Министерство образования и науки,
молодежи и спорта Украины
Харьковский национальный университет
имени В.Н.Каразина

К 200-летию Харьковского университета

В.В.Ульянов

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ ПО КВАНТОВОЙ СТАТИСТИКЕ

Часть вторая

$$\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar}[\hat{H},\hat{\rho}]$$

$$< f > = \mathrm{Sp}(\hat{\rho}\hat{f})$$

Харьков 2011

К 65-летию кафедры теоретической физики
имени академика И.М.Лифшица

В.В.Ульянов

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ ПО КВАНТОВОЙ СТАТИСТИКЕ

II

Харьков 2011

УДК 530.145
ББК 22.314я73-1
У 51

У 51 **Ульянов В.В**. Конспект лекций по квантовой статистике. Ч.II/
В.В.Ульянов. - Х.: ХНУ имени В.Н.Каразина, 2011. - 40 с.

Эти лекции составлены по конспекту одного из студентов, слушавших прочитанный автором курс квантовой статистики.

Пособие продолжает серию изданий, приуроченную к 200-летию Харьковского университета и 65-летию кафедры теоретической физики имени академика И.М.Лифшица.

Посвящается Льву Элеазаровичу Паргаманику – профессору кафедры теоретической физики, известному физику-теоретику, воспитавшему многих выдающихся специалистов.

Предназначена для преподавателей, студентов и аспирантов физических специальностей вузов.

Рецензент –
доктор физ.-мат. наук, профессор А.М.Ермолаев.

Издается по решению кафедры теоретической физики имени академика И.М.Лифшица от 17 мая 2011 года (протокол № 11)

УДК 530.145
ББК 22.314я73-1

Наша цивилизация гордится ролью науки и ее достижениями.
М.И.Каганов

ПРЕДИСЛОВИЕ

Однажды, принимая экзамен по читаемому спецкурсу, я заметил у одного из студентов достаточно аккуратный конспект моих лекций.

Я попросил у него этот конспект и переписал его, так как сам конспектов своих лекций не вел, о чем сожалел впоследствии.

И вот теперь в недрах своего архива я обнаружил тетрадку с этим конспектом.

Таким образом, эта часть лекций, как и предыдущая, составлена по конспекту одного из студентов педагогического отделения физического факультета, слушавших прочитанный автором курс квантовой статистики в середине 1970-х годов. Ее подготовил к изданию мой сын Николай, сумевший расшифровать мои весьма неразборчивые каракули и набравший текст, формулы и рисунки на компьютере. Я очень благодарен ему за это.

Умышленно оставляю все в том виде, какой имели эти наброски в то время, лишь введя некоторые цитаты из книг, изданных в разные годы. Я не собирался их публиковать, но сейчас показалось, что они могут служить документальной страничкой истории нашей кафедры.

Посвящается Льву Элеазаровичу Паргаманику – профессору кафедры теоретической физики Харьковского университета, известному физику-теоретику. Лев Элеазарович в течение многих лет читал лекции по различным разделам квантовой теории физикам и радиофизикам нашего Университета. Пусть эта небольшая книжечка записей лекций послужит выражением нашей признательности этому человеку, отдавшему лучшие годы своей жизни служению благородному делу университетского образования.

Издание приурочено к 200-летию Харьковского университета и 65-летию кафедры теоретической физики имени академика И.М.Лифшица.

Пособие предназначено для преподавателей, студентов и аспирантов физических специальностей вузов.

Благодарю А.М.Ермолаева за внимательное отношение к рукописям автора и помощь советами и редкой литературой.

В.В.Ульянов

Матрица плотности (статистический оператор). Смешанные состояния

$\hat{\rho}$ введен Ландау и Нейманом

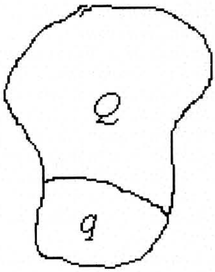
1927 год

Чистые состояния описываются вектором Ψ, который изменяется в картине Шредингера и фиксирован в картине Гейзенберга.

В некоторых случаях система не описывается своей волновой функцией, хотя всю информацию о системе можно получить. Это соответствует смешанному состоянию (усиливается вероятностность).

1) Первый подход (подсистема)

Рассматривается система, являющаяся частью более крупной, для которой справедливо обычное чистое описание. Например, в атоме эл-н, вообще говоря, не обладает своей в. ф., а лишь для всего атома в целом это так.



Волновой вектор всей системы в проекции на полный набор $\{Q, q\}$ содержит избыточную информацию (для системы q).

$\Psi(q, Q)$

Для подсистемы нашей нет в. ф., но получить можно все, что нужно.

Плотность вероятности величины q (или сама вероятность для дискретных значений)

$$W_q = \int \left|\Psi(q, Q)\right|^2 dQ \ .$$

Среднее значение любой величины, описывающей только нашу систему:

$$\langle f \rangle = (\Psi, \hat{f}\Psi) = \iint dq dQ \Psi^*(q, Q) \hat{f} \Psi(q, Q) \ .$$

В самом общем случае

$$\hat{A}\Phi(p) = \int dp' A_{pp'}\Phi(p'),$$ так что

$$\hat{f}\Psi(q,Q) = \int dq' f_{qq'}\Psi(q',Q),$$ а

$$\langle f \rangle = \iint dq dQ \Psi^*(q,Q) \int dq' f_{qq'}\Psi(q',Q) =$$

$$= \iint dq dq' f_{qq'} \int dQ \Psi(q',Q)\Psi^*(q,Q) \ .$$

Введем обозначение

$$\boxed{\rho_{q'q} = \int dQ \Psi(q',Q)\Psi^*(q,Q)}$$ матрица плотности,

$$\langle f \rangle = \iint dq dq' f_{qq'}\rho_{q'q} = \int dq (f\rho)_{qq} = Sp(\hat{f}\hat{\rho}) \ .$$

1) $\boxed{\langle f \rangle = Sp(\hat{\rho}\hat{f})}$ основная роль статистического оператора.

2) Смысл диагональных элементов

$$\rho_{qq} = \int dQ |\Psi(q,Q)|^2 = W_q$$ - плотность вероятности величины q.

3) $\hat{\rho}$ - эрмитов оператор:

$$\rho^*_{q'q} = \int dQ \Psi^*(q',Q)\Psi(q,Q) = \int dQ \Psi(q,Q)\Psi^*(q',Q) = \rho_{qq'} \ .$$

4) $Sp\hat{\rho} = 1$ (для усреднения $\hat{1}$ или из условия нормировки).

2) <u>Второй подход (двойная статистика)</u>

$\begin{matrix}\Psi \\ w_1\end{matrix}$ и $\begin{matrix}\Phi \\ w_2\end{matrix}$ два чистых состояния, в которых может

пребывать частица с вероятностями w_1 и w_2

(не путать с суперпозицией чистых состояний, когда сами состояния также чистые, где заданы не вероятности, а амплитуды, где устанавливается сложение с интерференцией: $\{\psi_k\}$ и $\{c_k\}$ дают $\Psi = \sum_k c_k \psi_k$ - когерентная суперпозиция, а в смеси может быть также $\{\psi_k\}$, но $\{w_k\}$ с условием реал<u>изации не отдельных с. зн., как при $|c_k|^2$, а самих состояний</u>).

В общем случае $\{\psi_k\}$ и $\{w_k\}$

Некогерентная смесь

$$\langle f\rangle=\sum_k w_k\langle f\rangle_k=\sum_k w_k(\psi_k,\hat f\psi_k)=\sum_k w_k\int dq\psi_k^*(q)\hat f\psi_k(q)=$$

$$=\sum_k w_k\int dq\,\psi_k^*(q)\int dq' f_{qq'}\psi_k(q')=$$

$$=\iint dq dq' f_{qq'}\sum_k w_k\psi_k(q')\psi_k^*(q)\ .$$

$$\boxed{\rho_{q'q}=\sum_k w_k\psi_k(q')\psi_k^*(q)}\ .$$

$$\langle f\rangle=\iint dq dq' f_{qq'}\rho_{q'q}=\int dq(f\rho)_{qq}=Sp(\hat f\hat\rho)\ .$$

1) $\langle f\rangle=Sp(\hat f\hat\rho)$.

