. 3—11. 5. *Коробов В. И.* Общий подход к решению задачи синтеза ограниченных управлений в задаче управляемости//Мат. сб. 1979. **109(151)**, вып. 4. С. 582—606. 6. *Коробов В. И.* Общий метод решения задачи синтеза ограниченных управлений//Вестн. Харьк. ун-та. 1980. № 205: Управление динам. системами. С. 59—73. 7. *Андреев Ю. Н.* Управление конечномерными линейными объектами. М., 1976. 424 с. 8. *Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н.* Вычислительные методы линейной алгебры. М.; Л., 1963. 734 с.

Поступила в редколлегию 30.01.87

УДК 517.91+943

А. П. МАРИНИЧ, КОЙНА РОДУМТА

О СТАБИЛИЗАЦИИ ОТНОСИТЕЛЬНО ПОДПРОСТРАНСТВА И УПРАВЛЯЕМОСТИ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{dx}{dt}=Ax+Bu,\ x\in E^n,\ u\in E^r, \tag{1}$$

$$y=Hx,\quad y\in E^m,$$

где A, B, H — постоянные вещественные матрицы размеров $n\times n$, $n\times r$, $m\times n$ соответственно.

Зададим подпространство G равенством $G=\{x\in E^n:Hx=0\}$.

Система (1) называется стабилизируемой относительно подпространства G со степенью устойчивости $\alpha>0$ (с любой степенью устойчивости), если (для любого наперед заданного $\alpha>0$) существуют линейное зависящее от x управление $u=F_\alpha x$ и константа $c_\alpha>0$(F_α — постоянная матрица размера $r\times n$) такие, что

$$\|y(t)\|=\|Hx(t)\|<c_\alpha e^{-\alpha t}$$

для всех $t>0$, где $x(t)$ — любое решение системы

$$\frac{dx}{dt}=(A+BF_\alpha)x. \tag{2}$$

Система (1) называется управляемой на подпространство G за наперед заданное время T, если для любой точки x_0 существует управление $u(t, x_0)$, $0\leqslant t\leqslant T$, переводящее точку x_0 в некоторую точку G согласно системе

$$\frac{dx}{dt}=Ax+Bu(t,\ x_0).$$

Вопрос о стабилизируемости линейной системы (1) относительно подпространства G и ее управляемости рассматривался многими авторами. Например, приведены критерии стабилизируемости системы (1) относительно подпространства, а также указан алгоритм стабилизации [1, 2], получены различные критерии управляемости исходной системы на заданное подпространство G [3].

Если система (1) полностью управляема, то она стабилизируема и при этом с любой степенью устойчивости [4]. Имеет место и обратное утверждение. Отыскание связи между стабилизацией системы (1) относительно подпространства G с любой степенью устойчивости и управляемостью ее на G и составляет предмет настоящей работы.

В данной работе приводится критерий стабилизируемости системы (1) относительно подпространства G со степенью устойчивости α (с любой степенью устойчивости) и устанавливается связь между стабилизацией относительно подпространства G с любой степенью устойчивости и управляемостью на G за наперед заданное время T.

Приведем некоторые сведения из линейной алгебры.

Пусть задано число $\alpha>0$. Разобьем всю комплексную плоскость C на два подмножества C_-^α и C_+^α таким образом, чтобы

$$C=C_-^\alpha \cup C_+^\alpha, \quad C_-^\alpha \cap C_+^\alpha=\varnothing, \tag{3}$$

где $C_-^\alpha=\{\lambda\in C:\mathrm{Re}\lambda<-\alpha\}$, $C_+^\alpha=\{\lambda\in C:\mathrm{Re}\lambda\geqslant-\alpha\}$.

Всюду в дальнейшем разбиение (3), следуя работе [1], будем называть «симметрическим» разбиением комплексной плоскости.

Пусть $m(\lambda)$ — минимальный полином матрицы A. Представим его в виде произведения двух взаимно простых полиномов

$$m(\lambda)=\psi_-^\alpha(\lambda)\cdot\psi_+^\alpha(\lambda),\ 1=\psi_-^\alpha(\lambda)\varphi_1(\lambda)+\psi_+^\alpha(\lambda)\varphi_2(\lambda),$$

где все корни полинома $\psi_-^\alpha(\lambda)$ принадлежат C_-^α, а все корни полинома $\psi_+^\alpha(\lambda)$ принадлежат C_+^α, $\varphi_1(\lambda)$, $\varphi_2(\lambda)$ — некоторые полиномы.

Обозначим через $\sigma(A)$ спектр оператора A,

$$K_-^\alpha(A)=\{x\in E^n:\psi_-^\alpha(A)x=0\},\ K_+^\alpha(A)=\{x\in E^n:\psi_+^\alpha(A)x=0\},$$

$$L=\mathscr{L}\{B, AB, \ldots, A^{n-1}B\}.$$

Подпространство $V\subset G$ называется (A,B)-инвариантным [1] подпространством подпространства G, если найдется такой оператор $F:E^r\to E^n$, что $(A+BF)V\subset V$. Обозначим через G^* наибольшее по включению (A, B)-инвариантное подпространство подпространства G.

Теорема 1. *Система (1) стабилизируема относительно подпространства G со степенью устойчивости α тогда и только тогда, когда для соответствующего «симметрического» разбиения $C=C_-^\alpha\cup C_+^\alpha$ комплексной плоскости C существует оператор F^α, такой, что*

$$K_+^\alpha(A+BF_\alpha)\subset G. \tag{4}$$

Доказательство необходимости условия (4) проведем от противного. Пусть существуют управление $u=F_\alpha x$ и константа $c_\alpha>0$, такие, что $\|y(t)\|=\|He^{(A+BF_\alpha)t}x_0\|<c_\alpha e^{-\alpha t}$ для всех $t>0$, но тем не менее условие (4) не имеет места. Тогда существует корневой вектор η_0 матрицы $A+BF_\alpha$, отвечающий собственному значению λ_0 с $\mathrm{Re}\,\lambda_0\geqslant-\alpha$, «не принадлежащий» G. Не ограничивая общности, считаем, что его высота равна $l+1$, а корневые векторы $\eta_j=(A-\lambda_0 E)^j\eta_0$, $j=\overline{1, l}$ меньшей высоты «принадлежат» G.

Возможны два случая: 1) λ_0 — вещественное собственное значение матрицы $A+BF_\alpha$; 2) $\lambda_0=\mu+i\nu$ — комплексное собственное значение матрицы $A+BF_\alpha$, $(\nu\neq 0)$.

В случае 1 рассмотрим решение $x(t)$ системы (2) при начальном условии $x(0)=\eta_0$:

$$x(t)=e^{(A+BF_\alpha)t}\eta_0=e^{\lambda_0 t}\left[\eta_0+\eta_1 t+\ldots+\eta_l\frac{t^l}{l!}\right]. \qquad (5)$$

В силу выбора корневого вектора η_0 имеем $Hx(t)=e^{\lambda_0 t}H\eta_0$. Следовательно, получаем $\|y(t)\|=e^{\lambda_0 t}\|H\eta_0\|\geqslant c_\alpha e^{-\alpha t}$, где $c_\alpha=\|H\eta_0\|$, чего не может быть.

В случае 2 пусть $\eta_0=\eta_0^1+i\eta_0^2$. Так как η_0 „не принадлежит" G, то имеет место хотя бы одно из условий $\eta_0^1\overline{\in} G$, $\eta_0^2\overline{\in} G$. Более того, $\eta_j=\eta_j^1+i\eta_j^2$, $j=\overline{1, l}$. В силу (5) имеем

$$e^{(A+BF_\alpha)t}\eta_0^1=e^{\mu t}\sum_{j=0}^{l}\frac{t^j}{j!}(\eta_j^1\cos\nu t-\eta_l^2\sin\nu t), \qquad (6)$$

$$e^{(A+BF_\alpha)t}\eta_0^2=e^{\mu t}\sum_{j=0}^{l}\frac{t^j}{j!}(\eta_j^2\cos\nu t+\eta_j^1\sin\nu t). \qquad (7)$$

Рассмотрим решения системы (2) при начальных условиях $x(0)=\eta_0^p$, $p=1, 2$. В силу (6) и (7) для всех $t_k=\frac{2k\pi}{\nu}$, где $k=1, 2, 3, \ldots$, имеем

$$\|y(t_k)\|=\|He^{(A+BF_\alpha)t_k}\eta_0^p\|=e^{\mu t_k}\|H\eta_0^p\|, \; p=1, 2.$$

Таким образом, выбирая последовательность $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$, такую, что $t_k=\frac{2k\pi}{\nu}$, получим $\|y(t_k)\|\geqslant c_\alpha e^{-\alpha t_k}$, где $c_\alpha>0$.

Полученное противоречие и доказывает необходимость условия (4) в случае 2.

Достаточность. Пусть для заданного числа α и соответствующего «симметрического» разбиения (3) существует оператор F_α, такой, что $K_+^\alpha(A+BF_\alpha)\subset G$. Выберем управление $u=F_\alpha x$. Тогда система (1) принимает вид (2), а ее решение $x(t)$, выходящее из точки x_0 в момент времени $t=0$, равно $x(t)=e^{A_\alpha t}x_0$, где $A_\alpha=A+BF_\alpha$.

Пусть $\{e_i\}$, $i=\overline{1, p}$ и $\{e_i\}$, $i=\overline{p+1, n}$ — базисы в подпространствах $K_-^\alpha(A_\alpha)$ и $K_+^\alpha(A_\alpha)$ соответственно. Сделаем преобразование координат $z=Px$, где $P=(e_1, \ldots, e_n)^{-1}$.

В новых координатах, в силу инвариантности относительно оператора A_α подпространств $K_-^\alpha(A_\alpha)$ и $K_+^\alpha(A_\alpha)$, система (2) принимает вид

$$\frac{dz_1}{dt} = A_\alpha^- z_1, \quad z_1 \in E^p;$$

$$\frac{dz_2}{dt} = A_\alpha^+ z_2, \quad z_2 \in E^{n-p},$$

где A_α^- и A_α^+ — матрицы размеров $p \times p$, $(n-p)\times(n-p)$ соответственно, которые связаны с матрицей A_α выражением $PA_\alpha P^{-1} = \begin{pmatrix} A_\alpha^- & 0 \\ 0 & A_\alpha^+ \end{pmatrix}$, причем $\sigma(A_\alpha^-) \subset C_-^\alpha$. При этом $y = Hx = HP^{-1}z = (H_1, H_2)\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, где H_1 и H_2 — матрицы размеров $m \times p$ и $m \times (n-p)$ соответственно.

Заметим, что если $x \in K_+^\alpha(A_\alpha) \subset G$, то $Px = \begin{pmatrix} 0 \\ z_2 \end{pmatrix}$ и $Hx = HP^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ z_2 \end{pmatrix} = H_2 z_2 = 0$. Так как $\operatorname{Re}\lambda_k < -\alpha$ для всех $\lambda_k \in \sigma(A_\alpha^-)$, то в силу теоремы об оценке роста операторной экспоненты [5, с. 211] существует $\tilde{c}_\alpha > 0$, такое, что $\|e^{A_\alpha^- t}\| \leqslant \tilde{c}_\alpha e^{-\alpha t}$ при всех $t > 0$. Следовательно,

$$\|H_1 z_1(t)\| = \|H_1 e^{A_\alpha^- t} z_1(0)\| \leqslant \|H_1\| \cdot \tilde{c}_\alpha e^{-\alpha t} \|z_1(0)\|.$$

Отсюда следует, что

$$\|y(t)\| = \|Hx(t)\| = \|H_1 z_1(t) + H_2 z_2(t)\| = \|H_1 z_1(t)\| \leqslant$$

$$\leqslant e^{-\alpha t}\|H_1\| \cdot \tilde{c}_\alpha \|z_1(0)\| < c_\alpha e^{-\alpha t}$$

при всех $t > 0$, где $c_\alpha = 2\|H_1\|\tilde{c}_\alpha\|z_1(0)\|$.

Замечание. В работе [1, с. 130] доказано утверждение.

Пусть задано некоторое число $\alpha > 0$. Для того чтобы существовал оператор F_α, такой, что $K_+^\alpha(A + BF_\alpha) \subset G$, необходимо и достаточно, чтобы $K_+^\alpha(A) \subset L + G^*$.

На основании теоремы 1 немедленно вытекает, что имеет место следующая.

Теорема 2. *Для того чтобы система (1) была стабилизируемой относительно подпространства G со степенью устойчивости α, необходимо и достаточно, чтобы $K_+^\alpha(A) \subset L + G^*$.*

В частности, справедливо

Следствие. *Для того чтобы система (1) была стабилизируемой относительно подпространства G с любой степенью устойчивости, необходимо и достаточно, чтобы $L+G^*=E^n$.*

В работе [2] получен следующий критерий управляемости.

Для того чтобы система (1) была управляемой на G за наперед заданное время T, необходимо и достаточно, чтобы $L+G=E^n$.

Из следствия немедленно получаем, что справедлива

Теорема 3. *Если система (1) стабилизируема относительно подпространства G с любой степенью устойчивости, то она управляема на G за наперед заданное время T.*

Обратное утверждение, вообще говоря, не имеет места.

Приведем примеры линейной системы, которая является управляемой на некоторое подпространство за наперед заданное время, но вместе с тем либо она не стабилизируема относительно этого подпространства, либо стабилизируема относительно его с конечной степенью устойчивости.

Пример 1. Рассмотрим линейную систему

$$\dot{x}_1 = x_1,$$

$$\dot{x}_2 = x_2 - x_3,$$

$$\dot{x}_3 = x_2 + x_3 + u.$$

Подпространство G определим следующим образом:

$$G = \{x \in E^3 : x_1 - x_2 = 0,\ x_1 - x_3 = 0\}. \qquad (8)$$

Так как $L+G=E^3$, то система управляема на G за наперед заданное время T. Однако, как легко показать, она не является стабилизируемой относительно подпространства G.

Пример 2. Рассмотрим линейную систему

$$\dot{x}_1 = -x_1,$$

$$\dot{x}_2 = x_2 - x_3,$$

$$\dot{x}_3 = x_2 + x_3 + u.$$

Пусть подпространство G задается в виде (8). Очевидно, что $L+G=E^3$, т. е. система полностью управляема на G за наперед заданное время. Однако, как нетрудно видеть, система стабилизируема относительно подпространства G только со степенью устойчивости $\alpha=1$.

Замечание. В примерах 1 и 2 наибольшее (A, B)-инвариантное подпространство подпространства G имеет вид

$$G^* = \{0\}, \text{ а } L = \{x \in E^3 : x_1 = 0\}.$$

Список литературы: 1. *Уонэм М.* Линейные многомерные системы управления. М., 1980. 376 с. 2. *Коробов В. И., Луценко А. В., Подольский Е. Н.* Стабилизация линейной автономной системы относительно подпространства//Вестн. Харьк. ун-та. 1976. 1977. Математика и механика. Вып. 41. С. 114—123; Прикл.

математика и механика. Вып. 42. С. 3—11. 3. *Коробов В. И.* Критерии управляемости линейной системы на подпространство//Вестн. Харьк. ун-та. 1981. № 210. Вып. 46. С. 3—11. 4. *Ли Э. В., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. М., 1972. 574 с. 5. *Балакришнан А. В.* Прикладной функциональный анализ. М., 1980. 384 с.

Поступила в редколлегию 06.02.87

УДК 681.5.013+517.935

В. Н. ЗЕФИРОВ, Н. Т. КУЦЕНКО,
Е. Н. ПОДОЛЬСКИЙ

ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ СТАБИЛИЗАЦИИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ m-ГО ПОРЯДКА

Пусть управляемая система описывается дифференциальным уравнением

$$x^{(m)} + \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_{m-j} x^{(j)} = f(x, \dot{x}, \ldots, x^{(m-1)}, t) + u, \tag{1}$$

где u — управление, $f(x, \dot{x}, \ldots, x^{(m-1)}, t)$ — произвольная функция, содержащая нелинейные члены, низкочастотные возмущения, высокочастотные возмущения с малой амплитудой и другие неизвестные или неучтенные факторы. Непосредственно измеряется только функция $x(t)$, причем в дискретные моменты времени с шагом h. Требуется построить алгоритм управления, приводящий фазовую траекторию уравнения (1) из некоторой окрестности V_0 начала координат в достаточно малую окрестность V начала координат с удержанием ее в этой окрестности.

Для решения этой задачи предлагается стабилизация с идентификацией возмущения f.

Рассмотрим последовательность промежутков времени $I_k = [t_0+kh,\ t_0+(k+N)h)$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$, где N выбрано таким, чтобы на любом интервале длиной Nh возмущение f можно было с достаточной степенью точности заменить постоянной f_k.

Выберем на каждом промежутке $[t_k, t_{k+1}]$, где $t_k=t_0+(k+N)h$, управление $u(t)$ следующим образом:

$$u_{k+1}(t) = -f_k + \sum_{j=0}^{m-1} (\alpha_{m-j} - \beta_{m-j})\, x^{(j)}(t), \tag{2}$$

получим следующее дифференциальное уравнение

$$L_m(x) \equiv x^{(m)} + \beta_1 x^{(m-1)} + \beta_2 x^{(m-2)} + \ldots + \beta_m x = f - f_k, \tag{3}$$

$$t \in [t_k,\ t_{k+1}).$$

Коэффициенты $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ выбираются из условия $\lambda^m + \beta_1\lambda^{m-1} + \ldots + \beta_{m-1}\lambda + \beta_m = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\ldots(\lambda-\lambda_m)$, где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ — наперед заданные попарно различные отрицательные числа или комплексно-сопряженные пары с отрицательными вещественными частями.

Рассмотрим промежуток $I_k=[t_{k-N},\ t_k)$ длиной Nh. Функция $x(t)$ удовлетворяет на этом промежутке следующему дифференциальному уравнению с разрывной правой частью:

$$L_m(x)=\begin{cases} f-f_{k-N} \text{ на } [t_{k-N},\ t_{k-N+1}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ f-f_{k-2} \text{ на } [t_{k-2},\ t_{k-1}) \\ f-f_{k-1} \text{ на } [t_{k-1},\ t_k). \end{cases} \qquad (4)$$

Введем на I_k вспомогательную функцию $\xi_k(t)$, удовлетворяющую на I_k уравнению $L_m(\xi_k)=f-f_{k-1}$ **(5)** и совпадающую с $x(t)$ на $[t_{k-1},\ t_k)$. Пусть мы имеем значения функции $\xi_k(t)$ в точках $t_{k-N},\ t_{k-N+1},\ \dots,\ t_{k-1},\ t_k$. Обозначим эти значения через $y_{k,N},\ y_{k,N-1},\ \dots,\ y_{k,1},\ y_{k,0}$. Заменим в соответствии с предположением о функции f и выбором длины промежутка Nh правую часть уравнения (5) постоянной (малой) Δf_{k-1}: $L_m(\xi_k)=$ $=\Delta f_{k-1},\ t\in I_k$ **(6)**.

Решение этого дифференциального уравнения можно записать в виде

$$\xi_k(t)=C_0^{(k)}+C_1^{(k)}e^{\lambda_1(t-t_k)}+\dots+C_m^{(k)}e^{\lambda_m(t-t_k)}, \qquad (7)$$

где

$$C_0^{(k)}=\frac{\Delta f_{k-1}}{\beta_m},$$

$C_1^{(k)},\ C_2^{(k)},\ \dots,\ C_m^{(k)}$ — произвольные постоянные. Постоянные $C_j^{(k)}$ $(j=0,\ 1,\ \dots,\ m)$ находим методом наименьших квадратов по результатам измерений $\xi_k(t)$: $y_{k,0},\ y_{k,1},\ \dots,\ y_{k,N}$. Применение метода наименьших квадратов можно трактовать как отыскание проекции вектора измерений $y_k\in R^{N+1}$ на $m+1$-мерное подпространство L, определяемое векторами

$$a_0=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\\dots\\1\end{pmatrix},\ a^1=\begin{pmatrix}1\\Z_1\\Z_1^2\\\dots\\Z_1^N\end{pmatrix},\ a^2=\begin{pmatrix}1\\Z_2\\Z_2^2\\\dots\\Z_2^N\end{pmatrix},\dots$$

$$a^m=\begin{pmatrix}1\\Z_m\\Z_m^2\\\dots\\Z_m^N\end{pmatrix}, \text{ где } Z_j=e^{-\lambda_j h}\ (j=1,\ 2,\ \dots,\ m).$$

Заметим, что при малом h все Z_j близки к единице и векторы a^0, a^1, ..., a^m почти коллинеарны. Поэтому для определения постоян-

2*

ных $C_j^{(k)}$ $(j=0, 1, ..., m)$ с нужной точностью требуется производить вычисления с повышенной точностью.

Ниже предлагается такая организация вычислений, при которой основная часть операций производится точно над полиномами от переменных $Z_1, Z_2, ..., Z_m$ с целочисленными коэффициентами. Подвергнем векторы $a^0, a^1, ..., a^m$ следующему процессу ортогонализации:

$$b^0 = a^0, \quad b^1 = \frac{(a^1, a^0)\, a^0 - (a^0, a^0)\, a^1}{Z_1 - Z_0},$$

$$b_1^j = \frac{(a^j, a^0)\, a^0 - (a^0, a^0)\, a^j}{Z_j - Z_0} \quad (j = 2, ..., m), \ Z_0 \equiv 1,$$

$$b^2 = \frac{(b_1^2, b^1)\, b^1 - (b^1, b^1)\, b_1^2}{Z_2 - Z_1},$$

$$b_2^j = \frac{(b_1^j, b^1)\, b^1 - (b^1, b^1)\, b_1^j}{Z_j - Z_1} \quad (j = 3, ..., m),$$

$$b^i = \frac{(b_{i-1}^i, b^{i-1})\, b^{i-1}}{Z_i - Z_{i-1}},$$

$$b_i^j = \frac{(b_{i-1}^j, b^{i-1})\, b^{i-1} - (b^{i-1}, b^{i-1})\, b_{i-1}^j}{Z_j - Z_{i-1}}, \ (i = 3, ..., m-1;$$

$$j = i+1, ..., m),$$

$$b^m = \frac{(b_{m+1}^m, b^{m-1})\, b^{m-1} - (b^{m-1}, b^{m-1})\, b_{m-1}^m}{Z_m - Z_{m-1}}. \qquad (8)$$

Все компоненты векторов $b^1, b^2, ..., b^m$ являются полиномами с целочисленными коэффициентами (деление происходит нацело). После ортогонализации эти полиномы вычисляются при конкретных значениях переменных $Z_1, Z_2, ..., Z_m$.

Проекция η вектора измерений y_k на подпространство, определяемое $b^0, b^1, ..., b^m$, находится по формулам

$$\eta = D_0 b^0 + D_1 b^1 + ... + D_m b^m,$$

где

$$D_i = \frac{(y_k, b^i)}{(b^i, b^i)}.$$

Подставляя вместо b^i их выражения через $a^0, a^1, ..., a^m$, получим

$$\eta = C_0^{(k)} a^0 + C_1^{(k)} a^1 + ... + C_m^{(k)} a^m,$$

где величины $C^{(k)}$ находятся через $D_0, D_1, ..., D_m$ с помощью соответствующих рекуррентных формул.

При фактических вычислениях удобно заранее вычислять коэффициенты d_{ij} в выражении D_i через $y_{k,0}$, $y_{k,1}, \ldots, y_{k,m}$:

$$D_i = \sum_{j=0}^{N} d_{ij} y_{k,j},$$

по тем же рекуррентным формулам вычислить коэффициенты C_{ij} в выражении $C_i^{(k)}$ через $y_{k,0}, y_{k,1}, \ldots, y_{k,m}$:

$$C_i^{(k)} = \sum_{j=0}^{N} C_{ij} y_{k,j}.$$

(При этом существенно, что C_{ij} не зависят от k, т. е. от расположения интервала I_k). После определения C_0^k находится величина $\Delta f_{k-1} = \beta_m C_0^{(k)}$ и новое приближение для величины возмущения $f_k = f_{k-1} + \Delta f_{k-1}$, которое используется для определения управления u_{k+1} на $[t_k, t_{k+1})$.

Для вычисления значения $\xi_k(t)$ через результаты измерений $x(t)$ получим рекуррентные формулы. Найдем взаимосвязь вспомогательных функций $\xi_k(t)$ и $\xi_{k+1}(t)$. Они удовлетворяют уравнениям

$$L_m(\xi_{k+1}) = f - f_k, \ t \in [t_{k-N+1}, t_{k+1}],$$

$$L_m(\xi_k) = f - f_{k-1}, \ t \in [t_{k-N}, t_k].$$

В точке t_k ξ_{k+1} и ξ_k совпадают вместе со всеми производными до $(m-1)$-го порядка включительно:

$$\xi_{k+1}(t_k) = \xi_k(t_k) = x(t_k);$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\xi_{k+1}^{(m-1)}(t_k) = \xi_k^{(m-1)}(t_k) = x^{(m-1)}(t_k).$$

Поэтому разность

$$\Delta\xi_k(t) = \xi_{k+1}(t) - \xi(t), \ t \in [t_{k-N+1}, t_k]$$

может быть найдена как решение уравнения $L_m(\Delta\xi_k) = f_{k-1} - f_k = -\Delta f_{k-1}$ с начальными условиями

$$\Delta\xi_k(t_k) = 0;$$

$$\cdots\cdots$$

$$\Delta\xi_k^{(m-1)}(t_k) = 0,$$

откуда

$$\Delta\xi_k(t) = \frac{-\Delta f_{k-1}}{\beta_m}\left(1 - \frac{1}{W}\begin{vmatrix} e^{\lambda_1(t-t_k)} & e^{\lambda_2(t-t_k)} & \ldots & e^{\lambda_m(t-t_k)} \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_m \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1^{m-1} & \lambda_2^{m-1} & \ldots & \lambda_m^{m-1} \end{vmatrix}\right).$$

где W — определитель Вандермонда

$$W = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{m-1} & \lambda_2^{m-1} & \dots & \lambda_m^{m-1} \end{vmatrix}.$$

Следовательно, искомые рекуррентные формулы можно записать в виде

$$y_{k+1,0} = x(t_{k+1}) + \varepsilon_{k+1},$$

$$y_{k+1,n} = y_{k,n-1} - C_0^{(k)}\gamma_n \quad (n = 1, 2, \dots, N),$$

$$\text{где } \gamma_n = 1 - \frac{1}{W}\begin{vmatrix} Z_1^n & Z_2^n & \dots & Z_m^n \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{m-1} & \lambda_2^{m-1} & \dots & \lambda_m^{m-1} \end{vmatrix},$$

ε_{k+1} — ошибка измерения $x(t_{k+1})$. Значения γ_n вычисляются заранее. В силу малости интервала $[t_k, t_{k+1})$ выражение (2) для управления можно заменить на

$$u_{k+1} = -f_k + \sum_{j=0}^{m-1} (\alpha_{m-j} - \beta_{m-j})\, x^{(j)}(t_k),$$

где в качестве $x^{(j)}(t_k)$ берутся $\xi_k^{(j)}(t_k)$, вычисляемые по формуле (7)

$$\xi_k^{(0)}(t_k) = \xi_k(t_k) = C_0^{(k)} + C_1^{(k)} + \dots + C_m^{(k)},$$

$$\xi_k^{(j)}(t_k) = \lambda_1^j C_1^{(k)} + \dots + \lambda_m^j C_m^{(k)} \quad (j = 1, 2, \dots, m-1).$$

Таким образом, алгоритм управления, решающий данную задачу, принимает следующий вид (приводится k-й шаг):

1) измеряется $x(t_k)$; результат измерения $x(t_k) + \varepsilon_k$ присваивается величине $y_{k,0}$ (остальные $y_{k,j}$ получены на предыдущем шаге);

2) вычисляются постоянные $C_j^{(k)}$ $(j = 0, 1, 2, \dots, m)$:

$$C_i^{(k)} = \sum_{n=0}^{N} C_{jn} y_{k,n};$$

3) вычисляется $\Delta f_{k-1} = C_0^{(k)}\beta_m$; $f_k = f_{k-1} + \Delta f_{k-1}$;

4) определяются сглаженное значение $x(t_k)$, производные $x^{(j)}(t_k)$ и управление u_{k+1} на $[t_k, t_{k+1})$:

$$x(t_k) = \sum_{j=0}^{m} C_j^{(k)},$$

$$x^{(j)}(t_k) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^{(j)} C_i^{(k)},$$

$$u_{k+1} = -f_k + \sum_{j=0}^{m-1} (\alpha_{m-j} - \beta_{m-j})\, x^{(j)}(t_k);$$

5) определяются для следующего шага величины $y_{k+1,n}(n=1, 2, ..., N)$:

$$y_{k+1,n}=y_{k,n-1}-C_0^{(k)}\gamma_n.$$

Величины $C_{jn}\,(j=0, 1, ..., m,\ n=0, 1, ..., N)$, β_m,

$$\lambda_j\,(j=1, 2, ..., m),\quad \gamma_n\,(n=1, 2, ..., N)$$

вычисляются заранее и располагаются в памяти управляющей ЭВМ.

Описанный алгоритм может применяться только с момента $t=t_0+(N+1)h=t_1$. Для выработки управления на интервале $[t_0, t_1]$ требуется применить другой алгоритм. Приведем его описание.

Заменим на $[t_0, t_0+Nh)$ исходное дифференциальное уравнение (1) приближенным уравнением $x^{(m)}=F+u$, $t\in[t_0, t_0+Nh)$ с неизвестной постоянной F. Управление u примем на $[t_0, t_0+Nh)$ равным некоторой постоянной u_0 (если нет других соображений, то $u_0=0$). Решение этого уравнения имеет вид

$$x(t)=C_0+C_1\frac{t-T}{h}+\ldots+C_m\left(\frac{t-T}{h}\right)^m\quad (T\equiv t_0+Nh). \tag{9}$$

Неизвестные постоянные $C_j\,(j=0, 1, ..., m)$ можно найти методом наименьших квадратов по результатам измерений

$$\tilde{x}=\{x(T-nh)+\varepsilon_n\}_{n=0}^{N}.$$

Как и выше, задача сводится к проектированию вектора $\tilde{x}$ на подпространство, определяемое векторами

$$a^0=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\\cdots\\1\end{pmatrix},\quad a^1=\begin{pmatrix}0\\1\\2\\\cdots\\N\end{pmatrix},\quad a^2=\begin{pmatrix}0\\1^2\\2^2\\\cdots\\N^2\end{pmatrix},\ \ldots,$$

$$a^m=\begin{pmatrix}0\\1^m\\2^m\\\cdots\\N^m\end{pmatrix}.$$

Векторы a^i имеют целочисленные компоненты. Удобно их ортогонализовать без потери целочисленности по формулам аналогичным (8), в которых опущены знаменатели:

$$b^0=a^0,\ b^1=(a^1, a^0)\,a^0-(a^0, a^0)\,a^1,$$

$$b_1^j=(a^j, a^0)\,a^0-(a^0, a^0)\,a^j\quad (j=2, ..., m),$$

$$b^2=(b_1^2, b^1)\,b^1-(b^1, b^1)\,b_1^2,$$

$$b_2^j=(b_1^j, b^1)\,b^1-(b^1, b^1)\,b_1^j\quad (j=3, ..., m),$$

$$b^l = (b^l_{l-1},\ b^{l-1})\, b^{l-1},$$

$$b^l_i = (b^l_{i-1},\ b^{i-1})\, b^{i-1} - (b^{i-1},\ b^{l-1})\, b^l_{i-1} \quad (j = 3, \ldots, m-1;$$

$$j = i+1, \ldots, m),$$

$$b^m = (b^m_{m-1},\ b^{m-1})\, b^{m-1} - (b^{m-1},\ b^{m-1})\, b^m_{m-1}.$$

Проекция η вектора $\tilde{x}$ может быть представлена в виде

$$\eta = \sum_{i=0}^{m} D_i b^i = \sum_{i=0}^{m} C_i a^i,$$

где коэффициенты D_i вычисляются по формулам

$$D_i = \frac{(\tilde{x},\ b^i)}{(b^i,\ b^i)},$$

а C_i выражаются через них с помощью рекуррентных формул. Как и выше, можно заранее вычислить коэффициенты d_{ij} и C^0_{ij}:

$$D_i = \sum_{j=0}^{N} d_{ij} \tilde{x}_j,\ C_i = \sum_{j=0}^{N} C^0_{ij} \tilde{x}_j.$$

Эти коэффициенты рациональны и могут быть вычислены с любой требуемой точностью.

Для определения производных $x^{(j)}(T)$ используем (9)

$$x^{(j)}(T) = \frac{C_j j!}{h_j} \quad (j = 0, 1, \ldots, m).$$

Далее находим

$$F = x^{(m)}(T) - u_0, \quad f_0 = F + \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_{m-j} x^{(j)}(T),$$

$$u_1 = -f_0 + \sum_{j=0}^{m-1} (\alpha_{m-j} - \beta_{m-j})\, x^{(j)}(T) = -F - \sum_{j=0}^{m-1} \beta_{m-j} x^{(j)}(T).$$

Осталось получить выражения для величин $y_{1,0}, y_{1,1}, \ldots, y_{1,N-1}$. Для этого достаточно найти решение уравнения

$$L_m(\xi_0) = f - f_0 \qquad t \in [t_0,\ t_0 + Nh]$$

при условиях

$$\xi_0^{(j)}(T) = x^{(j)}(T), \quad j = 0, 1, \ldots, m-1. \tag{10}$$

В соответствии с нашими предположениями правую часть можно заменить нулем $L_m(\xi_0) = 0$.

Решение этого уравнения при условиях (10) можно записать в виде

$$\xi_0(t) = \frac{(-1)^m}{W} \begin{vmatrix} 0 & e^{\lambda_1 (t-T)} & e^{\lambda_2 (t-T)} & \ldots & e^{\lambda_m (t-T)} \\ x(T) & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \dot{x}(T) & \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_m \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x^{(m-1)}(T) & \lambda_1^{m-1} & \lambda_2^{m-1} & \ldots & \lambda_m^{m-1} \end{vmatrix},$$

откуда $y_{1,n} = \xi_0(t_0 + (N-n)h)$, $n = 0, 1, \ldots, N-1$.

Алгоритм опробован при $m=1$ и $m=2$ и дал хорошую точность попадания в начало координат при малой дисперсии ошибок измерения ε_k.

Поступила в редколлегию 07.02.87

УДК 621.396

ЛЕ ТХАНЬ

ОБ УПРАВЛЯЕМОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ С ОГРАНИЧИВАЮЩИМИ УПРАВЛЕНИЯМИ

Нами изучена управляемость нелинейных дискретных систем с ограничивающим управлением вида

$$x_{k+1}=Ax_k+Bu_k+f(k,\ x_k,\ u_k),\ x_k\in X=R^n,\ u_k\in\Omega\subset U=R^m. \quad (1)$$

Подобная задача рассмотрена в ряде работ с различными предположениями на ограничивающее множество Ω: глобальная управляемость линейных систем вида

$$x_{k+1}=Ax_k+Bu_k,\ x_k\in X,\quad u_k\in\Omega\subset U \quad (2)$$

в работе [1] с $X=R^n$, $\Omega=U=R^m$ — в [2] с $X=R^n$, $\Omega=R^1_+$. При предположении, что X, U — банаховы пространства и Ω — выпуклое множество из U, содержащее 0, в работе [3] рассматривалась локальная достижимость, а в [4, 5] изучалась нуль-управляемость для линейной системы (2), в [6] — управляемость систем вида $x_{k+1}=f(x_k,\ u_k,\ k)$, где f—непрерывно дифференцируемая функция.

Итак, рассмотрим систему (1), где A, B — вещественные $n\times n$ и $n\times m$ матрицы, $f(k,\ x_k,\ u_k)$ — вещественная n-мерная вектор-функция. На множество Ω налагаем следующее условие: Ω — выпуклое ограниченное множество из R^m. Существует некоторое $u^0\in\Omega$, такое, что $Bu^0=0$ и $f(k,\ x,\ u^0)=0$ для всех $k\geqslant 1$ и $x\in X$.

Множеством S нуль-управляемости (1) *называется множество всех точек $x\in X$, из которых можно попасть в нуль за конечное число шагов по траектории системы* (1). *Система* (1) *называется локально нуль-управляемой, если S содержит нуль в качестве своей внутренней точки* ($0\in\operatorname{int} S$), *и глобально нуль-управляемой, если S совпадает со всем X ($S=X$).*

Предполагая локальную или глобальную нуль-управляемость (2), в основных наших теоремах будут получены достаточные условия на функцию $f(k,\ x_k,\ u_k)$, которые гарантировали бы соответственно локальную или глобальную нуль-управляемость системы (1).

Необходимые и достаточные условия локальной и глобальной нуль-управляемости системы (2) приведены в работах [4, 5]. Подобные результаты для непрерывной системы вида $\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)+f(t,\ u,\ x)$ получены также в работе [6].

Вспомогательные леммы. Докажем сначала некоторые вспомогательные результаты.

Лемма 1. *Пусть для выпуклого множества S из X выполняется следующее условие: для каждого функционала $f \in X$, $\|f\|=1$ всегда найдется некий элемент $x_f \in S$, такой, что $<f, x_f> \, > c$, где $c>0$ — некоторое заданное число.*

Тогда S содержит шар $B(0, C)$ с центром в нуле и радиусом c.

Доказательство. Пусть существует $x_0 \in B(0, c)$, но $x_0 \notin S$. Ввиду выпуклости S можем разделить x_0 и S некоторым функционалом $f \in X^*$, $\|f\|=1$, так, чтобы

$$<f, x_0> \, \geqslant \sup_{y \in S} <f, y>.$$

Но $x_0 \in B(0, c)$, отсюда $\|x_0\| \leqslant c$ и $c \geqslant \, <f, x_0> \, \geqslant \sup\limits_{y \in S} <f, y>$, что противоречит условию леммы. Поэтому $B(0, c) \subset S$.

Лемма 2. *Пусть выполняются следующие условия:*

1) *Существует некоторая функция $f^*(k)$, такая, что* $\|f(k, x, u)\| < f^*(k)$, $\forall x \in X$, $u \in U$ и $\lim\limits_{k \to \infty} f^*(k) = 0$.

2) *Для каждого $k \in N$ и $x \in X$ множество $\{Bu + f(k, x, u),\ u \in \Omega\}$ выпукло.*

3) *Система (2) локально нуль-управляема.*

Тогда для каждой последовательности $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_k, \ldots, \in X$ система

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + f(k, y_k, u_k),\ x_k \in X,\ u_k \in \Omega \tag{3}$$

также локально управляема.

Более того, существуют некоторые $N_0 \in N$ и $\alpha_0 > 0$, *такие, что для всякой последовательности $y_0, y_1, \ldots, y_k, \ldots \in X$* множество $S_N^{(3)}$ *нуль-управляемости* (3) *после N_0 шагов содержит шар $B(0, \alpha_0) = \{x : \|x\| \leqslant \alpha_0\}$.*

Доказательство. Из локальной нуль-управляемости (2) вытекает, что существуют некие $n_0 > 0$ и $\alpha > 0$, такие, что

$$B(0, \alpha) \subset S^{(2)}_{n_0+1} = \{x \in X : -A^{n_0+1} x \in F_{n_0+1}(\Omega^{n_0+1})\},$$

где

$$F_{n_0+1}(\Omega^{n_0+1}) = \left\{ \sum_{i=0}^{n_0} A^{n_0-i} B u_i,\ u_i \in \Omega \right\}.$$

Откуда

$$B(0, \alpha) \subset S^{(2)}_{n_0+1} \subset \tilde{S}_{n_0+1} = \{x \in X : -A^{n+n_0+1} x \in A^n F_{n_0+1}(\Omega^{n_0+1})\}.$$

Далее рассмотрим разложение пространства $X = X_1 \oplus X_2$, где $X_1 = A^n X$, $X_2 = \operatorname{Ker} A^n$ (если $0 \notin \sigma(A)$), т. е. когда существует A^{-1}, разложение не понадобится. Полагая, что $A_1 = PA$, где P — естественная проекция $P : X \to X_1$, то A_1 имеет свой обратный A_1^{-1} и что $A_1^n x_1 = A^n x$, где $x_1 = Px$. Из условия 1 леммы имеем

$$\exists N > 0,\ \forall k > N \|f(k, x, u)\| \leqslant \frac{\alpha}{4} \frac{1}{\|P\| \sum\limits_{i=0}^{n_0} \|A_1^{-(i+1)}\|}. \tag{4}$$

Обозначим

$$\tilde{S} = \{x \in X : A^{n+n_0+1} x + \sum_{i=0}^{n_0} A^{n+n_0-i} (Bu_{N+i} + f(N+i,\ y_{N+i},\ u_{N+i}) = 0,$$
$$u_{N+i} \in \Omega\}.$$

Легко показать, что

$$\tilde{S}^{(3)} = \{x \in X : A^N x \in \tilde{S}\} \subset S^{(3)}_{N+n+n_0+1}, \tag{5}$$

где $S^{(3)}_{N+n+n_0+1}$ — множество нуль-управляемости системы (3) за $N + n + n_0 + 1$ шагов.