2) $\rho_{qq}=\sum_k w_k|\psi_k(q)|^2=w_q$.

3) $\rho_{q'q}^*=\rho_{qq'}$, $\quad\hat\rho^+=\hat\rho$.

4) $Sp\hat\rho=1$.

3) Общий подход (аксиоматический)

Постулируется существование статистического оператора $\hat\rho$, с помощью которого вычисляется среднее значение

$$\boxed{\langle f\rangle=Sp(\hat\rho\hat f)}\ .$$

Все свойства следуют отсюда.

а) В представлении, где диагональна величина f ,

$$\langle f\rangle=\sum_f\langle f|\hat\rho\hat f|f\rangle=\sum_f\langle f|\rho|f\rangle f=$$

$$=\sum_f f\rho_{ff}\text{ , т. е. }\rho_{ff}=W_f\ .$$

б) $\langle f\rangle^*=\langle f\rangle$

$$Sp[(\hat\rho\,\hat f)^+]=Sp(\hat f^+\rho^+)=Sp(\hat f\hat\rho^+)\text{, т. е. для}$$

произвольных $\hat f^+=\hat f \qquad \hat\rho^+=\hat\rho$.

в) $Sp(\hat 1\hat\rho)=Sp\hat\rho=1$.

Свойства Sp

1. Определение: $Sp\hat{A} = \sum_n A_{nn}$.

2. $Sp(\hat{A}\hat{B}) = Sp(\hat{B}\hat{A})$,

$$Sp(\hat{A}\hat{B}) = \sum_n (AB)_{nn} = \sum_n \sum_{n'} A_{nn'} B_{n'n} = \sum_{n'} \sum_n B_{n'n} A_{nn'} =$$

$$= \sum_{n'} (BA)_{n'n'} = Sp(BA) \ .$$

3. $Sp(\hat{A}\hat{B}\hat{C}) = Sp(\hat{C}\hat{A}\hat{B}) = Sp(\hat{B}\hat{C}\hat{A})$ (объединить BC или AB и на основе свойства 2).

4. $Sp(\hat{A}[\hat{B}\hat{C}]) = Sp(\hat{C}[\hat{A}\hat{B}]) = Sp(\hat{B}[\hat{C}\hat{A}])$.

5. Инвариантность при преобразовании $\psi \to \psi' = \hat{O}\psi$

$$\hat{A} \to \hat{A}' = \hat{O}\hat{A}\hat{O}^{-1}$$

(в частности, при канонических – унитарных):

$$Sp(\hat{A}') = Sp(\hat{O}\hat{A}\hat{O}^{-1}) = Sp(\hat{O}^{-1}\hat{O}\hat{A}) = Sp\hat{A} \ .$$

6. Линейность:

$$Sp(\alpha\hat{A} + \beta\hat{B}) = \alpha Sp\hat{A} + \beta Sp\hat{B} \ .$$

7. $$\frac{\partial}{\partial\lambda} Sp[\hat{A}(\lambda)] = Sp\left(\frac{\partial\hat{A}}{\partial\lambda}\right) .$$

8. $[Sp\hat{A}\hat{B}]^* = (\sum_n (AB)_{nn})^* = \sum_{nn'} A^*_{nn'} B^*_{n'n} = \sum B^+_{nn'} A^+_{n'n} = Sp(B^+ A^+) =$

$$= Sp[(\hat{B}\hat{A})^+]$$

или проще $(Sp\hat{A})^* = \sum_n A^*_{nn}$,

$$(SpA^+) = \sum_n A^+_{nn} = \sum_n A^*_{nn} \ .$$

Сравнение чистого и смешанного описаний

Ψ	основные меры	$\hat\rho$
$\langle f\rangle = (\Psi, \hat f\Psi)$		$\langle f\rangle = Sp(\hat\rho\hat f)$
$w_q = \lvert\Psi(q)\rvert^2$		$w_q = \rho_{qq}$
$\Psi(q)$ - «одномерное» множество проекций		$\rho_{qq'}$ - «двумерное» множество матричных эл-тов
$(\psi,\psi) = 1$		$Sp\hat\rho = 1$

Чистое описание соответствует частному случаю смеси (для одной и той же системы).

Действительно:

в первом подходе, если подсистема совпадает со всей системой, т. е. нет избыточных координат, то

$$\rho_{q'q} = \int dQ\,\Psi(q',Q)\Psi^*(q,Q)\text{, или}$$

$$\rho_{q'q} = \Psi(q')\Psi^*(q)\ ,$$

во втором подходе

$$\rho_{q'q} = \sum_k w_k \psi_k(q')\psi_k^*(q)\text{, когда } w_k = \delta_{nn_0}$$

$$\rho_{q'q} = \psi_{n_0}(q')\psi_{n_0}^*(q)\ ,$$

в общем случае

$$\langle f\rangle = (\Psi, \hat f\Psi) = \int dq\Psi^*(q)\hat f\Psi(q) =$$
$$= \int dq\Psi^*(q)\int dq' f_{qq'}\Psi(q') =$$
$$= \iint dq dq' f_{qq'}\Psi(q')\Psi^*(q)\text{, т. е.}$$

$$\boxed{\rho_{q'q} = \Psi(q')\Psi^*(q)}\ .$$

Упражнение 1

Показать, что в чистом состоянии $\hat\rho^2 = \hat\rho$.

$$\rho^2_{qq'} = \int dq''\rho_{qq''}\rho_{q''q'} = \int dq''\Psi(q)\Psi^*(q'')\Psi(q'')\Psi^*(q') =$$
$$= \Psi(q)\Psi^*(q') = \rho_{qq'}$$

Упражнение 2

Показать, что из $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho} \Rightarrow$ что состояние чистое.

Рассм. базис ρ, тогда $\rho_{\alpha\alpha'} = \sum_{\alpha''} \rho_{\alpha\alpha''}\rho_{\alpha''\alpha'}$ дает

$\rho_\alpha \delta_{\alpha\alpha'} = \rho_{\alpha\alpha}^2 \delta_{\alpha\alpha'}$, т. е. $\rho_\alpha^2 = \rho_\alpha$, что дает $\rho_{\alpha\alpha} = 1$ или $\rho_{\alpha\alpha} = 0$, однако это не годится в силу нормировки, так что должно быть $\rho_{\alpha\alpha} = \delta_{\alpha\alpha_0}$, что означает чистое состояние, собственное для $\hat{\rho}$ - состояние α_0.

Уравнение движения для матрицы плотности (уравнение Лиувилля)

Аналог уравнения Шредингера для смесей. Во всех случаях можно записать матрицу плотности в виде некоторой билинейной комбинации

$$\rho_{qq'} = \overline{\overline{\Psi(q)\Psi^*(q')}} \ ,$$

$$\frac{\partial \rho_{qq'}}{\partial t} = \overline{\overline{\frac{\partial \Psi(q)}{\partial t}\Psi^*(q')}} + \overline{\overline{\Psi(q)\frac{\partial \Psi^*(q')}{\partial t}}} \ .$$

В силу $\dfrac{\partial \Psi(q)}{\partial t} = -\dfrac{i}{\hbar}\hat{H}\Psi(q) = -\dfrac{i}{\hbar}\int dq'' H_{qq''}\Psi(q'')$

$$\frac{\partial \Psi^*(q')}{\partial t} = \frac{i}{\hbar}\int dq'' H^*_{q'q''}\Psi^*(q'') \ ,$$

$$\frac{\partial \rho_{qq'}}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar}\int dq''(H_{qq''}\underbrace{\overline{\overline{\Psi(q'')\Psi^*(q')}}}_{\rho_{q''q'}} - \underbrace{H^*_{q'q''}}_{H_{q''q'}}\underbrace{\overline{\overline{\Psi^*(q'')\Psi(q)}}}_{\rho_{qq''}}) =$$

$$= -\frac{i}{\hbar}\int dq''(H_{qq''}\rho_{q''q'} - \rho_{qq''}H_{q''q'}) = -\frac{i}{\hbar}(H\rho - \rho H)_{qq'} \ ,$$

так что

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} &= -\frac{i}{\hbar}(\hat{H}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{H}), \text{ или} \\ \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} &= -\frac{i}{\hbar}[\hat{H}\hat{\rho}] = -\{\hat{H}, \hat{\rho}\} \end{aligned}}$$

Другой подход: в чистых состояниях $\frac{\overset{\wedge}{df}}{dt} = \frac{\partial \hat{f}}{\partial t} + \{H, f\}$, так что и в смесях можно ожидать, что это правило сохранится.

Тогда из $\frac{d}{dt}\langle f \rangle = \left\langle \frac{df}{dt} \right\rangle$ получаем

$\frac{d}{dt} Sp(\hat{\rho}\hat{f}) = Sp\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t}\hat{f} + Sp\hat{\rho}\frac{\overset{\wedge}{\partial f}}{\partial t} = Sp(\rho\frac{\partial f}{\partial t}) + Sp(\hat{\rho}\{H\hat{f}\})$. Отсюда

$Sp\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t}\hat{f} = Sp(\rho\{Hf\}) = Sp\{\rho H\}f$, т. е.

$$\boxed{\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = -\{\hat{H}, \hat{\rho}\}}\ .$$

Стационарные состояния (в широком смысле слова – в смысле смесей).

Средние значения не зависящих явно от времени величин $\langle A \rangle = Sp(\hat{\rho}\hat{A})$ остаются постоянными, если $\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = 0$, т. е. для $\{\hat{H}, \hat{\rho}\} = 0$. Значит, матрица плотности стационарных состояний приводится к диагональному виду вместе с H, т. е. в представлении, где

$$H_{nn'} = E_n \delta_{nn'},$$
$$\rho_{nn'} = \rho_{nn}\delta_{nn'}.$$

В этом случае, выбирая «энергетическое» представление, получаем

$$\langle A \rangle = Sp(\hat{\rho}\hat{A}) = \sum_n (\rho A)_{nn} = \sum_n \rho_{nn} A_{nn}\ ,$$

но $A_{nn} = \langle A \rangle_n$ - среднее значение величины A в состоянии с определенным значением энергии E_n, т. е. в стационарном состоянии в узком смысле слова (в смысле чистых состояний).

Итак,

$$\boxed{\langle A\rangle=\sum_n \rho_{nn}\langle A\rangle_n}\ .$$

Чистые стационарные состояния возникают при $\rho_{nn}=\delta_{nn_0}$, когда

$$\langle A\rangle=\langle A\rangle_{n_0}\ .$$

Наиболее важным частным случаем стационарных смешанных состояний является состояние <u>термодинамического равновесия</u>.

Из статистики известно, что распределение вероятностей в канонической системе имеет вид

$$W_n=\frac{1}{z}e^{-\frac{E_n}{T}},\qquad F=-T\ln z\ ,$$

$$\frac{1}{z}=e^{\frac{F}{T}}$$

(это типичный пример подхода с двойной статистикой) или $w_n=e^{\frac{F-E_n}{T}}$, т. е. $\rho_{nn}=e^{\frac{F-E_n}{T}}$, а

$$\rho_{nn'}=e^{\frac{F-E_n}{T}}\delta_{nn'},$$ что в операторной форме дает $\boxed{\hat\rho=e^{\frac{F-\hat H}{T}}}$ статистический оператор Неймана (ФЭС).

Для большого канонического распределения Гиббса

$$W_{nN}=e^{\frac{\Omega+\mu N-E_{nN}}{T}},$$ т. е. в этом случае полным набором квантовых чисел будет $nN\equiv n$,

$$\rho_{n_1n_2}=e^{\frac{\Omega+\mu N-E_{nN}}{T}}\delta_{n_1n_2}.$$ Векторы состояния $\{\psi_{nN}\}$ и вероятности $\{W_{nN}\}$

$$\boxed{\hat\rho=e^{\frac{\Omega+\mu\hat N-\hat H}{T}}}\qquad \rho_{n_1n_2}=\sum_{nN}W_{nN}\psi_{nN}(n_1)\psi^*_{nN}(n_2)=$$

$$=W_{n_1}\delta_{n_1n_2}\ .$$

Построение термодинамики

Для канонической системы $\hat{\rho} = e^{\frac{F-\hat{H}}{T}}$.

Условие нормировки $Sp\hat{\rho} = 1$ дает

$$F = -T\ln Sp(e^{-\frac{\hat{H}}{T}}) .$$

Часто Sp вычисляют в представлении, где $\hat{H}$ диагональный, тогда

$$Spe^{-\frac{\hat{H}}{T}} = \sum_n e^{-\frac{E_n}{T}} = z .$$

Для большого канонического распределения

$$\hat{\rho} = e^{\frac{\Omega+\mu\hat{N}-\hat{H}}{T}} , \qquad \hat{\mathcal{H}} = \hat{H} - \mu\hat{N} ,$$

$$\Omega = -T\ln Sp(e^{-\frac{\hat{\mathcal{H}}}{T}}) ,$$

$$Z = Sp(e^{-\frac{\hat{\mathcal{H}}}{T}}) = \sum_N e^{\frac{\mu N}{T}} \sum_n e^{-\frac{E_{nN}}{T}} .$$

Параметрическое варьирование свободной энергии

Для определенности рассматривается каноническая система.

$$F = -T\ln Spe^{-\frac{\hat{H}}{T}} ,$$

$$\hat{H} = \hat{H}(\lambda) ,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = -T\frac{\frac{\partial}{\partial \lambda}Sp(e^{-\frac{\hat{H}}{T}})}{Spe^{-\frac{\hat{H}}{T}}} = \frac{Sp(\frac{\partial \hat{H}}{\partial \lambda}e^{-\frac{\hat{H}}{T}})}{Spe^{-\frac{\hat{H}}{T}}} = \left\langle \frac{\partial \hat{H}}{\partial \lambda} \right\rangle ,$$

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial \lambda} = \left\langle \frac{\partial \hat{H}}{\partial \lambda} \right\rangle} \; .$$

В одном направлении это равенство работает тогда, когда известно, что искомая средняя величина есть $\frac{\partial \hat{H}}{\partial \lambda}$, тогда

$$\left\langle \frac{\partial \hat{H}}{\partial \lambda} \right\rangle = \frac{\partial F}{\partial \lambda} .$$

Например, магнитный момент $\mathrm{M} = \left\langle -\frac{\partial \hat{H}}{\partial H} \right\rangle = -\frac{\partial F}{\partial H}$.

Прямое же чтение равенства используется, например, при

$$\hat{H}(\lambda) = \hat{H}_0 + \lambda \hat{H}_1 ,$$

тогда $\frac{\partial \hat{H}}{\partial \lambda} = \hat{H}_1 \;\; \Rightarrow$

$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = \langle H_1 \rangle$, а

$F(\lambda) = F(0) + \int_0^\lambda d\lambda \langle H_1 \rangle$, т. е.

$$F = F_0 + \int_0^\lambda d\lambda \langle H_1 \rangle \; .$$

Отсюда в первом приближении

$$F = F_0 + \lambda \langle H_1 \rangle_0 ,$$

т. е. добавка к свободной энергии равна среднему значению вариации по невозмущенному состоянию (аналогично поправке первого порядка стандартной теории возмущений в невырожденном случае в квантовой механике).

Представление Шредингера, Гейзенберга и Дирака

Картина Шредингера $\dfrac{\partial\hat{\rho}}{\partial t} = -\{\hat{H}, \hat{\rho}\}$, $\hat{\rho}(t_0)$.