Ввиду того, что $f(k, x, u^0) = 0$ для любых $k \geqslant 1$ и $x \in X$, обратим внимание только на те $y_N, y_{N+1}, \ldots, y_{N+n_0} \in X$, которые присутствуют в множестве $\tilde{S}$.

Докажем, что $B(0, \alpha/2) \subset \tilde{S}$.

Сначала покажем выпуклость множества $\tilde{S}$. Действительно, возьмем любые 2 точки $z_1, z_2 \in \tilde{S}$, тогда имеем

$$A^{n+n_0+1} z_1 + \sum_{i=0}^{n_0} A^{n+n_0-i} (Bu^1_{N+i} + f(N+i,\ y_{N+i},\ u^1_{N+i})) = 0,$$

$$A^{n+n_0+1} z_2 + \sum_{i=0}^{n_0} A^{n+n_0-i} (Bu^2_{N+i} + f(N+i,\ y_{N+i},\ u^2_{N+i})) = 0.$$

Для любого $\lambda \in [0, 1]$, из условия 2 имеем

$$\lambda (Bu^1_{N+i} + f(N+i,\ y_{N+i},\ u^1_{N+i})) + (1-\lambda)(Bu^2_{N+i} + f(N+i,$$
$$y_{N+i},\ u^2_{N+i})) \in \{Bu + f(N+i,\ y_{N+i},\ u),\ u \in \Omega\}\ \forall i = \overline{0, n_0}.$$

Отсюда следует, что найдутся $u_{N+i} \in \Omega$, $i = \overline{0, n_0}$, такие, что

$$A^{n+n_0+1} (\lambda z_1 + (1-\lambda_0) z_2) + \sum_{i=0}^{n_0} A^{n+n_0+1} (Bu_{N+i} +$$
$$+ f(N+i,\ y_{N+i},\ u_{N+i})) = 0,$$

т. е. $\lambda z_1 + (1-\lambda_0) z_2 \in S$. Это и доказывает выпуклость множества $\tilde{S}$.

Далее возьмем любую точку $x \in \tilde{S}_{n_0+1}$, т. е.

$$\exists u_0, u_1, \ldots, u_{n_0} \in \Omega, \ A^{n+n_0+1}x + \sum_{i=0}^{n_0} A^{n+n_0-i}Bu_i = 0.$$

Полагая

$$x' = x - \sum_{i=0}^{n_0} A_1^{-(i+1)} f_1(N+i, \ y_{N+i}, \ u_{N+i}), \tag{6}$$

где $u_{N+i} = u_i$ и $f_1(N+i, \ y_{N+i}, \ u_{N+i}) = Pf(N+i, \ y_{N+i}, \ u_{N+i})$, получаем $\|x - x'\| \leqslant \alpha/4$ ввиду (4).

С другой стороны,

$$A^{n+n_0+1}x' + \sum_{i=0}^{n_0} A^{n+n_0-i}(Bu_{N+i} + f(N+i, \ y_{N+i}, \ u_{N+i})) =$$

$$= A^{n+n_0+1}x + \sum_{i=0}^{n_0} A^{n+n_0-i}Bu_{N+i} + \sum_{i=0}^{n_0} A^{n-n_0-i}f(N+i, \ y_{N+i}, \ u_{N+i}) -$$

$$- \sum_{i=0}^{n_0} A_1^{n+n_0+1}f_1(N+i, \ y_{N+i}, \ u_{N+i}) = A^{n+n_0+1}x + \sum_{i=0}^{n_0} A^{n+n_0-i}Bu_i = 0.$$

Так как $A_1^n x_1 = A^n x$ для всякого $x \in X$ с $x_1 = Px$, то $x' \in S$. Далее возьмем некоторый $f \in X^*$ и $\|f\| = 1$. Полагая $x_f = 3\alpha f/4$, имеем $x_f \in B(0, \alpha) \subset \tilde{S}_{n_0+1}$. Получая x_f', как в (6), находим $x_f' \in \tilde{S}$ и $\|x_f - x_f'\| < \alpha/4$. Откуда

$$< f, x_f' >| \geqslant | < f, x_f > | - | < f, x_f - x_f' > | > 3\alpha/4 - \alpha/4 = \alpha/2.$$

В силу леммы 1 получаем, что $B(0, \alpha/2) \subset \tilde{S}$. Отсюда, ввиду (5), имеем

$$B(0, \alpha_0) \subset \tilde{S}^{(3)} \subset S^{(3)}_{N+n+n_0+1}, \text{ где } \alpha_0 = \frac{\alpha}{2\|A\|^N}.$$

Выбор чисел N, n_0, α не зависит от последовательности $y_0, y_1, \ldots, y_k, \ldots \in X$, поэтому, положив $N_0 = N + n + n_0 + 1$, $\alpha_0 = \frac{\alpha}{2\|A\|^N}$, мы заключаем, что для любой последовательности $y_0, y_1, \ldots, y_k, \ldots \in X$, $B(0, \alpha_0) \subset S^{(3)}_{N_0}$.

Основные результаты. Теперь мы в состоянии сформулировать достаточные условия нуль-управляемости системы (1).

Теорема 1. *Пусть*

1) *Существует некая функция $f'(k)$, удовлетворяющая условию $\lim\limits_{k\to\infty} f'(k) = 0$ и $\|f(k, x, u)\| \leqslant f'(k)$ для всех $x \in X$, $u \in \Omega$.*

2) Для каждого $k \geqslant 1$ и $x \in X$ множество $\{Bu+f(k, x, u),\ u \in \Omega\}$ выпукло и замкнуто.
3) Функция f удовлетворяет локальному условию Липшица по x, т. е. существует некоторая константа $K>0$, такая, что $\|f(k, x, u)-f(k, y, u)\| \leqslant K\|x-y\|$ для любых $k \geqslant 1$, $u \in \Omega$ и $x, y \in X$.

Тогда, если (2) локально нуль-управляема, то системы (1) также локально нуль-управляема.

Доказательство. Поскольку все условия леммы 2 выполняются, имеем.

Для любой последовательности $y_0, y_1, \ldots, y_k \in X$, $B(0, \alpha_0) \subset \subset S^{(3)}_{N_0}$. Докажем, что $B(0, \alpha_0) \subset S^{(1)}_{N_0}$. Действительно, возьмем $x \in B(0, \alpha_0) \subset S^{(3)}_{N_0}$, тогда для $x^0_N = A^{N+n}x$ и любых $x^0_{N+1}, \ldots, x^0_{N+n_0} \in \in X$ найдутся $u^0_N, u^0_{N+1}, \ldots, u^0_{N+n_0} \in \Omega$, такие, что

$$A^{N_0}x + \sum_{i=0}^{n_0} A^{n+n_0-i}(Bu^0_{N+i} + f(N+i,\ x^0_{N+i},\ u^0_{N+i})) = 0.$$

Рассмотрим далее $x^1_N = x^0_N = A^{N+n}x$ и

$$x^1_{N+j+1} = A^{j+1}x^0_N + \sum_{i=0}^{j} A^{n+n_0-i}(Bu^0_{N+i} + f(N+i,\ x^0_{N+i},\ u^0_{N+i})),$$

$$j = \overline{0, n_0}$$

и для этих $(x^1_{N+i})^{n_0}_{i=0}$ найдем $u^1_N, u^1_{N+1}, \ldots, u^1_{N+n_0} \in \Omega$:

$$A^{N_0}x + \sum_{i=0}^{n_0} A^{n+n_0-i}(Bu^0_{N+i} + f(N+i,\ x^1_{N+i},\ u^1_{N+1})) = 0.$$

Аналогично для $x^k_N = x^0_N = A^{N+n}x$ и

$$x^k_{N+j+1} = A^{j+1}x^{k-1}_N + \sum_{i=0}^{j} A^{n+n_0-i}(Bu^{k-1}_{N+i} + f(N+i,\ x^{k-1}_{N+i},\ u^{k-1}_{N+i})), \quad (7)$$

$$(j = \overline{0, n_0})$$

тоже найдутся управления $u^k_N, \ldots, u^k_{N+n_0} \in \Omega$, такие, что

$$A^{N_0}x + \sum_{i=0}^{n_0} A^{n+n_0-i}(Bu^k_{N+i} + f(N+i,\ x^k_{N+i},\ u^k_{N+i})) = 0.$$

Итак, мы получили для каждого $j = \overline{0, n_0}$ последовательность $(x^k_{N+j+1})^{\infty}_{k=0}$, построенную, как в (7). Эта последовательность ограничена, и поэтому из нее можно выбрать сходящуюся последовательность, которую тоже обозначим через $(x^k_{N+j+1})^{\infty}_{k=0}$.

Положив $\tilde{x}_{N+j+1} = \lim\limits_{k\to\infty} x^k_{N+j+1}$ $(j=\overline{0, n_0})$, имеем $\tilde{x}_N = A^{N+n}x$ и $\tilde{x}_{N+n_0+1} = 0$.

Обозначим

$$z^k_{N+j+1} = A^{j+1}\tilde{x}_N + \sum_{i=0}^{j} A^{n+n_0-i}(Bu^k_{N+i} + f(N+i, \tilde{x}_{N+i}, u^k_{N+i})),$$

$$Q_i = \{B_u + f(N+i, \tilde{x}_{N+i}, u), u \in \Omega\}.$$

Ввиду ограниченности и замкнутости множества Q_i можно из последовательности типа

$$\{Bu^k_{N+i} + f(N+i, \tilde{x}_{N+i}, u^k_{N+i})\}_{k=0}^{\infty} \quad (i=\overline{0, n_0})$$

выбрать сходящуюся последовательность, которая также принадлежит множествам Q_i, причем ее предел тоже Q_i соответственно. Таким образом, мы нашли управления

$$u_N, u_{N+1}, \ldots, u_{N+n_0} \in \Omega,$$

такие, что

$$\lim_{k\to\infty} (Bu^k_{N+i} + f(N+i, \tilde{x}_{N+i}, u^k_{N+i})) = Bu_{N+i} +$$

$$+ f(N+i, \tilde{x}_{N+i}, u_{N+i}) \,\forall i = \overline{0, n_0},$$

т. е. существует предел последовательности $\{z^k_{N+j+1}\}_{k=0}^{\infty}$ для каждого $j=\overline{0, n_0}$. Положим $\tilde{z}_{N+j+1} = \lim\limits_{k\to\infty} z^k_{N+j+1}$ $(j=\overline{0, n_0})$ и рассмотрим для каждого $j=\overline{0, n_0}$:

$$\|\tilde{z}_{N+j+1} - \tilde{x}_{N+j+1}\| \leqslant \|\tilde{z}_{N+j+1} - z^k_{N+j+1}\| + \|z^k_{N+j+1} - x^k_{N+j+1}\| +$$

$$+ \|x^k_{N+j+1} - \tilde{x}_{N+j+1}\|.$$

С одной стороны,

$$\|z^k_{N+j+1} - x^k_{N+j+1}\| \leqslant \sum_{i=0}^{j} \|A^{n+n_0-i}\| \cdot \|(f(N+i, \tilde{x}_{N+i}, u^k_{N+i}) -$$

$$- f(N+i, x^k_{N+i}, u^k_{N+i})\| \leqslant \sum_{i=0}^{j} \|A^{n+n_0-i}\| \cdot K \cdot | x^k_{N+i} - \tilde{x}_{N+i}\| \qquad (8)$$

и с другой, ввиду сходимости последовательностей $z^k_{N+j+1} \to \tilde{z}_{N+j+1}$ и $x^k_{N+j+1} \to \tilde{x}_{N+j+1}$ для всякого $j=\overline{0, n_0}$, имеем $\tilde{z}_{N+j+1} = \tilde{x}_{N+j+1}$.

Итак, мы нашли управление $u_N, u_{N+1}, \ldots, u_{N+n_0} \in \Omega$, такие, что

$$A^{N_0}x + \sum_{i=0}^{n_0} A^{n+n_0-i}(Bu_{N+i} + f(N+i, x_{N+i}, u_{N+i}) = 0,$$

т. е. $x \in S_{N_0}^{(1)}$, что и требуется доказать.

Теорема 2. *Пусть выполняются все условия теоремы 1. Тогда из глобальной нуль-управляемости системы* (2) *следует глобальная нуль-управляемость системы* (1).

Доказательство. В силу глобальной нуль-управляемости (2) и ограниченности множества Ω получаем $r(A) \leqslant 1$, где $r(A)$ — спектральный радиус оператора A. Отсюда $\|A^k\| \leqslant C$ для любого $k > 0$ и заданного $C > 0$. Поскольку все условия теоремы 1 выполняются, мы заключаем: если множество нуль-управляемости системы (2) $S^{(2)}$ содержит шар $B(0, \alpha)$, то множество нуль-управляемости $S^{(1)}$ системы (1) содержит шар $B(0, \alpha_0)$, где $\alpha_0 = \alpha/\|A^N\| > \alpha/C$.

Таким образом, если $\alpha \to \infty$ в силу глобальной нуль-управляемости системы (2), то $\alpha_0 \to \infty$, что и доказывает глобальную нуль-управляемость системы (1).

Следующее следствие дает достаточные условия нуль-управляемости (1), когда она принимает некоторый особенный вид.

Следствие. *Пусть нелинейная система* (1) *имеет вид*

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + G(k, x_k)u_k, \; u_k \in \Omega, \; x_k \in X, \tag{9}$$

где $G(k, x_k)$ — непрерывная по x функция при каждом фиксированном $k > 0$. Множество $\Omega \subset R^m$ выпукло, ограничено, замкнуто и $0 \in \Omega$.

Пусть существует непрерывная функция $g(k)$, такая, что

$$\lim_{k \to \infty} g(k) = 0 \text{ и } \|G(k, x)\| \leqslant g(k), \; x \in X, \; k > 0.$$

Тогда из локальной (глобальной) нуль-управляемости системы (2) *следует локальная (глобальная) нуль-управляемость данной системы.*

Доказательство. Положим $f(k, x_k, u_k) = G(k, x_k)u_k$. Поскольку все условия теоремы 1 выполняются, кроме условия Липшица для функции $f(k, x, u)$, то все доказательство данной теоремы повторяется вплоть до оценки (8). Здесь в силу линейности по u непрерывности по x_j функции $f(k, x, u)$ имеем

$$\|z_{N+j+1}^k - x_{N+j+1}^k\| \leqslant \sum_{i=0}^{j} \|A^{n+n_0-i}\| \cdot \|G(N+i, \tilde{x}_{N+i})u_{N+i}^k -$$

$$- G(N+i, x_{N+i}^k)u_{N+i}^k)\| < \sum_{i=0}^{j} \|A^{n+n_0-i}\| \cdot \|u_{N+i}^k \cdot \|G(N+i, \tilde{x}_{N+i}) -$$

$$- G(N+i, x_{N+i}^k)\|.$$

По предположению Ω ограничено, и поэтому $\tilde{x}_{N+l+1} = \tilde{z}_{N+l+1}$, что и завершает доказательство локальной нуль-управляемости системы (9).

Глобальная нуль-управляемость (9) доказывается совершенно аналогично доказательству теоремы 2.

Список литературы: 1. *Коробов В. И., Маринич А. П., Подольский Е. Н.*//Диф. уравнения 1975. **11**, № 11. С. 1967—1979. 2. *Калман Р. Е., Хо У. С., Нарендра К. С.*//Contributions to Diff. Equat. 1962. **1**. P. 198—213. 3. Evans M., Murthy O.//IEEE Trans. Auto. Control, Ac. 1977. **22**. P. 942—945. 4. Nguyen Khoa Son.//Control of Cybernetics. 1981. **1**. P. 5—17. 5. Nguyen Khoa Son, Le Thans//Acta Mathematica Vietnamica. 1985. **1**. (10). P. 3—14. 6. Vu Ngoc Phat. Optimization. 1983. **14**. (3). P. 371—375.

Поступила в редколлегию 27.04.87

УДК 517.966.2

Г. В. СУЗИКОВ

ОДНА ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ

Пусть D — односвязная область на плоскости P с гладкой границей Γ.

Обозначим через $\lambda_1(\rho)$ первое (минимальное) собственное значение краевой задачи

$$\Delta u(x) + \lambda\rho(x)u(x) = 0 \quad x \in D, \tag{1}$$

$$u(x) = 0 \quad x \in \Gamma, \tag{2}$$

где $\rho(x)$ — заданная неотрицательная, измеримая, ограниченная, не равная тождественно нулю в D функция, Δ — оператор Лапласа. Обозначим еще через $u_\rho(x)$ собственную функцию, отвечающую собственному значению $\lambda_1(\rho)$.

В дальнейшем нам понадобятся некоторые результаты, относящиеся к хорошо изученной задаче (1), (2). Эти результаты мы сформулируем в виде следующей леммы.

Лемма. *$\lambda_1(\rho)>0$, $u_\rho(x)>0$ в D и не обращается в постоянную в любой области с положительной мерой, где $\rho(x)\neq 0$,*

$$\lambda_1(\rho) = \min_{u(\cdot)\in \overset{0}{W}{}_2^1(D)} \frac{\int\limits_D (\nabla u)^2\,dx}{\int\limits_D \rho(x)\,u^2(x)\,dx} = \frac{\int\limits_D (\nabla u_\rho)^2\,dx}{\int\limits_D \rho(x)u_\rho^2(x)\,dx}.$$

Пусть теперь U совокупность измеримых в D функций $\rho(x)$, удовлетворяющих условиям

$$0 \leqslant \rho(x) \leqslant H \quad \textbf{(3)}, \quad \int\limits_D \rho(x)\,dx = M \quad \textbf{(4)},$$

где M и H — заданные постоянные, подчиненные условию $0<M<H \operatorname{mes} D$ **(5)**.

Для каждой функции $\rho(\cdot)\in U$ определено первое собственное значение $\lambda_1(\rho)$ краевой задачи (1), (2). Поставим задачу определения функции $\overline{\rho}(\cdot)\in U$, имеющей наименьшее собственное значение по сравнению со всеми другими функциями $\rho(\cdot)\in U$. Эту задачу символически мы будем записывать так:

$$\lambda_1(\rho)\to\inf \quad \textbf{(6)}, \quad \rho(\cdot)\in U \quad \textbf{(7)}.$$

Теорема 1. *Задача* (6), (7) *имеет решение, причем*

$$\lambda=\inf_{\rho(\cdot)\in U}\lambda_1(\rho)=\min_{\substack{u\in \overset{0}{W}{}_2^1(D),\\ \rho(\cdot)\in U}}\frac{\int\limits_D(\nabla u)^2\,dx}{\int\limits_D\rho(x)\,u^2(x)\,dx}=$$

$$=\lambda_1(\overline{\rho})=\frac{\int\limits_D(\nabla u_{\overline{\rho}})^2dx}{\int\limits_D\overline{\rho}(x)u_{\overline{\rho}}^2(x)\,dx}. \tag{8}$$

Доказательство теоремы 1 в одномерном варианте можно найти в работе [1]. Изменения, которые нужно внести в рассматриваемом здесь случае, невелики, и мы на этом не останавливаемся.

Теорема 2. *Пусть D —* круг радиуса R. *Тогда решение задачи* (6), (7) дается следующими формулами:

$$\overline{\rho}(x)=\begin{cases}H & x\in\overline{D},\\ 0 & x\in D\setminus\overline{D},\end{cases}$$

$$u_{\overline{\rho}}(x)=\begin{cases}J_0(\sqrt{\lambda H}\,r) & 0\leqslant r<\overline{R}\ (b\,\overline{D}),\\ \dfrac{J_0(\sqrt{\lambda H}\,\overline{R})}{\ln\dfrac{\overline{R}}{R}}\ln\dfrac{r}{R} & \overline{R}<r\leqslant R\ (b\,D\setminus\overline{D}),\end{cases}$$

$$\lambda=\lambda_1(\overline{\rho})=\pi t^{*2}/M, \tag{9}$$

где t^*—первый (минимальный) положительный корень уравнения

$$J_0(t)-t\ln\frac{\overline{R}}{R}J_0'(t)=0,$$

$\overline{D}$ — концентрический D круг радиуса $\overline{R}$ площади M/H ($\overline{R}=\sqrt{M/\pi H}$), r — расстояние от точки x до центра круга D, $J_0(t)$ — функция Бесселя.

Доказательство. Из соотношения (8) при $u=u_{\overline{\rho}}(x)$, очевидно, имеем

$$\frac{\int\limits_D(\nabla u_{\overline{\rho}})^2\,dx}{\int\limits_D\rho(x)\,u_{\overline{\rho}}^2(x)\,dx}\geqslant\frac{\int\limits_D(\nabla u_{\overline{\rho}})^2dx}{\int\limits_D\overline{\rho}(x)\,u_{\overline{\rho}}^2(x)\,dx}\qquad\forall\rho(\cdot)\in U,$$

и, таким образом,

$$\int_D \bar{\rho}(x)\, u^2_{\bar{\rho}}(x)\, dx \geqslant \int_D \rho(x)\, u^2_{\bar{\rho}}(x)\, dx \qquad \forall \rho(\cdot) \in U.$$

Это последнее соотношение и соотношения (3), (4), (5), как нетрудно видеть, приводят к такой структуре $\bar{\rho}(x)$:

$$\bar{\rho}(x) = \begin{cases} H \text{ в } \bar{D}, \\ 0 \text{ в } D \setminus \bar{D}, \end{cases} \tag{10}$$

где $\bar{D}$ — некоторая часть D, причем mes $\bar{D} = M/H$ и $\exists$ число $h>0$ так, что

$$u^2_{\bar{\rho}}(x) \geqslant h \quad \text{в } \bar{D}, \qquad u^2_{\bar{\rho}}(x) \leqslant h \quad \text{в } D \setminus \bar{D}.$$

Учитывая теперь (10), из соотношений (8) получаем

$$\lambda_1(\bar{\rho}) = \min_{\substack{u \in \overset{0}{W}{}^1_2(D),\\ D' \subset D : \text{mes } D' = M/H}} \frac{\int_D (\nabla u)^2\, dx}{H \int_{D'} u^2(x)\, dx} = \frac{\int_D (\nabla u_{\bar{\rho}})^2\, dx}{H \int_{\bar{D}} u^2_{\bar{\rho}}(x)\, dx},$$

т. е. $\forall\, u(\cdot) \in \overset{0}{W}{}^1_2(D)$, $\forall D' \subset D : \text{mes } D' = M/H$

$$\frac{\int_D (\nabla u)^2\, dx}{\int_{D'} u^2(x)\, dx} \geqslant \frac{\int_D (\nabla u_{\bar{\rho}})^2\, dx}{\int_{\bar{D}} u^2_{\bar{\rho}}(x)\, dx}. \tag{11}$$

Предположим, что $\bar{D}$ не есть концентрический D круг, и рассмотрим тело B, ограниченное снизу кругом D и сверху поверхностью $z = u_{\bar{\rho}}(x)$, $x \in D$, (ось z мы выбираем перпендикулярной к плоскости P). Подвергнем тело B симметризации Штейнера (см., например, [2]) относительно некоторой плоскости, перпендикулярной к плоскости P. При этом тело B перейдет в тело B^*, причем основание тела B — круг D — перейдет в основание тела B^* — круг D^* того же радиуса. Поверхность, ограничивающая тело B^* сверху, задает функцию $z = u^*(x)$, определенную на круге D^* или, что то же самое, на круге D. Тело $x \in \bar{D}, \sqrt{h} \leqslant z \leqslant u_{\bar{\rho}}(x)$ при таком преобразовании перейдет в тело $x \in \bar{D}^*, \sqrt{h} \leqslant z \leqslant u^*(x)$. Известно [2], что при определенном таким образом преобразовании

$$\int_D (\nabla u_{\bar{\rho}})^2\, dx \geqslant \int_{D^* = D} (\nabla u^*)^2\, dx,$$

$$\int_{\bar{D}} u^2_{\bar{\rho}}(x)\, dx = \int_{\bar{D}^*} u^{*2}(x)\, dx,$$

$$\text{mes } \bar{D}^* = \text{mes } \bar{D}.$$

Итак, описанная выше симметризация, вообще говоря, уменьшает отношение

$$\frac{\int\limits_{D} (\nabla u_{\bar{\rho}})^2 \, dx}{\int\limits_{\bar{D}} u_{\bar{\rho}}^2 (x) \, dx}.$$

Так как уменьшить это отношение в силу (11) невозможно и так как D и $\bar{D}$ последовательными симметризациями могут быть переведены в концентрические круги, остающиеся неизменными при такой симметризации, то тем самым утверждение (9) теоремы 2 доказано.

Остальные утверждения теоремы 2 проверяются непосредственным счетом.

Теорема 2 доказана.

Заметим, что результаты, устанавливаемые теоремой 2, высказаны в работе [1] в качестве предположения.

Рассмотрим теперь семейство задач (6)—(7), различающихся областями D. Для каждой такой задачи определено $\lambda_1(\rho) = \lambda_1(\rho, D)$.

Имеет место следующая

Теорема 3. *Среди всех областей D с заданной площадью S $\lambda_1(\rho, D)$ минимально для круга площади S.*

Теорема 3 может быть доказана, как и теорема 2, применением описанного выше процесса симметризации.

Список литературы: 1. *Крейн М. Г.* О некоторых задачах на максимум и минимум для характеристических чисел и о ляпуновских зонах устойчивости//Прикл. математика и механика. 1951. **15.** Вып. 3. С. 323—348. 2. *Полиа Г., Сеге Г.* Изопериметрические неравенства в математической физике. М., 1962. 336 с.

Поступила в редколлегию 07.02.87

УДК 681.51:519.8

В. В. БАРАНОВ, А. В. ГОГАЙЗЕЛЬ,
НГУЕН НГОК ТХАНГ

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА В МОДЕЛИ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

В управляемых системах, описываемых моделью марковских процессов принятия решений, часто возникают задачи, в которых вместе с выбором оптимальной стратегии принятия решений (управления) требуется выбрать также и оптимальное значение некоторого параметра θ, принимающего значения из множества Θ. Типичным параметром является задача управления работоспособностью технических систем, в которой требуется выбрать оптимальную стратегию управления работоспособностью и одновременно оптимальный период контроля состояний системы.

Подобные задачи образуют класс параметрических задач в рамках модели марковских процессов решений. Методы решения таких задач рассматриваются в данной работе.

Постановка задачи. Модель марковских процессов принятия решений определяется заданием набора объектов $\{E, Y, Q(E/E\times\times Y), w(E\times Y)\}$, где E — множество состояний; Y — множество управлений, $Q(E/E\times Y)$ — семейство условных распределений на E при условиях из $E\times Y$, называемое переходной функцией и определяющее вероятности исходов принимаемых решений $y\in Y$ в состоянии $x\in E$; $w(E\times Y)$ — функция полезностей, описывающая непосредственную полезность принимаемых решений. Пополним рассматриваемый набор множеством Θ значений параметра θ и положим, что переходная функция Q и функция полезностей w кроме зависимости от переменных $(x, y)\in E\times Y$ зависит также от параметра $\theta\in\Theta$, т. е. $Q=Q(\cdot/x, y, \theta)$, $w=w(x, y, \theta)$, $(x, y, \theta)\in E\times\times Y\times\Theta$.

При этом будем предполагать, что множества E и Y конечны и на управления наложены ограничения, определяющие множества допустимых управлений $Y_x\subseteq Y$ в каждом состоянии $x\in E$. Относительно множества Θ будем предполагать, что оно компактно. При этом положим, что $Q(x, y, \theta)$ и $w(x, y, \theta)$ непрерывны по θ.

Отображение π: $E\to Y$, такое, что $\pi(x)=Y_x$, $x\in E$, назовем решающей функцией. Последовательность $\mu=\{\pi_0, \pi_1, \dots\}$ является стратегией управления (принятия решений). Стратегия $\pi^\infty==\{\pi, \pi, \dots\}$ стационарна.

Каждой паре (μ, θ) поставим в соответствие ее критерий качества, определяемый средней полезностью вида

$$\varphi(\mu, \theta)(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}M_x^{(\mu,\theta)}\sum_{t=0}^{n-1}w(x_t, y_t; \theta),\ x\in E,$$

где $x=x_0\in E$ — начальное состояние, а математическое ожидание берется по произведению мер, порождаемых переходной функцией Q.

Если стратегия $\mu=\pi^\infty$ (т. е. стационарна) и множество E образуют один эргодический класс состояний, то критерий $\varphi(\pi^\infty, \theta)$ (x) не зависит от $x\in E$ [1]. Будем предполагать, что последнее условие выполнено.

Задача тогда состоит в выборе φ-оптимальной пары (π^*, θ^*), такой, что

$$\begin{cases}\varphi(\pi^*, \theta^*)\geqslant\varphi(\pi^\infty, \theta) \text{ для всех } (\pi^\infty, \theta)\\ \theta\in\Theta\end{cases}\quad .\qquad (1)$$

Нетрудно видеть, что выбор параметра $\theta\in\Theta$ можно определить как выбор отображения δ: $E\to\Theta$ при наличии ограничения $\delta(x)==\text{const}$. Очевидно, если бы такого ограничения не было, то рассматриваемая задача свелась бы к стандартному виду задач, рассмотренных, например, в работе [1]. Поэтому здесь мы будем систематически использовать обозначения, построения и результаты работы [1]. Это, с одной стороны, даст возможность проследить общность и различия в постановке задачи и в результатах, а с другой — позволит ограничиться лишь новыми результатами, связанными с введением параметра $\theta\in\Theta$.

Принцип оптимальности. Пусть V — пространство векторов размерностей $|E|$. Обозначим через $Q(\pi, \theta)$ матрицу переходных вероятностей с элементами $Q(s|x, \pi(x))$, θ, x, $s\in E$, где π: $E\to Y$— решающая функция. Определим на V оператор «действия» $F(\pi, \theta)$ вида

$$F(\pi, \theta)v \equiv w(\pi, \theta) + Q(\pi, \theta)\, v, \ v\in V,$$

где $w(\pi, \theta)$ — вектор полезностей с компонентами $w(\pi, \theta)\,(x) = w(x, \pi(x), \theta)$, $x\in E$. Поскольку здесь параметр θ является постоянной относительно переменной $x\in E$ (т. е. $\theta=\delta(x)=\mathrm{const}$), то сравнение пар (π, θ) и (π', θ') необходимо выполнять сразу по всем $x\in E$. Поэтому на множестве $\Pi\times\Theta$ (где $\Pi=\{\pi: E\to Y\}$) определим бинарное отношение, полагая

$$(\pi', \theta)>(\pi, \theta) \Leftrightarrow F(\pi', \theta')v> F(\pi, \theta)v \Leftrightarrow \sum_{x\in E}F(\pi', \theta')v(x) > \sum_{x\in E}F(\pi, \theta)v(x). \tag{2}$$

$$(\pi', \theta') \geqslant (\pi, \theta) \Leftrightarrow F(\pi', \theta')v\geqslant F(\pi, \theta)v \Leftrightarrow \sum_{x\in E}F(\pi', \theta')v(x) \geqslant \sum_{x\in E}F(\pi, \theta)v(x). \tag{3}$$

Так, определенное бинарное отношение будем называть предпочтением суммарного эффекта.

Кроме того, будем использовать также предпочтение Парето, полагая

$$(\pi', \theta') >^{p} (\pi, \theta) \Leftrightarrow F(\pi', \theta')v > F(\pi, \theta)v, \tag{4}$$

где векторное неравенство в правой части определено по Парето.

Однако при этом заметим, что предпочтение Парето не приводит к решению задачи (1). Используется же оно для формулировки и доказательства леммы 2. Используя предпочтения (2), (3), определим оператор выбора U вида

$$Uv \equiv \sup_{(\pi,\theta)\in\Pi\times\Theta}{}' \, F(\pi, \theta)v \geqslant F(\pi', \theta')v; \forall (\pi, \theta)\in\Pi\times\Theta. \tag{5}$$

Поскольку Θ компактно, а функции $w(x, y, \theta)$ и $Q(x, y, \theta)$ непрерывны по θ, то верхняя грань в определении оператора достигается.

Следуя работе [1], зафиксируем некоторую точку $z\in E$ и введем оператор $Tv\equiv v-v(z)\,\mathbf{1}$, где $\mathbf{1}$ — векторная единица из V. Определим теперь операторы $F^*\equiv TF$ и $U^*=TU$. Операторы T, F^* и U^* осуществляют отображение $R\to R$, где $R=\{r\in V: r=Tv, v\in V\}\subset V$.

Лемма 1. *Операторы $F^*(\pi)$ и U^* являются сжатием на R, если оператор $TQ(\pi)$ является сжатием на R.*

Доказательство. Аналогично доказательству лемм 3 и 4 в работе [1].

В дальнейшем всюду будем предполагать, что операторы F^* и U^* являются сжатием.

Лемма 2. Пусть $r(\pi^\infty, \theta)$ — *неподвижная точка оператора* $F^*(\pi, \theta)$. *Тогда*

$$F(\pi', \theta')r(\pi^\infty, \theta) > F(\pi, \theta)r(\pi^\infty, \theta) \Rightarrow \varphi(\pi'^\infty, \theta') > \varphi(\pi^\infty, \theta), \quad (6)$$

$$F(\pi', \theta')r(\pi^\infty, \theta) \leqslant F(\pi, \theta)r(\pi^\infty, \theta) \Rightarrow \varphi(\pi'^\infty, \theta') \leqslant \varphi(\pi^\infty, \theta). \quad (7)$$

Доказательство. Аналогично доказательству леммы 6 в работе [1].

Теорема 1. *Принцип оптимальности. Пара* (π^*, θ^*) *φ-оптимальна, если и только если неподвижная точка соответствующего оператора действия* $F^*(\pi^*, \theta^*)$ *является также и неподвижной точкой оператора выбора* U^*, *т. е.*

$$\{F^*(\pi^*, \theta^*)r(\pi^*, \theta^*) = r(\pi^*, \theta^*) = U^*r(\pi^*, \theta^*)\} \leftrightarrow \varphi(\pi^*, \theta^*) \geqslant$$
$$\geqslant \varphi(\pi^\infty, \theta) \, \forall (\pi^\infty, \theta) \in \Pi \times \Theta. \quad (8)$$

Доказательство. Пусть (π^*, θ^*) φ-оптимальна и $r(\pi^*, \theta^*) = F^*(\pi^*, \theta^*)r(\pi^*, \theta^*)$. Тогда выполняется неравенство

$$F(\pi^*, \theta)r(\pi^*, \theta^*) \geqslant F(\pi, \theta)r(\pi^*, \theta^*) \, \forall (\pi, \theta). \quad (9)$$

Действительно, если предположить противное, то в силу (6) будет иметь место неравенство $\varphi(\pi^\infty, \theta) > \varphi(\pi^*, \theta^*)$, что противоречит φ-оптимальности (π^*, θ^*). Из (9) следует $F(\pi^*, \theta^*) \times \times r(\pi^*, \theta^*) \geqslant F(\pi, \theta)r(\pi^*, \theta^*) \forall (\pi, \theta)$. По определению оператора U в (5) это означает, что $F(\pi^*, \theta^*)r(\pi^*, \theta^*) = Ur(\pi^*, {}^*\theta)$. Применяя к обеим частям этого неравенства оператор T, получаем равенство $F^*(\pi^*, \theta^*)r(\pi^*, \theta^*) = U^*r(\pi^*, \theta^*)$. Поскольку при этом $r(\pi^*, \theta^*) = F^*(\pi^*, \theta^*)r(\pi^*, \theta^*)$, то тем самым выполняется равенство в левой части (8).

Обратно, пусть выполнены равенства в левой части (8). Из них следует $Ur(\pi^*, \theta^*) = F(\pi^*, \theta^*)r(\pi^*, \theta^*)$, т. е.

$$\sup_{(\pi, \theta)} \sum_{x \in E} F(\pi, \theta)r(\pi^*, \theta^*)(x) = \sum_{x \in E} F(\pi^*, \theta^*)r(\pi^*, \theta^*)(x). \quad (10)$$

Отсюда

$$\sum_{x \in E} F(\pi, \theta)r(\pi^*, \theta^*)(x) \leqslant \sum_{x \in E} F(\pi^*, \theta^*)r(\pi^*, \theta^*)(x) \forall (\pi, \theta).$$

Такое неравенство может выполняться двумя способами: либо выполняется векторное неравенство

$$F(\pi, \theta)r(\pi^*, \theta^*) \leqslant F(\pi^*, \theta^*)r(\pi^*, \theta^*) \, \forall (\pi, \theta), \quad (11)$$

либо найдется пара (π, θ), такая, что

$$\begin{cases} \sum_{x \in E} F(\pi, \theta)r(\pi^*, \theta^*)(x) = \sum_{x \in E} F(\pi^*, \theta^*)r(\pi^*, \theta^*)(x), & (12) \\ F(\pi, \theta)r(\pi^*, \theta^*) \neq F(\pi^*, \theta^*)r(\pi^*, \theta^*). & (13) \end{cases}$$

В последнем случае, умножая обе части (13) на стационарную матрицу $Q^*(\pi, \theta)$ и учитывая равенство (12), получаем равенство $\varphi(\pi, \theta) = \varphi(\pi^*, \theta^*)$. Это означает, что вариант (12), (13) не нарушает качества стратегии. Поэтому для выяснения качества стратегии (π^*, θ^*) достаточно ограничиться рассмотрением неравенства (11). Но тогда, в силу (7), пара (π^*, θ^*) является φ-оптимальной.

Теорема 1 определяет критерий оптимальности, аналогичный сформулированному теоремой 1 в работе [1]. Поэтому имеют место оптимизационные схемы и методы, вполне аналогичные полученным в [1]. Различия заключаются лишь в определении оператора выбора U. При этом, если ограничиться определением оператора U в соответствии с (5), могут возникать затруднения при его численной реализации. С целью избежать таких затруднений уточним конструкцию этого оператора.

Пусть заданы множества допустимых управлений Y_x, $x \in E$. Для каждого $y \in Y_x$ выберем $\theta^y \in \Theta$ из условия

$$F(y, \theta^y)v(x) = \sup_{\theta \in \Theta} F(y, \theta)v(x).$$

Образуем конечные множества $\Theta^{(x)} = \{\theta^y y \in Y_x\} \subset \Theta$ и $\Theta^{(x)} \times Y_x$. На множестве $\Theta^{(x)} \times Y_x$ выберем максимальный элемент (y^x, θ^x), такой, что

$$F(y^x, \theta^x)v(x) = \max_{(x,\theta) \in \Theta^{(x)} \times Y_x} F(y, \theta)v(x), \ x \in E.$$

Образуем теперь множество $\hat{\Theta} = \{\theta^x, x \in E\}$ и для каждого фиксированного $\theta \in \hat{\Theta}$ построим решающую функцию π_θ из условия

$$F(\pi_\theta, \theta)v(x) = \max_{y \times Y_x} F(y, \theta)v(x) = F(\pi_\theta(x), \theta)v(x), \ x \in E.$$

Наконец, на множестве пар $\hat{\Pi} \times \hat{\Theta} = \{(\pi_\theta, \theta), \theta \in \hat{\Theta}\}$ выберем максимальный элемент (π^*, θ^*):

$$\sum_{x \in E} F(\pi^*, \theta^*)v(x) = \max_{(\pi_\theta, \theta) \in \hat{\Pi} \times \hat{\Theta}} \sum_{x \in E} F(\pi_\theta, \theta)v(x).$$

Определим теперь оператор $\hat{U}$, полагая $\hat{U}v \equiv F(\pi^*, \theta^*)v$.

Предложение 1. $\hat{U} = U$.

Доказательство. По определению оператора U имеем $Uv \geqslant \hat{U}v$. С другой стороны, по построению оператора $\hat{U}$ выполняется неравенство

$$\sum_{x \in E} F(\pi^*, \theta^*)v(x) \geqslant \sum_{x \in E} F(\pi, \theta)v(x) \ \forall (\pi, \theta) \in \Pi \times \Theta.$$

Тем самым $\hat{U}v \geqslant Uv$. Вместе с полученным выше противоположным предпочтением это устанавливает равенство $\hat{U} = U$.

Нетрудно видеть, что оператор $\hat{U}$ допускает его численную реализацию. Поэтому оптимизационные процедуры естественно строить, используя конструкцию оператора $\hat{U}$. Поскольку принцип оптимальности, сформулированный теоремой 1, совпадает с критериями оптимальности, полученными в работе [1], то оптимизационные методы и схемы, вытекающие из теоремы 1, будут совпадать с развитыми в работе [1]. Поэтому мы приведем в окончательном виде одну из рекуррентных оптимизационных процедур, алгоритмическая схема которой отвечает процедуре 1 в [1].

Оптимизационная процедура. Пусть задано $\varepsilon>0$. Положить $r_0=\bar{0}$ и вычислить $r_1=\hat{U}^*r_0$. Пусть выполнены $k\geqslant 1$ итераций и вычислены вектор r_k и пара (π_k, θ_k). Тогда:

1. Вычислить $r_{k+1}=\hat{U}^*r_k=F^*(\pi_{k+1}, \theta_{k+1})r_k$.
2. Если $\|r_{k+1}-r_k\|\leqslant\varepsilon$, то остановить алгоритм, иначе — перейти в 3.
3. Положить $k=k+1$ и перейти в 1.

Обсуждения. Рассмотренная задача представляет новый класс параметрических задач динамического программирования. Как следует из полученных результатов, и в частности из принципа оптимальности, сформулированного теоремой 1, оптимизационные схемы по форме совпадают с полученными в [1] для задач в рамках традиционной марковской модели динамического программирования. Однако конструктивная реализация этих схем для параметрической задачи оказывается существенно сложнее. Это связано с необходимостью сравнения качества пар (π, θ) не покомпонентно по $x\in E$, а сразу для всех $x\in E$, что приводит к необходимости использования предпочтений суммарного эффекта в соответствии с (2), (3). В свою очередь это приводит к однозначному решению задачи (1), что невозможно при других предпочтениях, например Парето, определенного в (4).

Параметрическая задача имеет широкие применения в практических проблемах. Они определяются возможностью различной интерпритации параметра θ. Например, θ может иметь смысл конструктивных параметров системы. Тогда параметрическая задача описывает проблему оптимальных проектных решений, обеспечивающих максимальную эффективность системы в эксплуатации [2].

Список литературы: 1 *Баранов В. В.* Оптимизационные методы последовательных приближений в марковских процессах решений//Кибернетика. 1985. № 4 С. 103—111. 2. *Баранов В. В.* Об одном методе оптимальных решений в задачах оптимизации проектирования//Прикл. математика и механика. 1981. Вып. 46. С. 33—38.

Поступила в редколлегию 04.02.87

УДК 518:512

А. К. ШЕВЧЕНКО, Н. П. ХАРЧЕНКО

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ВЫБОРА ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ИЗ МНОЖЕСТВА АЛЬТЕРНАТИВ

Пусть A — множество, состоящее из m объектов a_i, B — множество характеристик b_j, по которым можно оценить эти объекты. Каждая из характеристик b_j является частным критерием принимающим ряд конкретных значений—оценок $\mu_{ij} (i=\overline{1, m},\ j=\overline{1, n})$. Задача заключается в том, чтобы на основании анализа частных критериев выбрать лучший объект (принять оптимальное решение в задачах управления), используя весовые коэффициенты p_j (коэффициенты иерархии), учитывающие относительную важность характеристик [1—3]. Процедура выбора коэффициентов иерархии может быть формализована. Если нет оснований отдавать предпочтение какому-либо критерию, то все p_j принимаются равными единице.

При выборе объекта по многим частным критериям основной проблемой является приведение пространства частных критериев к единому масштабу (согласование оценок критериев). В общем случае задача согласования оценок затрудняется тем, что критерии могут выражать как качественные, так и количественные характеристики объекта. Для качественных — используются дискретные числовые оценки.

Предлагаемый метод осуществляет четкую процедуру согласования оценок. Прежде всего требуется выполнение двух условий, которые нетрудно удовлетворить: последовательность оценок по каждому критерию является упорядоченной и конечной; направление возрастания предпочтения для каждого критерия определяется направлением возрастания его оценок.

Затем последовательности оценок по каждому критерию преобразуются в безразмерные величины и приводятся к интервалу [0; 1]:

$$\mu'_{ij} = \frac{\mu_{ij} - \mu_j^{\min}}{\mu_j^{\max} - \mu_j^{\min}}, \tag{1}$$

где i принимает все значения от 1 до m для каждого фиксированного j; $\mu_j^{\max}$, $\mu_j^{\min}$ — максимальное и минимальное значение в последовательности оценок по j-критерию.

Далее все критерии приводятся к одному направлению изменения. Для определенности считается, что большая оценка по критерию характеризует лучшее его значение (условие 1). Для критериев с противоположным смыслом оценок достаточно сделать линейное преобразование

$$\nu_{ij} = \begin{cases} \mu'_{ij}, & \text{если условие 1 удовлетворяется,} \\ 1 - \mu'_{ij}, & \text{если условие 1 не удовлетворяется.} \end{cases}$$

В результате получено упорядоченное и однонаправленное множество оценок всех объектов по всем критериям. После этого можно провести анализ объектов по оценкам критериев. Рассматривается отношение двух объектов a_k и a_l из множества A, в результате чего множество критериев B разбивается на две группы: множество $c(a_k, a_l)$ критериев, для которых объект a_k лучше (предпочтительнее) объекта a_l; множество $D(a_k, a_l)$ критериев, по которым a_k хуже a_l. О степени превосходства a_k над a_l можно судить по коэффициенту $\eta(a_k, a_l)$, который определяется следующим образом:

$$\eta(a_k, a_l) = \frac{1}{P} \sum_{j \in c(a_k, a_l)} P_j, \tag{2}$$

где под знаком суммы стоят весовые коэффициенты лишь тех критериев, которые принадлежат множеству $c(a_k, a_l)$, а P — сумма всех p_j. Коэффициенты $\eta(a_k, a_l)$ обладают следующими свойствами: изменяются от 0 до 1; сохраняют свое значение при замене любого j-критерия с весом p_j совокупностью критериев, сумма весов которых тоже равна p_j.

Чтобы уточнить решение о превосходстве a_k над a_l (даже если $\eta(a_k, a_l)$ достаточно велики), рассматриваются интервалы расхождения оценок объектов по каждому из критериев. Вводятся коэффициенты $\zeta(a_k, a_l)$, показывающие расхождение оценок объекта для данного критерия:

$$\zeta(a_k, a_l) = \sum_{l \in D(a_k, a_l)} \frac{p_j}{p} |\nu_{kj} - \nu_{lj}|. \tag{3}$$

Таким образом, каждый объект a_k характеризуется наборами коэффициентов $\eta(a_k, a_l)$ и $\zeta(a_k, a_l)$, $l = \overline{1, m}$. Просуммировав эти коэффициенты для каждого объекта, производят выбор лучшего элемента из множества A по максимальному значению $\sum_{l=1}^{m} \eta(a_k, a_l)$ и минимальному значению $\sum_{l=1}^{m} \zeta(a_k, a_l)$. В случае, когда два объекта близки по значениям сумм коэффициентов $\eta(a_k, a_l)$ и $\zeta(a_k, a_l)$ или для первого объекта лучше сумма $\eta(a_k, a_l)$, а второй имеет предпочтение по сумме $\zeta(a_k, a_l)$, можно применить оценку по коэффициентам $\xi(a_k, a_l)$, которые вычисляются по следующей формуле:

$$\xi(a_k, a_l) = \sum_{j \in c(a_k, a_l)} \frac{p_j}{p} |\nu_{kj} - \nu_{lj}|. \tag{4}$$

В качестве примера рассматривается задача управления производственным процессом, когда необходимо выбрать оптимальную технологию из четырех существующих по частным критериям, которые изменяются в заданных пределах: критерий b_1 — качество изготовления продукции (1—3); критерий b_2 — вид сырья (1—4); критерий b_3 — цена единицы материала (10—50), критерий b_4 — новизна модели выпускаемой продукции (1—5), критерий b_5 — уровень рентабельности (1—2).

Оценки объектов a_i по всем критериям b_j сведены в табл. 1, в которой строка характеризует объект, а столбец представляет последовательность оценок по одному критерию.

Таблица 1

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
a_1	3	4	30	4	2
a_2	2	2	10	4	1
a_3	3	1	50	5	2
a_4	1	3	20	2	1

Таблица 2

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
a_1	1	1	0,5	0,75	1
a_2	0,5	0,3	1	0,75	0
a_3	1	0	0	1	1
a_4	0	0,66	0,75	0,25	0

Таблица 3

	a_1	a_2	a_3	a_4	$\Sigma\eta(a_k,a_l)$
a_1	—	0,85	0,95	0,85	2,65
a_2	0,2	—	0,25	0,7	1,15
a_3	0,75	0,75	—	0,75	2,25
a_4	0,15	0,4	0,25	—	0,80

	a_1	a_2	a_3	a_4	$\Sigma\xi(a_k,a_l)$
a_1	—	0,56	0,47	0,76	1,79
a_2	0,07	—	0,02	0,26	0,28
a_3	0,01	0,51	—	0,73	1,25
a_4	0,03	0,03	0,18	—	0,24

Для согласования оценок используется формула (1), а критерий b_3 приводится к противоположному направлению изменения. В результате табл. 1 преобразуется к виду табл. 2.

Таблица 4

	a_1	a_2	a_3	a_4	$\Sigma\zeta(a_k, a_l)$
a_1	—	0,07	0,01	0,04	0,06
a_2	0,44	—	0,5	0,03	0,97
a_3	0,015	0,18	—	0,17	0,36
a_4	0,75	0,25	0,73	—	1,73

Используя табл. 2 и заданные весовые коэффициенты $p_1=8$, $p_2=2$, $p_3=3$, $p_4=1$, $p_5=6$, по формулам (2) и (3) можно подсчитать коэффициенты $\eta(a_k, a_l)$, $\xi(a_k, a_l)$ и $\zeta(a_k, a_l)$ (табл. 3, 4). Согласно таблицам 3, 4 суммы $\eta(a_k, a_l)$ и $\xi(a_k, a_l)$ максимальны для первого объекта a_1, и для него же сумма $\zeta(a_k, a_l)$ — минимальна. Следовательно, объект a_1 (первая технология) наиболее предпочтителен по своим характеристикам в качестве решения задачи выбора. Эта же задача с другими весовыми коэффициентами имеет другое решение. Например, давая предпочтение новизне модели и уровню рентабельности, получают в качестве решения объект a_3.

Таким образом, разработанный метод, осуществляя выбор оптимального решения (объекта) по частным критериям, позволяет управлять производственным процессом и может быть применен для решения экономических, медицинских и других задач.

Список литературы: 1. *Ларичев О.* Человеко-машинные процедуры принятия решений//Автоматика и телемеханика. 1971. № 12. С. 25—30. 2. *Маркин Б.* Проблемы группового выбора. М., 1976. С. 27—45. 3. *Растригин Э., Эйдук Я.* Адаптивные методы многокритериальной оптимизации//Автоматика и телемеханика. 1985. № 1. С. 30—34.

Поступила в редколлегию 27.01.87

УДК 532.5

И. Е. ТАРАПОВ

ОДИН НОВЫЙ ИНТЕГРАЛ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ВИХРЕВЫХ ПОТОКОВ

Исходная система дифференциальных уравнений в общепринятых обозначениях [1] имеет вид

$$\operatorname{div} \rho \boldsymbol{v} = 0; \quad \boldsymbol{v} \nabla S = 0;$$

$$\nabla \left(\frac{\boldsymbol{v}^2}{2} + \Pi \right) - [\boldsymbol{v}, \operatorname{rot} \boldsymbol{v}] = -\rho^{-1} \nabla p. \qquad (1)$$

Будем рассматривать только такие вихревые потоки среды, которые обладают свойством сохраняемости вихревых линий и интенсивности вихревых трубок по Фридману. Это чисто кинематическое условие [1] является, таким образом, более слабым по сравнению с отсутствием вихрей для интеграла Лагранжа или требованием $\boldsymbol{v} \| \operatorname{rot} \boldsymbol{v}$ для интеграла Громеки; в рассматриваемом случае стационарных потоков это условие имеет вид

$$\operatorname{rot} [\boldsymbol{v}, \operatorname{rot} \boldsymbol{v}] = 0. \qquad (2)$$

Среда в таких потоках должна обладать определенными термодинамическими свойствами:

$$\operatorname{rot} \rho^{-1} \nabla p = 0, \qquad (3)$$

что следует из (1) при выполнении (2).

Условие (3) будет выполнено в баротропной среде; в частном случае баротропии — в среде, для которой энтропия S зависит только от T. При этом правая часть уравнения движения в (1) является градиентом некоторой функции Ф: в общем случае Ф=

$=\Phi(\rho)$, причем $\rho^{-1}\nabla p=\nabla\Phi$, а в частном случае *, в силу первого начала термодинамики $TdS=dE+pd(\rho^{-1})$, имеем $\rho^{-1}\nabla p=\nabla w-$ $-T\nabla S=\nabla\Phi$, где $w=E+p\rho^{-1}$ — энтальпия среды.

Если выполнено условие (2), то существует поверхность (σ), содержащая линии тока и вихревые линии («поверхность уровня»), так что векторы $\boldsymbol{v}$ и $\operatorname{rot}\boldsymbol{v}$ определяют в каждой точке плоскость, касательную к (σ) $(\boldsymbol{v}\nparallel\operatorname{rot}\boldsymbol{v})$. Выберем систему криволинейных координат (x^1, x^2, x^3), так, чтобы линии (x^1) совпадали с линиями тока, линии (x^2) — с вихревыми линиями, а линии (x^3) были ортогональны к (x^1) и (x^2), т. е. направлены по нормали к (σ). Тогда из (2) следует, что всегда можно найти функцию $F=F(x^3)$, так, что $\nabla F=-[\boldsymbol{v}, \operatorname{rot}\boldsymbol{v}]$.

Таким образом, в сформулированных выше предположениях (2) и (3) из уравнения движения (1) имеем

$$\frac{v^2}{2}+\Pi+\Phi+F(x^3)=\text{const}. \tag{4}$$

Это выражение и представляет собой рассматриваемый интеграл, полученный независимо от пути интегрирования для стационарных вихревых потоков, обладающих свойством сохраняемости вихревых трубок. Отметим, что можно было сначала предполагать $\operatorname{rot}\rho^{-1}\nabla p=0$, т. е. определенные термодинамические свойства среды; тогда из (1) следовало бы, что стационарный поток такой среды обладает свойством сохраняемости.

Однако для практического пользования интегралом (4) необходимо уметь находить функцию $F(x^3)$, не прибегая к непосредственному интегрированию системы дифференциальных уравнений (1), а исходя лишь из общих свойств потока. (Заметим, что в случае безвихревых или «винтовых» $(\boldsymbol{v}\|\operatorname{rot}\boldsymbol{v})$ потоков $F=\text{const}$, и тогда (4) представляет собой интеграл Лагранжа или интеграл Громеки [1]). Это удается сделать для таких интегралов, которые, подобно интегралам Лагранжа, Громеки и Бернулли, представляют собой конечные соотношения между кинематическими и динамическими характеристиками потока.

Будем рассматривать такой класс интегралов (4), когда $F=$ $=F(v)$, где $v=|\boldsymbol{v}|$, так что в силу $F=F(x^3)$ скорость потока не меняется на поверхности уровня $(v=v(x^3))$. Таким образом, отыскиваемый интеграл имеет вид

$$\frac{v^2}{2}+\Phi+\Pi+F(v)=\text{const}. \tag{5}$$

В силу сохранения энтропии вдоль линий тока $(\boldsymbol{v}\cdot\nabla S=0)$ и условия (3) все термодинамические параметры также неизменны вдоль линий тока. Изменение этих параметров вдоль вихревых линий и по нормали к поверхности уровня определяется в силу (5) изменением потенциала массовых сил $\Pi=\Pi(x^2, x^3)$. Нетрудно

* Этот случай охватывает и рассмотрение таких жидкостей, для которых, например, $\rho=\rho(T)$.

видеть, что интеграл (5) существует только в поле потенциальных сил, не меняющемся вдоль линий тока, а при неизменном на поверхности уровня потенциале термодинамические величины также постоянны на ней.

Для отыскания случаев существования интеграла (5) исследуем геометрию поверхности (σ), которая определяется целиком гидродинамическими характеристиками потока.

Уравнение (2) с помощью уравнения неразрывности из (1) может быть представлено в виде

$$(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{\omega}=(\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla)\boldsymbol{v};\quad(\boldsymbol{\omega}=\rho^{-1}\operatorname{rot}\boldsymbol{v}). \tag{6}$$

Записывая это уравнение в контравариантных компонентах векторов $\boldsymbol{v}$ и ω, получим

$$a_{11}\frac{\partial}{\partial x^2}\ln\boldsymbol{v}^1-a_{12}\frac{\partial}{\partial x^1}\ln\omega^2=0;$$

$$a_{12}\frac{\partial}{\partial x^2}\ln v^1-a_{22}\frac{\partial}{\partial x^1}\ln\omega^2=0,$$

где $a_{\alpha\beta}$ — метрические коэффициенты поверхности (σ), связанные с метрическими коэффициентами системы (x^1, x^2, x^3) следующими соотношениями $a_{\alpha\beta}=g_{\alpha\beta}$ (α, $\beta=1$, 2). Отсюда имеем $v^1=v^1(x^1, x^2)$; $\omega^2=\omega^2(x^2, x^3)$.

Из выражений для ко- и контравариантных компонент векторов $\boldsymbol{v}, \omega$:

$$v^1=v^1(x^1,x^2);\ v^2=v^3=0;\ v_1=v\sqrt{a_{11}};\ v_2=a_{12}(a_{11})^{-1/2}v;\ v_3=0;$$

$$\omega^2=\frac{1}{\rho\sqrt{g}}\frac{\partial v_1}{\partial x^3};\ \omega^1=\omega^3=0;\ \omega_1=a_{12}\omega^2;\ \omega_2=a_{22}\omega^2,\ \omega_3=0;$$

$$(g\equiv\det|g_{ik}|).$$

получаем

$$\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{v}{\sqrt{a_{11}}}\right)=0;\ \frac{\partial}{\partial x^3}\left(\frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}}v\right)=0;\ \frac{\partial}{\partial x^1}\left(v\frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}}\right)=\frac{\partial}{\partial x^2}(v\sqrt{a_{11}}). \tag{7}$$

Из уравнения неразрывности, записанного на поверхности (σ) и в пространстве, имеем

$$\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\sqrt{\frac{a}{a_{11}}}\right)=0;\ \frac{\partial}{\partial x^1}\left(\sqrt{\frac{g}{a_{11}}}\right)=0; \tag{8}$$

$$g=g_{33}a=g_{33}(a_{11}a_{22}-a_{12}^2);\ a\equiv\det|a_{\alpha\beta}|.$$

Наконец, из выражения для ∇F запишем

$$\frac{dF}{dx^3}=-\rho\sqrt{g}\,v^1\omega^2=-\frac{v}{\sqrt{a_{11}}}\frac{\partial}{\partial x^3}(v\sqrt{a_{11}}).$$

Из (7)—(9), учитывая $v=v(x^3)$, получаем вид зависимостей метрических коэффициентов $a_{\alpha\beta}$ поверхности уровня (σ) рассматриваемых вихревых течений:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \alpha^2(x^1)\beta^2(x^3)v^{-2}(x^3); \\ a_{12} &= \sqrt{a_{11}}\,v^{-1}(x^3)\delta(x^2); \\ a_{22} &= a_{12}^2 a_{11}^{-1} + f(x^2, x^3). \end{aligned} \tag{10}$$

Здесь

$$\alpha(x^1) = v(x^{30})\sqrt{a_{11}(x^1, x^{30})};\quad \beta(x^3) = \exp\left\{-\int_{x^{30}}^{x^3} F'(\xi)v^{-2}(\xi)d\xi\right\}$$

$\delta(x^2)$, f — произвольные функции; $g_{33} = g_{33}(x^2, x^3)$.

Как показывают вычисления, Гауссова кривизна К для поверхности (σ) с метрикой (10), имеет вид

$$K = \frac{1}{a}\left\{\frac{a_{11}}{4a}\left(\frac{\partial f}{\partial x^1}\right)^2 + \frac{1}{4a_{11}}\frac{\partial a_{11}}{\partial x^1}\frac{\partial f}{\partial x^1} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^1}\right\} = 0. \tag{11}$$

Таким образом, в рассматриваемом потоке поверхность уровня (σ) является развертывающейся поверхностью и, следовательно, может быть либо цилиндром, либо конусом, либо поверхностью, образованной касательными к пространственной кривой [2].

Кривизны координатных линий (x^1) и (x^2) равны соответственно

$$\varkappa_1 = -\frac{1}{\sqrt{a_{11}g_{33}}}\frac{\partial}{\partial x^3}\sqrt{a_{11}};\quad \varkappa_2 = -\frac{1}{\sqrt{a_{22}g_{33}}}\frac{\partial}{\partial x^3}\sqrt{a_{22}}. \tag{12}$$

При этом заметим, что в силу (9) и (10) имеем

$$\begin{aligned} \varkappa_1 &= -\frac{1}{\sqrt{g_{33}}}\frac{\partial}{\partial x^3}\ln\sqrt{a_{11}} = -\frac{1}{\sqrt{g_{33}}}\frac{d}{dx^3}\ln\frac{\beta(x^3)}{v(x^3)} = \\ &= \frac{1}{v\sqrt{g_{33}}}\frac{d}{dx^3}\left(\frac{v^2}{2} + F\right), \end{aligned} \tag{13}$$

а интеграл (5) может быть записан в виде

$$\Phi + \Pi + \int v\sqrt{g_{33}}\,\varkappa_1 dx^3 = \text{const}$$

или

$$\Phi + \Pi - \int \frac{v^2}{2a_{11}}\frac{\partial a_{11}}{\partial x^3}dx^3 = \text{const}. \tag{14}$$

Удельная вихревая интенсивность может быть выражена

$$\omega = \frac{1}{\rho}\sqrt{\frac{a_{22}}{g}}\frac{\partial}{\partial x^3}\left(v\sqrt{a_{11}}\right). \tag{15}$$

Пусть $r=r(u^1, u^2)$ — регулярная параметризация развертывающейся поверхности (σ), которая в системе координат (x^1, x^2) имеет метрические коэффициенты вида (10). Если предположить, что преобразование $u^1=u^1(x^1, x^2)$, $u^2=u^2(x^1, x^2)$ является неособым (как и обратное), то можно показать, что, если одно из направлений (u^1), (u^2) является асимптотическим, то тогда в силу (10) оси (x^1) и (x^2) должны совпадать соответственно с (u^1) и (u^2).

Поэтому, не уменьшая общности рассуждений, мы можем считать, что поверхность уровня задана одним из уравнений [2]:

$$r = \mathbf{A}(x^2, x^3) + x^1\mathbf{B}(x^2, x^3), \tag{16}$$

$$r = C(x^1, x^3) + x^2\,\mathbf{D}(x^1, x^3). \tag{17}$$

В случае (16), когда линии тока прямолинейны, чтобы удовлетворить (10), необходимо положить $\mathbf{B}=\mathbf{B}(x^3)$; $|\mathbf{B}|=1$. Тогда

$$a_{11} = 1;\ a_{12} = \sqrt{a_{11}a_{22}}\cos \boldsymbol{v}, \boldsymbol{\omega});\ a_{22} = \left|\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x^2}\right|^2. \tag{18}$$

В этом случае в силу (14) интеграл уравнения движения имеет вид $\Phi+\Pi=\mathrm{const}$ **(19)**, при удельной вихревой интенсивности

$$\omega = \frac{1}{\rho\sqrt{g_{33}}\,\sin(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\omega})}\,\frac{dv}{dx^3}.$$

Если (σ) — цилиндрическая поверхность, т. е. $\mathbf{B}=\mathbf{B}_0$ — постоянный вектор, то (σ) определяет прямолинейный поток. В системе декартовых координат (x, y, z) для него имеем $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{i}_x v(y, z)$, $\mathrm{rot}_x\,\boldsymbol{v}=0$. Таким образом, в (17) в этом случае следует положить $\cos(\boldsymbol{v}, \omega)=0$, так что $a_{11}=1$, $a_{12}=0$, $a_{22}=\left|\frac{\partial \mathbf{A}(x^2, x^3)}{\partial x^2}\right|$. Заметим, что уравнение вихревых линий в этом случае имеет вид $v(y, z)=\mathrm{const}$. Частным случаем прямолинейного является плоский поток, для которого $\mathbf{A}=x^2\mathbf{A}_0$, где $A_0=\mathrm{const}$, причем $\mathbf{A}_0\perp\mathbf{B}_0$.

Поверхность (σ) не может быть поверхностью, образованной касательными к пространственной кривой (в этом случае $r=\mathbf{A}(x^3)+x^1\mathbf{B}(x^2)$), ибо это не согласуется с (17).

Если предположить, что (σ) — конус, уравнение которого в сферической системе (r, φ, θ) можно записать ($\boldsymbol{i}_x, \boldsymbol{i}_y, \boldsymbol{i}_z$ — орты прямоугольной декартовой системы): $r = \boldsymbol{i}_x r\sin\theta\sin\varphi + \boldsymbol{i}_y r\cos\theta + \boldsymbol{i}_z r\sin\theta\cos\varphi$, то, учитывая $x^1 \equiv r$, $x^2 \equiv \varphi$, $x^3 \equiv \theta$, получаем

$$a_{11}=1,\ a_{12}=0,\ a_{22}=(a^1)^2\left[\sin^2 x^3 + \left(\frac{dx^3}{dx^2}\right)^2\right] \tag{20}$$

$g_{33}=(x^1)^2$; $x^3=x^3(x^2)$ — уравнение сечения конуса сферой $x^1=\mathrm{const}$. Однако в этом случае (8) не удовлетворяется.

Если поверхность уровня задана в виде (17), так что прямолинейными являются вихревые линии, то, чтобы были выполнены условия (10), необходимо

$$a_{11} = \left|\frac{\partial c}{\partial x^1}\right|^2;\ a_{12} = \sqrt{a_{11}a_{22}}\cos(\boldsymbol{v}.\,\boldsymbol{\omega})a_{22} = 1; \tag{21}$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}(x^3);\ |\mathbf{D}| = 1.$$

Из выражения $a_{11}=\left|\frac{\partial c}{\partial x^1}\right|^2=\alpha^2(x^1)\frac{\beta^2(x^3)}{v^2(x^3)}$ следует, что (σ) не может быть поверхностью, образованной касательными к пространственной кривой (когда $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{c}(x^3)+x^2\mathbf{D}(x^1)$); она не может быть и конусом, для которого $a_{11}=(x^2)^2\left[\sin^2 x^3+\left(\frac{dx^3}{dx^1}\right)^2\right]$, поскольку это не согласуется ни с (10), ни с (21).

Таким образом, в этом случае (σ) может быть только цилиндром, для которого $\mathbf{D}=\mathbf{D}_0$ — постоянный вектор. В силу структуры a_{11} и условия $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^1}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^3}=0$, имеем два возможных выражения для $\boldsymbol{c}(x^1,x^3)$:

$$\boldsymbol{c}(x^1,x^3)=f_1(x^1)\boldsymbol{c}_1(x^3);\ \boldsymbol{c}(x^1,x^3)=f_2(x^3)\boldsymbol{c}_2(x^1);\ |\boldsymbol{c}_1|=|\boldsymbol{c}_2|=1.$$

В первом случае получаем плоско-параллельный поток $\left(f_1f_1'=\alpha^2(x^1);\ \frac{\beta(x^3)}{v(x^3)}=\mathrm{const}\right)$, во втором случае имеем $\alpha(x^1)=1$; $\frac{\beta(x^3)}{v(x^3)}=\mathrm{const}$. Поскольку $\frac{\partial \boldsymbol{c}_2}{\partial x^1}\cdot\boldsymbol{c}_2=0$ и $\boldsymbol{c}_2$ направлено по радиусу-вектору $\boldsymbol{r}-x^2\mathbf{D}_0$, то нормаль к ($\sigma$) в любой точке совпадает с этим вектором. Следовательно (σ) — круговой цилиндр. Если $\cos(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\omega})=\frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}a_{22}}}=\frac{\delta(x^2)}{v(x^3)}\neq 0$, то кривизна линии ($x^1$) равна $\varkappa_1=-\frac{\sin^2(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\omega})}{x^3}=-(g_{33})^{-\frac{2}{1}}\frac{\partial}{\partial x^3}\ln\sqrt{a_{11}}$. Так как $g_{33}=1$, то $\frac{\partial\varkappa_1}{\partial x^1}=\frac{\partial\varkappa_1}{\partial x^2}=0$, и поэтому $\cos(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\omega})$ на (σ) не меняется ($\delta(x^2)=1$). Таким образом, (x^1) — простая винтовая линия и тогда $f(x^3)=(x^3)^{\sin^2(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\omega})}$; $a_{11}=(x^3)^{2\sin^2(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\omega})}$. Интеграл (14) приобретает вид

$$\Phi+\Pi-\int\frac{v^2(x^3)}{x^3}dx^3+v_0^2\ln x^3=\mathrm{const}, \tag{22}$$

где $v_0=v\cos(v,\omega)$ — постоянная скорость поступательного движения среды, накладываемого на круговое со скоростью $v(x)^3$.

Удельная вихревая интенсивность выражена

$$\omega=\frac{1}{\rho|\sin(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\omega})|(x^3)^{\sin^2(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\omega})}}\frac{\partial}{\partial x^3}\left[v(x^3)(x^3)^{\sin^2(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\omega})}\right],$$

где
$$\sin^2(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\omega})=1-\frac{v_0^2}{v^2(x^3)}.$$

В частном случае $v_0=0$ имеет случай кругового движения.

Итак, подводя итог вышесказанному, можно сформулировать следующую теорему.

Теорема. *Стационарное вихревое движение среды, при котором вихревые линии и интенсивность вихревых трубок сохраняются, а поле массовых сил имеет потенциал, не меняющийся вдоль линий тока, допускает независимый от пути интегрирования интеграл вида*

$$\frac{v^2}{2} + \Phi + \Pi + F(v) = \mathrm{const},$$

только в случаях 1) *прямолинейный поток (в частности, плоскопараллельный поток)*, 2) *движение по простым винтовым линиям (в частности, круговое движение).*

В первом случае интеграл имеет вид (19), так что изменение термодинамических параметров (гидродинамического давления — в случае несжимаемого потока), которые остаются постоянными вдоль линий тока, целиком определяется потенциалом массовых сил.

Во втором случае интеграл имеет вид (22). В обоих случаях скорость $v=v(x^3)$ не меняется на поверхности уровня, а удельная вихревая интенсивность выражена (15).

Заметим, что интегралы (19), (22) могут быть легко получены для обоих случаев движения непосредственно, без построения поверхности (σ). Гораздо большее значение имеет факт отсутствия других случаев интеграла типа (5) уравнений рассматриваемого вихревого движения.

Сделаем еще одно замечание, имеющее отношение к магнитной гидродинамике.

Уравнения движения идеально проводящей несжимаемой жидкости содержит существенно вихревое магнитное поле. Нетрудно видеть, что существование интеграла стационарного потенциального или винтового движения такой жидкости сводится к исследованию свойств поверхности ($\sigma_н$), содержащей магнитные силовые линии и линии электрического тока. На основании изложенных выше результатов можно заключить, что интеграл уравнения движения при этом существует только для случая цилиндрической поверхности ($\sigma_н$) и прямолинейных магнитных линий или прямолинейных линий электрического тока. Для вихревых движений жидкости этот результат верен, если магнитное поле всюду пропорционально полю скорости.

Список литературы: 1. *Седов Л. И.* Методика сплошной среды. М., 1973. Т. 1. 190 с. 2. *Погорелов А. В.* Дифференциальная геометрия. М., 1969. 230 с.

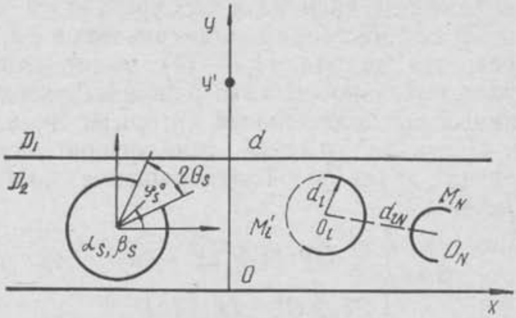
Поступила в редколлегию 10.04.87

УДК 537.874.4

А. А. ЛУЦЕНКО

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДИФРАКЦИИ НА БЕСКОНЕЧНО ТОНКИХ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ЭКРАНАХ В КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Потребности современной радиофизики [1, 2], дефектоскопии [3] и некоторых других приложений математической теории дифракции вызывают повышенный интерес к задачам рассеяния волн на неоднородностях при наличии границ раздела в окружающей среде.



В работе на примере задачи возбуждения диэлектрического слоя, содержащего идеально проводящие бесконечно тонкие экраны, нитью магнитного тока предлагается один из возможных подходов к решению двумерных задач дифракции электромагнитных волн на криволинейных экранах правильной формы в кусочно-однородных средах.

Рассмотрим в пространстве R^2 области $D_1 = \{(x, y): y > d, -\infty < x < \infty\}$ и $D_2 = \{(x, y): 0 < y < d, -\infty < x < \infty\}$. Обозначим $D_2' = D_2 \setminus M$, $D = D_1 \cup D_2'$, где $M = \bigcup\limits_{s=1}^{N} M_s$, а M_s — дуга окружности радиуса a_s с центром в точке $O_s(\alpha_s, \beta_s)$ (рисунок). Предполагается, что $\partial D_2 \cap (\bigcup\limits_{s=1}^{N} M_s') = \varnothing$ (M_s' — дополнение M_s до окружности, ∂D_2 — граница области D_2).

В области D ставится следующая краевая задача:

$$\Delta G + k^2 \lambda(x, y) G = -\delta(x - x', y - y'), \tag{1'}$$

$$\left.\frac{\partial G}{\partial y}\right|_{y=0+0} = 0, \tag{1}$$

$$G|_{y=d+0} = G_{y=d-0}; \quad \frac{1}{\varepsilon_1} \left.\frac{\partial G}{\partial y}\right|_{y=d+0} = \frac{1}{\varepsilon_2} \left.\frac{\partial G}{\partial y}\right|_{y=d-0}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial G^+}{\partial n_s} = \frac{\partial G^-}{\partial n_s} = 0, \ (x, y) \in M_s, \tag{3}$$

$$G \to 0, \ (x' - x)^2 + (y' - y)^2 \to \infty. \tag{4}$$

Здесь n_s — внешняя (направленная в сторону, которой соответствует знак $+$) нормаль к экрану M_s; $G^{\pm}$ — предельные значения G снаружи ($+$) и изнутри ($-$) M_s, ε_1; ε_2 — комплексные константы, причем $Im\varepsilon_{1,2}>0$, $Re\varepsilon_{1,2}>0$; $k=\omega/c$, ω — круговая частота источника (зависимость от времени выбрана в виде $e^{-i\omega t}$), c — скорость света и

$$\lambda(x, y) = \begin{cases} \varepsilon_1, & (x, y)\in D_1 \\ \varepsilon_2, & (x, y)\in D_2' \end{cases}.$$

Кроме того, поскольку граница области имеет геометрические сингулярности, потребуем, чтобы функция G удовлетворяла условию типа Мейкснера в их окрестности [4].

Из общих теорем для уравнений эллиптического типа [5] следует, что задача (1′)—(4) имеет единственное решение. Ниже будет показано, что это решение существует, и предложен эффективный вычислительный алгоритм его нахождения.

Пусть $(x', y')\in D_1$ (аналогично может быть рассмотрен случай $(x', y')\in D_2$). Тогда решение задачи (1′)—(4) будем искать в виде

$$G = \begin{cases} \frac{i}{4}H_0^{(1)}\left(k_1\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2}\right) + G_1^1, & (x, y)\in D_1 \\ G_1^1 + G_2^2, & (x, y)\in D_2', \end{cases}$$

где функции G_1^1, G_2^1, $G_2^2 \in W_2^1(R^2)$. Поэтому в D_1 имеет место представление

$$G_1^1 = \frac{i}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\eta)e^{i\eta x+i\varkappa_1(y-d)}\frac{d\eta}{\varkappa_1}, \tag{5}$$

а в D_2'

$$G_2^1 = \frac{i}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\eta x}\left[f_2(\eta)e^{i\varkappa_2 y} + f_3(\eta)e^{-i\varkappa_2(y-d)}\right]\frac{d\eta}{\varkappa_2}, \tag{6}$$

$$G_2^2 = \frac{i}{4}\sum_{s=1}^{N}\int_{M_s}\mu_s(p_s^0)\frac{\partial}{\partial n_s^0}H_0^{(1)}(k_2|p-p_s^0|)dm_s, \tag{7}$$

причем (7) следует из второй формулы Грина.

В (5)—(7) $\varkappa_{1,2}=(k_{1,2}^2-\eta^2)^{\frac{1}{2}}$, $\operatorname{Im}\varkappa_{1,2}\geqslant 0$, $\operatorname{Re}\varkappa_{1,2}\geqslant 0$, $k_{1,2} = k\sqrt{\varepsilon_{1,2}}$, $p\in D_2'$, $p_s^0\in M_s$ и для простоты положено $x'=0$.

Используя разложение $H_0^{(1)}(k_2|p-p_s^0|)$ по плоским волнам [6], G_2^2 представим в виде

$$G_2^2 = \frac{i}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\eta x}f_4(\eta, y)\frac{d\eta}{\varkappa_2},$$

где

$$f_4(\eta, y) = \sum_{s=1}^{N} \int_{M_s} \mu_s(p_s^0) \frac{\partial}{\partial n_s^0} \left\{ e^{-i\eta(\alpha_s + x_s^0) + i\varkappa_2|y - \beta_s - y_s^0|} \right\} dm_s,$$

а (x_s^0, y_s^0) — координаты точки p_s^0 в s-й декартовой системе координат.