Вначале рассматриваем чистые состояния. Вводится унитарный оператор эволюции $\Psi(t) = \hat{U}(t|t_0)\Psi(t_0)$,

$$\hat{U}(t_0|t_0) = 1 ,$$

$$\frac{\partial\hat{U}}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar}\hat{H}\hat{U} , \quad \hat{U}(t_0|t_0) = 1 .$$

В двух случаях можно написать решение:

а) для малого интервала во времени

$$\hat{U}_{\delta t} = 1 - \frac{i}{\hbar}\delta t\hat{H} ,$$

б) для случая сохранения энергии $\dfrac{\partial\hat{H}}{\partial t} = 0$, когда

$\hat{U}(t|t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\hat{H}}$, что для стационарных чистых состояний с $\Psi(t_0) = \psi_n$ дает

$$\Psi(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\hat{H}}\psi_n = e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)E_n}\psi_n .$$

Для смесей можно воспользоваться тем, что движение есть каноническое преобразование, так что, поскольку для вектора состояния преобразование есть

$\Psi(t) = \hat{U}(t|t_0)\Psi(t_0)$, то для

оператора $\hat{\rho}(t) = \hat{U}(t|t_0)\hat{\rho}(t_0)\hat{U}^{-1}(t|t_0)$.

Действительно, непосредственная подстановка в уравнение Лиувилля показывает, что это есть искомое решение.
Таким образом, в картине Шредингера

уравнение Шредингера	и уравнение Лиувилля
$\dfrac{\partial\Psi}{\partial t} = -\dfrac{i}{\hbar}\hat{H}\Psi$	$\dfrac{\partial\hat{\rho}}{\partial t} = -\{\hat{H}, \hat{\rho}\}$
$\Psi(t_0)$	$\hat{\rho}(t_0)$

решаются единым образом с помощью оператора движения

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \hat{U}}{\partial t} = -\dfrac{i}{\hbar}\hat{H}\hat{U} \\ \hat{U}(t_0|t_0) = 1 \end{cases}$$

так что $\hat{\rho}(t) = \hat{U}(t|t_0)\hat{\rho}(t_0)\hat{U}^{-1}(t|t_0)$, а

$$\Psi(t) = \hat{U}(t|t_0)\Psi(t_0) \ .$$

Вводится представление Гейзенберга, где в качестве вектора состояния (или матрицы плотности) применяются Шредингеровские величины в некоторый момент времени t_0, т. е.

$$\Psi_Г = \Psi(t_0) \ ,$$

$$\rho_Г = \rho(t_0), \text{ т. е. } \frac{\partial \Psi_Г}{\partial t} = 0 \ , \ \frac{\partial \rho_Г}{\partial t} = 0 .$$

В таком случае переход к новому представлению для вектора есть $\Psi_Г = \hat{U}^{-1}(t|t_0)\Psi(t)$, а для всех операторов, в частности, матрицы плотности имеем

$$\hat{\rho}_Г = \hat{U}^{-1}(t|t_0)\hat{\rho}(t)\hat{U}(t|t_0) \ ,$$

$$\hat{A}_Г(t) = \hat{U}^{-1}(t|t_0)\hat{A}\hat{U}(t|t_0) \ .$$

Дираком предложена промежуточная картина, где за основу берется переход к новым операторам, аналогичный Гейзенбергскому, но с естественным для системы с $\overline{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1$ оператором эволюции $\hat{U}_0(t|t_0)$:

$$\hat{A}_Д(t) = \hat{U}_0^{-1}(t|t_0)\hat{A}\hat{U}_0(t|t_0) \text{ и}$$

$$\hat{\rho}_Д(t) = \hat{U}_0^{-1}(t|t_0)\hat{\rho}(t)\hat{U}_0(t|t_0) ,$$

$$\Psi_Д(t) = \hat{U}_0^{-1}(t|t_0)\Psi(t)$$

Можно сказать, что это есть представление Гейзенберга для гамильтониана $\hat{H}_0$.

$\hat{S}$ -оператор

$$\hat{U}(t|t_0) = \hat{U}_0(t|t_0)\hat{S}(t|t_0)\,,$$

$$\Psi_Д(t) = \hat{U}_0^{-1}(t|t_0)\Psi(t) = \hat{U}_0^{-1}(t|t_0)\hat{U}(t|t_0)\Psi_Г =$$

$$= \hat{S}(t|t_0)\Psi_Г\ .$$

Итак, $$\Psi_Д(t) = \hat{S}(t|t_0)\Psi_Г\,,$$

т. е. S -оператор играет роль канонического преобразования перехода от представления Гейзенберга к представлению Дирака, так что

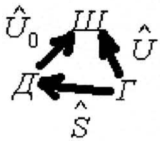
$$\hat{\rho}_Д(t) = \hat{S}(t|t_0)\hat{\rho}_Г\hat{S}^{-1}(t|t_0) \text{ и}$$

$$\hat{A}_Д(t) = \hat{S}(t|t_0)\hat{A}_Г\hat{S}^{-1}(t|t_0)\ .$$

Иначе это можно трактовать в силу $\begin{array}{l}\Psi_Г = \Psi_Д(t_0)\\ \hat{\rho}_Г = \hat{\rho}_Д(t_0)\end{array}$

как движение в представлении Дирака,

т. е. $\hat{S}$ является оператором движения в представлении взаимодействия.



Таким образом, каждый из операторов имеет как прямой физический смысл пропагатора, так и вспомагательный, преобразований.

Уравнение для $\hat{S}$ -оператора

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial \hat{U}}{\partial t} = -\dfrac{i}{\hbar}\hat{H}\hat{U}\\[2ex] \dfrac{\partial \hat{U}_0}{\partial t} = -\dfrac{i}{\hbar}\hat{H}_0\hat{U}_0\end{array}\right. \Rightarrow\ \frac{\partial}{\partial t}(U_0 S) = \frac{\partial U_0}{\partial t}S + U_0\frac{\partial S}{\partial t} =$$

$$= -\frac{i}{\hbar}(\hat{H}_0 + \hat{H}_1)U_0\hat{S}$$

$$U_0 \frac{\partial \hat{S}}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} \hat{H}_1 \hat{U}_0 \hat{S} \ .$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{\partial S}{\partial t} = -\dfrac{i}{\hbar} \hat{H}_{1_Д} \hat{S} \\ S(t_0 | t_0) = 1 \end{array}} \qquad \hat{H}_{1_Д}(t) = \hat{U}_0^{-1}(t|t_0) \hat{H}_1 \hat{U}_0(t|t_0) \ .$$

Отсюда интегральное уравнение и итерации:

$$\hat{S}(t|t_0) = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t} dt_1 \hat{H}_{1_Д}(t_1) \hat{S}(t_1|t_0) =$$

$$= 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t} dt_1 \hat{H}_{1_Д}(t_1) + (-\frac{i}{\hbar})^2 \int_{t_0}^{t} dt_1 \hat{H}_{1_Д}(t_1) \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \hat{H}_{1_Д}(t_2) + \ldots$$

В первом приближении

$$S(t|t_0) = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t} dt_1 \hat{H}_{1_Д}(t_1) \ .$$

Вычисление вероятностей переходов

При t_0 состояние системы есть $\Psi(t_0) = \psi_n$. Вероятность в момент времени t найти значение величины в системе n'

$$W_{n \to n'} = \left| (\psi_{n'}, \Psi(t)) \right|^2 = \left| \langle n' | U | n \rangle \right|^2 ,$$

$$W_{n \to n'} = \left| (U_0 S)_{n'n} \right|^2, \text{ а } (U_0)_{n'n''} = e^{-\frac{i}{\hbar}(t - t_0) E_{n'}} \delta_{n'n''} ,$$

$$\boxed{W_{n \to n'} = \left| S_{n'n} \right|^2} \ .$$

В первом приближении при $n' \neq n$

$$W_{n \to n'} = \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_{t_0}^{t} dt_1 \left\langle n' \middle| H_{1_Д}(t_1) \middle| n \right\rangle \right|^2 =$$

$$= \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_{t_0}^{t} dt_1 H_{1_{n'n}}(t_1) e^{i \omega_{n'n} t_1} \right|^2$$

Операторы производных по времени

$$\left\langle \widehat{\frac{dA}{dt}} \right\rangle = \frac{d}{dt}\langle A\rangle = \frac{d}{dt} Sp\hat{\rho}\hat{A} = Sp(\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial t}\hat{A} + \hat{\rho}\frac{\partial\hat{A}}{\partial t})$$

во всех представлениях.