Из условий (1), (2) следует

$$f_3(\eta) = \left[\frac{i(\varepsilon_1\varkappa_2 - \varepsilon_2\varkappa_1)}{\varkappa_2} \frac{\partial f_4(\eta, 0)}{\partial y} - i\varepsilon_1 e^{-i\varkappa_2 d} \frac{\partial f_4(\eta, d)}{\partial y} - \right.$$

$$\left. - \varkappa_1\varepsilon_2 e^{-i\varkappa_2 d} f_4(\eta, d) + 2\varepsilon_2\varkappa_2 e^{i\varkappa_1(y'-d) - i\varkappa_2 d} \right] \frac{1}{F_2(\eta)};$$

$$f_2(\eta) = e^{i\varkappa_2 d} f_3(\eta) + \frac{i}{\varkappa_2} \frac{\partial f_4(\eta, 0)}{\partial y},$$

где $F_2(\eta) = 2\varepsilon_2\varkappa_1 \cos\varkappa_2 d - 2i\varepsilon_1\varkappa_2 \sin\varkappa_2 d$. Введем в рассмотрение функцию

$$f_4^{\pm}(\eta) = \sum_{s=1}^{N} \int_{M_s} \mu_s(p_s^0) \frac{\partial}{\partial n_s^0} \left\{ e^{-i\eta(\alpha_s + x_s^0) \pm i\varkappa_2(\beta_s + y_s^0)} \right\} dm_s. \tag{8}$$

Тогда выражения для $f_3(\eta)$ и $f_2(\eta)$ можно привести к виду

$$f_3(\eta) = \frac{F_1(\eta)\Omega(\eta) + 2\varepsilon_2\varkappa_2 e^{i\varkappa_1(y'-d) - i\varkappa_2 d}}{F_2(\eta)}, \tag{9}$$

$$f_2(\eta) = f_3(\eta) e^{i\varkappa_2 d} + f_4^{+}(\eta), \tag{10}$$

где $\Omega(\eta) = f_4^{+}(\eta) + f_4^{-}(\eta)$, $F_1(\eta) = \varepsilon_1\varkappa_2 - \varepsilon_2\varkappa_1$.

Из условия Мейкснера следует, что функции $\mu_s(p_s^0)$, продолженные нулем на M'_s, могут быть представлены рядами Фурье

$$\mu_s(p_s^0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mu_n^s e^{in\varphi_s^0}, \quad p_s^0 = (a_s, \varphi_s^0), \tag{11}$$

которые равномерно сходятся на $0 \leqslant \varphi_s^0 \leqslant 2\pi$. Введем угол ψ по формуле $\eta = k_2 \sin\psi$. Тогда из (6), учитывая (8), (9) — (11) и формулу Якоби-Ангера [6]:

$$e^{tz\sin\gamma} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\pm 1)^n J_n(z) e^{\pm in\gamma}$$

после некоторых преобразований получим представление для G_2^1 в координатах q-го экрана

$$G_2^1=\frac{ik_2}{2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}J_m(k_2r_q)e^{im\varphi_q}\left[\sum_{s=1}^{N}a_s\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mu_n^sJ'_n(k_2a_s)A_{mn}^{sq}+B_m^q\right],\quad(12)$$

где

$$A_{mn}^{sq}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\eta(\alpha_q-\alpha_s)}\left[(-1)^ne^{i\varkappa_2(\beta_q+\beta_s)+i(m+n)\psi}+Z_{mn}^{sq}\frac{F_1(\eta)}{F_2(\eta)}\right]\frac{d\eta}{\varkappa_2},\quad(13)$$

$$Z_{mn}^{sq}=(e^{i\varkappa_2\beta_q+im\psi}+(-1)^me^{-i\varkappa_2\beta_q-im\psi})(-1)^ne^{i\varkappa_2\beta_q+in\psi}+e^{-i\varkappa_2\beta_q-in\psi}),$$

$$B_m^q=\int_{-\infty}^{\infty}2\varepsilon_2e^{i\varkappa_1(y'-d)+i\eta\alpha_q}(e^{i\varkappa_2\beta_q+im\psi}+(-1)^me^{-i\varkappa_2\beta_q-im\psi})\frac{d\eta}{F_2(\eta)}.\quad(14)$$

Чтобы записать G_2^2 в координатах q-го экрана, необходимо дважды применить теорему сложения цилиндрических функций [6]:

$$H_n^{(1)}(k_2r_s)e^{in\varphi_s}=\begin{cases}\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty}H_{n-m}^{(1)}(k_2d_{qs})J_m(k_2r_q)e^{i(n-m)\varphi_{sq}+im\varphi_q}, & r_q<d_{qs}\\ \sum\limits_{m=-\infty}^{\infty}H_{n-m}^{(1)}(k_2r_q)J_m(k_2d_{qs})e^{i(n-m)\varphi_q+im\varphi_{sq}}, & r_q>d_{qs}\end{cases}$$

и формулу Якоби-Ангера. В результате получаем

$$G_2^2=\frac{ik_2\pi a_q}{2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\mu_m^q\begin{Bmatrix}H_n^{(1)}(k_2r_q)J'_n(k_2a_q), & r_q>a_q\\ H_n^{(1)'}(k_2a_q)J_n(k_2r_q), & r_q<a_q\end{Bmatrix}e^{im\varphi_q}+\quad(15)$$

$$+\sum_{s\neq q}^{N}\frac{ik_2\pi a_q}{2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}J_m(k_2r_q)\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mu_n^sJ'_n(k_2a_s)H_{n-m}^{(1)}(k_2d_{sq})e^{i(n-m)\varphi_{sq}}\right]e^{im\varphi_q}.$$

Подставляя (13), (15) в граничное условие (3) и присоединяя к полученному уравнению

$$\pi k_2a_q\sum_{m=-\infty}^{\infty}\mu_m^qH_m^{(1)'}(k_2a_q)J'_m(k_2a_q)+$$

$$+\sum_{s\neq q}^{N}\pi k_2a_q\sum_{m=-\infty}^{\infty}J'_m(k_2a_q)\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mu_n^sJ'_n(k_2a_s)H_{n-m}^{(1)}(k_2d_{sq})e^{i(n-m)\varphi_{sq}}\right]e^{im\varphi_q}+$$

$$+\sum_{m=-\infty}^{\infty}J'_m(k_2a_q)e^{im\varphi_q}\left[k_2\sum_{s=1}^{N}a_s\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mu_n^sJ'_n(k_2a_s)A_{mn}^{sq}+\frac{1}{2\pi}B_m^q\right]=$$

$$=0,(a_q,\varphi_q)\in M_q\quad(16)$$

равенство

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mu_m^q e^{im\varphi_q} = 0 \quad \varphi_q \in M'_q, \tag{17}$$

приходим к системе парных суммарных уравнений с ядрами в виде тригонометрических функций ($q=1, ..., N$).

Рассмотрим q-ю пару уравнений. Из рисунка видно, что M_q соответствуют углы $\varphi_q : \theta_q < |\varphi_q - \varphi_q^0| \leqslant \pi$, а дополнительным дугам M'_q — углы $\varphi_q : |\varphi_q - \varphi'_q| < \theta_q$. Обозначив $\gamma_q = \varphi_q - \varphi_q^0 + \pi$, $\theta'_q = \pi - \theta_q$, $y_m^q = (-1)^m \mu_m^q e^{im\varphi_q^0}$, приведем q-ю систему к виду

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m^q |m| e^{im\gamma_q} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Gamma_m^q e^{im\gamma_q} \quad |\gamma_q| < \theta'_q, \tag{18}$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m^q e^{im\gamma_q} = 0 \quad \theta'_q < |\gamma_q| \leqslant \pi, \tag{19}$$

где

$$\Gamma_m^q = y_m^q \delta_m^q + i (k_2 a_q)^2 \sum_{s \neq q}^{N} \frac{a_s}{a_q} J'_m (k_2 a_q) (-1)^{m-1} e^{i(n-m)\varphi_q^0} \times$$

$$\times \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n^s J'_n (k_2 a_s) H_{n-m}^{(1)} (k_2 d_{sq}) e^{i(n-m)\varphi_{sq}} \right] +$$

$$+ \frac{i (k_2 a_q)^2}{\pi} \sum_{s=1}^{N} \frac{a_s}{a_q} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J'_m (k_2 a_q) \times$$

$$\times \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n^s J'_n (k_2 a_s) A_{mn}^{sq} (-1)^n e^{-in\varphi_q^0} + \frac{B_m^q}{2\pi^2 k_2 a_q} \right] \times (-1)^m e^{im\varphi_q^0};$$

$$\delta_m^q = |m| + i\pi (k_2 a_q)^2 J'^m (k_2 a_q) H_m^{(1)'} (k_2 a_q).$$

Продифференцировав (19) по γ_q и полагая $x_m^q = m y_m^q$, $x_0^q = y_0^q$, преобразуем систему (18), (19) к канонической форме

$$\left\{ \begin{aligned} & \sum_{m \neq 0} x_m^q e^{im\gamma_q} = 0 \quad \theta'_q < |\gamma_q| < \pi, && (20) \\ & \sum_{m \neq 0} x_m^q \frac{|m|}{m} e^{im\gamma_q} = \sum_{m \neq 0} \Gamma_m^q e^{im\gamma_q} \quad |\gamma_q| < \theta'_q, && (21) \\ & \sum_{m \neq 0} (-1)^m \frac{x_m^q}{m} = - x_0^q, && (22) \end{aligned} \right.$$

где (22) получено из (19) при $\gamma_q = \pi$. Система (20)—(22) эквивалентна задаче Римана—Гильберта [7].

Применяя известную [7] процедуру, сводим (20)—(22) к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений

$$\mu_n^q = \sum_{s=1}^{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mu_n^s R_{mn}^{sq} + E_m^q \quad \begin{matrix} m=0, \pm 1, \pm 2, \ldots \\ q=1, \ldots, N. \end{matrix} \tag{23}$$

Матричные элементы системы (23) могут быть представлены в виде $R_{mn}^{sq} = C_{mn}^q + T_{mn}^{sq} + U_{mn}^{sq}$, где матрицы (C_{mn}^q) соответствуют задаче дифракции на одиночном (q-м) экране, матрицы (T_{mn}^{sq}) описывают взаимодействие q-го экрана с остальными N—1 экранами, находящимися в однородной среде с параметром ε_2, а матрица (U_{mn}^{sq}) описывает наличие границ раздела сред

$$E_m^q = ik_2 a_q (2\pi)^{-2} (-1)^{-m} e^{-im\varphi_q^0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n J_n' (k_2 a_q) B_n^q e^{in\varphi_q^0} \chi_m^n,$$

$$C_{mn}^q = \delta_n^q (-1)^{n-m} e^{i(n-m)\varphi_q^0} \chi_m^n,$$

$$T_{mn}^{sq} = ik_2 a_s \sum_{p=-\infty}^{\infty} J_p' (k_2 a_q) J_n'(k_2 a_s)(-1)^{p-m} e^{i(p-m)\varphi_q^0} (1-\sigma_{sq}) H_{n-p}^{(1)}(k_2 d_{sq}) \chi_m^p,$$

$$U_{mn}^{sq} = \frac{ik_2 a_s}{\pi} \sum_{p=-\infty}^{\infty} J_p'(k_2 a_q) J_n'(k_2 a_s)(-1)^{p-m} e^{i(p-m)\varphi_q^0} (1-\sigma_{sq}) A_{pn}^{sq} \chi_m^p.$$

Здесь σ_{sq} — символ Кронекера, а

$$\chi_m^n = \begin{cases} -W_n, & m=0 \\ V_{m-1}^{n-1}/m, & m \neq 0. \end{cases}$$

Функции W_n и V_m^n выражаются через полиномы Лежандра и приведены в работе [7].

Покажем, что при каждом $q=1, \ldots, N$ ряды $\sum\limits_m |E_m^q|^2$ сходятся.

Из оценок интегралов B_n^q, полученных методом перевала при больших $|n|$, следует неравенство

$$|B_n^q| < \frac{\text{const}}{\sqrt{|n|}} \left[\left(\frac{2|n|}{et^+} \right)^{|n|} + \left(\frac{2|n|}{et^-} \right)^{|n|} \right], \quad t^{\pm} = |k_2| \sqrt{(y' \pm \beta_q)^2 + \alpha_q^2} \tag{24}$$

с константой, зависящей от геометрических и электродинамических параметров задачи. Из (24), оценок W_n и V_m^n [7]

$$W_n < \frac{1}{|n|} \quad n \neq 0,$$

$$V_m^n(u_q) < \frac{\sqrt{|m|}}{|n-m|\sqrt{1+|n|}} \cdot \frac{4}{\sqrt{\pi (1-u_q^2)^{\frac{1}{2}}}} \quad \begin{matrix} n \neq m, \\ u_q = -\cos\varphi_q, \end{matrix}$$

а также асимптотических свойств функции J'_n при $|n| \to \infty$ непосредственно следует требуемое.

В работе [7] показано, что имеет место сходимость рядов $\sum_{m,n} |C_{mn}^{sq}|^2$ и $\sum_{m,n} |T_{mn}^{sq}|^2$. Для интегралов A_{pn}^{sq} справедливы оценки, полученные методом перевала при больших $|n|$, $|p|$ и аналогичные (24):

$$A_{pn}^{sq} < \sum_{j=1}^{s} \mathrm{const}_j \left[\frac{2(|n|+|p|)}{e \cdot |t_j|} \right]^{|n|+|p|} \frac{1}{\sqrt{|n|+|p|}}, \tag{25}$$

где t_j — одно из чисел $k_2\sqrt{(\alpha_q-\alpha_s)^2+(\beta_q+\beta_s)^2}$, $k_2\sqrt{(\alpha_q-\alpha_s)^2+(2d\pm\beta_q\pm\beta_s)^2}$, $k_2\sqrt{(\alpha_q-\alpha_s)^2+(2d\pm\beta_q\pm\beta_s)^2}$; const_j — константы, зависящие от геометрии задачи и параметров среды. Используя (25) и оценки W_n, V_m^p, J'_n, J'_p при больших значениях индексов, получаем

$$\sum_{m,n} |U_{mn}^{sq}|^2 < \infty, \; s, \; q = 1, \ldots, N.$$

Таким образом, сходятся и ряды $\sum_{m,n} |R_{mn}^{sq}|^2$, s, $q = 1, \ldots, N$. Это означает, что матрицы (R_{mn}^{sq}) задают в пространстве l^2 операторы Гильберта-Шмидта, а система (23) является системой операторных уравнений в этом пространстве.

Из теоремы единственности для задачи (1′)—(4) следует, что однородная система, соответствующая (23), имеет только тривиальное решение в l^2. Тогда в силу альтернативы Фредгольма решение (23) существует и единственно в l^2.

Решение полученной системы линейных алгебраических уравнений может быть найдено методом редукции с любой наперед заданной точностью при произвольных параметрах задачи [7, 8]. Кроме того, в случае, когда $\|(R_{mn}^{sq})\| = h < 1$, можно воспользоваться методом последовательных приближений, получая неизвестные в явном виде. Анализ показывает, что условие $h<1$ выполняется, если угловой размер дуг M_s очень мал или если мал угловой размер M'_s, но велики расстояния d_{sq}.

Предложенный подход применим и в случае возбуждения иным источником, например нитью электрического тока, плоской однородной или неоднородной волнами, а также при произвольном числе слоев и экранов в них.

Список литературы: 1. *Шестопалов В. П.* Физические основы миллиметровой и субмиллиметровой техники. К., 1985. Т. 1. 216 с. 2. *Нефедов Е. И.* Дифракция электромагнитных волн на диэлектрических структурах. М., 1979. 271 с. 3. *Зацепин Н. Н.* Неразрушающий контроль. Минск, 1979. 190 с. 4. *Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К.* Теория дифракции. М., 1964. 428 с. 5. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М., 1981. 512 с. 6. *Иванов Е. А.* Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск, 1986. 584 с. 7. *Шестопалов В. П.* Суммарные уравнения в современной теории дифракции. К., 1983. 247 с. 8. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. М.; Л., 1962.

Поступила в редколлегию 10.04.87

УДК 517.9

В. А. ЛЬВОВ

ГЛОБАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ, ОПИСЫВАЮЩЕЙ ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ НЕОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ

В ряде задач динамики суспензий, когда вязкая несжимаемая жидкость со взвешенными в ней твердыми частицами движется как единое целое, представляет интерес определение осредненных характеристик таких смесей [1]. В этом случае обычно используется одно уравнение для совместного движения смеси, а наличие частиц проявляется только в изменении реологических свойств среды и, следовательно, в изменении эффективной вязкости суспензии по отношению к вязкости несущей жидкости [2—4]. Экспериментальные данные подтверждают тот факт, что суспензии, состоящие из смеси ньютоновской жидкости и большого числа мелких, твердых, асимметрических частиц, имеют реологические характеристики, существенно отличающиеся от ньютоновских жидкостей. В случае осесимметрических частиц (вытянутые эллипсоиды вращения, палочки и т. д.), когда в процессе движения суспензии направления ориентации частиц выравнены, а их концентрация такова, что они расположены близко друг к другу, данная смесь будет в высшей степени неизотропна, т. е. в процессе движения она может образовывать внутреннюю структуру [5]. Такое поведение объясняют тем, что в неоднородном поле скорости асимметрические частицы испытывают неодинаковое силовое воздействие на свои концы, т. е. возникает вращающий момент, стремящийся расположить частицы вдоль вектора скорости течения, и случайно ориентированные асимметрические частицы образуют в несущей жидкости ориентированную структуру. При этом кажущаяся вязкость смеси будет убывать, пока сохраняется возможность дальнейшего ориентирования частиц вдоль линий тока.

В данной работе исследуется разрешимость начально-краевой задачи для системы (1)—(4), описывающей динамику вязкой несжимаемой неоднородной жидкости. Уравнения (1), (2) вытекают из результатов работы [4], в которой были получены усредненные уравнения движения смеси «вязкая несущая жидкость — твердые частицы», а также установлено, что эффективная вязкость суспензии является тензорной величиной и определяется локальной конфигурацией твердых частиц в жидкости. Можно предположить, что если с каждой твердой осесимметричной частицей связать единичный вектор ее ориентации, то эффективная тензорная вязкость суспензии будет зависеть как от средней локальной ориентации частиц в жидкости $\vec{\lambda}(x, t)$, так и от средней локальной плотности смеси $\rho(x, t) = [1-b(x, t)]\rho_f + b(x, t)\rho_p$, где ρ_f и ρ_p — плотность несущей жидкости и материала частиц, а $b(x, t)$ — предельная локальная объемная концентрация частиц в жидкости.

Уравнение (3) — обычное уравнение неразрывности, а для $\vec{\lambda}(x, t)$ записывается уравнение (4), замыкающее систему (1) — (4). Это не имеющее четкого физического смысла уравнение лишь условно описывает эволюцию средней ориентации частиц в жидкости.

Постановка задачи и основной результат. Пусть $\Omega \subset R_3$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$. Рассмотрим в $Q_T = \Omega \times (0, T)$ следующую начально-краевую задачу:

$$\rho(x,t)\left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\nabla)\vec{u}\right] - \sum_{n,p,q,r=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_r}\left[a_{npqr}(\rho, \vec{\lambda})\frac{\partial u_n}{\partial x_p}\right]e_q = \tag{1}$$

$$= \operatorname{grad} p + \rho(x,t)\vec{f}(x,t) + \vec{g}(x,t);$$

$$\operatorname{div}\vec{u} = 0 \ \ (2); \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{u}\nabla)\rho = 0; \tag{3}$$

$$\frac{\partial \vec{\lambda}}{\partial t} + (\vec{u}\nabla)\vec{\lambda} - \theta\triangle\vec{\lambda} = F(\rho, \vec{u})\,[\vec{u} - \vec{\lambda}\,\vec{u}|] \tag{4}$$

$$\vec{u}(x,t) = 0, \ x \in S_T \equiv \partial\Omega \times [0,T]; \tag{5}$$

$$\vec{\lambda}(x,t) = 0, \ x \in S_T; \tag{6}$$

$$\vec{u}(x,0) = \vec{u}^0(x); \ \rho(x,0) = \rho^0(x); \ \vec{\lambda}(x,0) = \vec{\lambda}^0(x). \tag{7}$$

Здесь $\vec{u}(x, t)$ — вектор скорости, $p(x, t)$ — давление, $\rho(x, t)$ — плотность вязкой, несжимаемой, неоднородной жидкости, а $\vec{\lambda}(x, t)$ — вектор, характеризующий ориентацию внутренней структуры такой неньютоновской жидкости (по физическому смыслу должно быть $0 \leqslant |\vec{\lambda}(x, t)| \leqslant 1$). Тензор $a_{npqr}(\rho, \vec{\lambda})$, определяющий вязкость, удовлетворяет обычным условиям симметрии и положительно определен.

Будет предполагать, что $a_{npqr}(\rho, \vec{\lambda})$ и $F(\rho, \vec{u}) \geqslant 0$ имеют ограниченные производные по своим аргументам. Предположим также, что $\vec{f}(x, t)$, $\vec{g}(x, t) \in L_{2,1}(Q_T)$; $\vec{u}^0(x) \in \overset{\circ}{J}(\Omega)$;

$\rho^0(x), \vec{\lambda}^0(x) \in L_\infty(\Omega) \cap \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$, причем $0 < m \leqslant \rho^0(x) \leqslant M < \infty$,

$$0 \leqslant |\vec{\lambda}^0(x)| \leqslant 1.$$

Назовем обобщенным решением задачи (1) — (7) набор функций $\{\vec{u}(t), \rho(t), \vec{\lambda}(t)\}$, таких, что

$$\vec{u}(t) \in L_\infty(0, T; \overset{0}{J}(\Omega)) \cap L_2(0, T; \overset{0}{J}{}^1(\Omega));$$

$$\rho(t)\in L_\infty(0, T;\ L_\infty(\Omega)); \tag{8}$$
$$\vec{\lambda}(t)\in L_\infty(0, T;\ L_\infty(\Omega))\cap L_2(0, T;\ \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)),\ |\vec{\lambda}(t)|\leqslant 1$$

и выполняются следующие интегральные тождества:

$$\int_0^T\left\{\int_\Omega(\rho\vec{u}, \vec{\Phi}_t+(\vec{u}\nabla)\vec{\Phi})\,dx-\int_\Omega\sum_{n,p,q,r=1}^{3}a_{npqr}(\rho,\vec{\lambda})\frac{\partial u_n}{\partial x_p}\frac{\partial\Phi_q}{\partial x_r}\,dx+\right.$$
$$\left.+\int_\Omega(\rho\vec{f},\vec{\Phi})\,dx+\int_\Omega(\vec{g},\vec{\Phi})\,dx\right\}dt+\int_\Omega(\rho^0\vec{u}^0,\vec{\Phi}(0))\,dx=0; \tag{9}$$

$$\int_0^T\int_\Omega\rho(\varphi_t+(\vec{u}\nabla)\rho)\,dxdt+\int_\Omega\rho^0\varphi(0)\,dx=0; \tag{10}$$

$$\int_0^T\left\{\int_\Omega\vec{\lambda}(\vec{\Psi}_t+(\vec{u}\nabla)\Psi)\,dx-\theta\int_\Omega\sum_{i,k=1}^{3}\frac{\partial\lambda_i}{\partial x_k}\frac{\partial\Psi_i}{\partial x_k}\,dx+\right.$$
$$\left.+\int_\Omega F(\rho,\vec{u})(\vec{u}-\vec{\lambda}|\vec{u}|,\vec{\Psi})\,dx\right\}dt+\int_\Omega(\vec{\lambda}^0,\vec{\Psi}(0))\,dx=0 \tag{11}$$

для

$$\forall\vec{\Phi}(t)\in C^1(0, T;\ \overset{0}{J}{}^1(\Omega)),\ \vec{\Phi}(T)=0;$$
$$\forall\varphi(t)\in C^1(0, T;\ W_2^1(\Omega)),\ \varphi(T)=0; \tag{12}$$
$$\forall\vec{\Psi}(t)\in C^1(0, T;\ W_2^1(\Omega)),\ \vec{\Psi}(T)=0.$$

Основной результат содержится в следующей теореме.

Теорема 1. Пусть $\vec{f}(x,t), \vec{g}(x,t)\in L_{2,1}(Q_T)$, $\vec{u}^0\in\overset{0}{J}(\Omega)$, $\rho^0\in L_\infty(\Omega)$ и $0<m\leqslant M<\infty$, а $\vec{\lambda}^0\in L_\infty(\Omega)\cap\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ и $|\vec{\lambda}^0(x)|\leqslant 1$. *Тогда для любого T существует, по крайней мере, одно обобщенное решение задачи (1)—(7).*

Замечание. Определенное выше обобщенное решение соответствует в случае уравнений Навье—Стокса классу обобщенных решений, введенных Е. Хопфом. Как известно [6], он оказывается достаточно широким для трехмерной задачи, и поэтому доказать единственность задачи в классе решений (8) не удается. В более узком классе решений (например, $\vec{u}(x, t)\in W_q^{2,1}(Q_T)$, $\nabla p\in L_q(Q_T)$, $\rho(x, t)\in C^1(\overline{Q}_T)$, $\vec{\lambda}(x, t)\in W_q^{2,1}(Q_T)$, $q>3$) можно доказать единственность задачи (1)—(7).

При доказательстве теоремы мы используем подход, развитый в (7), являющийся модификацией метода Галеркина.

Построение приближенных решений. Будем искать приближенные решения (1), (2) в виде конечной суммы $\vec{u}^s(x,t) = \sum_{i=1}^{s} C_{is}(t)\vec{\psi}^i(x)$, где $C_{is}(t) \in C^1(0,T)$ — неизвестные коэффициенты, а $\vec{\psi}^i(x)$ $(i=1,\dots,s)$ — ортонормированный в $L_2(\Omega)$ базис, состоящий из собственных функций задачи $\nabla\vec{\psi}^i - \operatorname{grad} q^i = \mu_i\vec{\psi}^i$, $\operatorname{div}\vec{\psi}^i = 0$, $\vec{\psi}^i = 0$, $x \in \partial\Omega$ (см. [6]).

Приближения $\rho^s(x,t)$ и $\vec{\lambda}^s(x,t)$ будем находить как решение задачи

$$\frac{\partial\rho^s}{\partial t} + (\vec{u}^s\nabla)\rho^s = 0;\ \rho^s(x,0) = \rho^{0s}(x), \tag{13}$$

и соответственно

$$\frac{\partial\vec{\lambda}^s}{\partial t} + (\vec{u}^s\nabla)\vec{\lambda}^s - \theta\triangle\vec{\lambda}^s = F(\rho^s,\vec{u}^s)[\vec{u}^s - \vec{\lambda}^s|\vec{u}^s|]; \tag{14}$$

$$\vec{\lambda}^s(x,0) = \vec{\lambda}^{0s}(x);\ \vec{\lambda}^s(x,t) = 0,\ x \in S_T,$$

где $\rho^{0s}(x)$, $\vec{\lambda}^{0s}(x) \in C^1(\Omega)$, $0 < m \leqslant \rho^{0s} \leqslant M < \infty$, $0 \leqslant |\vec{\lambda}^{0s}| \leqslant 1$ при $s \to \infty$ $\rho^{0s}(x) \to \rho^0(x)$ и $\vec{\lambda}^{0s}(x) \to \lambda^0(x)$ в $L_q(\Omega)$ $(1 \leqslant q < \infty)$.

Для определения коэффициентов $C_{is}(t)$ потребуем, чтобы тождество (9) выполнялось для $\{\vec{u}^s(t), \rho^s(t), \lambda^s(t)\}$ на функциях $\vec{\Phi}(x,t) = h(t)\vec{\psi}^i(x)$ $(i=1,\dots,s)$, где $h(t) \in C^1(0,T)$ и $h(T)=0$. Это приводит к следующей системе дифференциально-функциональных уравнений:

$$\sum_{j=1}^{s}\frac{dC_{js}}{dt}d^l_{js} + \sum_{,j=1}^{s}\beta^l_{ijs}C_{is}C_{js} + \sum_{j=1}^{s}\gamma^l_{js}C_{js} = f^l_s + g^l,\ (l=1,\dots,s), \tag{15}$$

где

$$\alpha^l_{js} = \int_\Omega(\rho^s\vec{\psi}^j,\vec{\psi}^l)\,dx,\quad \beta_{\widetilde{ij}_s} = \int_\Omega(\rho^s(\vec{\psi}^i\nabla)\vec{\psi}^j,\vec{\psi}^l)\,dx,$$

$$\gamma^l_{js} = \int_\Omega\sum_{n,p,q,r=1}^{3}a_{npqr}(\rho^s,\vec{\lambda}^s)\frac{\partial\psi^j_n}{\partial x_p}\frac{\partial\psi^l_q}{\partial x_r}\,dx,$$

$$f^l_s = \int_\Omega(\rho^s\vec{f},\vec{\psi}^l)\,dx,\quad g^l = \int_\Omega(\vec{g},\vec{\psi}^l)\,dx.$$

Начальные данные для (15) полагаем равным $C_{js}(0) = C^0_j$ $(j=1,\dots,s)$, где C^0_j — коэффициенты разложения $\vec{u}^0$ по базису $\vec{\psi}^j(x)$.

Построение приближенного решения вытекает из следующей леммы.

Лемма 1. *Для любого s существует единственное решение $\{\vec{u}^s, \rho^s, \vec{\lambda}^s\}$ задачи (13)—(15). При этом справедливы равномерные по s оценки* $0<m\leqslant\rho^s(x, t)\leqslant M<\infty$ **(16)**,

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|\vec{u}^s(t)\|_{L_2(\Omega)}+\|\vec{u}^s\|_{L_2(0,T;\overset{0}{J}{}^1(\Omega))}\leqslant C_1, \tag{17}$$

$$|\vec{\lambda}^s(x,t)|\leqslant 1,\ \|\nabla\vec{\lambda}^s\|_{L_2(Q_T)}\leqslant C_2. \tag{18}$$

Априорную оценку (16) несложно получить из представления решения задачи (13) в виде $\rho^s(x, t)=\rho^{0s}(\vec{y}^s(0, x, t))$, где $\vec{y}^s(\tau, x, t)$ — решение задачи Коши $\vec{y}^s_\tau=\vec{u}^s(\vec{y}^s, \tau)$, $\vec{y}^s=\vec{x}$ при $\tau=t$, а $\vec{u}^s$ — произвольная функция из класса (8). С помощью оценки (16) и уравнения (15) обычным образом получаем оценку (17). В области Q_T для уравнения (14) справедлив принцип максимума, откуда следуют оценки (18).

Полученные априорные оценки позволяют доказать существование задачи (13)—(15). Для этого в пространстве непрерывных вектор-функций $C(0, T)$ строится оператор A, сопоставляющий произвольному вектору из $C(0, T)$ решение линеаризованной системы (15). Оказывается, что оператор A непрерывен и переводит выпуклое замкнутое множество из $C(0, T)$ в некоторое компактное множество в $C(0, T)$. Таким образом, отображение A удовлетворяет всем условиям теоремы Шаудера и, следовательно, имеет хотя бы одну неподвижную точку. Можно показать, что такая неподвижная точка единственна. Лемма 1 доказана.

Компактность приближений в $L_2(Q_T)$. Полученные в лемме 1 априорные оценки позволяют выделить из построенных приближенных решений сходящиеся подпоследовательности, такие, что $\vec{u}^{s_k}\to\vec{u}$ сходится $(*)$-слабо в $L_\infty(0, T; J(\Omega))$ и слабо в $L_2(0, T; J^1(\Omega))$; $\rho^{s_k}\to\rho$ сходится $(*)$-слабо в $L_\infty(Q_T)$; $\vec{\lambda}^{s_k}\to\vec{\lambda}$ сходится $(*)$-слабо в $L_\infty(Q_T)$ и слабо в $L_2(0, T; W_2^1(\Omega))$.

Однако в силу нелинейности системы (1)—(4) этих сведений недостаточно для перехода к пределу в интегральных тождествах (9)—(11). Имеет место следующее утверждение.

Лемма 2. *Для приближенных решений $\{\vec{u}^s(t), \vec{\lambda}^s(t)\}$ справедливы следующие оценки:*

$$\int_0^{T-\delta}\|\vec{\lambda}^s(t+\delta)-\vec{\lambda}^s(t)\|^2_{L_2(\Omega)}dt\leqslant C_{12}\delta^{1/2};$$

$$\int_0^{T-\delta}\|\vec{u}^s(t+\delta)-\vec{u}^s(t)\|^2_{L_2(\Omega)}dt\leqslant C_2\delta^{1/2},$$

где $0<\delta<T$ и произвольно, а константы C_1 и C_2 не зависят от s и δ.

Отсюда и из оценок леммы 1 вытекает сильная компактность последовательностей приближенных решений $\{\vec{u}^s(t), \vec{\lambda}^s(t)\}$ в $L_2(Q_T)$.

Сильная сходимость в $L_2(Q_T)$ последовательности $\{\rho^s(t)\}$ будет следовать из такой леммы.

Лемма 3. *Пусть $\rho(t)$ (*)-слабый предел в $L_2(Q_T)$ последовательности приближенных решений $\{\rho^s\}$. Тогда последовательность $\{\rho^s(t)\}$ сходится к $\rho(t)$ сильно в $L_2(Q_T)$.*

Доказательство. В силу (13) для ρ^s справедливо интегральное тождество

$$\int_0^T\int_\Omega \rho^s(\varphi_t + (\vec{u}^s\nabla)\varphi)\,dxdt + \int_\Omega \rho^{0s}\varphi(0)\,dx = 0, \tag{19}$$

где $\varphi(t)$ выбираем, как в (12).

Учитывая сильную компактность $\{\vec{u}^s\}$ и (*)-слабую компактность $\{\rho^s\}$ в $L_2(Q_T)$, сделаем в (19) предельный переход по некоторой подпоследовательности. Тогда для (*)-слабого предела $\rho(x, t)$ справедливо тождество

$$\int_0^T\int_\Omega \rho(\varphi_t + (\vec{u}\nabla)\varphi)\,dxdt + \int_\Omega \rho^0\varphi(0)\,dx = 0.$$

Как показано в [7], функция $\rho(x, t)$, удовлетворяющая такому тождеству, непрерывна по t в норме $L_q(\Omega)$ $(q \geqslant 1)$, и для любого $t \in [0, T]$ справедливо равенство $\|\rho(t)\|_{L_q(\Omega)} = \|\rho^0\|_{L_q(\Omega)}$. Аналогично из (19) следует $\|\rho^s(t)\|_{L_q(\Omega)} = \|\rho^{0s}\|_{L_q(\Omega)}$ для любого $t \in [0, T]$. Так как $\|\rho^{0s} - \rho^0\|_{L_q(\Omega)} \to 0$ при $s \to \infty$, то $\lim \|\rho^s(t)\|_{L_q(\Omega)} = \|\rho(t)\|_{L_q(\Omega)}$ для любого $t \in [0, T]$.

Отсюда и из слабой сходимости $\rho^s(t)$ к $\rho(t)$ в $L_2(Q_T)$ следует утверждение леммы.

Предельный переход. Из построения приближенных решений следует, что для любых $\vec{\Phi}^k(x, t) = \sum_{i=1}^{k} h_i(t)\vec{\psi}^i(x)$, $h_i(t) \in C[0, T]$, $h_i(T) = 0$, $(k \leqslant s)$; $\varphi(x, t) \in C^1(Q_T)$, $\varphi(x, T) = 0$; $\vec{\Psi}(x, t) \in C^1(Q_T)$, $\vec{\Psi}(x, T) = 0$ справедливы интегральные тождества

$$\int_0^T \Bigg\{ \int_\Omega (\rho^s\vec{u}^s, \vec{\Phi}^k_t + (\vec{u}^s\nabla)\vec{\Phi}^k)\,dx - \int_\Omega \sum_{n,p,q,r=1}^{3} a_{npqr}(\rho^s, \vec{\lambda}^s)\frac{\partial u^s_n}{\partial x_p}\frac{\partial \Phi^k_q}{\partial x_r}\,dx +$$
$$+ \int_\Omega (\rho^s\vec{f}, \vec{\Phi}^k)\,dx + \int_\Omega (\vec{g}, \vec{\Phi}^k)\,dx \Bigg\}\,dt + \int_\Omega (\rho^{0s}\vec{u}^{0s}, \vec{\Phi}^k(0))\,dx = 0, \tag{20}$$

$$\int_0^T\int_\Omega \rho^s(\varphi_t + (\vec{u}^s\nabla)\varphi)\,dxdt + \int_\Omega \rho^{0s}\varphi(0)\,dx = 0, \tag{21}$$

$$\int\limits_0^T\left\{\int\limits_\Omega (\vec{\lambda}^s, \vec{\Psi}_t + (\vec{u}^s\nabla)\vec{\Psi})\,dx - \theta\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial\lambda_i^s}{\partial x_j}\frac{\partial\Psi_i}{\partial x_j}\,dx + \right.$$

$$\left. + \int\limits_\Omega F(\rho^s, \vec{\lambda}^s)(\vec{u}^s - \vec{\lambda}^s|\vec{u}^s|, \vec{\Psi})\,dx\right\}dt + \int\limits_\Omega (\vec{\lambda}^{0s}, \vec{\Psi}(0))\,dx = 0. \qquad (22)$$

Ранее было показано, что последовательности $\{\vec{u}^s, \rho^s, \vec{\lambda}^s\}$ сильно компактны в $L_2(Q_T)$. Кроме того, из оценок леммы 1 следует, что $\{\nabla\vec{u}^s, \nabla\vec{\lambda}^s\}$ слабо компактны в $L_2(Q_T)$. Это с учетом ограниченности произвольных функций $a_{npqr}(\rho, \vec{\lambda})$ и $F(\rho, \vec{u})$ позволяет сделать предельный переход в тождествах (20)—(22) при $s\to\infty$.

Более подробно рассмотрим лишь предельный переход в нелинейном выражении

$$\int\limits_0^T\int\limits_\Omega F(\rho^s, \vec{u}^s)(\vec{\lambda}^s|\vec{u}^s|, \vec{\Psi})\,dxdt.$$

Пусть при $s\to\infty$ $\vec{u}^s\to\vec{u}, \vec{\lambda}^s\to\vec{\lambda}$ и $\rho^s\to\rho$ в $L_2(Q_T)$.

Тогда

$$\left|\int\limits_0^T\int\limits_\Omega ([F(\rho^s, \vec{u}^s)\vec{\lambda}^s|\vec{u}^s| - F(\rho, \vec{u})\vec{\lambda}|\vec{u}|], \vec{\Psi})\,dxdt\right| \leqslant \int\limits_0^T\int\limits_\Omega |F(\rho^s, \vec{u}^s)|\vec{u}^s| -$$

$$- F(\rho, \vec{u})|\vec{u}||\,|\vec{\lambda}^s|\,|\vec{\Psi}|\,dxdt + \int\limits_0^T\int\limits_\Omega F(\rho, \vec{u})|\vec{u}|\,|\vec{\lambda}^s - \vec{\lambda}|\,|\vec{\Psi}|\,dxdt = J_1^s + J_2^s.$$

В силу ограниченности производных $F(\rho, \vec{u})$

$$|F(\rho^s, \vec{u}^s)|\vec{u}^s| - F(\rho, \vec{u})|\vec{u}|| \leqslant C(1 + |\vec{u}^s| + |\vec{u}|)(|\rho - \rho^s| + |\vec{u} - \vec{u}^s|).$$

Откуда, учитывая оценки (16) — (18) и $|\vec{\Psi}| < C$, заключаем, что $\lim\limits_{s\to\infty} J_1^s = 0$.

Из сходимости $\vec{\lambda}^s$ к $\vec{\lambda}$ в $L_2(Q_T)$ следует сходимость $\vec{\lambda}^s$ к $\vec{\lambda}$ по мере. Отсюда, учитывая, что $|\vec{\lambda}^s - \vec{\lambda}| \leqslant 2$, а также принадлежность $F(\rho, \vec{u}) \in L_2(Q_T)$, и значит, $F(\rho, \vec{u})|\vec{u}| \in L_1(Q_T)$, заключаем, что $\lim\limits_{s\to\infty} J_2^s = 0$.

Заметим, что предельный переход в (20)—(22) был сделан для гладких $\varphi(t)$, $\vec{\Psi}(t)$ и $\vec{\Phi}^k(t)$ $(k\leqslant s)$ специального вида. Однако множество таких функций плотно в соответствующих классах (12). Теорема 1 доказана.

Список литературы: 1. *Марченко В. А., Хруслов Е. Я.* Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей. К., 1974. 278 с. 2. *Реология* суспензий/Под ред. В. В. Гогосова, В. Н. Николаевского. М., 1975. 333 с. 3. *Гидродинамические* взаимодействия частиц в суспензиях/Под ред. Ю. А. Буевича. М., 1980. 243 с. 4. *Львов В. А.* Об одной математической задаче механики суспензий.//Вестн. Харьк. ун-та. 1985. № 227: Пробл. управления и механики сплош. сред. С. 13—37. 5. *Батчелор Дж.* Успехи микрогидродинамики//Теоретическая и прикладная механика: Тр. XIV Междунар. конгресса. М., 1979. С. 136—187. 6. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М., 1970. 288 с. 7. *Антонцев С. Н., Кажихов А. В., Монахов В. Н.* Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск, 1983. 319 с.