1. Шредингера

$$\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial t} = -\{\hat{H},\hat{\rho}\}\text{, так что}$$

$$\left\langle \frac{d\hat{A}}{dt} \right\rangle = Sp(\hat{\rho}\frac{\partial\hat{A}}{\partial t}) - Sp(\{\hat{H}\hat{\rho}\}\hat{A}) = Sp(\hat{\rho}\frac{\partial\hat{A}}{\partial t}) + Sp(\hat{\rho}\{\hat{H},\hat{A}\}),$$

т. е.

$$\widehat{\frac{dA}{dt}} = \frac{\partial\hat{A}}{\partial t} + \{\hat{H},\hat{A}\} \ .$$

2. Гейзенберга

$$\frac{\partial\hat{\rho}_{\Gamma}}{\partial t} = 0\text{, т. е}$$

$$\left\langle \widehat{\frac{dA}{dt}} \right\rangle = Sp(\hat{\rho}_{\Gamma}\frac{\partial\hat{A}_{\Gamma}}{\partial t})\text{, т. е.}$$

$$\left(\widehat{\frac{dA}{dt}}\right)_{\Gamma} = \frac{\partial\hat{A}_{\Gamma}}{\partial t} .$$

Явно можно получить из соответствующих Шредингеровских:

$$\left(\frac{d\hat{A}}{dt}\right)_{\Gamma} = \hat{U}^{-1}\widehat{\frac{dA}{dt}}\hat{U} = \hat{U}^{-1}\frac{\partial\hat{A}}{\partial t}\hat{U} + \hat{U}^{-1}\{\hat{H},\hat{A}\}\hat{U} =$$

$$= \hat{U}^{-1}\frac{\partial\hat{A}}{\partial t}\hat{U} + \{\hat{H}_{\Gamma},\hat{A}_{\Gamma}\} \ .$$

3. Дирака

$$\frac{\partial \hat{\rho}_Д}{\partial t} = -\{\hat{H}_{1_Д}, \hat{\rho}_Д\} \ .$$ Аналог случая Шредингера

$$\frac{d\hat{A}}{dt}_Д = \frac{\partial \hat{A}_Д}{\partial t} + \{\hat{H}_{1_Д}, \hat{A}_Д\} \ .$$

Для явного расчета вновь прибегаем к каноническому преобразованию:

$$\left(\frac{d\hat{A}}{dt}\right)_Д = \hat{U}_0^{-1}\frac{d\hat{A}}{dt}\hat{U}_0 = \hat{U}_0^{-1}\frac{\partial \hat{A}}{\partial t}\hat{U}_0 + \{\hat{H}_Г, \hat{A}_Г\} \ ,$$

так что

$$\frac{\partial \hat{A}_Д}{\partial t} = \hat{U}_0^{-1}\frac{\partial \hat{A}}{\partial t}\hat{U}_0 + \{\hat{H}_{0_Д}, \hat{A}_Д\} \ .$$

<u>Вынужденные колебания осциллятора</u>

$$\hat{H}_0 = \hbar\omega(\hat{a}^+\hat{a} + \frac{1}{2}) \quad , \quad \hat{a}^+\hat{a} = \hat{n} \ ,$$

$$[\hat{a}, \hat{a}^+] = 1 \ ,$$

$$\hat{H}_1 = -f(t)\hat{x} = -f(t)\Delta x_0(\hat{a} + \hat{a}^+) \ .$$

<u>В представлении Дирака</u>

$$\hat{A}_Д(t) = \hat{U}_0^{-1}(t|t_0)\hat{A}\hat{U}_0(t|t_0), \text{ где } \hat{U}_0(t|t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\hat{H}_0} \ ,$$

$$\hat{a}_Д(t) = e^{\frac{i}{\hbar}\Delta t\hbar\omega(\hat{n}+1/2)}\hat{a}e^{-\frac{i}{\hbar}\Delta t\hbar\omega(\hat{n}+1/2)} = e^{i\Delta t\omega\hat{n}}\hat{a}e^{-i\omega\Delta t\hat{n}} \ .$$

Рассмотрим $e^{\hat{c}}\hat{A}e^{-\hat{c}}$. Вводим $\hat{A}(\lambda) = e^{\lambda\hat{c}}\hat{A}e^{-\lambda\hat{c}} =$

$$= \hat{A} + \lambda\frac{\partial A}{\partial \lambda}\bigg|_{\lambda=0} + .. = \hat{A} + \lambda[\hat{c}\hat{A}] + \frac{\lambda^2}{2}[\hat{c}[\hat{c}\hat{A}]] + \dots \ ,$$

$$\frac{\partial A(\lambda)}{\partial\lambda} = [\hat{c}, \hat{A}(\lambda)] \ , \qquad \frac{\partial^2 A(\lambda)}{\partial\lambda^2} = [\hat{c}[\hat{c}\hat{A}(\lambda)]] \ ,$$

$$\hat{a}_Д(t) = e^{i\omega\Delta t\hat{n}}\hat{a}e^{-i\omega\Delta t\hat{n}} = \hat{a} + i\omega\Delta t[\hat{n},\hat{a}] + \frac{(i\omega\Delta t)^2}{2}[\hat{n}[\hat{n},\hat{a}]] + \ldots \ ,$$

$[\hat{n},\hat{a}] = [\hat{a}^+\hat{a},\hat{a}] = [\hat{a}^+\hat{a}]\hat{a} = -\hat{a}$, так что

$$\hat{a}_Д(t) = \hat{a} - i\omega\Delta t\hat{a} + \frac{(i\omega\Delta t)^2}{2}\hat{a} + \ldots = \hat{a}e^{-i\omega\Delta t} \ .$$

Таким образом, естественная эволюция операторов рождения и уничтожения проста:

$$\hat{a}_Д(t) = \hat{a}e^{-i\omega\Delta t} \ , \qquad \hat{a}^+_Д(t) = \hat{a}^+e^{i\omega\Delta t} \ .$$

<u>В представлении Гейзенберга</u> операторы можно получить, решая уравнения движения.

Для любого оператора

$$\frac{\partial\hat{A}_Г}{\partial t} = \hat{U}^{-1}\frac{\partial\hat{A}}{\partial t}\hat{U} + \{\hat{H}_Г\hat{A}_Г\} \text{ или}$$

$$\frac{\partial\hat{A}_Г}{\partial t} = \hat{U}^{-1}\tfrac{\partial\hat{A}}{\partial t}\hat{U} + \{\hat{H},\hat{A}\}_Г \ .$$

В случае же оператора уничтожения

уравнение движения $\dfrac{\partial\hat{a}_Г(t)}{\partial t} = \{\hat{H},\hat{a}\}_Г$,

$$\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}^+\hat{a} + 1/2) - f(t)\Delta x_0(\hat{a} + \hat{a}^+) \ ,$$

$$\{\hat{H},\hat{a}\} = \{\hat{H}_0,\hat{a}\} + \{\hat{H}_1\hat{a}\} =$$

$$= \hbar\omega\{\hat{n},\hat{a}\} - f(t)\Delta x_0\{\hat{a}^+\hat{a}\} =$$

$$= -i\omega\hat{a} + \frac{i}{\hbar}f(t)\Delta x_0 \ ,$$

$$\frac{\partial\hat{a}_Г(t)}{\partial t} = -i\omega\hat{a}_Г(t) + \frac{i}{\hbar}f(t)\Delta x_0 \ .$$