Поступила в редколлегию 03.09.86

УДК 517.49

Л. М. НЕСЕНЕНКО

МЕТОД ПОЛУЧЕНИЯ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ ИСТОЧНИКА СТЕПЕННОГО ВИДА И ПОДВИЖНОЙ ГРАНИЦЫ

Свойства решений краевых задач для уравнения теплопроводности с нелинейным тепловым источником неоднократно изучались различными авторами (см., например, [1]), в том числе рассматривались нелинейные источники степенного вида [1—3].

Одним из способов, позволяющих получить информацию о свойствах решений уравнений подобного типа, является введение малого параметра при старшей производной [4].

Мы будем изучать поведение при $\varepsilon \to 0$ функции $u(x, t)$ — решения следующей модельной краевой задачи с подвижной границей

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \delta u^3, & (1) \\ u(x, t)|_{t=0} = U_0, & (2) \\ \left. \dfrac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right|_{x=k_1 t} = \Phi_1(t), & (3) \\ (t, x) \in \Omega = \{(t, x): x > k_1 t,\ 0 < t < 1,\ k_1 > 0\}. & (4) \end{cases}$$

Выбор области Ω указанного вида сделан для того, чтобы не перегружать изложение метода получения приближенного значения функции $u(x, t)$ второстепенными деталями. Данный метод пригоден для ограниченных «подвижных» областей, для широкого класса функций, задающих подвижную границу. Выбор нелинейного теплового источника в виде $F(u) = \delta u^3$ **(5)** тоже сделан для простоты изложения. Предлагаемый метод позволяет находить приближенные значения $u(x, t)$ для источников вида $F(u) = \delta u^\beta$, $\beta > 1$ **(6)**.

Решение изучаемой краевой задачи может быть записано следующим образом [5]:

$$u(x,t)=u_\Lambda(x,t)+\int_0^t\left(\int_{k_1\tau}^\infty G(x,x',t-\tau)\,\delta u^3(x',\tau)\,dx'\right)d\tau, \qquad (7)$$

где $G(x, x', t-\tau)$ — функция Грина соответствующей линейной краевой задачи. Доказано, что уравнения типа (7) могут быть решены методом итераций [5]. Малость параметра $\varepsilon>0$, а также возможность записи в явном виде функции $G(x, x', t-\tau)$ [6] позволяют написать для каждой итерации $u_n(x, t)$ ее асимптотическое разложение путем применения к каждому из интегралов, входящих в (7), метода Лапласа [7, 8].

Функция $u_\Lambda(x, t)$ может быть записана в виде [6]:

$$u_\Lambda(x,t)=\int_0^t U_0G(x,x',t-\tau)\Big|_{\tau=0}dx'-\varepsilon\int_0^t G(x,x',t-\tau)\Big|_{x'=k_1\tau}\Phi_1(\tau)d\tau, \qquad (8)$$

где

$$G(x,x',t-\tau)=\frac{\exp\left\{-\dfrac{(x-x')^2}{4\varepsilon(t-\tau)}\right\}}{2\sqrt{\pi\varepsilon(t-\tau)}}+$$

$$+\frac{\exp\left\{-\dfrac{(x+x'2k_1\tau)^2}{4\varepsilon(t-\tau)}+\dfrac{k_1(x'-k_1\tau)}{\varepsilon}\right\}}{2\sqrt{\pi\varepsilon(t-\tau)}}-\frac{k_1}{2\varepsilon}\exp\left\{\frac{k_1(x'-k_1\tau)}{\varepsilon}\right\}\times$$

$$\times\operatorname{erfc}\left(\frac{x+x'-2k_1\tau}{2\sqrt{\varepsilon(t-\tau)}}\right). \qquad (9)$$

Доказано, что в предположении бесконечной дифференцируемости функции $\Phi_1(t)$ справедливо асимптотическое разложение [4]:

$$u_\Lambda(x,t)\sim U_0-\varepsilon\exp\left\{-\frac{k_1(x-k_1t)}{\varepsilon}\right\}\sum_{i=0}^\infty c_i(x,t)\,\varepsilon^i. \qquad (10)$$

Запишем интегральное представление для первой итерации решения нелинейного интегрального уравнения (7), полагая $u_0(x, t)=$ $=u_\Lambda(x, t)$.

Имеем

$$u_1(x,t)=u_\Lambda(x,t)+\int_0^t\left(\int_{k_1\tau}^\infty G(x,x',t-\tau)\,\delta u_\Lambda^3(x',\tau)\,dx'\right)d\tau=$$

$$=u_\Lambda(x,t)+\delta\int_0^t\left(\int_{k_1\tau}^\infty G(x,x',t-\tau)\left(U_0-\varepsilon\exp\left\{-\frac{k_1(x'-k_1\tau)}{\varepsilon}\right\}\sum_{i=0}^\infty c_i\varepsilon^i\right)^3\times\right.$$

$$\left.\times dx'\right) d\tau = u_\Delta(x,t) + \delta \int_0^t \left(\int_{k_1\tau}^{\infty} G(x,x',t-\tau)\, U_0^3 dx' \right) d\tau -$$

$$-\delta \int_0^t \left(\int_{k_1\tau}^{\infty} G(x,x',t-\tau)\, 3U_0^2 \varepsilon \exp\left\{-\frac{k_1(x'-k_1\tau)}{\varepsilon}\right\} \sum_{i=0}^{\infty} c_i \varepsilon^i dx' \right) d\tau +$$

$$+\delta \int_0^t \left(\int_{k_1\tau}^{\infty} G(x,x',t-\tau)\, 3U_0 \varepsilon^2 \exp\left\{-\frac{2k_1(x'-k_1\tau)}{\varepsilon}\right\} \left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i \varepsilon^i\right)^2 dx' \right) d\tau -$$

$$-\delta \int_0^t \left(\int_{k_1\tau}^{\infty} G(x,x',t-\tau)\, \varepsilon^3 \exp\left\{-\frac{3k_1(x'-k_1\tau)}{\varepsilon}\right\} \left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i \varepsilon^i\right)^3 dx' \right) d\tau =$$

$$= u_\Delta(x,t) + \delta(I_1 - I_2 + I_3 - I_4). \qquad (11)$$

Покажем, что асимптотика каждого из интегралов I_k, $k=1, 2, 3, 4$, подобна выражению, стоящему справа в (10), и может быть получена применением метода Лапласа [7, 8].

Действительно, для интеграла I_1 справедливо

$$I_1 = \int_0^t \left(\int_{k_1\tau}^{\infty} G(x,x',t-\tau)\, U_0^3 dx' \right) d\tau = U_0^3 \int_0^t \left(\int_{k_1\tau}^{\infty} \left(\frac{\exp\left\{-\frac{(x-x')^2}{4\varepsilon(t-\tau)}\right\}}{2\sqrt{\pi\varepsilon(t-\tau)}} + \right.\right.$$

$$+ \frac{\exp\left\{-\frac{(x+x'-2k_1\tau)^2}{4\varepsilon(t-\tau)} + \frac{k_1(x'-k_1\tau)}{\varepsilon}\right\}}{2\sqrt{\pi\varepsilon(t-\tau)}} - \frac{k_1}{2\varepsilon} \exp\left\{\frac{k_1(x'-k_1\tau)}{\varepsilon}\right\} \times$$

$$\left.\left.\times \operatorname{erfc}\left(\frac{x+x'-2k_1\tau}{2\sqrt{\varepsilon(t-\tau)}}\right)\right) dx' \right) d\tau = U_0^3 \left(I_1^{(1)} + I_1^{(2)} - I_1^{(3)}\right). \qquad (12)$$

Выясним вид асимптотики интеграла $I_1^{(1)}$:

$$I_1^{(1)} = \int_0^t \left(\int_{k_1\tau}^{\infty} \frac{\exp\left\{-\frac{(x-x')^2}{4\varepsilon(t-\tau)}\right\}}{2\sqrt{\pi\varepsilon(t-\tau)}} dx' \right) d\tau = \int_0^t \left(\int_{-\infty}^{\infty} - \int_{\frac{x-k_1\tau}{2\sqrt{\varepsilon(t-\tau)}}}^{\infty} \right) \frac{e^{-v^2}}{\sqrt{\pi}}\, dv =$$

$$= t - \frac{1}{2} \int_0^t \operatorname{erfc}\left(\frac{x-k_1\tau}{2\sqrt{\varepsilon(t-\tau)}}\right) d\tau. \qquad (13)$$

Запишем $I_1^{(3)}$ в виде

$$I_1^{(3)}=\frac{k_1}{2\varepsilon}\int_0^t\left(\int_{k_1\tau}^{\infty}\exp\left\{\frac{k_1(x'-k_1\tau)}{\varepsilon}\right\}\operatorname{erfc}\left(\frac{x+x'-2k_1\tau}{2\sqrt{\varepsilon(t-\tau)}}\right)dx'\right)d\tau=$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^t\operatorname{erfc}\left(\frac{x-k_1\tau}{2\sqrt{\varepsilon(t-\tau)}}\right)d\tau+$$

$$+\int_0^t\left(\int_{k_1\tau}^{\infty}\frac{\exp\left\{-\frac{(x+x'-2k_1\tau)^2}{4\varepsilon(t-\tau)}+\frac{k_1(x'-k_1\tau)}{\varepsilon}\right\}}{2\sqrt{\pi\varepsilon(t-\tau)}}dx'\right)d\tau. \qquad (14)$$

Если второе слагаемое в (14) совпадает с $I_1^{(2)}$, а первое слагаемое в (14) совпадает со вторым слагаемым в (13), то подстановка (13) и (14) в (12) дает $I_1=U_0^3t$ (15).

Обратимся к нахождению асимптотики интеграла I_2. Этот интеграл после несложных преобразований может быть записан следующим образом:

$$I_2=\int_0^t\left(\int_{k_1\tau}^{\infty}G(x,x',t-\tau)\,3U_0^2\varepsilon\exp\left\{-\frac{k_1(x'-k_1\tau)}{\varepsilon}\right\}\sum_{i=0}^{\infty}c_i\varepsilon^i dx'\right)d\tau=$$

$$=3U_0^2\varepsilon\left(\int_0^t\left(\int_{k_1\tau}^{\infty}\frac{\exp\left\{-\frac{(x-x')^2}{4\varepsilon(t-\tau)}-\frac{k_1(x'-k_1\tau)}{\varepsilon}\right\}}{2\sqrt{\pi\varepsilon(t-\tau)}}\sum_{i=0}^{\infty}c_i\varepsilon^i dx'\right)d\tau+\right.$$

$$+\int_0^t\left(\int_{k_1\tau}^{\infty}\frac{\exp\left\{-\frac{(x+x'-2k_1\tau)^2}{4\varepsilon(t-\tau)}\right\}}{2\sqrt{\pi\varepsilon(t-\tau)}}\sum_{i=0}^{\infty}c_i(x',\tau)\,\varepsilon^i dx'\right)d\tau-$$

$$\left.-\frac{k_1}{2\varepsilon}\int_0^t\left(\int_{k_1\tau}^{\infty}\operatorname{erfc}\left(\frac{x+x'-2k_1\tau}{2\sqrt{\varepsilon(t-\tau)}}\right)\sum_{i=0}^{\infty}c_i(x',\tau)\,\varepsilon^i dx'\right)d\tau\right)=$$

$$=3U_0^2\varepsilon\,(I_2^{(1)}+I_2^{(2)}-I_2^{(3)}). \qquad (16)$$

Рассмотрим интеграл $I_2^{(3)}$:

$$I_2^{(3)}=\frac{k_1}{2\varepsilon}\int_0^t\left(\int_{k_1\tau}^{\infty}\operatorname{erfc}\left(\frac{x+x'-2k_1\tau}{2\sqrt{\varepsilon(t-\tau)}}\right)\sum_{i=0}^{\infty}c_i(x',\tau)\,\varepsilon^i dx'\right)d\tau=$$

$$=\frac{k_1}{2\varepsilon}\left(-\int_0^t\operatorname{erfc}\left(\frac{x-k_1\tau}{2\sqrt{\varepsilon(t-\tau)}}\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i\int_0^{k_1\tau}c_i(x',\tau)dx'\right)d\tau+\right.$$

$$+\int_0^t\left(\int_{k_1\tau}^{\infty}\frac{\exp\left\{-\frac{(x+x'-2k_1\tau)^2}{4\varepsilon(t-\tau)}\right\}}{\sqrt{\pi\varepsilon(t-\tau)}}\left(\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon\int_0^{k_1\tau}c_i(x',\tau)dx'\right)d\tau\right). \qquad (17)$$

Так как $\forall\tau\in[0,t]$, при $\varepsilon\to 0$ справедливо соотношение $\frac{x-k_1\tau}{2\sqrt{\varepsilon(t-\tau)}}\to\infty$, то [7]:

$$\operatorname{erfc}\left(\frac{x-k_1\tau}{2\sqrt{\varepsilon(t-\tau)}}\right)\sim\frac{\exp\left\{-\frac{(x-k_1\tau)^2}{4\varepsilon(t-\tau)}\right\}}{\sqrt{\pi}\,\frac{x-k_1\tau}{2\sqrt{\varepsilon(t-\tau)}}}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s(2s+1)!!}{\frac{(x-k_1\tau)^{2s}}{2^s\varepsilon^s(t-\tau)^s}}. \qquad (18)$$

Используя (18) и (17), получаем

$$I_2^{(3)}=\frac{k_1}{2\varepsilon}(-A+B), \qquad (19)$$

где

$$A=-\int_0^t\frac{2\sqrt{\varepsilon(t-\tau)}}{\sqrt{\pi}(x-k_1\tau)}\exp\left\{-\frac{(x-k_1\tau)^2}{4\varepsilon(t-\tau)}\right\}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s(2s+1)!!}{\frac{(x-k_1\tau)^{2s}}{2^s\varepsilon^s(t-\tau)^s}}\times$$

$$\times\left(\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i\int_0^{k_1\tau}c_i(x',\tau)\,dx'\right)d\tau,$$

$$B=\int_0^t\left(\int_{k_1\tau}^{\infty}\frac{\exp\left\{-\frac{(x+x'-2k_1\tau)^2}{4\varepsilon(t-\tau)}\right\}}{\sqrt{\pi\varepsilon(t-\tau)}}\left(\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i\int_0^{k_1\tau}c_i(x',\tau)dx'\right)dx'\right)d\tau.$$

Поскольку при нахождении асимптотики функции $u(x, t)$ особый интерес представляет ее поведение вблизи подвижной границы, будем считать точку x «близкой» к границе в том смысле, что выполнено неравенство $2k_1t-x>0$ **(20)**.

Тогда функция $\frac{(x-k_1\tau)^2}{t-\tau}$ достигает абсолютного минимума при

$$\tau=\tau^*=t-\frac{x-k_1t}{k_1}, \qquad (21)$$

и поэтому [8]:

$$\mathrm{A}\sim\exp\left\{-\frac{k_1(x-k_1t)}{\varepsilon}\right\}\sum_{i=0}^{\infty}a_i(\tau^*)\,\varepsilon^{i+1}. \qquad (22)$$

Обращаясь к нахождению асимптотики B, замечаем, что функция

$$\frac{(x+x'-2k_1\tau)^2}{t-\tau}$$

имеет стационарную точку $x'_{\text{ст}}$ вида

$$x'_{\text{ст}} = 2k_1\tau - x = k_1\tau - (x - k_1\tau) < k_1\tau,$$

а поэтому показатель экспоненты в интеграле, определяющем В, достигает наименьшего значения при $x' = k_1\tau$. Поэтому асимптотика В сводится к асимптотике интеграла вида [8]:

$$\text{В} \sim \int_0^t \exp\left\{-\frac{x - k_1\tau}{4\varepsilon(t-\tau)}\right\} \sum_{l=0}^{\infty} \tilde{c}_l(k_1\tau, \tau)\,\varepsilon^{l+1/2}\,d\tau \sim$$

$$\sim \exp\left\{-\frac{k_1(x - k_1 t)}{\varepsilon}\right\} \sum_{l=0}^{\infty} b_l \varepsilon^{l+1}. \tag{23}$$

Подставляя (22) и (23) в (19), получаем

$$I_2^{(3)} \sim \exp\left\{-\frac{k_1(x - k_1 t)}{\varepsilon}\right\} \sum_{l=0}^{\infty} d_l \varepsilon^l. \tag{24}$$

Асимптотика $I_2^{(2)}$ находится аналогично асимптотике В:

$$I_2^{(2)} \sim \exp\left\{-\frac{k_1(x - k_1 t)}{\varepsilon}\right\} \sum_{l=0}^{\infty} d_l^{(2)} \varepsilon^{l+1}. \tag{25}$$

Теперь найдем асимптотическое разложение интеграла

$$I_2^{(1)} = \int_0^t \left(\int_{k_1\tau}^{\infty} \frac{\exp\left\{-\frac{k_1(x' - k_1\tau)}{\varepsilon}\right\}}{2\sqrt{\pi\varepsilon(t-\tau)}} \exp\left\{-\frac{(x - x')^2}{4\varepsilon(t-\tau)}\right\} \sum_{l=0}^{\infty} c_l(x', \tau)\varepsilon^l dx' \right) d\tau. \tag{26}$$

Сделав в подынтегральном выражении в (26) замену $u = \frac{k_1 x'}{\varepsilon}$ легко найдем, что

$$I_2^{(1)} \sim \int_0^t \exp\left\{-\frac{(x - k_1\tau)^2}{4\varepsilon(t-\tau)}\right\} \sum_{l=0}^{\infty} l_l(k_1\tau, \tau)\varepsilon^{l+1/2}\,d\tau \sim$$

$$\sim \exp\left\{-\frac{k_1(x - k_1 t)}{\varepsilon}\right\} \sum_{l=0}^{\infty} d_l^{(1)} \varepsilon^{l+1}. \tag{27}$$

Подставляя (27), (24) и (25) в (16), получаем

$$I_2 \sim 3U_0^2\varepsilon \exp\left\{-\frac{k_1(x - k_1 t)}{\varepsilon}\right\} \sum_{l=0}^{\infty} a_l \varepsilon^l. \tag{28}$$

Теперь найдем асимптотику интеграла I_3:

$$I_3=\int_0^t\left(\int_{k_1\tau}^{\infty} G(x, x', t-\tau)\cdot 3U_0\varepsilon^2 \exp\left\{-\frac{2k_1(x'-k_1\tau)}{\varepsilon}\right\}\left(\sum_{l=0}^{\infty} c_l\varepsilon^l\right)^2 dx'\right)d\tau=$$

$$=3U_0\varepsilon^2\int_0^t\left(\int_{k_1\tau}^{\infty} G(x, x', t-\tau)\exp\left\{-\frac{2k_1(x'-k_1\tau)}{\varepsilon}\right\}\sum_{l=0}^{\infty}\tilde{c}_l(x', \tau)\varepsilon^l dx'\right)d\tau=$$

$$=3U_0\varepsilon^2\left(\int_0^t\left(\int_{k_1\tau}^{\infty}\frac{\exp\left\{-\frac{(x-x')^2}{4\varepsilon(t-\tau)}\right\}\exp\left\{-\frac{2k_1(x'-k_1\tau)}{\varepsilon}\right\}}{2\sqrt{\pi\varepsilon(t-\tau)}}\times\right.\right.$$

$$\left.\times\sum_{l=0}^{\infty}\tilde{c}_l(x', \tau)\varepsilon^l dx'\right)d\tau+$$

$$+\int_0^t\left(\int_{k_1\tau}^{\infty}\frac{\exp\left\{-\frac{(x+x'-2k_1\tau)^2}{4\varepsilon(t-\tau)}-\frac{k_1(x'-k_1\tau)}{\varepsilon}\right\}}{2\sqrt{\pi\varepsilon(t-\tau)}}\sum_{l=0}^{\infty}\tilde{c}_l(x', \tau)\varepsilon^l dx'\right)d\tau-$$

$$-\frac{k_1}{2\varepsilon}\int_0^t\left(\int_{k_1\tau}^{\infty}\exp\left\{-\frac{k_1(x'-k_1\tau)}{\varepsilon}\right\}\operatorname{erfc}\left(\frac{x+x'-2k_1\tau}{2\sqrt{\varepsilon(t-\tau)}}\right)\times\right.$$

$$\left.\left.\times\sum_{l=0}^{\infty}\tilde{c}_l(x', \tau)\varepsilon^l dx'\right)d\tau\right)=3U_0\varepsilon^2\left(I_3^{(1)}+I_3^{(2)}-I_3^{(3)}\right). \qquad (29)$$

Для нахождения асимптотики интеграла $I_3^{(1)}$ сделаем замену во внутреннем интеграле, положив $\frac{2k_1x'}{\varepsilon}=v$. Тогда

$$I_3^{(1)}=\int_0^t\left(\int_{k_1\tau}^{\infty}\frac{\exp\left\{-\frac{2k_1(x'-k_1\tau)}{\varepsilon}\right\}}{2\sqrt{\pi\varepsilon(t-\tau)}}\times\right.$$

$$\left.\times\exp\left\{-\frac{(x-x')^2}{4\varepsilon(t-\tau)}\right\}\sum_{l=0}^{\infty}\tilde{c}_l(x', \tau)\varepsilon^l dx'\right)d\tau\sim$$

$$\sim\int_0^t\exp\left\{-\frac{(x-k_1\tau)^2}{4\varepsilon(t-\tau)}\right\}\sum_{l=0}^{\infty}d_l^{(3)}(k_1\tau, \tau)\,\varepsilon^{l+1/2}d\tau\sim$$

$$\sim\exp\left\{-\frac{k_1(x-k_1t)}{\varepsilon}\right\}\sum_{l=0}^{\infty}\tilde{d}_l^{(3)}(k_1\tau^*, \tau^*)\,\varepsilon^{l+1}. \qquad (30)$$

Преобразуем интеграл $I_3^{(3)}$:

$$I_3^{(3)} = \frac{k_1}{2\varepsilon}\int_0^t\left(\int_{k_1\tau}^{\infty}\exp\left\{-\frac{k_1(x'-k_1\tau)}{\varepsilon}\right\}\operatorname{erfc}\left(\frac{x+x'-2k_1\tau}{2\sqrt{\varepsilon(t-\tau)}}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{l=0}^{\infty}\tilde{c}_l(x',\tau)\varepsilon^l dx'\right)d\tau = \frac{k_1}{2\varepsilon}\int_0^t\left(\operatorname{erfc}\left(\frac{x+x'-2k_1\tau}{2\sqrt{\varepsilon(t-\tau)}}\right)\times\right.$$

$$\times\exp\left\{-\frac{k_1(x'-k_1\tau)}{\varepsilon}\right\}\sum_{l=0}^{\infty}c_l^{(1)}(x',\tau)\varepsilon^{l+1}\Bigg|_{x'=k_1\tau}^{\infty}+$$

$$+\int_{k_1\tau}^{\infty}\frac{\exp\left\{-\frac{(x+x'-2k_1\tau)^2}{4\varepsilon(t-\tau)}-\frac{k_1(x'-k_1\tau)}{\varepsilon}\right\}}{\sqrt{\pi\varepsilon(t-\tau)}}\times$$

$$\left.\times\sum_{l=0}^{\infty}c_l^{(1)}(x',\tau)\varepsilon^{l+1}dx'\right)d\tau = \frac{k_1}{2\varepsilon}\left(-\int_0^t\operatorname{erfc}\left(\frac{x-k_1\tau}{2\sqrt{\varepsilon(t-r)}}\right)\times\right.$$

$$\times\sum_{l=0}^{\infty}c_l^{(1)}(k_1\tau,\tau)\varepsilon^{l+1}d\tau+\int_0^t\left(\int_{k_1\tau}^{\infty}\frac{\exp\left\{-\frac{(x+x'-2k_1\tau)^2}{4\varepsilon(t-\tau)}-\frac{k_1(x'-k_1\tau)}{\varepsilon}\right\}}{\sqrt{\pi\varepsilon(t-r)}}\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{l=0}^{\infty}c_l^{(1)}(x',\tau)\varepsilon^{l+1}dx'\right)d\tau. \qquad (31)$$

Первое слагаемое в (31) отличается от первого слагаемого в (17) только коэффициентами при степенях ε, и поэтому его асимптотика имеет вид выражения, стоящего справа в (22). Что же касается второго слагаемого в (31), то оно отличается от $I_3^{(2)}$ только коэффициентами при степенях ε. Укажем способ получения асимптотики $I_3^{(2)}$:

$$I_3^{(2)} = \int_0^t\left(\int_{k_1\tau}^{\infty}\frac{\exp\left\{-\frac{(x+x'-2k_1\tau)^2}{4\varepsilon(t-\tau)}-\frac{k_1(x'-k_1\tau)}{\varepsilon}\right\}}{2\sqrt{\pi\varepsilon(t-\tau)}}\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{l=0}^{\infty}\tilde{c}_l(x',\tau)\varepsilon^l dx'\right)d\tau. \qquad (32)$$

Асимптотика интеграла $I_3^{(2)}$ находится точно так же, как и асимптотика интеграла $I_3^{(1)}$, только замена имеет вид $\frac{k_1 x'}{\varepsilon} = u$. Поэтому

$$I_3^{(2)} = \int_0^t \left(\int_{\frac{k_1^2 \tau}{\varepsilon}}^{\infty} e^{-u} \frac{\exp\left\{ \frac{k_1^2 \tau}{\varepsilon} - \frac{\left(x + \frac{\varepsilon u}{k_1} - 2k_1\tau\right)^2}{4\varepsilon(t-\tau)} \right\}}{2\sqrt{\pi\varepsilon(t-\tau)}} \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{l=0}^{\infty} \tilde{c}_l \left(\frac{\varepsilon u}{k_1}, \tau \right) \varepsilon^l \frac{\varepsilon}{k_1} du \right) d\tau \sim \int_0^t \exp\left\{ - \frac{(x - k_1\tau)^2}{4\varepsilon(t-\tau)} \right\} \times$$

$$\times \sum_{l=0}^{\infty} \tilde{c}_l^{(1)} (k_1\tau, \tau) \varepsilon^{l+1/2} d\tau \sim \exp\left\{ - \frac{k_1(x - k_1 t)}{\varepsilon} \right\} \sum_{l=0}^{\infty} d_l^{(4)} (k_1\tau^*, \tau^*) \varepsilon^{l+1}. \tag{33}$$

Чтобы получить вид асимптотического разложения интеграла I_3, надо в правую часть равенства (29) подставить выражения (30), (33) с учетом замечания относительно асимптотики интеграла $I_3^{(3)}$. В результате имеем

$$I_3 \sim 3U_0\varepsilon^2 \exp\left\{ - \frac{k_1(x - k_1 t)}{\varepsilon} \right\} \sum_{l=0}^{\infty} a_l^{(3)} \varepsilon^{l+1}. \tag{34}$$

Теперь определим асимптотику интеграла I_4:

$$I_4 = \varepsilon^3 \int_0^t \left(\int_{k_1\tau}^{\infty} G(x, x', t-\tau) \exp\left\{ - \frac{3k_1(x' - k_1\tau)}{\varepsilon} \right\} \times \right.$$

$$\left. \times \left(\sum_{l=0}^{\infty} c_l \varepsilon^l \right)^3 dx' \right) d\tau = \varepsilon^3 \left(\int_0^t \left(\int_{k_1\tau}^{\infty} \frac{\exp\left\{ - \frac{(x-x')^2}{4\varepsilon(t-\tau)} \right\} \exp\left\{ - \frac{3k_1(x' - k_1\tau)}{\varepsilon} \right\}}{2\sqrt{\pi\varepsilon(t-\tau)}} \times \right.\right.$$

$$\left. \times \sum_{l=0}^{\infty} \bar{c}_l \varepsilon^l dx' \right) d\tau + \int_0^t \left(\int_{k_1\tau}^{\infty} \frac{\exp\left\{ - \frac{(x + x' - 2k_1\tau)^2}{4\varepsilon(t-\tau)} - \frac{2k_1(x' - k_1\tau)}{\varepsilon} \right\}}{2\sqrt{\pi\varepsilon(t-\tau)}} \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{l=0}^{\infty} \bar{c}_l \varepsilon^l dx' \right) d\tau - \frac{k_1}{2\varepsilon_0} \int_0^t \left(\int_{k_1\tau}^{\infty} \exp\left\{ - \frac{2k_1(x' - k_1\tau)}{\varepsilon} \right\} \times \right.$$

$$\left.\left. \times \operatorname{erfc}\left(\frac{x + x' - 2k_1\tau}{2\sqrt{\varepsilon(t-\tau)}} \right) \sum_{l=0}^{\infty} \bar{c}_l \varepsilon^l dx' \right) d\tau \right) = \varepsilon^3 (I_4^{(1)} + I_4^{(2)} - I_4^{(3)}). \tag{35}$$

Подынтегральные выражения интегралов $I_4^{(i)}$ отличаются от подынтегральных выражений $I_3^{(i)}$ только коэффициентами при степенях ε и общим сомножителем

$$\exp\left\{-\frac{k_1(x'-k_1\tau)}{\varepsilon}\right\}.$$

Поэтому нахождение асимптотики интегралов $I_4^{(i)}$ в принципе будет совпадать с нахождением асимптотики интегралов $I_3^{(i)}$. Положив $\frac{3k_1x'}{\varepsilon}=v$, легко получим

$$I_4^{(1)}\sim\int_0^t \exp\left\{-\frac{(x-k_1\tau)^2}{4\varepsilon(t-\tau)}\right\}\sum_{l=0}^{\infty} d_l^{(5)}(k_1\tau,\tau)\,\varepsilon^{l+1/2}\,d\tau\sim$$

$$\sim\exp\left\{-\frac{k_1(x-k_1t)}{\varepsilon}\right\}\sum_{l=0}^{\infty}\tilde{d}_l^{(5)}(k_1\tau^*,\ \tau^*)\,\varepsilon^{l+1}. \tag{36}$$

При нахождении асимптотики интеграла $I_4^{(2)}$ сделаем замену $\frac{2k_1x'}{\varepsilon}=u$.

$$I_4^{(2)}\sim\int_0^t \exp\left\{-\frac{(x-k_1\tau)^2}{4\varepsilon(t-\tau)}\right\}\sum_{l=0}^{\infty}\bar{c}_l^{(1)}(k_1\tau,\ \tau)\,\varepsilon^{l+1/2}d\tau\sim$$

$$\sim\exp\left\{-\frac{k_1(x-k_1t)}{\varepsilon}\right\}\sum_{l=0}^{\infty} d_l^{(6)}(k_1\tau^*,\ \tau^*)\,\varepsilon^{l+1}. \tag{37}$$

Преобразуем $I_4^{(3)}$:

$$I_4^{(3)}=\frac{k_1}{2\varepsilon}\int_0^t\left(\int_{k_1\tau}^{\infty}\exp\left\{-\frac{2k_1(x'-k_1\tau)}{\varepsilon}\right\}\operatorname{erfc}\left(\frac{x+x'-2k_1\tau}{2\sqrt{\varepsilon(t-\tau)}}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{l=0}^{\infty}\bar{c}_l(x',\ \tau)\,\varepsilon^l dx'\right)d\tau. \tag{38}$$

Положим в (38)

$$u(x')=\operatorname{erfc}\left(\frac{x+x'-2k_1\tau}{2\sqrt{\varepsilon(t-\tau)}}\right),$$

$$du(x')=-\exp\left\{-\frac{(x+x'-2k_1\tau)}{4\varepsilon(t-\tau)}\right\}\frac{dx'}{\sqrt{\pi\varepsilon(t-\tau)}},$$

$$v(x') = \exp\left\{-\frac{2k_1(x'-k_1\tau)}{\varepsilon}\right\}\sum_{l=0}^{\infty}\tilde{\bar{c}}_l(x',\tau)\,\varepsilon^{l+1},$$

$$dv(x') = \exp\left\{-\frac{2k_1(x'-k_1\tau)}{\varepsilon}\right\}\sum_{l=0}^{\infty}\bar{c}_l(x',\tau)\,\varepsilon^{l}dx'.$$

Поэтому

$$I_4^{(3)} = \frac{k_1}{2\varepsilon}(-C+D), \tag{39}$$

где

$$C = \int_0^t\left(\operatorname{erfc}\left(\frac{x+x'-2k_1\tau}{2\sqrt{\varepsilon(t-\tau)}}\right)\exp\left\{-\frac{2k_1(x'-k_1\tau)}{\varepsilon}\right\}\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{l=0}^{\infty}\tilde{\bar{c}}_l(x',\tau)\,\varepsilon^{l+1}\Big|_{x'=k_1\tau}^{\infty}\right)d\tau,$$

$$D = \int_0^t\left(\int_{k_1\tau}^{\infty}\exp\left\{-\frac{(x+x'-2k_1\tau)}{4\varepsilon(t-\tau)}-\frac{2k_1(x'-k_1\tau)}{\varepsilon}\right\}\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{l=0}^{\infty}\tilde{\bar{c}}_l(x',\tau)\,\varepsilon^{l+1}\frac{dx'}{\sqrt{\pi\varepsilon(t-\tau)}}\right)d\tau.$$

Нахождение C ничем не отличается от нахождения асимптотики интеграла $I_4^{(2)}$, она фактически совпадает с выражением, стоящим справа в (37) (только при степенях ε стоят другие коэффициенты).

Итак, объединяя (36), (37) с учетом замечания об асимптотике D, получаем вид асимптотического разложения интеграла

$$I_4 \sim \varepsilon^3\exp\left\{-\frac{k_1(x-k_1t)}{\varepsilon}\right\}\sum_{l=0}^{\infty}a_l^{(4)}\varepsilon^{l+1}. \tag{40}$$

Теперь мы можем записать окончательный вид асимптотического разложения первой итерации $u_1(x, t)$ нелинейного уравнения (7)

$$u_1(x,t) = u_\Lambda(x,t) + \delta(I_1 - I_2 + I_3 - I_4) \sim U_0 - \varepsilon\exp\times$$

$$\times\left\{-\frac{k_1(x-k_1t)}{\varepsilon}\right\}\sum_{l=0}^{\infty}c_l(x,t)\,\varepsilon^l + \delta(U_0^3t - 3U_0^2\varepsilon\exp\times$$

$$\times\left\{-\frac{k_1(x-k_1t)}{\varepsilon}\right\}\sum_{l=0}^{\infty}a_l\varepsilon^l+3U_0\varepsilon^2\exp\left\{-\frac{k_1(x-k_1t)}{\varepsilon}\right\}\times$$

$$\times\sum_{l=0}^{\infty}a_l^{(3)}\varepsilon^{l+1}-\varepsilon^3\exp\left\{-\frac{k_1(x-k_1t)}{\varepsilon}\right\}\sum_{l=0}^{\infty}a_l^{(4)}\varepsilon^{l+1}\Bigg). \quad (41)$$

В более компактной форме асимптотическое равенство (41) может быть записано так:

$$u_1(x,t)\sim U_0-\exp\left\{-\frac{k_1(x-k_1t)}{\varepsilon}\right\}\sum_{l=0}^{\infty}b_l^{(1)}\varepsilon^l. \quad (42)$$

Сравнивая правые части (42) и (10), видим, что структура асимптотики первой итерации $u_1(x, t)$ не изменилась, изменились только коэффициенты при степенях ε.

Методом математической индукции несложно показать, что n-я итерация $u_n(x, t)$ решения нелинейного интегрального уравнения (7) имеет асимптотику следующей структуры:

$$u_n(x,t)\sim U_0-\exp\left\{-\frac{k_1(x-k_1t)}{\varepsilon}\right\}\sum_{l=0}^{\infty}b_l^{(n)}\varepsilon^l,$$

причем коэффициенты $b_l^{(n)}$ могут быть вычислены в явном виде.

Список литературы: 1. *К вопросу* о внутримолекулярной релаксации макромолекул/А. Б. Бартман, С. Г. Галактионов, В. Н. Панкович, Т. Л. Перельман// Инж.-физ. журн. 1984. 27, № 6. С. 1019—1027. 2. *Васильев А. Б., Волков В. Т.* Периодические решения некоторых сингулярно-возмущенных уравнений параболического типа/Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1985. 25, № 4. С. 609—614. 3. *Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Самарский А. А.* Об асимптотической устойчивости автомодельных решений уравнения теплопроводности с нелинейным стоком//Докл. АН СССР. 1985. 281. № 1. С. 23—28. 4. *Карташов Э. М.* Аналитические методы в теплопроводности твердых тел. М., 1979. 415 с. 5. *Несененко Л. М.* Об асимптотике вблизи подвижной границы решения второй краевой задачи уравнения теплопроводности//Методы и алгоритмы параметрического анализа линейных и нелинейных моделей переноса. М., 1985. С. 30—35. 6. *Оливер Ф.* Введение в асимптотические методы и специальные функции. М., 1978. 355 с. 7. *Тихонов А. Н.* О функциональных уравнениях типа Вольтерра и их применениях к некоторым задачам математической физики// Бюл. МГУ. Математика, механика. 1938. 1, вып. 8. С. 1—23. 8. *Федорюк М. В.* Метод перевала. М., 1977. 368 с. 9. *Марри Дж.* Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. М., 1983. 295 с.

Поступила в редколлегию 26.02.86

УДК 517.19

Н. А. БЫКОВ

О РАЗРЕШИМОСТИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В R^n.

В данной статье показана возможность восстановления формального решения линейного функционального уравнения до гладкого решения во всем пространстве R^n.

Рассматривается уравнение $\varphi(\Lambda x) = Q(x)\varphi(x) + \gamma(x)$ **(1)** относительно неизвестного отображения $\varphi: R^n \to C^m$.

Здесь Λ — линейный гиперболический оператор в R^n, т. е. Λ обратим, и его спектр не пересекается с единичной окружностью; $Q(x)$ — функциональная $m \times m$-матрица, задающая бесконечно дифференцируемый, обратимый оператор в пространстве C^∞ отображений из R^n в C^m; $\gamma: R^n \to C^m$, $\gamma(x) \in C^\infty(R^n)$.

Локальные задачи такого типа, возникающие при рассмотрении вопросов сопряженности ростков гладких отображений, изучены в [1, 2].

Существование формального решения (1) означает, что найдется формальный ряд $\hat{\varphi}_0(x) = \left\{\sum_I a_I^j x^I\right\}_{j=1}^m$ ($I = (I_1, \ldots, I_n)$ — неотрицательный целочисленный мультииндекс, $x^I = x_1^{I_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{I_n}$), такой, что $\hat{Q}(x)\hat{\varphi}_0(x) + \hat{\gamma}(x) = \hat{\varphi}_0(\Lambda x)$ **(2)**. В равенстве (2) через $\hat{Q}(x)$, $\hat{j}(x)$ обозначены соответствующие ряды Тейлора в нуле для $Q(x)$, $\gamma(x)$.

Теорема. *Пусть уравнение (1) имеет формальное решение* $\varphi_0(x)$. *Тогда существует отображение* $\varphi: R^n \to C^m$, $\hat{\varphi}(x) = \hat{\varphi}_0(x)$, $\varphi(x) \in C^\infty(R^n)$ и $\varphi(x)$ *удовлетворяет (1).*

Доказательство. 1. Обозначим через L_+ собственное подпространство Λ, отвечающее части спектра оператора, которая лежит внутри единичного круга, и через L_- — части спектра, лежащей вне его. Перепишем (1) в виде

$$\varphi(x) = Q(\Lambda^{-1}x)\varphi(\Lambda^{-1}x) + \gamma(\Lambda^{-1}x).$$

По теореме Бореля [1] существует отображение $\varphi_1(x)$, $\varphi_1: R^n \to C^m$, $\varphi_1(x) \in C^\infty(R^n)$, для которого $\hat{\varphi}_1(x) = \hat{\varphi}_0(x)$. Решение (1) $\varphi(x)$ будем искать в виде $\varphi(x) = \varphi_1(x) + \psi(x)$. Для $\psi(x)$, плоского в нуле отображения, получаем уравнение

$$\psi(x) = Q(\Lambda^{-1}x)\psi(\Lambda^{-1}x) + (\gamma(\Lambda^{-1}x) + Q(\Lambda^{-1}x)\varphi_1(\Lambda^{-1}x) - \varphi_1(x)).$$

Поскольку $\hat{\varphi}_1(x)$ — формальное решение (1), то в силу (2) выражение в скобках плоское в нуле отображение, обозначим его $g(x)$, также примем $Q(\Lambda^{-1}x) = G(x)$.