Решение:

$$\hat{a}_Г(t) = \hat{c}e^{-i\omega(t-t_0)} + \frac{i}{\hbar}\Delta x_0\int_{t_0}^{t}dt_1 e^{-i\omega(t-t_1)}f(t_1) \ ,$$

$$\hat{a}_\Gamma(t_0) = \hat{c} = \hat{a} \ ,$$

$$\hat{a}_\Gamma(t) = \hat{a}e^{-i\omega(t-t_0)} + \frac{i}{\hbar}\Delta x_0 \int_{t_0}^{t} dt_1 e^{-i\omega(t-t_1)} f(t_1) \ ,$$

$$\hat{a}_\Gamma^+(t) = \hat{a}^+ e^{i\omega(t-t_0)} - \frac{i}{\hbar}\Delta x_0 \int_{t_0}^{t} dt_1 e^{i\omega(t-t_1)} f(t_1) \ .$$

Введем комплексное число

$$z = \frac{i}{\hbar}\Delta x_0 \int_{t_0}^{t} dt_1 f(t_1) e^{i\omega(t_1 - t_0)}, \text{ тогда}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{a}_\Gamma(t) &= e^{-i\omega(t-t_0)}(\hat{a} + z) \\ \hat{a}_\Gamma^+(t) &= e^{i\omega(t-t_0)}(\hat{a}^+ + z^*) \end{aligned}} \ .$$

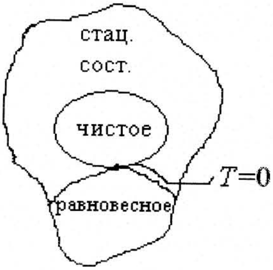
Этим полностью решена задача о вынужденных колебаниях осциллятора. Например, вычисление средней энергии осциллятора (или среднего числа фононов):

$$\hat{n}_\Gamma(t) = (\hat{a}^+\hat{a})_\Gamma(t) = \hat{a}_\Gamma^+(t)\hat{a}(t) = (\hat{a}^+ + z^*)(\hat{a} + z) =$$

$$= \hat{a}^+\hat{a} + \hat{a}^+ z + z^*\hat{a} + |z|^2,$$

$$\langle n \rangle_t = Sp[\rho_\Gamma \hat{n}_\Gamma(t)] = Sp[\hat{\rho}(t_0)(\hat{n} + \hat{a}^+ z + \hat{a}z^* + |z|^2)] =$$

$$= \langle n \rangle_{t_0} + |z|^2$$ в случае стационарных смешанных состояний исходных, так как $a_{nn} = 0$ и $\langle a \rangle_{\text{стац}} = \sum_m \rho_{nn} a_{nn} = 0$.



Таким образом, приращение среднего числа фононов

$$\Delta\langle n \rangle = |z|^2 = \frac{1}{\hbar\omega 2m} \left| \int_{t_0}^{t} dt_1 f(t_1) e^{i\omega t_1} \right|^2, \text{ а}$$

(если энергия основного

приращение среднего значения энергии

состояния не $\quad \Delta\langle E\rangle = \hbar\omega|z|^2 = \dfrac{1}{2m}\left|\int\limits_{t_0}^{t} dt_1 f(t_1)e^{i\omega t_1}\right|^2$.

вырождена)

Другой подход связан с вычислением S-оператора:

$$\hat{H}_{1_Д}(t) = -f(t)\Delta x_0[\hat{a}_Д(t) + \hat{a}_Д^+(t)] =$$

$$= -f(t)\Delta x_0[\hat{a}e^{-i\omega(t-t_0)} + \hat{a}^+e^{i\omega(t-t_0)}] \ ,$$

$$\frac{\partial\hat{S}}{\partial t} = \frac{i}{\hbar}f(t)\Delta x_0[\hat{a}e^{-i\omega\Delta t} + \hat{a}^+e^{i\omega\Delta t}]S \ .$$

Решение ищем в виде $\hat{S} = \hat{S}_+\hat{Y}$, где

$\hat{S}_+$ соответствует члену с $\hat{a}^+$, т. е.

$$\frac{\partial\hat{S}_+}{\partial t} = \frac{i}{\hbar}f(t)\Delta x_0\hat{a}^+e^{i\omega\Delta t}\hat{S}_+ \ ,$$

$$\hat{S}_+ = e^{\frac{i}{\hbar}\Delta x_0\hat{a}^+\int\limits_{t_0}^{t}dt_1 f(t_1)e^{i\omega(t_1-t_0)}} = e^{z\hat{a}^+} \ ,$$

$$\cancel{\frac{\partial\hat{S}_+}{\partial t}\hat{Y}} + \hat{S}_+\frac{\partial\hat{Y}}{\partial t} = \frac{i}{\hbar}f(t)\Delta x_0[\hat{a}e^{-i\omega\Delta t} + \cancel{\hat{a}^+e^{i\omega\Delta t}}]\hat{S}_+Y \ ,$$

$$\frac{\partial\hat{Y}}{\partial t} = \hat{S}_+^{-1}\frac{i}{\hbar}f(t)\Delta x_0\hat{a}e^{-i\omega\Delta t}\hat{S}_+\hat{Y} \ ,$$

$$e^{-z\hat{a}^+}\hat{a}e^{z\hat{a}^+} = \hat{a} + [-za^+, a] = \hat{a} + z \ ,$$

$$\frac{\partial\hat{Y}}{\partial t} = \frac{i}{\hbar}f(t)\Delta x_0 e^{-i\omega(t-t_0)}(\hat{a}+z)\hat{Y} \ ,$$

$$\circledast\ Y = e^{\frac{i}{\hbar}\Delta x_0\int\limits_{t_0}^{t}f(t_1)e^{-i\omega(t_1-t_0)}dt_1(\hat{a}+z_1)}, \text{ т. е.}$$

$$\hat{S}(t|t_0) = e^{z\hat{a}^+}e^{-z^*\hat{a}}e^{\chi}, \text{ где } \chi = \chi' + i\chi''$$

с χ' из нормировки и χ'' не играющим роли (явно χ можно записать из ⊛, но это роли не играет).

Вынуждение вакуума

В начальный момент времени t_0 состояние соответствует $n=0$ (во всех представлениях векторы совпадают)

$$\left|t_0\right\rangle_Д = \left|0\right\rangle \ .$$

В представлении взаимодействия

$$\left|t\right\rangle_Д = \hat{S}(t|t_0)\left|0\right\rangle = e^{\chi} e^{z\hat{a}^+} e^{-z^*\hat{a}}\left|0\right\rangle =$$

$$= e^{\chi} e^{z\hat{a}^+}\left|0\right\rangle = e^{\chi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}(\hat{a}^+)^n\left|0\right\rangle =$$

$$= e^{\chi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\sqrt{n!}}\left|n\right\rangle \ .$$

Вероятности переходов определяются проекциями этого вектора в базисе $\left|n\right\rangle$

$$\left\langle n\right|S\left|0\right\rangle = e^{\chi}\frac{z^n}{\sqrt{n!}} \ ,$$

$$W_{0\to n} = \left|\left\langle n\right|\hat{S}\left|0\right\rangle\right|^2 = \left|e^{\chi}\frac{z^n}{\sqrt{n!}}\right|^2 = e^{2\chi'}\frac{|z|^{2n}}{n!} \ .$$

Распределение Пуассона

$$W_n = e^{-a}\frac{a^n}{n!} \qquad (e^{-a} \text{ в силу нормировки}) \ .$$

Определяется лишь одним параметром a. При этом

$$\left\langle n\right\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} nW_n = e^{-a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{na^n}{n!} = e^{-a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{(n-1)!} =$$

$$= e^{-a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^{k+1}}{k!} = a \ ,$$

$$\left\langle n^2\right\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n^2W_n = e^{-a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2a^n}{n!} = e^{-a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{na^n}{(n-1)!} = e^{-a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+1)a^{k+1}}{k!} =$$

$$= ae^{-a}\sum_{k=0}^{\infty} k\frac{a^k}{k!} + ae^{-a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{k!} = a^2 + a \ ,$$