Пусть V — некоторая замкнутая ограниченная окрестность нуля, лежащая в L_-. Введем в пространстве плоских в нуле отображений $\psi: V \to C^m$ счетный набор норм

$$\|\psi(x)\|_{k,\nu} = \sup_{x \in V} \frac{\|\psi(x)^{(k)}\|}{\|x\|^\nu} \quad (k, \nu = 0, 1, \ldots).$$

Рассмотрим в этом пространстве непрерывный оператор T, действующий по формуле $T(\psi(x)) = G(x)\psi(\Lambda^{-1}x) + g(x)$, и выпуклый компакт K тех функций, для которых $\|\psi(x)\|_{k,\nu} \leqslant c_{k,\nu}$, $\nu \geqslant \nu_0(k)$, где $c_{k,\nu}$ — некоторые неотрицательные константы.

Согласно принципу неподвижной точки (теорема Тихонова) [3] для разрешимости уравнения $T(\psi(x)) = \psi(x)$ достаточно показать, что некоторый такой компакт K переводится оператором T в себя.

Возможность такого выбора констант $c_{k,\nu}$ докажем по индукции, пользуясь тем, что поскольку $V \subset L_-$, то для ограничения $\Lambda^{-1} | L_- = \Lambda_-$ существует такая норма, для которой $\|\Lambda_-\| < q < 1$.

Пусть $\sup\limits_{x \in V} \|G(x)\| = M$. Тогда

$$\frac{\|(T(\psi(x)))^{(k)}\|}{\|x\|^\nu} = \frac{1}{\|x\|^\nu} \|(G(x) \otimes E_k)(\psi^{(k)}(\Lambda_- x)\Lambda^{\times k}) +$$
$$+ R(x, \psi'(x), \ldots, \psi^{(k-1)}(x)\|.$$

Здесь $E_k = I^{\times k}$ (I — единичный оператор), а выражение R зависит от младших производных $\psi(x)$, и значит, может быть оценено по предположению индукции

$$\frac{1}{\|x\|^\nu} \left\| R\left(x, \psi'(x), \ldots, \psi^{(k-1)}_{(x)}\right)\right\| \leqslant S(c_{0,\nu}; \ldots; c_{k-1,\nu})$$

при $\nu \geqslant \nu_0(k)$. Следовательно,

$$\frac{\|(T(\psi(x)))^{(k)}\|}{\|x\|^\nu} \leqslant Mq^k \frac{\|\psi^{(k)}(\Lambda_- x)\|}{\|x\|^\nu} + S(c_{0,\nu}; \ldots; c_{k-1,\nu}) =$$

$$= Mq^k \frac{\|\Lambda_- x\|^\nu}{\|x\|^\nu} \frac{\|\psi^{(k)}(\Lambda_- x)\|}{\|x\|^\nu} + S(c_{0,\nu}; \ldots; c_{k-1,\nu}) \leqslant Mq^{k+\nu}\|\psi(x)\|_{k,\nu} +$$
$$+ S(c_{0,\nu}; \ldots; c_{k-1,\nu})$$

для любого ν, $\nu \geqslant \nu_0(k)$.

Поскольку $q < 1$, то существует $\tilde{\nu}_0 = \tilde{\nu}_0(k)$, такое, что $c_{k,\nu}$ может быть выбрано из соотношения

$$S(c_{0,\nu}; \ldots; c_{k-1,\nu}) \leqslant (1 - Mq^{k+\nu}), c_{k,\nu}\nu \geqslant \tilde{\nu}_0.$$

Тогда $\|T(\psi(x))\|_{k,\nu} \leqslant c_{k,\nu}$ при всех ν, $\nu \geqslant \nu(k)$.

Таким образом, T имеет неподвижную точку в K, т. е. уравнение (1) разрешимо в $V \subset L_-$.

2. Рассмотрим множества V_k, $k=0, 1, \ldots$; $V_0=V$; $V_k=\{x\in L_-|\, x\in\Lambda(V_{k-1})\}$.
Найденное в п. 1 решение $\varphi(x)$ продолжается на L_- согласно (1), для всех x из V_{k-1}:

$$\varphi(\Lambda x)=Q(x)\varphi(x)+\gamma(x).$$

Очевидно, (1) задает C^∞ продолжение $\varphi(x)$ с V_{k-1} на V_k, а поскольку $\lim\limits_{k\to\infty} V_k=L_-$, то (1) задает бесконечно дифференцируемое решение на всем L_-.

3. Аналогично п. 1, 2 могут быть найдены полные производные $\varphi^{(k)}(x)\,|\,L_-$ решения $\varphi(x)$ на L_-. А именно, пусть найдены производные $\varphi^{(k)}(x)\,|\,L_-$, $k=\overline{0, i-1}$. Рассматривая $\varphi^{(i)}(x)$ как отображение $\varphi^{(i)}: \boldsymbol{R}^n\to \boldsymbol{C}^m\otimes(\boldsymbol{R}^n)^{\times i}$ и дифференцируя уравнение (1) i раз, получим

$$\varphi^{(i)}(\Lambda x)=((\boldsymbol{Q}(x)\otimes E_i)\varphi^{(i)}(x)+R_{(i)}(x, \varphi'(x),\ldots,\varphi^{i-1}(x)))(\Lambda^{-1})^{\times i}. \quad (3)$$

При $x\in L_-$ уравнение (3) запишется в виде

$$\varphi^{(i)}(\Lambda x)=A_i(x)\varphi^{(i)}(x)+R_i(x). \quad (4)$$

Здесь $A_i(x)$ — бесконечно дифференцируемый, обратимый оператор в пространстве C^∞ отображений из $\boldsymbol{R}^n$ в $\boldsymbol{C}^m\otimes(\boldsymbol{R}^n)^{\times i}$, действующий по формуле $A_i(x)\psi(x)=(\boldsymbol{Q}(x)\otimes E_i)(\psi(x)(\Lambda^{-1})^{\times i})$, $\psi:\boldsymbol{R}^n\to \boldsymbol{C}^m\otimes(\boldsymbol{R}^n)^{\times i}$, $\psi(x)\in \boldsymbol{C}^\infty(\boldsymbol{R}^n)$, с нормой $\|A_i(x)\|=\|\boldsymbol{Q}(x)\|\cdot\|\Lambda^{-1}\|^i$; R_i — известное C^∞ отображение $\boldsymbol{R}^n\to \boldsymbol{C}^m\otimes(\boldsymbol{R}^n)^{\times i}$.

Согласно п. 1, 2 уравнение (4) имеет бесконечно дифференцируемое решение $\varphi^{(i)}(x)$ на L_- при любом i. Снова, пользуясь теоремой Бореля, построим C^∞ отображение $\varphi_2: \boldsymbol{R}^n\to \boldsymbol{C}^m$, имеющее на L_- производные, совпадающие с найденными $\varphi^{(i)}(x)$.

Как в п .1 решение в некоторой окрестности L_-—W, $W=L_-\times U$, где U — замкнутая ограниченная окрестность нуля в L_+, будем искать в виде

$$\varphi(x)=\varphi_2(x)+\psi(x),$$

причем $\psi(x)$ — плоское на L_- отображение (это значит, что $\psi(x)$ равно нулю на L_- вместе со всеми своими производными). После подстановки $\varphi(x)$ в (1), введения обозначений
$\boldsymbol{Q}^{-1}(x)=G(x)$; $\boldsymbol{Q}^{-1}(x)\gamma(x)+\boldsymbol{Q}^{-1}(x)\varphi_2(\Lambda x)-\varphi_2(x)=\boldsymbol{g}(x)$, получаем $\psi(x)=G(x)\psi(\Lambda x)+g(x)=T(\psi(x))$ **(5)**, где $g(x)$ — уже плоское на L_- отображение; T — непрерывный оператор в пространстве плоских на L_- отображений $\psi: W\to \boldsymbol{C}^m$.

В этом пространстве вводится счетный набор полунорм

$$\|\psi(x)\|_{k,N,\nu}=\sup_{x\in\Pi_N}\frac{\|\psi(x)^{(k)}\|}{\|x_+\|^\nu}\ (k,\ N,\ \nu=0, 1, \ldots).$$

Здесь x_+ — проекция x на подпространство L_+, $\Pi_N=B_N\times U$, где B_N — шар радиуса $\|\Lambda|L_-\|^N$, лежащий в L_-. Очевидно, $\Pi_N\subset\Pi_{N+1}$, $\Lambda(\Pi_N)\subset\Pi_{N+1}$, $\Pi_N\subset W$ и $\lim\limits_{N\to\infty}\Pi_N=W$. Пользуясь тем, что в силу определения L_+, норма может быть выбрана так, что

$$\frac{\|\Lambda x_+\|}{\|x_+\|} \leqslant q < 1,$$

оценим $\|T(\psi(x))\|_{k,N,\nu}$:

$$\frac{\|(T(\psi(x)))^{(k)}\|}{\|x_+\|^\nu} = \frac{1}{\|x_+\|^\nu}\|(G(x)\otimes E_k)(\psi^{(k)}(\Lambda x)\Lambda^{\times k}) +$$

$$+ R(\psi', \ldots, \psi^{(k-1)})\| \leqslant \widetilde{M}_N q^k \frac{\|\Lambda x_+\|^\nu}{\|x_+\|^\nu}\frac{\|\psi^{(k)}(\Lambda x)\|}{\|\Lambda x_+\|^\nu} +$$

$$+ \frac{1}{\|x_+\|^\nu}\|R(\psi'(\Lambda x), \ldots, \psi^{(k-1)}(\Lambda x)\|.$$

Здесь $\widetilde{M}_N = \sup\limits_{x\in\Pi_N}\|G(x)\|$. Пусть $\|\psi(x)\|_{i,N,\nu} \leqslant c_{i,N,\nu}$ для любого ν, $\nu \geqslant \nu_0(i, N)$ при всех N и при $i = \overline{0, k-1}$. Тогда из свойств Π_N и оценок выше следует оценка

$$\|T(\psi(x))\|_{k,N,\nu} \leqslant \widetilde{M}_N q^{k+\nu}\|\psi(x)\|_{k,N+1,\nu} + S,$$

при $\nu > \nu_0(k, N)$, $S = S(c_{0,N+1,\nu}; \ldots; c_{k-1,N+1,\nu})$.

Таким образом, если $c_{k,N,\nu} > S$ $\nu \geqslant \tilde{\nu}_0(k, N)$, то $\|T(\psi(x))\|_{k,N,\nu} \leqslant$ $\leqslant c_{k,N,\nu}$ при всех ν, $\nu \geqslant \tilde{\nu}_0(k, N)$.

То есть выпуклый компакт K тех функций, для которых

$$\|\psi(x)\|_{k,N,\nu} \leqslant c_{k,N,\nu} \quad \nu > \nu(k, N)$$

переводится оператором T в себя. Тогда по теореме Тихонова T имеет неподвижную точку в K, и следовательно, уравнение (1) разрешимо в W.

4. Построение C^∞ решения, заданного во всем R^n, заканчивается в полной аналогии с п. 2 распространением решения, найденного в п. 3, с W на R^n (по формуле (1)).

Теорема доказана.

Список литературы: 1. *Белицкий Г. Р.* Нормальные формы, инварианты и локальные отображения. К., 1979. 137 с. 2. *Белицкий Г. Р.* Функциональные уравнения и локальная сопряженность отображений класса C^∞.//Мат. сб. 1973. 91. № 4. С. 565—579. 3. *Tichonoff A. N.* Ein Fixpunktsatz//Math. Ann. 1935. 111. N 5. S. 767—776.

Поступила в редколлегию 07.02.87

УДК 517.432

С. Н. ЗИНЕНКО

К ВОПРОСУ О ДИЛАТАЦИИ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА

При изучении несамосопряженных и неунитарных операторов полезным оказывается метод дилатаций, т. е. метод «растяжения» заданного оператора до самосопряженного или унитарного. Задача построения J самосопряженной минимальной дилатации $\tilde{A}$ оператора A с плотной областью определения $D(A)$ и непустым множеством регулярных точек $\rho(A)$ была решена в работах [1—3]. Однако построение фактически ведется в терминах некоторого унитарного узла $\Delta=(H, G, F; T, F, G, S, J_G, J_F)$, основным оператором которого является преобразование Кэли $T=(A-iI)(A+iI)^{-1}$ оператора A. При нахождении дилатаций конкретных операторов (например, дифференциальных [4, 5]) весьма сложно воспользоваться этими общими построениями.

В предлагаемой работе строится J самосопряженная минимальная дилатация $\tilde{A}'$, которая явно выражается через оператор A. Построение ведется в терминах эрмитового узла $\delta=(H, G, F;$ $A', \Gamma'_+, \Gamma'_-, J'_+, J_-)$. Попутно приводится модификация дилатации $\tilde{A}$, построенной ранее [1, 3], и устанавливается связь между $\tilde{A}'$ и $\tilde{A}$.

1. Отметим ряд фактов и определений из теории характеристических функций (х. ф.) линейных операторов.

Пусть A — несамосопряженный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H с плотной областью определения $D(A)$ и непустым множеством регулярных точек $\rho(A)$. Обозначим через $\delta=(H, G, F; A, \Gamma_+, \Gamma_-, J_+, J_-)$ эрмитовый узел с основным оператором A. Здесь H, G, F — гильбертовы пространства, Γ_+, Γ_- — граничные операторы, действующие соответственно из $D(A)$ на $G'\subset G$ и из $D(A^*)$ на $F'\subset F$, $J_+\in[G, G]$ $(J_+=J_+^*, J_+^2=I)$, $J_-\in[F, F]$ $(J_-=J_-^*, J_-^2=I)$*. При этом требуется, чтобы

$$\frac{1}{i}((Au^+, v^+)-(u^+, Av^+))=(J_+\Gamma_+u^+, \Gamma_+v^+),\ u^+,\ v^+\in D(A), \tag{1}$$

$$\frac{1}{i}((u^-, A^*v^-)-(A^*u^-, v^-))=(J_-\Gamma_-u^-, \Gamma_-v^-),\ u^-, v^-\in D(A^*).$$

Области значений $G'=R(\Gamma_+)$, $F'=R(\Gamma_-)$ называются граничными пространствами [6]. Узел δ предполагается минимальным: $\overline{G'}=G$, $\overline{F'}=F$. Из условий узла (1) следует, что $\Gamma_+u^+=0$ $(\Gamma_-u^-=0)$ тогда и только тогда, когда $u^+=u^0\in D_0 (u^-=u^0\in D_0)$, где $D_0=\{u^0\in D(A)\cap$ $\cap D(A^*): Au^0=A^*u^0\}$ — область эрмитовости операторов A, A^*. Х. ф. $W(\lambda)$ узла δ определяется равенством $W(\lambda)\Gamma_-=\Gamma_+(A-$ $-\lambda I)^{-1}(A^*-\lambda I)$, $\lambda\in\rho(A)$.

Аналогичные понятия вводятся для произвольного ограниченного оператора $T \in [H, H]$ как оператора, «близкого» к унитарному. Унитарным узлом $\Delta = (H, G, F; T, F, G, S, J_G, J_F)$ называется совокупность, состоящая из гильбертовых пространств H, G, F и операторов

$$U = \begin{vmatrix} T & F \\ G & S \end{vmatrix} \in [H \oplus G, H \oplus F],\ J_G \in [G, G],\ (J_G = J_G^*,\ J_G^2 = I),$$
$$J_F \in [F, F] (J_F = J_F^*,\ J_F^2 = I).$$

При этом требуется, чтобы оператор U был унитарен в метрике, порождаемой операторами $I \oplus J_G$, $I \oplus I_F : UU^+ = U^+U = 1$ [7]. Узел Δ называется минимальным, если $\overline{R(G)} = G$, $\overline{R(F^+)} = F$. Нетрудно видеть, что операторы T, F, G, S тогда и только тогда являются компонентами минимального унитарного узла Δ (т. е. оператор U унитарен в соответствующей метрике), когда

$$I - T^*T = G^+G,\ I - TT^* = FF^+,\ GT^* + SF^+ = 0. \qquad (2)$$

Х. ф. $\theta(\zeta)$ узла Δ определяется равенством $\theta(\zeta) = S + \zeta G (I - \zeta T)^{-1} F$.

Нам понадобится связь между минимальным эрмитовым узлом δ, основным оператором которого является оператор A, и минимальным унитарным узлом Δ, основным оператором которого является преобразование Кэли T оператора A: $T = (A - \overline{\lambda_0} I)(A - \lambda_0 I)^{-1} = I + 2i \operatorname{Im} \lambda_0 R(\lambda_0)$. Здесь $\lambda_0 \in \rho(A)$ — некоторая фиксированная невещественная регулярная точка оператора A, $R(\lambda_0) = (A - \lambda_0 I)^{-1}$ резольвента оператора A. Положим $s = -\operatorname{sign} \operatorname{Im} \lambda_0$. Отметим ряд соотношений

$$R(\lambda_0) = \frac{s}{2i\,|\operatorname{Im}\lambda_0|}(I - T), \quad R^*(\lambda_0) = -\frac{s}{2i\,|\operatorname{Im}\lambda_0|}(I - T^*),$$

$$A = -(\lambda_0 - \overline{\lambda_0})(I - T)^{-1} + \lambda_0 I, \quad A^* = -(\overline{\lambda_0} - \lambda_0)(I - T^*)^{-1} + \overline{\lambda_0} I. \qquad (3)$$

Обозначая через

$$B_+(\lambda_0) = -\frac{1}{i}(R(\lambda_0) - R^*(\lambda_0)) + \frac{\lambda_0 - \overline{\lambda_0}}{i} R^*(\lambda_0) R(\lambda_0),$$

$$B_-(\lambda_0) = -\frac{1}{i}(R(\lambda_0) - R^*(\lambda_0)) + \frac{\lambda_0 - \overline{\lambda_0}}{i} R(\lambda_0) R^*(\lambda_0),$$

получим

$$B_+(\lambda_0) = \frac{s}{2|\operatorname{Im}\lambda_0|}(I - T^*T), \quad B_-(\lambda_0) = \frac{s}{2|\operatorname{Im}\lambda_0|}(I - TT^*).$$

Очевидно, T, T^*—ограниченные операторы в H, $D(T) = H$, $D(T^*) = H$, 1 не является их собственным значением.

---

* Через $[H, F]$ обозначается множество линейных ограниченных операторов, действующих из F в H.

Лемма. *Пусть* $\delta=(H, G, F; A, \Gamma_+, \Gamma_-, J_+, J_-)$ — *минимальный эрмитовый узел, такой, что* $W(\lambda_0)$ — *ограниченный оператор. Тогда совокупность* $\Delta=(H, G, F; T, F, G, S, J_G, J_F)$, *где*

$$T=(A-\overline{\lambda}_0 I)(A-\lambda_0 I)^{-1}, \quad F^+=\frac{1}{\sqrt{2|\operatorname{Im}\lambda_0|}}\Gamma_-(I-T^*),$$
$$G=\frac{1}{\sqrt{2|\operatorname{Im}\lambda_0|}}\Gamma_+(I-T), \ S=W(\lambda_0), \ J_G=sJ_+, \ J_F=sJ_- \tag{4}$$

образует минимальный унитарный узел. Наоборот, пусть $\Delta=(H, G, F; T, F, G, S, J_G, J_F)$ — *минимальный унитарный узел такой, что* $T=(A-\overline{\lambda}_0 I)(A-\lambda_0 I)^{-1}$. *Тогда совокупность* $\delta=(H, G, F; A, \Gamma_+, \Gamma_-, J_+, J_-)$, *где*

$$\Gamma_+=\sqrt{2|\operatorname{Im}\lambda_0|}\,G(I-T)^{-1}, \quad J_+=sJ_G,$$
$$\Gamma_-=\sqrt{2|\operatorname{Im}\lambda_0|}\,F^+(I-T^*)^{-1}, \quad J_-=sJ_F \tag{5}$$

образует минимальный эрмитовый узел, такой, что $W(\lambda_0)=S/_{F'}$ — *ограниченный оператор. При таком соответствии между узлами*

$$W(\lambda)=\Theta(\zeta)/_{F'}, \quad \zeta=\frac{\lambda-\lambda_0}{\lambda-\overline{\lambda}_0}.$$

Доказательство. Пусть δ-минимальный эрмитовый узел, такой, что $W(\lambda_0)$ — ограниченный оператор. Построим совокупность Δ (4). Полагая $f=(A-\lambda_0 I)u^+$, $g=(A-\lambda_0 I)v^+$, $u^+, v^+\in D(A)$, приходим к цепочке преобразований

$$\frac{1}{i}((Au^+, v^+)-(u^+, Av^+))=(J_+\Gamma_+u^+, \ \Gamma_+v^+),$$
$$(B_+(\lambda_0)f, g)=(J_+\Gamma_+R(\lambda_0)f, \ \Gamma_+R(\lambda_0)g),$$
$$((I-T^*T)f, g)=(J_G Gf, Gg).$$

Отсюда следует ограниченность оператора G как оператора, определенного на всем пространстве H и обладающего замкнутым расширением. Последнее вытекает из того, что G^* имеет всюду плотную область определения $D(G^*)\supset R(J_G G)$. Кроме того, получено условие узла $I-T^*T=G^+G$. Аналогично устанавливается равенство $I-TT^*=FF^+$ и ограниченность оператора F^+, а вместе с ним и F. Из определения х. ф. $W(\lambda)$ и оператора $S=W(\lambda_0)$ получаем третье условие узла (2):

$$W(\lambda_0)\Gamma_-=\Gamma_+(A-\lambda_0 I)^{-1}(A^*-\lambda_0 I),$$
$$W(\lambda_0)\Gamma_-(A^*-\overline{\lambda}_0 I)^{-1}=\Gamma_+(A-\lambda_0 I)^{-1}(A^*-\lambda_0 I)(A^*-\overline{\lambda}_0 I)^{-1},$$
$$-W(\lambda_0)\Gamma_-(I-T^*)=\Gamma_+(I-T)T^*, \ -SF^+=GT^*.$$

Пусть теперь Δ — некоторый минимальный унитарный узел, основным оператором которого является преобразование Кэли T

оператора A. Образуем совокупность δ (5). Проводя проведенные выше цепочки преобразований в обратном порядке, приходим к условиям (1) эрмитового узла δ.

Наконец докажем равенство $W(\lambda)=\theta(\zeta)/_{F'}$, $\zeta=\dfrac{\lambda-\lambda_0}{\lambda-\overline{\lambda_0}}$. Замечая, что

$$A-\lambda I=-(\lambda_0-\overline{\lambda_0})(I-T)^{-1}+(\lambda_0-\lambda)I=$$
$$=-(\lambda-\overline{\lambda_0})(I-\zeta T)(I-T)^{-1},$$
$$A^*-\lambda I=-(\overline{\lambda_0}-\lambda_0)(I-T^*)^{-1}+(\lambda_0-\lambda)I=$$
$$=-(\lambda-\overline{\lambda_0})(\zeta I-T^*)(I-T^*)^{-1},$$

получаем

$$W(\lambda)\Gamma_-=\Gamma_+(A-\lambda I)^{-1}(A^*-\lambda I)=$$
$$=\sqrt{2|\operatorname{Im}\lambda_0|}\,G(I-T)^{-1}(I-T)(I-\zeta T)^{-1}(\zeta I-T^*)(I-T^*)^{-1}=$$
$$=\sqrt{2|\operatorname{Im}\lambda_0|}\,G(I-\zeta T)^{-1}(\zeta I-\zeta TT^*+\zeta TT^*-T^*)(I-T^*)^{-1}=$$
$$=\sqrt{2|\operatorname{Im}\lambda_0|}\,(G(I-\zeta T)^{-1}\zeta FF^+-GT^*)(I-T^*)^{-1}=$$
$$=(S+\zeta G(I-\zeta T)^{-1}F)\sqrt{2|\operatorname{Im}\lambda_0|}\,F^+(I-T^*)^{-1}=\Theta(\zeta)\Gamma_-.$$

2. Определение. *Оператор $\tilde{A}$, действующий в $\tilde{H}$, называется дилатацией оператора A, действующего в $H\subset\tilde{H}$, если*

$$(A-\lambda I)^{-1}=P_H(\tilde{A}-\lambda I)^{-1}/_H,\quad \lambda\in\rho(A)\cap\rho(\tilde{A}). \tag{6}$$

Пусть A — плотно заданный оператор $\overline{D(A)}=H$, имеющий непустое множество регулярных точек $\rho(A)$, и $\lambda_0\in\rho(A)$, $\lambda_0\neq\overline{\lambda_0}$, и $s=-\operatorname{sign}\operatorname{Im}\lambda_0$. Очевидно, найдется целая окрестность $U_\varepsilon(\lambda_0)\subset\subset\rho(A)$, причем ее можно выбрать полностью лежащей в полуплоскости $s\operatorname{Im}\lambda<0$. Заметим, что $U_\varepsilon(\overline{\lambda_0})\in\rho(A^*)$ и лежит в полуплоскости $s\operatorname{Im}\lambda>0$.

Пусть $\delta=(H,G,F;A,\Gamma_+,\Gamma_-,J_+,J_-)$ — минимальный эрмитовый узел, такой, что $W(\lambda_0)$ — ограниченный оператор. В лемме показано, что тогда существует минимальный унитарный узел $\Delta=(H,G,F;T,F,G,S,J_G,J_F)$, основным оператором которого является преобразование Кэли $T=(A-\overline{\lambda_0}I)(A-\lambda_0 I)^{-1}$ такой, что

$$\Gamma_+=-\sqrt{2|\operatorname{Im}\lambda_0|}\,G(I-T)^{-1},\quad J_+=sJ_G,$$
$$\Gamma_-=\sqrt{2|\operatorname{Im}\lambda_0|}\,F^+(I-T^*)^{-1},\ J_-=sJ^F.$$

По сравнению с формулировкой леммы в операторе Γ_+ удобно изменить знак.

Построим пространство $\widetilde{H} = L^2(-\infty, 0; F) \oplus H \oplus L^2(0, \infty; G)$.

Скалярное произведение между элементами $\widetilde{u} = \begin{bmatrix} \varphi^+ \\ u \\ \varphi^- \end{bmatrix}$, $\widetilde{v} = \begin{bmatrix} \psi^+ \\ v \\ \psi^- \end{bmatrix} \in \widetilde{H}$ задается обычным образом

$$(\widetilde{u}, \widetilde{v})_{\widetilde{H}} = \int_{-\infty}^{0} (\varphi^-(\xi), \quad \psi^-(\xi))_F \, d\xi + (u, v)_H + \int_{0}^{\infty} (\varphi^+(\xi), \psi^+(\xi))_G \, d\xi.$$

С помощью оператора $\widetilde{J} : \widetilde{J}\widetilde{u} = \begin{bmatrix} J_G \varphi^+ \\ u \\ J_F \varphi^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sJ_+ \varphi^+ \\ u \\ sJ_- \varphi^- \end{bmatrix}$ в $\widetilde{H}$ задается индефинитная метрика $[\widetilde{u}, \widetilde{v}] = (\widetilde{J}\widetilde{u}, \widetilde{v})$. В $\widetilde{H}$ рассмотрим операторы $\widetilde{A}'$ и $\widetilde{A}$.

Область определения оператора $\widetilde{A}'$ составим из векторов $\widetilde{u} \in \widetilde{H}$, подчиненных условиям: *a*) $\varphi^+ \in W_2^1(0, \infty; G)$, $u = u^+ + u^- \in D(A) + D(A^*)$, $\varphi^- \in W_2^1(-\infty, 0; F)$, где W_2^1 — класс Соболева; *b*) $\varphi^+(0) = \Gamma_+ u^+$, $\varphi^-(0) = \Gamma_- u^-$.

Действие оператора $\widetilde{A}'$ зададим равенством

$$\widetilde{A}' \begin{bmatrix} \varphi^+ \\ u \\ \varphi^- \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} sP_+ \varphi^+ \\ \varphi^+(0) = \Gamma_+ u^+ \end{array} \right. \\ \quad Au^+ + A^* u^- \\ \left[\begin{array}{l} \varphi^-(0) = \Gamma_- u^- \\ sP_- \varphi^-, \end{array} \right. \end{array} \right.$$

где $P_\pm \varphi^\pm = -\dfrac{1}{i} \dfrac{d}{d\xi} \varphi^\pm$. Определение оператора $\widetilde{A}'$ корректно, поскольку произвол в выборе u^+, u^- для средней компоненты $u = u^+ + u^-$ в силу граничных условий сводится к слагаемому u^0 из области эрмитовости D_0 операторов A, $A^* : u = (u^+ + u^0) + (u^- - u^0)$.

Оператор $\widetilde{A}'$ искомый. Однако следует сделать замечание. По определению дилатация является замкнутым оператором (как оператор, имеющий регулярную точку). Построенный оператор $\widetilde{A}'$, вообще говоря, не замкнут. В теореме 2 будет доказано, что $\widetilde{A}'$ допускает замыкание $\widetilde{A}$, которое уже удовлетворяет условию дилатации (6). При этом, если граничные пространства F' и G' замкнуты ($\overline{F'} = F$, $\overline{G'} = G$), то $\widetilde{A}'$ замкнут и является $\widetilde{J}$ самосопряженной минимальной дилатацией операторов A, A^*. (Здесь можно провести аналогию с соответствующим свойством х. ф.: $W(\lambda) = \Theta(\zeta)/_{F'}$ и если $\overline{F'} = F$, то $W(\lambda) = \Theta(\zeta)$).

Область определения оператора $\tilde{A}$ составим из векторов $\tilde{u} \in \tilde{H}$, удовлетворяющих условиям: *a*) $\varphi^+ \in W_2^1(0, \infty; G)$, $u \in R(I-T)+R(F)$, $\varphi^- \in W_2^1(-\infty, 0; F)$;

$$b) \left[\begin{array}{l} u+f=Tf+F\dfrac{1}{\sqrt{2|\mathrm{Im}\,\lambda_0|}}\varphi^-(0), \\ \dfrac{1}{\sqrt{2|\mathrm{Im}\,\lambda_0|}}\varphi^+(0)=Gf+S\dfrac{1}{\sqrt{2|\mathrm{Im}\,\lambda_0|}}\varphi^-(0). \end{array}\right.$$

Здесь f — некоторый вектор из H свой для каждого элемента $\tilde{u} \in D(\tilde{A})$. Поскольку оператор $(I-T)$ обратим, то вектор f определяется по $\tilde{u} \in D(\tilde{A})$ единственным образом. Это позволяет корректно определить $\tilde{A}$, полагая

$$\tilde{A}\begin{bmatrix}\varphi^+ \\ u \\ \varphi^-\end{bmatrix} = \left|\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} sP_+\varphi^+ \\ (\lambda_0-\overline{\lambda_0})f+\lambda_0 u \\ sP_-\varphi^- \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} u+f=Tf+F\dfrac{1}{\sqrt{2|\mathrm{Im}\,\lambda_0|}}\varphi^-(0) \\ \dfrac{1}{\sqrt{2|\mathrm{Im}\,\lambda_0|}}\varphi^+(0)=Gf+S\dfrac{1}{\sqrt{2|\mathrm{Im}\,\lambda_0|}}\varphi^-(0). \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Наводящим соображением к построению оператора $\tilde{A}$ могут служить равенства

$$\left[\begin{array}{l} Au=(\lambda_0-\overline{\lambda_0})f+\lambda_0 u \\ u+f=Tf, \end{array}\right.$$

вытекающие из (3). Заметим, что оператор $\tilde{A}$ фактически совпадает с дилатацией, построенной в [1, 3], если положить $\lambda_0=-i$ и специальным образом включить преобразование Кэли $T=(A-iI)(A+iI)^{-1}$ в унитарный узел.

Теорема 1. *Оператор $\tilde{A}$ является $\tilde{I}$ самосопряженной дилатацией операторов A, A^*:*

$$(A-\lambda I)^{-1}=P_H(\tilde{A}-\lambda I)^{-1}/_H, \quad \lambda \in U_\varepsilon(\lambda_0),$$

$$(A^*-\lambda I)^{-1}=P_H(\tilde{A}-\lambda I)^{-1}/_H, \quad \lambda \in U_\varepsilon(\overline{\lambda}_0),$$

минимальной в том смысле, что

$$\tilde{H}=\bigvee_{\lambda \in U_\varepsilon}(\tilde{A}-\lambda I)^{-1}H, \quad U_\varepsilon=U_\varepsilon(\lambda_0)\cup U_\varepsilon(\overline{\lambda}_0).$$

Теорема 2. *Дилатация* $\tilde{A}$ *является замыканием оператора* $\tilde{A}'$. *При этом, если хотя бы одно из граничных пространств* G' *или* F' *полно, то* $\tilde{A}'=\tilde{A}$.

Доказательство. Покажем, что $\tilde{A}' \subset \tilde{A}$. Пусть $\tilde{u} = \begin{bmatrix} \varphi^+ \\ u \\ \varphi^- \end{bmatrix} \in D(\tilde{A})$ и пусть $\varphi^-(0) \in F'$, так что существует некоторый вектор $u^- \in D(A^*)$, такой, что

$$\varphi^-(0) = \Gamma_- u^- = \sqrt{2|\operatorname{Im}\lambda_0|}\; F^+ (I - T^*)^{-1} u^-.$$

Из граничного условия для $\tilde{u} \in D(\tilde{A})$ следует, что средняя компонента u допускает представление

$$u = -(I - T)f + FF^+ (I - T^*)^{-1}u^- = -(I - T)f +$$
$$+ (I - TT^*)(I - T^*)^{-1}u^- = -(I - T)f + (I - T^* + T^* - TT^*) \times$$
$$\times (I - T^*)^{-1}u^- = (I - T)(-f + T^*(I - T^*)^{-1}u^-) + u^- = u^+ + u^-,$$

где $u^+ = (I-T)(-f + T^*(I-T^*)^{-1}u^-)$, Очевидно, $u^+ \in D(A)$ и может быть произвольным вектором из $D(A)$. Выражая отсюда вектор $f = -(I-T)^{-1}u^+ + T^*(I-T^*)^{-1}u^-$, найдем условие для $\varphi^+(0)$. Имеем

$$\varphi^+(0) = \sqrt{2|\operatorname{Im}\lambda_0|}\, Gf + S\varphi^-(0) = \sqrt{2|\operatorname{Im}\lambda_0|}\,(-G(I - T)^{-1}u^+ +$$
$$+ GT^*(I - T^*)^{-1}u^- + SF^+(I - T^*)^{-1}u^-) =$$
$$= -\sqrt{2|\operatorname{Im}\lambda_0|}\, G(I - T)^{-1}u^+ = \Gamma_+ u^+.$$

Следовательно, $D(\tilde{A}') \subset D(\tilde{A})$. Покажем, что $\tilde{A}/_{D(\tilde{A}')} = \tilde{A}'$. В проверке нуждается лишь действие операторов $\tilde{A}$ и $\tilde{A}'$ на среднюю компоненту u вектора $\tilde{u} \in D(\tilde{A}')$. Имеем

$$(\lambda_0 - \overline{\lambda_0}) f + \lambda_0 u = (\lambda_0 - \overline{\lambda_0})(-(I - T)^{-1}u^+ + T^*(I - T^*)^{-1}u^-) +$$
$$+ \lambda_0 (u^+ + u^-) = (-(\lambda_0 - \overline{\lambda_0})(I - T)^{-1} + \lambda_0 I)\, u^+ +$$
$$+ (-(\overline{\lambda_0} - \lambda_0)(I - T^*)^{-1} + \overline{\lambda_0} I)\, u^- = Au^+ + A^*u^-.$$

Таким образом, $\tilde{A}' \subset \tilde{A}$. Из сказанного ясно, что если граничное пространство $F'=F$ полно, то всякий вектор $\varphi^-(0) \in F$ допускает представление $\varphi^-(0) = \Gamma_- u^-$ и, следовательно, $\tilde{A}' = \tilde{A}$. Аналогичное утверждение справедливо и для граничного пространства G'.

Пусть теперь $F' \neq F$, $G' \neq G$. Поскольку $\tilde{A}' \subset \tilde{A}$, то $\tilde{A}'$ допускает замыкание. Замыкание оператора $\tilde{A}'$ влечет замыкание оператора $(\tilde{A}' - \lambda_0 I)^{-1}$. Последний же оператор является сужением ограниченного оператора $(\tilde{A}-\lambda_0 I)^{-1}$ на область значений $R(\tilde{A}'-\lambda_0 I)$, которая, очевидно, плотна в $\tilde{H}$. Следовательно, замыкание оператора $(\tilde{A}'-\lambda_0 I)^{-1}$ — резольвента $(\tilde{A}-\lambda_0 I)^{-1}$. Тогда замыканием $\tilde{A}'$ является дилатация $\tilde{A}$.

Список литературы: 1. *Кужель А. В., Кудряшов Ю. Л.* Симметрические и самосопряженные дилатации диссипативных операторов//АН СССР. 1980. 253, № 4. С. 812—815. 2. *Кужель А. В.* Самосопряженные и J-самосопряженные дилатации линейных операторов//Теория функций, функцион. анализ и их приложения. 1982. Вып. 37. С. 54—62. 3. *Кудряшов Ю. Л.* Симметрические и самосопряженные дилатации диссипативных операторов//Теория функций, функцион. анализ и их приложения. 1982. Вып. 37. С. 51—54. 4. *Павлов Б. С.* Теория дилатаций и спектральный анализ несамосопряженных дифференциальных операторов//Матем. програм. и смежные вопросы. Теория операторов в линейных пространствах. М., 1976. С. 26—62. 5. *Зиненко С. Н.* Самосопряженная дилатация оператора Дирака и его функциональная модель. 1985. 51 с. Деп. в УкрНИИНТИ. 25.07.85. № 1567. 6. *Штраус А. В.* Характеристические функции линейных операторов// Изв. АН СССР, сер. мат. 1960. **24.** № 1, С. 43—74. 7. *Бродский М. С.* Унитарные операторные узлы и их характеристические функции//Успехи мат. наук. 1978. XXXIII, вып. 4 (202). С. 141—168. 8. *С.-Надь Б., Фойаш Ч.* Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. М., 1971. С. 326.

Поступила в редколлегию 09.10.87

УДК 517.938

Т. А. АХИЕЗЕР

ОЦЕНКА СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ ТРАЕКТОРИЙ ЭЛЕМЕНТАРНОГО ГИПЕРЦИКЛА

Элементарным гиперциклом [*1, 2*] *называется система обыкновенных дифференциальных уравнений следующего вида:* $\dot{x}=\Gamma(x)-x\sigma(x)$,

где $\Gamma_j(x)=k_j x_j x_{j-1}$ $(j=1, \ldots, n)$, $\sigma(x)=s(\Gamma x)=\sum\limits_{j=1}^{n}\Gamma_j(x)$, k_j — *положительные коэффициенты,* $n\geqslant 2$. Система рассматривается в симплексе

$$\Delta^n=\{x\in \boldsymbol{R}^n \mid x_j>0\ (j=1, \ldots, n),\ \sum_{j=1}^{n} x_j=1\}.$$

Каждая траектория $x(t)$, начинающаяся в Δ^n, определена при всех $t\geqslant 0$ и не выходит из Δ^n. В симплексе Δ^n имеется единственная особая точка

$$\bar{x}=\bar{\sigma}\left(\frac{1}{k_2}, \frac{1}{k_3}, \ldots, \frac{1}{k_n}, \frac{1}{k_1}\right)\left(\bar{\sigma}=\sigma(\bar{x})=\left(\sum_{j=1}^{n} k_j^{-1}\right)^{-1}\right).$$

При $n\leqslant 4$ все траектории сходятся к $\bar{x}$ [1, 2]. Исследуем скорость сходимости для этих трех случаев*. С этой целью прежде

* При $n\geqslant 5$ положение равновесия $\bar{x}$ неустойчиво.

всего вычислим спектр линейного приближения в точке $\bar{x}$, следуя процедуре, указанной ранее [2]. Производная $\Gamma'(\bar{x})$ определяется матрицей

$$H = \bar{\sigma} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{k_1}{k_2} \\ \frac{k_2}{k_3} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k_3}{k_4} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{k_n}{k_{n-1}} & 1 \end{pmatrix} = \bar{\sigma} Q^{-1} (E + A) Q,$$

где $Q = \operatorname{diag}(k_2, \dots, k_n, k_1)$, A — циклическая матрица n-го порядка, E — единичная матрица. Резольвента $R_\lambda = (H - \lambda E)^{-1}$ равна $\frac{1}{\bar{\sigma}} Q^{-1}(A - \mu E)^{-1} Q \left(\mu = \frac{\lambda}{\bar{\sigma}} - 1\right)$, а характеристический полином матрицы H есть $\det(\bar{\sigma}(E + A) - \lambda E) = \bar{\sigma}^n D(\mu)$, где $D(\mu)$ — характеристический полином матрицы A. Следовательно, числитель резольвенты R_λ равен $\widetilde{P}(\mu) = \bar{\sigma}^{n-1} Q^{-1} P(\mu) Q$. Здесь P — числитель резольвенты матрицы A. Применяя оператор $\widetilde{P}(\mu)$ к $\bar{x}$, заметим, что $Q\bar{x} = e$ — вектор с единичными координатами, $Ae = e$, откуда

$$(A - \mu E)^{-1} e = (1 - \mu)^{-1} e \quad \text{и} \quad P(\mu) e = \frac{D(\mu)}{1 - \mu} e.$$

Но $Q^{-1} e = \bar{x}$, а $s(\bar{x}) = 1$. Следовательно, характеристическое уравнение линейного приближения в точке $\bar{x}$ есть

$$\frac{D\left(\frac{\lambda}{\bar{\sigma}}\right)}{1 - \frac{\lambda}{\bar{\sigma}}} = 0.$$

Учитывая цикличность матрицы A, получаем $\frac{\lambda^n - \bar{\sigma}^n}{\lambda - \bar{\sigma}} = 0$, откуда

$$\lambda_j^{(n)} = \bar{\sigma} e^{\frac{2\pi i}{n} j} \quad (j = 1, \dots, n - 1).$$

При $n = 2$ единственной точкой спектра является простой корень $\lambda_1^{(2)} = -\bar{\sigma}$. Поэтому для всех траекторий гиперцикла имеем оценку

$$\| x(t) - \bar{x} \| = O(e^{-\bar{\sigma} t}).$$

При $n=3$ имеем два простых корня

$$\lambda_1^{(3)} = -\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\bar{\sigma},\ \lambda_2^{(3)} = -\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\bar{\sigma},$$

откуда

$$\| x(t) - \bar{x} \| = O(e^{-\frac{\bar{\sigma}}{2}t}).$$

Случай $n=4$ существенно сложнее.

Теорема. *При $n=4$ каждая траектория элементарного гиперцикла сходится с оценкой*

$$\| x(t) - \bar{x} \| = O(t^{-\frac{1}{2}}). \quad (1)$$

Доказательство. Не уменьшая общности, можно принять все $k_j=1$ [2]. Тогда $\bar{x}$ — центр симплекса. Перенесем начало координат в эту точку:

$$x_k = \frac{1}{4} + y_k \quad (k = 1, \ldots, 4).$$

Поскольку $s(x) = 1$, то $s(y) = 0$ и $\sigma(x) = \frac{1}{4} + \sigma(y)$.

В новых координатах система примет вид

$$\dot{y}_k = \left(\frac{1}{4} + y_k\right)(y_{k-1} - \sigma(y)) \quad (k = 1, \ldots, 4).$$

После замены времени $t=4\tau$ получим

$$y_k' = y_{k-1} + 4y_k y_{k-1} - \sigma(y) - 4y_k\sigma(y) \quad (k = 1, \ldots, 4) \quad (2)$$

(штрихом обозначена производная по τ). Далее время будем по-прежнему обозначать через t, а производную по времени — точкой. Запишем систему (2) в векторной форме $\dot{y}=Ay+h(y)$ (3), где $h(y)=h^{(2)}(y)+h^{(3)}(y)$, $h^{(2)}(y) = 4\Gamma(y) - \sigma(y)e$, $h^{(3)}(y) = -4\sigma(y)y$.

Диагонализуем матрицу A в пространстве C^4. Ее спектр есть i, -1, $-i$, 1, а из соответствующих собственных векторов v_1, v_2, v_3, v_4 можно составить ортонормированный базис.

Матрица перехода от стандартного базиса $\{e_j\}_1^4$ к базису $\{v_j\}_1^4$ имеет вид

$$T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -i & -1 & i & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ i & -1 & -i & 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку T унитарна, то $T^{-1}=T^*$. Сделаем замену $y=Tz$. Заметим, что переменные z_1, z_3 — комплексные, $z_3=\bar{z}_1$, а переменные z_2, z_4 — вещественные. Система (3) в новых координатах примет вид $\dot{z}=Dz+\tilde{f}(z)$ **(4)**, где $D=T^{-1}AT=\mathrm{diag}(i, -1, -i, 1)$,

$$\tilde{f}(z)=T^{-1}h(Tz)=4T^{-1}\Gamma(Tz)-2\sigma(Tz)e_4-4\sigma(Tz)z. \qquad (5)$$

Гиперплоскость $s(x)=1$ в результате сделанных замен переходит в подпространство $z_4=0$. Последнее инвариантно для системы (4), рассматриваемой во всем $\boldsymbol{C}^4$. Действительно, согласно (4), (5) $\dot{z}_4=z_4-4\sigma(Tz)z_4$. Сужение системы (4) на подпространство $z_4=0$ имеет вид

$$\begin{cases} \dot{z}_1=iz_1-2(1+i)z_2z_3+4z_1z_2^2 \\ \dot{z}_2=-z_2+2i(z_1^2-z_3^2)+4z_2^3 \\ \dot{z}_3=-iz_3-2(1-i)z_2z_1+4z_3z_2^2. \end{cases} \qquad (6)$$

В системе (6) третье уравнение эквивалентно первому, поскольку $z_3=\bar{z}_1$. Запишем эту систему в векторной форме $\dot{z}=\Lambda z+f(z)$ (7), где $\Lambda=\mathrm{diag}(i, -1, -i)$, $f_k(z)=\tilde{f}_k(z)$ $(k=1, 2, 3)$.

Систему вида (7) при помощи формальной замены переменных $\zeta=z+\hat{\varphi}(z)$ $(\hat{\varphi}(0)=0,\ \hat{\varphi}'(0)=0)$ можно привести к нормальной форме Пуанкаре—Дюлака [3]: $\dot{\zeta}=\Lambda\zeta+\hat{g}(\zeta)$. **(8)**, где $\hat{g}(\zeta)$ — формальное векторное поле с нулевой линейной частью, содержащее только резонансные члены, т. е. $\Lambda^*\hat{g}(\zeta)=\hat{g}'(\zeta)\Lambda^*\zeta$. При этом выполняется соотношение

$$\Lambda\hat{\varphi}(z)-\hat{\varphi}'(z)\Lambda z=f(z)+\hat{\varphi}'(z)f(z)-\hat{g}(z+\hat{\varphi}(z)). \qquad (9)$$

Пусть $k=(k_1, k_2, k_3)$ — мультииндекс с целыми неотрицательными компонентами, $z^k=z_1^{k_1}z_2^{k_2}z_3^{k_3}$. Вектор-моном z^ke_j называется резонансным, если $\lambda_j=(\lambda, k)$, где $\lambda=(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ — спектр линейного приближения системы (7).

Лемма. *Резонансные вектор-мономы системы* (7) *имеют вид*

$$z^ke_j=\rho^pz_je_j \quad (p\in \boldsymbol{N}), \text{ где } \rho=z_1z_3=|z_1|^2.$$

Доказательство. Если $\lambda_1=(\lambda, k)$, т. е. $i=i(k_1-k_3)-k_2$, то $k=(p+1, 0, p)$; если $\lambda_2=(\lambda, k)$, т. е. $-1=i(k_1-k_3)-k_2$, то $k=(p, 1, p)$; если $\lambda_3=(\lambda, k)$, т. е. $-i=i(k_1-k_3)-k_2$, то $k=(p, 0, p+1)$.

Следствие 1. *В нормальной форме* (8) *отсутствуют мономы с мультииндексами четного порядка.*

Пусть замена $\zeta=z+\hat{\varphi}(z)$ такова, что ряды $\hat{\varphi}_1$, $\hat{\varphi}_3$ комплекснозначны, $\hat{\varphi}_3=\bar{\hat{\varphi}}_1$, а $\hat{\varphi}_2$ — вещественнозначный. Тогда $\zeta_3=\bar{\zeta}_1$ и третье уравнение в системе (8) эквивалентно первому.

Следствие 2. *Система* (8) *может быть записана в виде*

$$\begin{cases} \dot{\zeta}_1 = \zeta_1 (i + \alpha\rho + \hat{\gamma}_1(\rho)) \\ \dot{\zeta}_2 = \zeta_2 (-1 + \hat{\gamma}_2(\rho)), \end{cases} \tag{10}$$

где $\rho = |\zeta_1|^2$; $\hat{\gamma}_k(\rho)$ — *формальные степенные ряды*, $\hat{\gamma}_k(0) = 0$ $(k = 1, 2)$, $\hat{\gamma}_1'(0) = 0$; $\alpha \in \boldsymbol{C}$.

По формальной нормальной форме (10) восстанавливается гладкая система

$$\begin{cases} \dot{\zeta}_1 = \zeta_1 (i + \alpha\rho + \gamma_1(\rho)) \\ \dot{\zeta}_2 = \zeta_2 (-1 + \gamma_2(\rho)), \end{cases} \tag{11}$$

где $\gamma_k(\rho)$ — функции класса C^∞, у которых ряды Тейлора в нуле равны $\hat{\gamma}_k(\rho)$ $(k=1, 2)$ (такие функции существуют по известной теореме Бореля).

Системы (7) и (11) формально эквивалентны. Для наших целей формального приведения к нормальной форме недостаточно. Гладкая эквивалентность ростков векторных полей с парой чисто мнимых собственных значений рассматривалась в работе [4], где доказано, что в пространстве таких ростков существует исключительное множество коразмерности бесконечность, вне которого все формально эквивалентные ростки гладко эквивалентны, и дано описание исключительного множества. Если $\operatorname{Re}\alpha \neq 0$, то система (7) не принадлежит исключительному множеству, и системы (7), (11) гладко эквивалентны.

Сделаем преобразование системы (7) вида $z + \varphi(z)$, уничтожающее квадратичную часть. Будем искать $\varphi(z)$ в виде однородного полиномиального отображения степени 2. Потребуем, чтобы $g^2(z) = 0$, и приравняем в (9) однородные части порядка 2. Получим $\Lambda\varphi(z) - \varphi'(z)\Lambda z = f^{(2)}(z)$, или в координатах

$$\lambda_k \varphi_k(z) - i \frac{\partial \varphi_k}{\partial z_1} z_1 + \frac{\partial \varphi_k}{\partial z_2} z_2 + i \frac{\partial \varphi_k}{\partial z_3} z_3 = f_k^{(2)}(z) \quad (k = 1, 2, 3).$$

Этим уравнениям удовлетворяют $\varphi_1(z) = a z_2 z_3$, $\varphi_2(z) = b z_1^2 + c z_3^2$, $\varphi_3(z) = \overline{\varphi_1(z)}$, где $a = \frac{2}{5}(-3 + i)$, $b = -\frac{2}{5}(2 + i)$, $c = \bar{b}$.

Приравняем теперь в (9) однородные части порядка 3: $g^{(3)}(z) = f^{(3)}(z) + \varphi'(z) f^{(2)}(z)$.

Выделим резонансный член в первой компоненте

$$g_1^{(3)}(z) = f_1^{(3)}(z) + \varphi_1'(z) f^{(2)}(z) = \alpha z_1^2 z_3 + \ldots,$$

где $\alpha = 2ai = -\frac{4}{5}(1 + 3i)$, многоточием обозначены нерезонансные члены.

Сделаем еще одно формальное преобразование, приводящее систему к виду (10), и рассмотрим восстановленную гладкую систему (11). Поскольку $\operatorname{Re}\alpha=-\frac{4}{5}$, то системы (7), (11) по теореме Г. Р. Белицкого гладко эквивалентны.

Оценим скорость сходимости произвольной траектории $\zeta(t)\times\times(t\geqslant 0)$ системы (11). Положим $\rho(t)=|\zeta_1(t)|^2=\zeta_1(t)\overline{\zeta_1(t)}$. Тогда

$$\dot{\rho}(t)=2\operatorname{Re}\dot{\zeta}_1(t)\overline{\zeta_1(t)}=2\operatorname{Re}(i+\alpha\rho+\gamma_1(\rho))\rho=-\frac{8}{5}\rho^2+O(\rho^3).$$

Отсюда $\rho^{-2}\dot{\rho}<-1$ при $t\geqslant t_0$ (t_0 достаточно велико) и, следовательно, $\frac{1}{\rho(t)}-\frac{1}{\rho(t_0)}>t-t_0$, т. е. $\rho(t)=O(t^{-1})$, $|\zeta_1(t)|=$ $=O(t^{-\frac{1}{2}})$. Но тогда

$$\zeta_2^{-1}\dot{\zeta}_2=-1+\gamma_2(\rho(t))=-1+O(t^{-1}),$$

и $\zeta_2(t)$ сходится к нулю с экспоненциальной скоростью. Получаем $\|\zeta(t)\|=O(t^{-\frac{1}{2}})$, и так как степенная оценка скорости сходимости не меняется при линейной замене времени и гладкой замене переменных, то теорема доказана.

Список литературы: 1. *Эйген М., Шустер П.* Гиперцикл. М., 1982. 270 с. 2. *Любич Ю. И.* К динамике гиперциклов//Докл. АН СССР.1986. 288. № 6. С. 1301—1304. 3. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1978. 304 с. 4. *Белицкий Г. Р.* Гладкая эквивалентность ростков векторных полей с одним нулевым или парой чисто мнимых собственных значений//Функцион. анализ и его приложения. 1986. 20, вып. 4. С. 1—8.

Поступила в редколлегию 06.02.87

УДК 681.3.016

С. А. КАЛЮЖНАЯ

ОТНОШЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ЗАВИСИМОСТИ, СТРОГО ПРИВОДЯЩИЕСЯ К НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЕ БОЙСА—КОДДА

В статье рассматриваются вопросы теории функциональных зависимостей (ФЗ) в реляционных базах данных [1, 2]. Язык отношений функциональной зависимости (ОФЗ) эквивалентен [3, 4] языку систем замыканий [5], что позволяет использовать алгебраические средства.

Одна из важных задач проектирования логической схемы базы данных состоит в декомпозиции исходной реляционной схемы, приводящей ОФЗ к некоторой нормальной форме (НФ). Наиболее сильной НФ является нормальная форма Бойса—Кодда (БКНФ).

В работе вводится и исследуется понятие строгой приводимости к БКНФ, отличающейся от обычной требованием замкнутости подмножеств, составляющих декомпозицию. Найдено необходимое и достаточное условие строгой приводимости ОФЗ φ к БКНФ (теорема 7.6). Оно формулируется в терминах семейства $\mathrm{ND}(\varphi)$ неразложимых замкнутых подмножеств [6]. Изучаются системы образующих таких ОФЗ. Описывается общий вид соответствующих семейств $\mathrm{ND}(\varphi)$. Из предварительных результатов отметим лемму 2.5, согласно которой свойство системы ФЗ порождать ОФЗ наследуется при ограничении на замкнутое подмножество. В теореме 6.1 доказывается, что замыкание левой части произвольной ФЗ из минимальной системы образующих ОФЗ является неразложимым множеством. Это утверждение обращает теорему 3.1 работы [6].

Ниже U обозначает конечное множество, $P(U)$ — семейство всех его подмножеств, $P_B(U)=\{X\subset U: B\subset X\}$, X^2 — декартов квадрат множества X, $|X|$ — число его элементов, $\subset$ — знак нестрогого включения.

1.1. *Отношением функциональной зависимости* ОФЗ *называется бинарное отношение* φ *на* $P(U)$, *удовлетворяющее условиям* 1) $X\supset Y\Rightarrow X_\varphi Y$, 2) $X_\varphi Y_1$, $X_\varphi Y_2\Rightarrow X_\varphi(Y_1\cup Y_2)$, 3) $X_\varphi Y$, $Y_\varphi Z\Rightarrow X_\varphi Z$ [1 – 4]. *Пару* (X, Y) *называют часто функциональной зависимостью* (ФЗ) *и записывают в виде* $X\to Y$. ФЗ (X, Y) может входить в различные ОФЗ.

Множество всех ОФЗ на $P(U)$ обозначим $\mathrm{Arm}(U)$. Оно является решеткой по отношению к порядку, задаваемому включением [4].

1.2. Оператором замыкания на U называется отображение булеана $P(U)$ в себя, для которого: 1) $\overline{X}\supset X$, 2) $X_1\supset X_2\Rightarrow \overline{X}_1\supset \overline{X}_2$, 3) $\overline{\overline{X}}=X$ [5].

Соотношения $\overline{X}=\bigcup\{Y: X_\varphi Y\}$, $X_\varphi Y\Leftrightarrow Y\subset\overline{X}$ устанавливают изоморфизм между $\mathrm{Arm}\,(U)$ и решеткой операторов замыкания на U.

Примеры операторов замыкания: 1) $\overline{X}=A_k$, $k=\min\{i: X\subset A_i\}$, где $A_1\subset\ldots\subset A_{m-1}\subset A_m=U$, 2) $\overline{X}=X\ (X\overline{\supset}A)$, $\overline{X}=X\cup B\ (X\supset A)$, где $A\underset{\neq}{\subset}B$.

1.3. Системой замыканий на U называется семейство $F\subset P(U)$, такое, что 1) $U\in F$, 2) $Z_1, Z_2\in F\Rightarrow Z_1\cap Z_2\in F$. Элементы F называются замкнутыми подмножествами [5].

Множество всех систем замыканий на U образует решетку $\mathrm{Cl}(U)$.

Примеры систем замыканий: 1) $\{A_i : 1 \leq i \leq m\}$, где $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_m = U$, 2) $(P(U) \setminus P_A(U)) \cup P_B(U)$, где $A \subsetneqq B$.

Всякая система замыканий F определяет оператор замыкания по правилу $\overline{X} = \bigcap\{Z \in F : X \subset Z\}$ и восстанавливается по оператору замыкания с помощью формулы $F = \{Z \subset U : \overline{Z} = Z\}$. Указанные соответствия определяют антиизоморфизм решеток операторов и систем замыканий. Приведенные выше примеры соответствуют друг другу в этом смысле. Комбинируя указанные отображения, получаем

1.4. Соотношения $F_\varphi = \{Z \subset U : (\forall (X, Y) \in \varphi)(X \subset Z \Rightarrow Y \subset Z)\}$, $X \varphi_F Y \Leftrightarrow (\forall Z \in F)(X \subset Z \Rightarrow Y \subset Z)$ задают антиизоморфизм между решетками $\mathrm{Arm}(U)$ и $\mathrm{Cl}(U)$ [4].

1.5. Для $G \subset P(U)^2$, $F \subset P(U)$, $X \subset U$ положим $G|_X = G \subset P(X)^2$, $F|_X = F \cap P(X)$. Если $\varphi \in \mathrm{Arm}(U)$, то $\varphi|_X \in \mathrm{Arm}(X)$. Если $F \in \mathrm{Cl}(U)$, $Z \in F$, то $F|_Z \in \mathrm{Cl}(Z)$, причем $F_\varphi|_Z = F_{\varphi|_Z}$.

2.1. Для $G \subset P(U)^2$ пусть $G^+ = \bigcap\{\varphi \in \mathrm{Arm}(U) : G \subset \varphi\}$ — наименьшее ОФЗ, содержащее G. Отображение $G \to G^+$ является оператором замыкания на $P(U)^2$. Для $G \subset P(X)^2$ обозначим $G|_X^+ = \bigcap\{\psi \in \mathrm{Arm}(X) : G \subset \psi\} \subset G^+ \ (X \subset U)$. Выполняется равенство $G|_X^+ = G^+|_X$ [7].

2.2. **Лемма** $Z \in F_{G^+} \Leftrightarrow (\forall (X, Y) \in G)(X \subset Z \Rightarrow Y \subset Z)$.

Доказательство. Пользуясь антиизоморфизмом из п. 1.4, имеем

$F_{G^+} = F_{\min\{\varphi \in \mathrm{Arm}(U) : G \subset \varphi\}} = \max\{F_\varphi : \varphi \in \mathrm{Arm}(U), G \subset \varphi\} = \max\{F \in \mathrm{Cl}(U) : G \subset \varphi_F\} = \max\{F \in \mathrm{Cl}(U) : (\forall Z \in F)(\forall (X, Y) \in G)(X \subset Z \Rightarrow Y \subset Z)\} = \{Z \subset U : (\forall (X, Y) \in G)(X \subset Z \Rightarrow Y \subset Z)$.

Для обоснования последнего равенства заметим, что его правая часть является системой замыканий и содержит любую систему замыканий, удовлетворяющую свойству, указанному в его левой части.

Лемма 2.2, совпадая по содержанию с предложением 2.2 [6], является исходным пунктом нашего подхода. Предложенное доказательство не использовало, в отличие от [6], алгоритма построения замыкания [1, с. 160—162]. Более того, во всех необходимых нам случаях она выступала заменой (алгебраическим аналогом) этого алгоритма.

Следующее утверждение является переформулировкой леммы 2.1 [6], но также получает здесь иное обоснование.

2.3. **Лемма.** *Если* $(X, Y) \in G^+$, *но* $(X, Y) \overline{\in} [G \setminus \{(A, B)\}]^+$, *то* $\overline{A} \subset \overline{X}$, *где* $\overline{X}$ — *замыкание, определяемое ОФЗ* G^+.

Доказательство. Обозначим через I оператор замыкания, отвечающий ОФЗ $(G \setminus \{(A, B)\})^+$. Тогда $I(X) \subset \overline{X}$ $(X \subset U)$.

Предположим, что $A \bar{\subset} \bar{X}$. Тогда $A \bar{\subset} I(X)$. По лемме 2.2 $Z=\bar{Z} \Leftrightarrow Z=I(Z)$ и $(A \subset Z \Rightarrow B \subset Z)$. Беря здесь $Z=I(x)$, получаем $I(X)=\overline{I(X)} \supset \bar{X}$. Следовательно, $I(X)=\bar{X}$. Поскольку $(X, Y) \in G^+$, то $Y \subset \bar{X}=I(X)$, т. е. $(X, Y) \in (G \setminus \{(A, B)\})^+$ — противоречие. Значит, $A \subset \bar{X}$, и $\bar{A} \subset \bar{X}$.

2.4. Следствие. *Если $G \subset P(U)^2$ — минимальное по включению множество, для которого $(X, Y) \in G^+$, то $G \subset P(\bar{X})^2$.*

2.5. **Лемма**. *Если $G^+=\varphi$, $Z \in F_\varphi$, то $G|_Z^+=\varphi|_Z$.*

Доказательство. Возьмем $(X, Y) \in \varphi|_Z$. Пусть $G_1 \subset G$ — минимальная система зависимостей, такая, что $(X, Y) \in G_1^+$. По следствию 2.4 $G_1 \subset P(\bar{X})^2 \subset P(Z)^2$, откуда $G_1 \subset G|_Z$ и, значит, $(X, Y) \in G|_Z^+$. В силу произвольности левой части $\varphi|_Z \subset G|_Z^+$. Обратное включение очевидно.

2.6. Следствие. *Пусть $H \subset F$, $\varphi=G^+$. Тогда* $(\bigcup \{\varphi|_Z : Z \in H\})^+ = (\bigcup \{G|_Z : Z \in H\})^+$.

2.7. Множество пар G называется системой образующих ОФЗφ, если $G^+=\varphi$. Особый интерес представляют системы образующих минимальные по включению [8, 9]. Системы G_1 и G_2 называются эквивалентными, когда $G_1^+=G_2^+$. Для $G \subset P(U)^2$ пусть $R(G)=\{Y \subset U : (\exists X \subset U)((X, Y) \in G)\}$ — множество правых частей, $L(G, Y)=\{X \subset U : (X, Y) \in G\}$.

2.8. Семейство G назовем моногенным, если: 1) $(\forall (X, Y) \in G)(X \subset Y)$, 2) $(\forall (X_1, Y_1), (X_2, Y_2) \in G)(X_2 \subset Y_1 \Rightarrow Y_2 \subset Y_1)$. Очевидно, подсистема моногенного семейства моногенна.

Для любого оператора замыкания семейство пар вида $(X, \bar{X})$ моногенно. Действительно, свойство 1 вытекает из монотонности. А из соотношений $Y_1=\bar{X}_1$, $Y_2=\bar{X}_2$, $X_2 \subset Y_1$ следует $Y_2=\bar{X}_2 \subset \bar{Y}_1 = \bar{X}_1 = Y_1$.

Наоборот, если G моногенно, то для любой пары $(X, Y) \in G$ выполняется $Y=\bar{X}$, где замыкание берется в смысле ОФЗ G^+. В самом деле, поскольку $(X, Y) \in G^+$, то $Y \subset \bar{X}$. С другой стороны, по лемме 2.2 $Y \in F_{G^+}$, откуда $\bar{X} \subset Y$.

Всякое семейство пар G эквивалентно моногенному, а именно семейству $\{(X, \bar{X}) : (\exists Y)((X, Y) \in G)\}$.

Для ОФЗ, отвечающих примерам 1), 2), п. 1.3, множества $\{(\varnothing, A_1)\} \cup \{(\{x\}, A_i) : x \in A_i \setminus A_{i-1} (i=2, \dots m)\}$, соответственно $\{(A, B)\}$ будут минимальными по включению моногенными системами образующих.

3.1. Подмножество K называется ключом ОФЗ φ, если $\bar{K}=U$, но $\bar{L} \neq U$ для всякого L, строго содержащегося в K [1]. Множество всех ключей ОФЗ φ обозначим через $\mathrm{Kees}(\varphi)$.

В рассмотренных выше примерах $\mathrm{Kees}(\varphi)$ равно $\{\{x\} : x \in U/A_{m-1}\}$, $\{A \cup (U/B)\}$. Имеем $U \in \mathrm{Kees}(\varphi) \leftrightarrow F_\varphi = P(U) \leftrightarrow \varphi = \varnothing^+$.

3.2. Системой Шпернера на множестве U называется система попарно не сравнимых по включению его подмножеств. Очевидно, что $\mathrm{Kees}(\varphi)$ является системой Шпернера и что $\overline{X}=U$ тогда и только тогда, когда $\overline{X}$ содержит некоторый ключ. Верно и обратное.

3.3. **Лемма.** *Пусть $\boldsymbol{K}\subset P(U)$ является системой Шпернера, причем* $\overline{X}=U\leftrightarrow(\exists K\in\boldsymbol{K})(K\subset X)$. Тогда $\boldsymbol{K}=\mathrm{Kees}(\varphi)$.

Доказательство. Возьмем $K\in\boldsymbol{K}$. По условию $\overline{K}=U$. Если K не минимально, то найдется $K_1\in\boldsymbol{K}$, такое, что $K_1\subset K$, $K_1\neq K$. Противоречие со шпернеровостью показывает, что K — ключ.

Пусть теперь $L\in\mathrm{Kees}(\varphi)$. Тогда $(\exists K\in\boldsymbol{K})(K\subset L)$, откуда $L=K\in\boldsymbol{K}$ по определению ключа.

4.1. ОФЗ φ находится в нормальной форме Бойса—Кодда, если для любого $X\subset U$ выполняется равенство $\overline{X}=X$ или равенство $\overline{X}=U$. Данное определение эквивалентно стандартному [1, 10]. Переведем его на язык систем замыканий (ср. [10, с. 60]).

4.2. **Лемма.** *ОФЗ φ находится в БКНФ тогда и только тогда, когда*

$$F_\varphi=(P(U)\setminus(\bigcup P_K(U):K\in\mathrm{Kees}(\varphi)\}))\cup\{U\}.$$

4.3. В БКНФ находятся ОФЗ, соответствующие примеру 1) в случаях $m=1$, $F_\varphi=\{U\}$; $m=2$, $F_\varphi=\{U,\varnothing\}$; $m=3$, $F_\varphi=\{\varnothing,\{a\},U\}$, и примеру 2) при $B=U$, когда $F_\varphi=(P(U)\setminus P_A(U))\cup\{U\}$.

4.4. Можно непосредственно показать, что множество ОФЗ в БКНФ образует подрешетку решетки $\mathrm{Arm}(U)$ (ср. [4, следствие 3.3.3]).

4.5. **Теорема.** *Пусть φ находится в БКНФ, $F_\varphi\neq P(U)$, $G_\varphi=\{(K,U):K\in\mathrm{Kees}(\varphi)\}$, G — моногенная система пар. В таком случае* $G^+=\varphi\leftrightarrow G_\varphi\subset G\subset\varphi$.

Доказательство. Проверим вначале, что $G_\varphi^+=\varphi$. Обозначим $G_\varphi^+=\psi$. Достаточно показать, что $\varphi\subset\psi$ или (см. п. 1.4), что $F_\psi\subset F_\varphi$. Пусть $X\in F_\psi\setminus\{U\}$. Тогда по лемме 2.2 $(\forall K\in\mathrm{Kees}(\varphi))(K\subset X\Rightarrow U\subset X)$, т. е. $(\forall K\in\mathrm{Kees}(\varphi))(K\not\subset X)$, откуда $\overline{X}\neq U$. В таком случае по определению БКНФ $\overline{X}=X$, т. е. $X\in F_\varphi$. Теперь, очевидно, из $G_\varphi\subset G\subset\varphi$ следует $G^+=\varphi$.

Наоборот, пусть G — моногенная система пар, $G^+=\varphi$. Возьмем $K\in\mathrm{Kees}(\varphi)$. Поскольку $U=\overline{K}\neq K$, то согласно лемме 2.2 существует такая пара $(A,B)\in G$, что $A\subset K$, $B\not\subset K$. Тогда $A\neq\overline{A}$, т. к. $B\subset\overline{A}$ и, значит, $\overline{A}=U$ по определению БКНФ. Из того, что K — ключ, вытекает $A=K$. В силу моногенности $B=\overline{A}=U$. Следовательно, $(K,U)\in G$. Итак, $G_\varphi\subset G$.

4.6. **Предложение.** *Если $\varphi=G^+$, $R(G)=\{U\}$, то φ находится в БКНФ. Если к тому же $L(G,U)$—система Шпернера, то* $L(G,U)=\mathrm{Kees}(\varphi)$.

Доказательство. По лемме 2.2 $\overline{X}=U$, если $(\exists K\in L(G,U))(X\supset K)$, и $\overline{X}=X$ — в противном случае. Тем самым

φ находится в БКНФ. Если $L(G,U)$ — система Шпернера, то по лемме 3.3 $L(G, U)=\mathrm{Kees}(\varphi)$.

4.7. При ограничении на замкнутое подмножество свойство ОФЗ находиться в БКНФ сохраняется.

5.1. Для $G\subset P(U)^2$, $N\in F$, $F\in \mathrm{Cl}(U)$ положим $G\|_N=\bigcup\{G|_Z:Z\in F|_N\ Z\neq N\}\subset G|_N$.

Если $\varphi\in \mathrm{Arm}(U)$, $N\in F_\varphi$, то $\varphi\|_N=\{(X, Y):Y\subset\overline{X}\subset N,\ \overline{X}\neq N\}=\{(X, Y)\in\varphi|_N:\overline{X}\neq N\}$ строго содержится в $\varphi|_N$ и не является ОФЗ на $P(N)$. Для ОФЗ $\varphi\|_N^+$, порожденного на $P(N)$ системой $\varphi\|_N$, выполняется включение $\varphi\|_N^+\subset\varphi|_N$. Из следствия 2.6 вытекает

5.2. **Лемма.** *Если* $G^+=\varphi$, $N\in F_\varphi$, *то* $G\|_N^+=\varphi\|_N^+$.

5.3. Подмножество $N\in F_\varphi$ называется разложимым, если $\varphi\|_N^+=\varphi|_N$, и неразложимым, если включение $\varphi\|_N^+\subset\varphi|_N$ строгое [6]. Семейство всех неразложимых подмножеств обозначим $ND(\varphi)$. Легко видеть, что $\mathrm{ND}(\varphi)\cap P(Z)=\mathrm{ND}(\varphi|_Z)(Z\in F_\varphi)$. Очевидно, $U\in P(U)\setminus \mathrm{ND}(\varphi)\Leftrightarrow\varphi=(\bigcup\{\varphi|_Z: Z\in F_\varphi\setminus\{U\}\})^+$.

5.4. Пусть O — наименьший по включению элемент системы F_φ. Имеет место равносильность: $O\in\mathrm{ND}(\varphi)\leftrightarrow O\neq\varnothing$.

Действительно, справедливы равенства $\varphi|_O=P(O)^2$, $\varphi\|_O=\varnothing$. При $O=\varnothing$ соотношение $\varphi|_O=\varphi|_O^+$ выполняется. Наоборот, из него следует, что $(\varnothing, O)\in\varnothing^+$, т. е. $\varnothing\supset O$.

5.5. Пусть A — атом F_φ, т. е. такое замкнутое подмножество, что $A\neq O$ и не существует $Z\in F_\varphi$, для которого включения $O\subset Z\subset A$ были бы строгими. Покажем, что $A\in\mathrm{ND}(\varphi)\leftrightarrow|A\setminus O|>1$.

Имеем $\varphi\|_A=\varphi|_O=\{(\varnothing, O)\}|_O^+$, $\varphi\|_A^+=\{(\varnothing, O)\}|_A^+\subset\varphi|_A$, $\varphi|_A=\{(X, Y)\in P(A)^2 : X\overline{\subset} O\}\cup P(O)^2$.

Достаточно проверить, что $\varphi\|_A^+=\varphi|_A\Leftrightarrow|A\setminus O|=1$.

Пусть вначале $A=O\cup\{a\}$ $(a\overline{\in}O)$. Возьмем $(X, Y)\in\varphi|_A$. Если $X\overline{\subset}O$, то $a\in X$, откуда $X\cup O=A\supset Y$. В случае $(X, Y)\in P(O)^2$, также $X\cup O\supset Y$. Значит, $(X, Y)\in\{(\varnothing, O)\}|_A^+$. Следовательно $\varphi|_A=\varphi\|_A^+$.

Пусть теперь $\varphi|_A=\varphi\|_A^+$, $a\in A\setminus O$. Тогда из того, что $(a, A)\in\varphi|_A$, вытекает, что $(a, A)\in\{(\varnothing, O)\}|_A^+$, т. е. $A\subset\{a\}\cup O$. Тем самым, $A=O\cup\{a\}$.

5.6. **Справедливо более общее утверждение.** *Пусть A покрывает единственное* $B\in F_\varphi$. *Тогда A разложимо* $\leftrightarrow B=O$ *и* $|A\setminus B|=1$.

5.7. Пользуясь результатами последних пунктов, легко описать семейство $\mathrm{ND}(\varphi)$ в случае, когда F_φ — цепь (пример 1, п. 1.3): $A_1\in\mathrm{ND}(\varphi)\Leftrightarrow A_1\neq\varnothing$; $A_2\in\mathrm{ND}(\varphi)\Leftrightarrow|A_2\setminus A_1|>1$; $A_k\in\mathrm{ND}(\varphi)$ $(3\leqslant k\leqslant n)$. В частности, $\mathrm{N(D}(\varphi=F_\varphi\Leftrightarrow A_1\neq\varnothing$, $|A_2\setminus A_1|>1$.

Пусть задана цепь $H:B_1\subset B_2\subset\ldots\subset B_m=U$. Легко видеть, что H представляется в виде $H=\mathrm{ND}(\varphi)$, где $\varphi\in\mathrm{Arm}(U)$ тогда и только тогда, когда $B_1\neq\varnothing$ и $|B_2\setminus B_1|>1$, если $|B_1|=1$.

5.8. **Лемма.** (Предложение 3.1 [6]) $N \in \mathrm{ND}(\varphi)$ *тогда и только тогда, когда* $(\exists X \subset U)(\overline{X}=N,\ (X, N) \in \varphi\|_N^+)$.

Доказательство. Достаточность ясна по определению неразложимости. Если N неразложимо, то найдется такая пара $(X, Y) \in \varphi|_N$, что $(X, Y) \overline{\in} \varphi\|_N^+$. В частности, $(X, Y) \overline{\in} \varphi\|_N$, откуда $\overline{X}=N$. С другой стороны, $(X, N) \overline{\in} \varphi\|_N^+$, поскольку $(X, Y) \in \in \{(X, N)\}\|_N^+$.

5.9. **Предложение** (ср. теорема 3.1 [6]). *Если* $G^+=\varphi$, $N \in \mathrm{ND}(\varphi))$, *то* $(\exists (A, B) \in G)(A, B) \overline{\in} \varphi\|_N^+$, $\overline{A}=N)$.

Доказательство. Заметим, что $G|_N \overline{\subset} \varphi\|_N^+$, т. к. в противном случае на основании леммы 2.5 имели бы $\varphi|_N = G|_N^+ \subset \subset \varphi\|_N^+$, вопреки неразложимости N. Следовательно, существует такая пара $(A, B) \in G|_N \overline{\subset} \varphi|_N$, что $(A, B) \overline{\in} \varphi\|_N^+$. Отсюда $\overline{A}=N$.

5.10. Следствие (ср. следствие 3.1 [6]). *Пусть* $\widetilde{G}$ — *разбиение* G *по отношению эквивалентности* $(A_1, B_1) \sim (A_2, B_2) \leftrightarrow \leftrightarrow \overline{A}_1=\overline{A}_2$. *Тогда* $|\mathrm{ND}(\varphi)| \leqslant |\widetilde{G}|$.

5.11. **Предложение** (ср. теорема 3.2 [6]). *Если* $G^+=\varphi$, $(A, B) \in G$, $(A, B) \overline{\in} G\|_{\overline{A}}^+$, *то* $\overline{A} \in \mathrm{ND}(\varphi)$.

Доказательство. По условию в силу леммы 5.2 $(A, B) \overline{\in} \varphi\|_{\overline{A}}^+$. В то же время $(A, B) \in \varphi|_{\overline{A}}$. Значит, $\overline{A}$ — неразложимо.

6.1. **Теорема.** *Пусть* G — *минимальная по включению система образующих* φ, $(A, B) \in G$. *Тогда* $\overline{A} \in \mathrm{ND}(\varphi)$.

Доказательство. Если G — минимальная система образующих φ, то $G|_{\overline{A}}$ — минимальная система образующих $\varphi|_{\overline{A}}$. Поскольку $(A, B) \overline{\in} G\|_{\overline{A}}$, то на основании леммы 5.2 $\varphi\|_{\overline{A}}^+ = G\|_{\overline{A}}^+ \neq \neq \varphi|_{\overline{A}}$, что обеспечивает неразложимость $\overline{A}$.

6.2. Следствие. *Для любой минимальной по включению системы образующих* G *ОФЗ* φ *выполняется равенство* $\{\overline{A}: (A, B) \in \in G\} = \mathrm{ND}(\varphi)$. *Если к тому же* G — *моногенна, то* $R(G)=\mathrm{ND}(\varphi)$. *В частности,* $|\mathrm{ND}(\varphi)|=|\widetilde{G}|$.

6.3. Следствие. $\mathrm{ND}(\varphi)=\varnothing \Leftrightarrow \varphi=\varnothing^+ \ (F_\varphi=P(U))$.