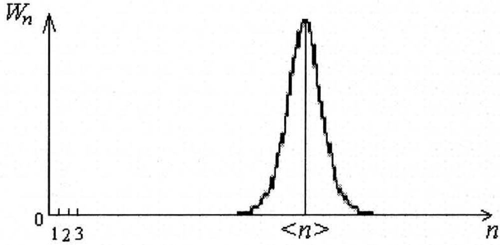
$$D_n = \left\langle n^2 \right\rangle - \left\langle n \right\rangle^2 = a \ .$$

Итак, для распределения Пуассона

$$W_n = e^{-a}\frac{a^n}{n!} \qquad \left\langle n \right\rangle = a \qquad \Delta n = \sqrt{a} \qquad \frac{\Delta n}{\left\langle n \right\rangle} = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

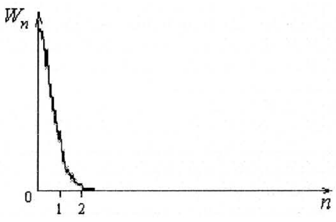
При больших $a >> 1$ распределение Пуассона переходит в распределение Гаусса

$$W_n \simeq \frac{e^{-\frac{(n-a)^2}{2a}}}{\sqrt{2\pi a}} \qquad , \qquad W_n = \frac{e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2D}}}{\sqrt{2\pi D}} \ .$$



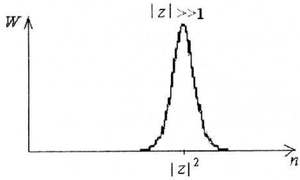
При малых $a << 1$ $\qquad W_0 = e^{-a} \simeq 1\text{-}a$,

$$W_1 = ae^{-a} \simeq a \ .$$



Возвращаясь к вынуждению вакуума, получаем

$$W_{0\to n} = e^{-|z|^2}\frac{(|z|^2)^n}{n!} \quad , \qquad \left\langle n \right\rangle = |z|^2 \qquad \Delta n = |z| \ .$$



соответствует теории возмущений (однофононный процесс).

Равновесные свойства колебаний

В состоянии равновесия для отдельного осциллятора

$$\hat{\rho} = \frac{e^{-\beta \hat{H}}}{Spe^{-\beta \hat{H}}} = \frac{e^{-\beta\hbar\omega\hat{n}}}{Sp(e^{-\beta\hbar\omega\hat{n}})} \ ,$$

$$z = Sp(e^{-\beta\hbar\omega\hat{n}}) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\hbar\omega n} = \frac{1}{1-e^{-\beta\hbar\omega}} \ ,$$

$$\hat{\rho} = (1-e^{-\beta\hbar\omega})e^{-\beta\hbar\omega\hat{n}},$$

$$\langle n\rangle = \langle \hat{a}^+\hat{a}\rangle = Sp(\hat{\rho}\hat{a}^+\hat{a}) \ .$$

Воспользуемся тем, что $aa^+ - a^+a = 1$, так что

$\langle aa^+\rangle - \langle \hat{a}^+\hat{a}\rangle = 1$, но

$$\langle aa^+\rangle = Sp(\hat{\rho}\hat{a}\hat{a}^+) = \frac{1}{z}Sp(e^{-\beta\hbar\omega\hat{n}}\hat{a}\hat{a}^+) =$$

$$= \frac{1}{z}Sp(\hat{a}^+e^{-\beta\hbar\omega\hat{n}}\hat{a}) = \frac{1}{z}Sp(e^{-\beta\hbar\omega(\hat{n}-1)}\hat{a}^+\hat{a}) =$$

$= e^{\beta\hbar\omega}\langle a^+a\rangle$, так что

$$(e^{\beta\hbar\omega}-1)\langle a^+a\rangle = 1 \ .$$

Итак,

$$\boxed{\langle n\rangle = \langle a^+a\rangle = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{T}}-1}}$$

или сразу $\sum_{\text{т}=0}^{\infty} ne^{-\alpha n}$,

или по бозе - распределению

$c\varsigma \equiv 0$

В соответствии с распределением Бозе-Эйнштейна при $\mu = 0$ для фононов

$$\langle n \rangle = \begin{cases} \dfrac{T}{\hbar\omega} >> 1 & \text{при } \hbar\omega << T \\ e^{-\frac{\hbar\omega}{T}} & \text{при } \hbar\omega >> T \end{cases} .$$

Для энергии получаем

$$\langle \varepsilon \rangle = \hbar\omega(\langle n \rangle + \frac{1}{2}) = \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{T}} - 1} = \frac{\hbar\omega}{2} \frac{e^{\frac{\hbar\omega}{T}} + 1}{e^{\frac{\hbar\omega}{T}} - 1} =$$

$$= \frac{\hbar\omega}{2} cth \frac{\hbar\omega}{2T} \quad , \qquad cth\alpha > 1 \text{ всегда.}$$

<u>Теорема вириала</u>

В стационарном состоянии чистом финитном

$$\langle px \rangle = const \ ,$$

$$\frac{d}{dt}\langle px \rangle = 0 \ ,$$

$$\langle \dot{p}x \rangle + \langle p\dot{x} \rangle = 0 \ ,$$

$$\left\langle p\frac{p}{m} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial U}{\partial x} x \right\rangle = 0 \ ,$$

$$2\langle T \rangle = \left\langle x \frac{\partial U}{\partial x} \right\rangle ,$$

$$\langle T \rangle = \frac{1}{2}\left\langle x \frac{\partial U}{\partial x} \right\rangle .$$

Обобщение:

1. Трехмерие: $\langle \vec{p}\vec{r} \rangle \Rightarrow \quad \langle T \rangle = \dfrac{1}{2}\left\langle \vec{r} \dfrac{\partial U}{\partial \vec{r}} \right\rangle$.

2. Система частиц: $\sum\limits_a \langle \overline{p}_a \overline{r}_a \rangle \Rightarrow \quad \langle T \rangle = \dfrac{1}{2}\sum\limits_a \left\langle \overline{r}_a \dfrac{\partial U}{\partial \overline{r}_a} \right\rangle$.

3. В стац. состояниях смешанных в силу

$$\langle A\rangle = \sum_n \rho_{nn}\langle A\rangle_n$$

также справедливо.

Случай, когда U - однородная функция порядка s

$$\bar{r}\frac{\partial U}{\partial \bar{r}} = sU\,,$$

$$\langle T\rangle = \frac{s}{2}\langle U\rangle,\ \text{а}\ \langle E\rangle = \langle T\rangle + \langle U\rangle\ .$$

Случай кулонова поля

$$s=-1\quad,\quad \langle T\rangle = -\frac{1}{2}\langle U\rangle,\ \text{так что}\ \langle T\rangle = -\langle E\rangle,$$

$$\langle U\rangle = 2\langle E\rangle\ .$$

Случай осциллятора

$$s=2\quad,\qquad \langle T\rangle = \langle U\rangle = \frac{1}{2}\langle E\rangle\ .$$

Для равновесных колебаний

$$\langle T\rangle = \tfrac{\hbar\omega}{4}cth\frac{\hbar\omega}{2T} = \frac{\langle p^2\rangle}{2m}\ ,$$

$$\langle U\rangle = \frac{\hbar\omega}{4}cth\frac{\hbar\omega}{2T} = \frac{m\omega^2}{2}\langle x^2\rangle\ ,$$

$\langle p\rangle = 0$

$\langle x\rangle = 0$ (в силу связи средних в стац. состоянии смесей и чистых)

$$D_p = \frac{\hbar m\omega}{2}cth\frac{\hbar\omega}{2T}\quad,\qquad \Delta p = \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}cth\frac{\hbar\omega}{2T}}\ ,$$

$$D_x = \frac{\hbar}{2m\omega}cth\frac{\hbar\omega}{2T}\quad,\qquad \Delta x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}cth\frac{\hbar\omega}{2T}}\ ,$$

$$\Delta p\Delta x = \frac{\hbar}{2}cth\frac{\hbar\omega}{2T}\ ,$$

min достигается лишь при $T=0$.