Действительно, по предыдущему следствию условие равносильно тому, что $G=\varnothing$, т. е. $\varphi=\varnothing^+=\{(X, Y): Y \subset X \subset U\}, F_\varphi=P(U)$.

6.4. **Предложение.** *ОФЗ* φ *находится в БКНФ тогда и только тогда, когда* $\mathrm{ND}(\varphi) \subset \{U\}$. *Равенство выполняется при* $F_\varphi \neq P(U)$.

Доказательство. По лемме 2.3 [4] φ находится в БКНФ, если и только если для любого $Z \in F_\varphi \setminus \{U\}$ выполняется $F_{(\varphi|Z)} = =F_\varphi|_Z=P(Z)$, или что то же самое в силу следствия 6.3 $\mathrm{ND}(\varphi|_Z) = =\varnothing$. Но это равносильно тому, что $\mathrm{ND}(\varphi) \subset \{U\}$.

Случай $\mathrm{ND}(\varphi)=\{U\}$ характеризуется с учетом следствия 6.3.

6.5. Следствие. *Для того, чтобы $\varphi|_Z$ находилось в БКНФ, причем $F_\varphi|_Z\neq P(Z)$ $(Z\in F_\varphi)$, необходимо и достаточно, чтобы Z было минимальным по включению элементом множества* $\mathrm{ND}(\varphi)$.

Доказательство. По предложению 6.4 условие равносильно тому, что $\mathrm{ND}(\varphi|_Z)=\{Z\}$, т. е. $\mathrm{ND}(\varphi)\cap P(Z)=\{Z\}$. Но это и означает, что Z — минимальное среди неразложимых подмножеств.

6.6. **Теорема.** *ОФЗ φ обладает единственным неразложимым подмножеством N тогда и только тогда, когда $\varphi=(\varphi|_N)^+$, $\varphi|_N$ находится в БКНФ, $F_\varphi|_N\neq P(N)$ (замкнутость N не предполагается).*

Доказательство. Предположим вначале, что $\mathrm{ND}(\varphi)=\{N\}$. Тогда по предложению 6.4 $\varphi|_N$ находится в БКНФ, $F_\varphi|_N\neq P(N)$. Пусть G — минимальная система образующих φ. Из теоремы 6.1 вытекает, что $G\subset P(N)^2$. Следовательно, $\varphi=G^+=(\varphi|_N)^+$.

Наоборот, предположим, что φ имеет указанный вид. Пусть G — система образующих $\varphi|_N$. По условию $G^+=\varphi$. Лемма 2.2 показывает, что $N\in F_\varphi$. По предложению 6.4 $\mathrm{ND}(\varphi|_N)=\{N\}$. Если $L\in\mathrm{ND}(\varphi)$, то в силу предложения 5.9 существует такая пара $(A, B)\in G$, что $\bar{A}=L$. Поскольку $G\subset P(N)^2$, то $L=\bar{A}\subset N$. Значит, $L\in\mathrm{ND}(\varphi|_N)$, откуда $L=N$. Итак, $\mathrm{ND}(\varphi)=\{N\}$.

Описанное в теореме 6.6 ОФЗ φ является в терминологии работы [7] минимальным продолжением ОФЗ $\varphi|_N$. В частности, $F_\varphi=\{X\subset U: X\cap N\in F_{\varphi|N}\}$. Отсюда получаем по лемме 4.2.

$$F_\varphi=P_N(U)\cup[P(U)\setminus(\cup\{P_K(U): K\in \mathrm{Kees}(\varphi|_N)\})].$$

Теорема 6.6 иллюстрируется примером 2, п. 1.3, в котором

$$\varphi=\{(A, B)\}^+,\ \mathrm{ND}(\varphi)=\{B\},\ F_\varphi|_B=(P(B)\setminus P_A(B))\cup\{B\}.$$

Подобные примеры показывают, что пересечение разложимых подмножеств может быть неразложимым.

В отличие от ситуации, описанной в п. 4.4, ОФЗ с единственным неразложимым подмножеством не выдерживают решеточных операций.

Как видно, ОФЗ с единственным неразложимым подмножеством приводится к БКНФ. Обобщению этого наблюдения посвящен следующий пункт.

7.1. Выясним сначала вопрос о порождении ОФЗ его ограничениями на системы замкнутых подмножеств.

Нам понадобится отношение квазипорядка на множестве семейств замкнутых подмножеств, задаваемое следующим образом [11]:

$$H_1\leqq H_2\Leftrightarrow(\forall Z_1\in H_1)(\exists Z_2\in H_2)(Z_1\subset Z_2).$$

7.2. **Лемма.** *Имеет место равенство* $\varphi=(\cup\{\varphi|_Z: Z\in\mathrm{ND}(\varphi)\})^+$.

Доказательство. Пусть G — минимальная система образующих ОФЗ φ. Тогда по теореме 6.1 $(\forall (A, B)\in G)(\bar{A}\in\mathrm{ND}(\varphi))$, и значит, $G\subset\cup\{\varphi|_N: N\in\mathrm{ND}(\varphi)\}$, откуда вытекает утверждение леммы.

7.3. **Теорема** $\varphi = (\bigcup\{\varphi|_Z : Z \in H\})^+ (H \subset F) \Leftrightarrow \mathrm{ND}(\varphi) \leq H$.

Доказательство. Если $\mathrm{ND}(\varphi) \leq H$, то требуемое равенство выполняется по лемме 7.2.

Наоборот, пусть теперь $\varphi = (G_H)^+$, где $G_H = \bigcup\{\varphi|_Z : Z \in H\}$. Согласно предложению 5.9 для любого $N \in ND(\varphi)$ найдется пара $(A, B) \in G_H$, такая, что $\overline{A} = H$. Поскольку $(A, B) \in G_H$, то существует $Z \in H$, для которого $A \subset Z$. Следовательно, $N = \overline{A} \subset Z$. Таким образом, $ND(\varphi) \leqslant H$.

7.4. Введем понятие более сильное, чем проводимость к БКНФ с сохранением зависимостей в обычном смысле [1]. Будем говорить, что ОФЗ φ строго приводится к БКНФ (посредством H), если существует такое семейство $H \subset F_\varphi$, что $\varphi = (\bigcup\{\varphi|_Z : Z \in H\})^+$ и $\varphi|_Z$ находится в БКНФ для всех $Z \in H$.

В силу теоремы 6.6 строгая проводимость к БКНФ посредством одноэлементного H совпадает с обычной.

7.5. **Лемма.** *ОФЗ φ строго приводится к БКНФ тогда и только тогда, когда $\varphi|_N$ находится в БКНФ для любого $N \in \mathrm{ND}(\varphi)$.*

Доказательство. Условие достаточно согласно лемме 7.2.

Наоборот, пусть φ строго приводится к БКНФ посредством H. Тогда на основании теоремы 7.3 $(\forall N \in \mathrm{ND}(\varphi))(\exists Z \in H)(N \subset Z)$. Поскольку $\varphi|_Z$ находится в БКНФ, то в силу п. 4.7 $\varphi|_N = (\varphi|_Z)|_N$ также находится в БКНФ, что и требуется.

7.6. **Теорема.** *Для строгой приводимости φ к БКНФ необходимо и достаточно, чтобы $\mathrm{ND}(\varphi)$ являлось системой Шпернера.*

Доказательство. В силу леммы 7.5 и следствия 6.5 ОФЗ φ строго приводится к БКНФ тогда и только тогда, когда всякое $N \in \mathrm{ND}(\varphi)$ является минимальным элементом в $\mathrm{ND}(\varphi)$. Но это равносильно шпернеровости семейства $\mathrm{ND}(\varphi)$.

7.7. Если F_φ — цепь (см. пример 1, п. 1.3, 2.8) с $|F_\varphi| \geqslant 4$, то согласно теореме 7.6 φ не приводится к БКНФ строго. Вместе с тем можно показать, что φ приводится к БКНФ в обычном смысле.

8. Изучим системы образующих ОФЗ, строго приводящихся к БКНФ.

8.1. **Теорема.** *Пусть φ строго приводится к БКНФ, $G_\varphi = \{(K, N) : K \in \mathrm{Kees}(\varphi|_N),\ N \in \mathrm{ND}(\varphi),\ G$ — моногенная система пар. В таком случае $G^+ = \varphi \Leftrightarrow G_\varphi \subset G \subset \varphi$.*

Доказательство. Проверим вначале, что $G_\varphi^+ = \varphi$. Поскольку $G_\varphi|_N = \{(K, N) : K \in \mathrm{Kees}(\varphi|_N)\} = G_{\varphi|N}$, то по теореме 4.5 $\varphi|_N = G_\varphi|_N^+$. Отсюда $G_\varphi^+ = (\bigcup\{G_\varphi|_N : N \in \mathrm{ND}(\varphi)\})^+ = \varphi$.

Теперь из $G_\varphi \subset G \subset \varphi$ вытекает, что $G^+ = \varphi$.

Наоборот, пусть G — моногенная система пар, $G^+ = \varphi$. Для любого $N \in \mathrm{ND}(\varphi)$ по лемме 2.5 выполняется $\varphi|_N = G|_N^+$, и значит, по теореме 4.5 $G|_N \supset G_\varphi|_N$. Отсюда $G \supset G_\varphi$.

8.2. Следствие. *Если φ строго приводится к БКНФ, то*

$Z \in F_\varphi \Leftrightarrow (\forall N \in \mathrm{ND}(\varphi)(Z \cap N \in F_\varphi|_N)$.

Доказательство тривиально в сторону необходимости. Достаточность устанавливается с помощью леммы 2.2 и теоремы 8.1.

Система G_φ допускает следующую абстрактную характеризацию.

8.3. **Теорема.** *Пусть* $G \subset P(U)^2$ — *моногенная система пар, такая, что* $R(G)$ *и* $L(G, N)$ $(N \in R(G))$ — *системы Шпернера,* $L(G, N) \neq \{N\}$ $(N \in R(G))$; $\varphi = G^+$. *Тогда* φ *строго приводится к БКНФ,* $\mathrm{ND}(\varphi) = R(G)$, $\mathrm{Kees}(\varphi|_N) = L(G, N)$ $(N \in R(G))$, $G = G_\varphi$.

Доказательство. Покажем вначале, что G — минимальная система образующих φ. Положим $\psi = (G \setminus \{(K, N)\})^+ \subset \varphi$. Для доказательства того, что $\varphi \neq \psi$, достаточно заметить (в силу п. 1.4), что включение $F_\varphi \subset F_\psi$ строгое. С помощью леммы 2.2 по условию получаем $\overline{K} = N \neq K$, т. е. $K \overline{\in} F_\varphi$, и $K \in F_\psi$.

Теперь следствие 6.2 дает $\mathrm{ND}(\varphi) = R(G)$. Поскольку последнее семейство является шпернеровым, ОФЗ φ строго приводится к БКНФ по теореме 7.6. В частности, $\varphi|_N$ находится в БКНФ, $G|_N$ — моногенная, минимальная система, образующая $\varphi|_N$. По теореме 4.5 $G|_N = G_{\varphi|N}$, откуда $L(G, N) = L(G|_N, N) = \mathrm{Kees}\ (\varphi|_N)$.

Наконец, из предыдущего следует, что $G = G_\varphi$.

8.4. На основании изложенного возникает вопрос, для любой ли системы Шпернера $Ш$ существует такое ОФЗ φ, $\mathrm{ND}\ (\varphi) = Ш$?

Укажем один отрицательный пример. Пусть $Ш$ — семейство всех $(n-1)$-элементных подмножеств n-элементного множества U. Если $Ш = \mathrm{ND}(\varphi) \subset F_\varphi$, то $F_\varphi = P(U)$, и по следствию 6.3 $\mathrm{ND}(\varphi) = \varnothing$ — противоречие.

Из теоремы 8.1 можно извлечь следующее необходимое условие:

$(\forall N \in \mathrm{ND}(\varphi))(\exists K_N \subset N,\ K_N \neq N)(\forall N_1 \in \mathrm{ND}(\varphi))(N_1 \neq N \Rightarrow K \overline{\subset} N_1)$.

Действительно, для $N \in \mathrm{ND}(\varphi)$ достаточно взять произвольное $K_N \in \mathrm{Kees}(\varphi|_N)$ и заметить, что требуемая импликация вытекает из моногенности G_φ и шпернеровости $\mathrm{ND}(\varphi)$. Это условие является усилением свойства шпернеровости и оно достаточно.

8.5. **Теорема.** *Для того чтобы для заданной системы Шпернера существовало ОФЗ* φ, *такое, что* $\mathrm{ND}(\varphi) = Ш$, *необходимо и достаточно, чтобы в любом* $N \in Ш$ *существовало собственное подмножество* K_N, *не содержащееся ни в каком другом подмножестве из* $Ш$.

Доказательство достаточно основывается на теореме 8.3 с $G = \{(K_N, N): N \in Ш\}$.

8.6. Примеры ОФЗ со шпернеровским семейством неразложимых подмножеств показывают, что пересечение неразложимых подмножеств может быть разложимым подмножеством.

Список литературы: 1. *Ульман Дж.* Основы систем баз данных. М., 1983. 334 с. 2. *Fagin R.* Horn classes and database dependencies//J. of the ACM. 1982. **29**, N 4. P. 952—985. 3. *Борщев В. Б., Брудно В. А., Хомяков М. В.* Алгебраическое описание структуры зависимостей на базах данных//Науч.-техн. информ. № 3. С. 17—18. 4. *Калюжная С. А.* Решетка отношений абстрактной функциональной зависимости//Вестн. Харьк. ун-та. 1985. № 227. Математика и механика. С. 91—101. 4. *Кон П.* Универсальная алгебра. М., 1968. 352 с. 6. *Синявский В. В.* Инвариантные подмножества структуры функциональных зависимостей//

Кибернетика. 1984. № 6. С. 38—41. 7. *Калюжная С. А.* Минимальные продолжения отношения функциональной зависимости//Краевые задачи и автоматизация их решения. Темат. сборн. науч. трудов. X. 1985. С. 128—133. 8. *Maier D.* Minimum covers in the relational data base model//I. of the ACM. 1980. **27**, N 4. P. 664—674. 9. *Mannila H. Räihä K.-I.* On the relationship of minimum and optimum covers for a set of functional dependencies//Acta Informatica, 1983. **20**, N 2. P. 143—158. 10. *Неклюдова Е. А., Цаленко М. Ш.* Синтез логической схемы реляционной базы данных//Программирование. 1979. № 6. С. 58—68. 11. *Beeri C., Mendelson A. O., Sagiv G., Ullman I.* Equivalence of relational database schemes//SIAM I. Comput. 1981. **10**, N 2. P. 352—370.

Поступила в редколлегию 12.02.86

УДК 519.854

С. Б. ШЕХОВЦОВ, С. В. ЯКОВЛЕВ

О КЛАССЕ ЗАДАЧ РЕШЕТЧАТОГО ПОКРЫТИЯ ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Пусть $\{S_i\}$, $i\in N$ — счетное множество конгруэнтных и подобно расположенных объектов $S_i\subset R^2$, $i\in N$, где N — множество натуральных чисел. Координаты полюса объекта S_i обозначим через u_i и назовем параметрами размещения объекта Si [1]. Пусть a_1, $a_2\in R^2$ — произвольные линейно независимые векторы. Множество всевозможных векторов вида $a=\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2$, λ_1, $\lambda_2\in Z$, где Z — множество целых чисел, называется решеткой с базисом $\{a_1, a_2\}$ [2].

Пусть имеется редчайшее решетчатое покрытие [3] плоскости объектами $\{S_i\}$, $i\in N$, и задана область P с параметрами размещения u_0. Область P назовем областью покрытия. В силу того что параметры решетки определены, координаты u_i полюсов объектов $\{S_i\}$, $i\in N$ будут известны.

Рассмотрим следующую задачу: определить такие параметры размещения u_0, при которых область P покрывается минимальным числом объектов из множества $\{S_i\}$, $i\in N$. Число покрывающих объектов является функцией параметров размещения области покрытия. Обозначим его через $J(u_0)$. Тогда рассматриваемая задача сводится к определению

$$J^* = \min_{u_0\in R^2} J(u_0). \tag{1}$$

В силу решетчатого покрытия плоскости ограничим, не нарушая общности, область значений параметров размещения u_0 области P произвольным основным параллелограммом решетки π [3], т. е. положим $u_0\in\pi$. Тогда задача (1) принимает вид

$$J^* = \min_{u_0\in\pi} J(u_0).$$

Определим множество

$$Q = \bigcup_{u\in\pi} P(u) = P\oplus\pi,$$

где $\oplus$ — символ операции суммы Минковского [4]. Обозначим через N_0 множество номеров объектов S_i, имеющих непустое пересечение с множеством Q, т. е. $N_0=\{i:S_i\cap Q\neq\varnothing\}$. Формально этому множеству соответствуют такие параметры (λ_1, λ_2) решетки, которые задаются следующим множеством:

$$M=\{(\lambda_1, \lambda_2):(\pi\oplus P)\cap(S+\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2))\neq\varnothing\}.$$

Рассмотрим $\gamma_i=\mathrm{F}_r(S_i\oplus P^-)$ — нулевую линию уровня Ф-функции [5] объекта S_i и области P. Здесь $P^-=\{-p,\ p\in P\}$ — результат отражения области P относительно нуля пространства R^2. Обозначим через $G_i=S_i\oplus P^-$ множество, ограниченное γ_i, $i\in N_0$. Поскольку объекты $\{S_i\}$, $i\in N_0$ конгруэнтны и подобно расположены, то для построения областей G_i, $i\in N_0$ достаточно построить лишь одну область G_{i_1} для фиксированного объекта S_{i_1}, $i_1\in N_0$, а остальные получить путем трансляции [2, 3] области G_{i_1}.

Рассмотрим пересечение каждой из областей G_i, $i\in N_0$ с областью π. При этом возможны следующие случаи:

1. $G_i\cap\pi=\pi$. При этом объект S_i обязательно должен входить в число объектов, которыми будет покрываться область P. Количество таких объектов постоянно для всех $u_0\in\pi$;

2. $G_i\cap\pi=\pi_i$. В этом случае область π разбивается на две части π_i и $\pi\setminus\pi_i$. Объект S_i будет входить в число покрывающих объектов лишь тогда, когда $u_0\in\pi_i$.

Последовательное пересечение всех множеств G_i, $i\in N_0$ с областью π разбивает ее на конечное число областей k_r, $r=\overline{1, m}$. Каждой области k_r, $r=\overline{1, m}$ поставим в соответствие сумму чисел σ_{ri}, где

$$\sigma_{ri}=\begin{cases}1, & \text{если } k_r\subset G_i\\ 0, & \text{в противном случае}\end{cases}\qquad r=\overline{1, m},\quad i\in N_0.$$

Из того факта, что сумма чисел σ_{ri} определяет количество объектов S_i, которыми можно покрыть область P, при условии, что $u_0\in k_r$, вытекает справедливость следующего утверждения.

Утверждение. *Минимум функционала $J(u_0)$ достигается для всех точек $u_0\in k_{r^*}$, где $r^*=\arg\min\limits_{r}\sum\limits_{i\in N_0}\sigma_{ri}$.*

Таким образом, исходная задача сводится к определению произвольной точки области k_{r^*}.

Список литературы: 1. *Стоян Ю. Г., Гиль Н. И.* Методы и алгоритмы размещения плоских геометрических объектов. К., 1976. 247 с. 2. *Роджерс К. А.* Укладки и покрытия. М., 1968. 134 с. 3. *Тот Л. Ф.* Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве. М., 1958. 363 с. 4. *Хадвигер Г.* Лекции об объеме, площади поверхности изопериметрии. М., 1966. 416 с. 5. *Стоян Ю. Г., Яковлев С. В.* Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. К., 1968. 268 с.

Поступила в редколлегию 23.01.87

УДК 517.977

В. А. ЛЬВОВ, Е. Я. ХРУСЛОВ

О РАЗРЕШИМОСТИ В ЦЕЛОМ ОДНОЙ ЗАДАЧИ, ОПИСЫВАЮЩЕЙ ДВИЖЕНИЕ СУСПЕНЗИИ ТВЕРДЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ЧАСТИЦ В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

В работе рассматривается система уравнений

$$\rho\,[\vec{u}_t + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}] - 2\mu \sum_{n,p,q,r=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_r}\{a_{npqr}(\vec{\lambda}, \rho)\,\varepsilon_{np}[\vec{u}]\}\,\vec{e}^{q} + \nabla p =$$

$$= \rho\vec{F} + \vec{G}, \quad \operatorname{div}\vec{u} = 0; \tag{1}$$

$$\rho_t + (\vec{u}\cdot\nabla)\rho = 0; \tag{2}$$

$$\vec{\lambda}_t + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{\lambda} - \frac{k}{C(\rho)}\operatorname{div}[C(\rho)\nabla\vec{\lambda}] + \beta\vec{\lambda} = \sum_{n,p=1}^{3} \omega_{np}[\vec{u}]\,\lambda_p\vec{e}^{n} +$$

$$+ g_1(|\vec{\lambda}|)\sum_{n,p=1}^{3} \varepsilon_{np}[\vec{u}]\,\lambda_p\vec{e}^{n} - g_2(|\vec{\lambda}|)\sum_{n,p=1}^{3} \varepsilon_{np}[\vec{u}]\,\lambda_n\lambda_p\cdot\vec{\lambda} \tag{3}$$

относительно неизвестных: $\vec{u}(x, t)$ — вектор скорости суспензии; $p(x, t)$ — давление; $\rho(x, t)$ — средняя плотность суспензии; $\vec{\lambda}(x, t)$ — средний вектор ориентации твердых осесимметричных частиц в жидкости. Здесь постоянные $\mu > 0$, $k > 0$, $\beta \geqslant 0$, функции $g_i(|\vec{\lambda}|)$ $(i = 1, 2)$, $C(\rho)$, $a_{npqr}(\vec{\lambda}, \rho)$ $(n, p, q, r = 1, 2, 3)$, а также вектор-функции $\vec{F}(x, t)$, $\vec{G}(x, t)$ заданы. При этом $C(\rho)$ описывает зависимость концентрации частиц в несущей жидкости от средней плотности суспензии $\rho(x, t)$, а $a_{npqr}(\vec{\lambda}, \rho)$ — зависимость тензора вязкости суспензии от ρ и среднего вектора ориентации осесимметричных частиц $\vec{\lambda}(x, t)$, модуль которого по физическому смыслу не превышает 1.

Вывод данной системы уравнений ввиду его громоздкости здесь не приводится. В его основе лежат методы теории осреднения краевых задач с мелкозернистой границей [1] и результаты работы [2]. Отметим, что частные виды этой системы уравнений описывают динамику жидких кристаллов [3].

В данной работе будет установлена глобальная разрешимость для системы уравнений (1)—(3) в классах функций, являющихся обобщением классов решений Хопфа для уравнений Навье—Стокса.

1. Пусть Ω ограниченная область в R_3 с гладкой границей $\partial\Omega$. Рассмотрим в области $\Omega_T=\Omega\times[0,\ T]$ начально-краевую задачу для системы уравнений (1)—(3), дополненную следующими условиями:

$$\vec{u}(x,\ t)=0,\ (x,\ t)\in\partial\Omega\times[0,\ T]\equiv S_T,\ \vec{u}(x,\ 0)=\vec{u}^0(0); \tag{4}$$

$$\vec{\lambda}(x,t)=0,\ (x,\ t)\in S_T,\ \vec{\lambda}(x,0)=\vec{\lambda}^0(x); \tag{5}$$

$$\rho(x,\ 0)=\rho^0(x). \tag{6}$$

Назовем обобщенным решением задачи (1)—(6) набор функций $\{\vec{u}(t),\ \rho(t),\ \vec{\lambda}(t)\}$, принадлежащих пространствам

$$\begin{gathered}\vec{u}(t)\in L_\infty(0,\ T;\ \mathring{J}(\Omega))\cap L_2(0,\ T;\ \mathring{J}^1(\Omega));\\ \rho(t)\in L_\infty(0,\ T;\ L_\infty(\Omega));\\ \vec{\lambda}(t)\in L_\infty(0,\ T;\ L_\infty(\Omega))\cap L_2(0,\ T;\ \mathring{W}_2^1(\Omega)),\ |\vec{\lambda}(x,\ t)|\leqslant 1.\end{gathered} \tag{7}$$

и удовлетворяющих интегральным тождествам

$$\int\limits_0^T\left\{\int\limits_\Omega(\rho\vec{u},\ \vec{\xi}_t+(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{\xi})\,dx-2\mu\int\limits_\Omega\sum_{n,p,q,r=1}^3 a_{npqr}(\vec{\lambda},\ \rho)\frac{\partial u_n}{\partial x_p}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\partial\xi_q}{\partial x_r}\,dx+\int\limits_\Omega(\rho\vec{F}+\vec{G},\ \vec{\xi})\,dx\right\}dt+\int\limits_\Omega\rho^0(\vec{u}^0,\ \vec{\xi}(0))\,dx=0; \tag{8}$$

$$\int\limits_0^T\int\limits_\Omega\rho(\eta_t+(\vec{u}\cdot\nabla)\eta)\,dxdt+\int\limits_\Omega\rho^0\eta(0)\,dx=0; \tag{9}$$

$$\int\limits_0^T\left\{\int\limits_\Omega(C(\rho)\vec{\lambda},\ \vec{\zeta}_t+(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{\zeta})\,dx-k\int\limits_\Omega C(\rho)(\nabla\vec{\lambda},\ \nabla\vec{\zeta})\,dx-\right.$$

$$-\beta\int\limits_\Omega C(\rho)(\vec{\lambda},\ \vec{\zeta})\,dx+\int\limits_\Omega g_1(|\vec{\lambda}|)\,C(\rho)\sum_{n,p=1}^3\varepsilon_{np}[\vec{u}]\,\lambda_p\cdot\zeta_n dx- \tag{10}$$

$$\left.-\int\limits_\Omega g_2(|\vec{\lambda}|)C(\rho)\sum_{n,p=1}^3\varepsilon_{np}[\vec{u}]\,\lambda_p\lambda_n(\vec{\lambda},\ \vec{\zeta})\,dx\right\}dt+\int\limits_\Omega C(\rho^0)(\vec{\lambda}^0,\ \vec{\zeta}^0(0))dx=0$$

для любых $\vec{\xi}(t)\in C^1(0,\ T;\ \mathring{J}^1(\Omega))$, $\eta(t)\in C^1(0,\ T;\ W_2^1(\Omega))$, $\vec{\zeta}(t)\in C^1(0,\ T;\ \mathring{W}_2^1(\Omega))$ таких, что $\vec{\xi}(T)=\eta(T)=\vec{\zeta}(T)=0$.

Будем предполагать $C(\rho)$, $a_{npqr}(\vec{\lambda},\ \rho)$ $(n,\ p,\ q,\ r=1,\ 2,\ 3)$ — непрерывно дифференцируемые функции своих аргументов $(\rho>0$,

$|\vec{\lambda}|\leqslant 1$) с производными, удовлетворяющими условию Гельдера, причем $C(\rho)\geqslant\alpha_0|\rho-\rho_0|$ $(\alpha_0>0)$: и

$$\sum_{npq\,r=1}^{3} a_{npqr}(\vec{\lambda},\rho)R_{np}R_{qr}\geqslant a_0\sum_{np=1}^{3}R_{np}^2,\quad a_0>0,$$

где ρ_0 — плотность несущей жидкости, R_{np} — элементы произвольной симметричной матрицы.

Предположим также, что функции $g_i(|\vec{\lambda}|)$ $(i=1,\ 2)$ на отрезке $[0,\ 1]$, где они определены, представимы в виде $g_i=\gamma+\tilde{g}_i(|\vec{\lambda}|)\times\times(1-|\vec{\lambda}|)$, где $\tilde{g}_i$ удовлетворяют условию Гельдера при $0\leqslant|\vec{\lambda}|\leqslant 1$.

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема. *Пусть* $\vec{F}(x,\ t),\ \vec{G}(x,\ t)\in L_{2,1}(\Omega_T);\quad \vec{u}^0(x)\in\mathring{J}(\Omega);$ $0<m\leqslant\rho^0(x)\leqslant M<\infty$, *причем либо* $m>\rho_0$, *либо* $\rho_0>M$; $\vec{\lambda}^0(x)\in\mathring{W}_2^1(\Omega)$, $|\vec{\lambda}^0(x)|\leqslant 1$. *Тогда существует по крайней мере одно обобщенное решение начально-краевой задачи (1)—(6).*

Доказательство этой теоремы проводится в несколько этапов. Сначала (леммы 1 и 2) для исходной задачи методом Галеркина строится приближенное решение и получаются необходимые априорные оценки. Затем (леммы 3 и 4) устанавливается компактность в $L_2(\Omega_T)$ полученных приближенных решений, что позволяет произвести в интегральных тождествах (8)—(10) предельный переход и тем самым доказать теорему.

2. Используя подход, развитый в работе [4], являющийся модификацией метода Галеркина, будем искать приближенные решения уравнений (1) в виде конечной суммы

$$\vec{u}^s(x,\ t)=\sum_{i=1}^{s}c_i^s(t)\,\vec{\psi}^i(x),\tag{11}$$

где $c_i^s(t)\in C^1(0,\ T)$ — неизвестные коэффициенты, а $\vec{\psi}^i(x)(i=1,\ 2,\ldots)$ ортонормированный в $L_2(\Omega)$ базис, состоящий из собственных функций задачи (см. [5]):

$$\Delta\vec{\psi}^i(x)-\nabla q^i(x)=\mu_i\vec{\psi}^i(x),\ \operatorname{div}\vec{\psi}^i=0,\ x\in\Omega;\ \vec{\psi}^i(x)=0,\ x\in\partial\Omega.$$

Приближения $\rho^s(x,\ t)$ и $\vec{\lambda}^s(x,\ t)$ будем находить как решения следующих задач:

$$\rho_t^s+(\vec{u}^s\nabla)\rho^s=0,\ (x,\ t)\in\Omega_T;\ \rho^s(x,\ 0)=\rho^{0s}(x)\tag{12}$$

и соответственно

$$\vec{\lambda}_t^s+(\vec{u}^s\nabla)\vec{\lambda}^s-\frac{k}{C(\rho^s)}\operatorname{div}[C(\rho^s)\nabla\vec{\lambda}^s]+\beta\vec{\lambda}^s=$$

$$=\sum_{np=1}^{3}\omega_{np}[\vec{u}^s]\,\lambda_p^s\vec{e}^n+g_1(|\vec{\lambda}^s|)\sum_{np=1}^{3}\varepsilon_{np}[\vec{u}^s]\,\lambda_p^s\vec{e}^n-\tag{13}$$

$$-g_2(|\vec{\lambda}^s|)\cdot\vec{\lambda}^s\sum_{np=1}^{3}\epsilon_{np}[\vec{u}^s]\lambda_n^s\cdot\lambda_p^s,\ (x,t)\in\Omega_T;$$

$$\vec{\lambda}^s(x,t)=0,\ (x,t)\in S_T;\ \vec{\lambda}^s(x,0)=\vec{\lambda}^{0s}(x), \tag{14}$$

где $\rho^{0s}(x)$, $\vec{\lambda}^{0s}(x)$ дважды непрерывно дифференцируемые в Ω функции такие, что $0<m<\rho^{0s}(x)<M<\infty$, $\vec{\lambda}^{0s}(x)=0$ при $x\in\partial\Omega$, $|\vec{\lambda}^{0s}(x)|\leqslant 1$ и при $s\to\infty$ $\rho^{0s}(x)\to\rho^0(x)$, $\vec{\lambda}^{0s}(x)\to\vec{\lambda}^s(x)$ в $L_q(\Omega)$ $(1\leqslant q<\infty)$.

Для определения коэффициентов $c_i^s(t)$ потребуем, чтобы тождество (8) выполнялось для $\{\vec{u}^s(t),\ \rho^s(t),\ \vec{\lambda}^s(t)\}$ на вектор-функциях $\vec{\xi}(x,t)=h(t)\vec{\psi}^l(x)$, $(l=1,\dots,s)$, где $h(t)\in C^1(0,T)$ и $h(T)=0$. С учетом (12) это приводит к следующей системе дифференциально-функциональных уравнений $(l=1,\dots,s)$:

$$\sum_{j=1}^{s}\frac{dC_j^s}{dt}\alpha_{jl}^s+\sum_{i,j=1}^{s}\beta_{ijl}^s c_i^s c_j^s+\sum_{j=1}^{s}\gamma_{jl}^s c_j^s=F_l^s+G_l, \tag{15}$$

$$\alpha_{jl}^s=\int_\Omega(\rho^s\vec{\psi}^j,\ \vec{\psi}^l)\,dx,\ \beta_{ijl}^s=\int_\Omega(\rho^s(\vec{\psi}^i\cdot\nabla)\vec{\psi}^j,\ \vec{\psi}^l)\,dx,$$

$$\gamma_{jl}^s=2\mu\int_\Omega\sum_{npq\,r=1}^{3}a_{npqr}(\vec{\lambda}^s,\ \rho^s)\frac{\partial\psi_n^j}{\partial x_p}\frac{\partial\psi_q^l}{\partial x_r}\,dx,$$

$$F_l^s=\int_\Omega(\rho^s\vec{F},\ \vec{\psi}^l)\,dx,\ \ G^l=\int_\Omega(\vec{G},\ \vec{\psi}^l)\,dx. \tag{16}$$

Начальные данные для (15) полагаем равными $c_j^s(0)=$ $=c_j^0$ $(j=1,\dots,s)$, где c_j^0 — коэффициенты разложения $\vec{u}^0(x)$ по базису $\vec{\psi}^l(x)$.

Разрешимость задачи (11)—(16) и априорные оценки для решений вытекают из следующих лемм.

Лемма 1. *Пусть $\vec{u}^s(x,t)$ — достаточно гладкое векторное поле в Ω_T, обращающееся в нуль на S_T. Тогда для любого $s=1,2,\dots$ существуют единственные решения $\{\rho^s(x,t),\ \vec{\lambda}^s(x,t)\}$ задач (12),* (13)—(14), *причем справедливы равномерные по s оценки:*

$$0<m\leqslant\rho^s(x,t)\leqslant M<\infty,\quad |\vec{\lambda}^s(x,t)|\leqslant 1;$$

$$\|\nabla\vec{\lambda}^s\|_{L_2(\Omega_T)}\leqslant C_1\|\nabla\vec{u}^s\|_{L_2(\Omega_T)}+C_2. \tag{17}$$

Лемма 2. *Для любого $s=1, 2, \dots$ существует единственное решение $\{\vec{u}^s, \rho^s, \vec{\lambda}^s\}$ задачи (11)—(16). При этом справедливы равномерные s оценки (17) и*

$$\max_{0<t<T} \|\vec{u}^s(t)\|_{L_2(\Omega)} + \|\vec{u}^s\|_{L_2(0,T;\overset{\circ}{J}{}^1(\Omega))} \leqslant C_3 \tag{18}$$

$$\|\nabla\vec{\lambda}^s\|_{L_2(\Omega_T)} \leqslant C_4. \tag{19}$$

Итак, построена последовательность приближенных решений $\{\vec{u}^s, \rho^s, \vec{\lambda}^s\}$ исходной задачи (1) — (6), которые удовлетворяют априорным оценкам (17) — (19), позволяющим выделить подпоследовательность $\{\vec{u}^{s_k}, \rho^{s_k}, \vec{\lambda}^{s_k}\}$, сходящуюся при $s_k \to \infty$ к $\{\vec{u}, \vec{\rho}, \vec{\lambda}\}$ в следующем смысле: $\vec{u}^{s_k}$ сходится к $\vec{u}$ слабо в $L_\infty(0, T; J(\Omega))$ и слабо в $L_2(0, T; J^1(\Omega))$; ρ^{s_k} сходится к ρ слабо в $L_\infty(\Omega_T)$; $\vec{\lambda}^{s_k}$ сходится слабо к $\vec{\lambda}$ в $L_\infty(\Omega_T)$ и слабо в $L_2(0, T; W_2^1(\Omega))$. Однако из-за нелинейности системы (1) — (3) этого оказывается недостаточно для предельного перехода в интегральных тождествах (8)—(10) и требуется установить более сильную сходимость. Компактность в пространстве $L_2(\Omega_T)$ построенной последовательности приближенных решений $\{\vec{u}^s, \rho^s, \vec{\lambda}^s\}$ следует из оценок (17)—(19) и лемм 3 и 4.

Лемма 3. *Для любого $\delta(0<\delta<T)$ справедливы оценки*

$$\int_0^{T-\delta} \|\vec{\lambda}^s(\tau+\delta) - \vec{\lambda}^s(\tau)\|^2_{L_2(\Omega)}\, d\tau \leqslant C\delta^{1/2}; \quad \int_0^{T-\delta} \|\vec{u}^s(\tau+\delta) -$$

$$- \vec{u}^s(\tau)\|^2_{L_2(\Omega)}\, d\tau \leqslant C\delta^{1/2},$$

где постоянная C не зависит от s и δ.

Лемма 4. *Пусть последовательность решений ρ^s задачи (12) сходится к ρ слабо в $L_2(\Omega_T)$. Тогда она сходится к ρ сильно в $L_q(\Omega_T)$ при любом $q \geqslant 1$.*

Таким образом, последовательности $\{\vec{u}^s\}$, $\{\rho^s\}$, $\{\vec{\lambda}^s\}$ компактны в $L_2(\Omega_T)$, последовательности $\{\vec{u}^s\}$, $\{\vec{\lambda}^s\}$ слабо компактны в $L_2(0, T; W_2^1(\Omega))$ и, значит, их градиенты $\{\nabla\vec{u}^s\}$, $\{\nabla\vec{\lambda}^s\}$ слабо компактны в $L_2(\Omega_T)$. Кроме того, в силу (17) последовательности $\{\rho^s\}$ и $\{\vec{\lambda}^s\}$ ограничены в $C(\Omega_T)$. Все это, с учетом гладкости функций $a_{npqr}(\vec{\lambda}, \rho)$, $C(\rho)$ и $g_i(|\vec{\lambda}|)(i=1, 2)$, позволяет сделать предельный переход в интегральных тождествах (8)—(10) по подпоследовательности $s=s_k$, для которой существуют пределы в $L_2(\Omega_T)$ при $s_k \to \infty$; $\vec{u}^{s_k} \to \vec{u}$; $\rho^{s_k} \to \rho$; $\vec{\lambda}^{s_k} \to \lambda$. Теорема доказана.

Замечание. Доказать единственность решений начально-краевой задачи (1)—(6) в классе решений (7) не удается, так как он оказывается достаточно широким для трехмерных задач.

Список литературы: 1. *Марченко В. А., Хруслов Е. Я.* Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей. К., 1974. 278 с. 2. *Львов В. А.* Об одной математической задаче механики суспензий//Вестн. Харьк. ун-та. 1985. № 277. Пробл. управления и механики сплошных сред. С. 13—37. 3. *Де Жен П.* Физика жидких кристаллов. М., 1977. 520 с. 4. *Антонцев С. Н., Кажихов А. В.* Математические вопросы динамики неоднородных жидкостей: Новосибирск, 1973. 121 с. 5. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М., 1970. 288 с.

Поступила в редколлегию 29.10.85

СОДЕРЖАНИЕ

СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ

**ВЕСТНИК
ХАРЬКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА**

№ 315

Управляемые системы

Редактор *О. И. Григорьян*
Художественный редактор *В. А. Рияка*
Технический редактор *Г. П. Александрова*
Корректор *Л. Н. Быкова*

№ 12780—ОИБ

Сдано в набор 20.11.87. Подписано в печать 22.04.88. БЦ 16346. Формат 60×90/16. Бум. тип. № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Печ. л. 7. Кр.-отт. 7,25. Уч.-изд. л. 8. Тираж 500 экз. Изд. № 1680. Зак. 1767. Цена 1 р. 10 к. Заказное.

Издательство при Харьковском государственном университете издательского объединения «Вища школа».
310003 Харьков, ул. Университетская, 16.

Харьковская городская типография № 16.
310003 Харьков, ул. Университетская, 16.

2/35-1