Вариационный метод

Принцип Фока $\hat{H}\Psi = E\Psi$ эквивалентно

$$\delta\frac{(\Psi,\hat{H}\Psi)}{(\Psi,\Psi)} = 0 \ .$$

В частности $\langle E\rangle \geq E_{\min} = E_0$, так что варьирование $\langle E\rangle$ дает по min оценку $E_{\min}$ сверху.

В случае движения одной частицы в потенциальном поле

$$\hat{H} = \hat{T} + \hat{U} \ ,$$

$$\langle H\rangle = \langle T\rangle + \langle U\rangle = (\Psi,T\Psi) + (\Psi,U\Psi) =$$
$$= \frac{1}{2m}(\psi,\hat{\vec{p}}^2\psi) + (\Psi,\hat{U}\Psi) = \frac{1}{2m}(\hat{\vec{p}}\Psi,\hat{\vec{p}}\Psi) + (\Psi,\hat{U}\Psi) =$$
$$= \frac{\hbar^2}{2m}\int d\vec{r}\,|\nabla\Psi|^2 + \int d\vec{r}\,U(\vec{r})|\Psi|^2 \ .$$

В одномерном случае

$$\langle H\rangle = \frac{\hbar^2}{2m}\int dx|\psi'(x)|^2 + \int dx U(x)|\psi(x)|^2 \ .$$

Оценка энергии основного уровня для осциллятора

$U(x) = \dfrac{m\omega^2 x^2}{2}$. Выбираем варьируемую функцию в гауссовой форме

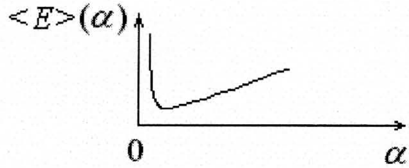
$$\Psi(x) = Ae^{-\frac{\alpha x^2}{2}} \ .$$

Нормировка: $|A|^2\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}dx = |A|^2\sqrt{\dfrac{\pi}{\alpha}} = 1$.

$$\langle E\rangle(\alpha)=\frac{\hbar^2}{2m}\int\limits_{-\infty}^{\infty}dx\left|A(-\alpha x)e^{-\frac{\alpha x^2}{2}}\right|^2+\frac{m\omega^2}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}dx x^2|A|^2e^{-\alpha x^2}=$$

$$=\frac{\hbar^2}{2m}\alpha^2|A|^2\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\frac{1}{2\alpha}+\frac{m\omega^2}{2}|A|^2\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\frac{1}{2\alpha}=$$

$$=\frac{\hbar^2}{4m}\alpha+\frac{m\omega^2}{4\alpha}=B\alpha+\frac{C}{\alpha}$$



$$\frac{\partial\langle E\rangle}{\partial\alpha}=B-\frac{C}{\alpha^2}\qquad,\qquad \alpha_0=\sqrt{\frac{C}{B}}=\sqrt{\frac{\frac{m\omega^2}{4}}{\frac{\hbar^2}{4m}}}=\frac{m\omega}{\hbar}\quad,$$

$$\langle E\rangle_{\min}=B\sqrt{\frac{C}{B}}+C\sqrt{\frac{B}{C}}=2\sqrt{BC}=2\sqrt{\frac{\hbar^2}{4m}\cdot\frac{m\omega^2}{4}}=\frac{\hbar\omega}{2}\ .$$

Таким образом,

$$E_0\le\frac{\hbar\omega}{2},\ \text{а}\ \psi(x)=\sqrt[4]{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\ .$$

Способ позволяет достаточно точно оценивать уровни энергии основного состояния, но другие могут быть при этом очень далеки от истинных. Можно применить и для оценки возбужденных уровней энергии, хотя обычно это оказывается гораздо более сложным делом. Взятие в вилку достигается дополнительной оценкой снизу по СН.

Квазичастицы

В задаче двух тел вместо индивидуальных характеристик $m_1\ m_2\ \bar{r}_1\ \bar{r}_2\quad \bar{v}_1\ \bar{v}_2$ вводятся коллективные переменные

$$m_1+m_2,\ \frac{m_1m_2}{m_1+m_2},\ \vec{R}_{\text{ц.и.}}=\frac{m_1\bar{r}_1+m_2\bar{r}_2}{m_1+m_2},\ \bar{r}=\bar{r}_1-\bar{r}_2\ .$$

Новые объекты движутся независимо друг от друга. Одна – прямолинейно и равномерно (в классике), вторая описывает относительное движение.

Так, для функции Лагранжа получаем

$$L = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - U(|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|) = \frac{MV^2}{2} + \frac{\mu v^2}{2} - U(r) \ .$$

Для второй части – относительного движения, - эквивалентной движению в поле сферической симметрии, в свою очередь, производится разделение на движение по ρ и по φ.

Радиальное движение эквивалентно одномерному в эфф. пот. поле $U_{\text{эфф}}(\rho) = U(\rho) + \dfrac{\overline{M}^2}{2m\rho^2}$.

Постепенное сведение сложного движения к простым, типа одномерных.

Другой пример – система, совершающая малые колебания. (малые по обобщ. координатам $q_n - q_n^0 = \xi_n$ после линейного преобразования дают диагональную квадратичную форму в L, так что в новых переменных Q_α главных (нормальных) координатах

$$L = \sum_\alpha L_\alpha = \sum_\alpha \left(\frac{\dot{Q}^2}{2} - \frac{\omega_\alpha^2 Q_\alpha^2}{2}\right), \text{ где}$$

собственные частоты ω_α определяют гармонические колебания независимых ветвей (мод, осцилляторов).

Классические квазичастицы – главные колебания, осцилляторы.

После квантования получают квантовые квазичастицы – фононы, фотоны, плазмоны и т. п.

Третий пример – твердое тело. 6 степеней свободы. Центр инерции – одна квазичастица. Если поместить полюс в ц. и., то в поле однородном движение ц. и. отделяется от движения по вращательным координатам – разделение на поступательное и вращательное движение (теорема Кенига).

Квазичастицы делятся на бозоны и фермионы, а также на квазичастицы коллективного и индивидуального типа.

ПРИЛОЖЕНИЕ
О квазичастицах

При построении микроскопической теории нельзя пользоваться готовыми понятиями, а необходимо создавать новые. Одно из таких понятий – квазичастица. Введение квазичастиц позволяет объяснить многие динамические свойства твердых тел.

М.И.Каганов

Введение квазичастиц делает слабо возбужденные состояния кристаллов наглядными, превращая твердое тело во вместилище (сосуд) для газов квазичастиц. Это не просто красивый образ. Тепловые, высокочастотные, гальванические, гальвано- и термомагнитные и другие свойства твердых тел удается представить в терминах газов квазичастиц, сопоставить макроскопическим свойствам твердых тел движение слабо взаимодействующих друг с другом квазичастиц. Иными словами, объяснение макроскопических свойств кристаллов производится путем исследования движения квазичастиц, макротермины расшифровываются и оказываются усредненными характеристиками движения отдельных квазичастиц.

М.И.Каганов

Квазичастица – понятие квантовой физики конденсированного состояния вещества, объединяющее кванты любых элементарных возбуждений макроскопической системы частиц с сильным взаимодействием – кристаллов и квантовых жидкостей. В конденсированной среде атомные частицы, оставаясь структурными единицами тела, не могут служить структурными единицами его энергии: в твердых телах и в жидкостях энергия тела даже приближенно не равна сумме кинетических энергий частиц, из которых тело состоит. Однако, как правило, конденсированные тела (особенно твердые тела) находятся в слабо возбужденных состояниях, которые можно рассматривать как результат появления (рождения) в системе на фоне основного (невозбужденного) состояния элементарных возбуждений – квазичастиц. При этом энергия возбуждения тела приближенно равна сумне энергий квазичастиц. Так возникает концепция квазичастиц, которая состоит в сведении системы сильно взаимодействующих частиц к системе слабо взаимодействующих квазичастиц. Макроскопические свойства тел согласно концепции квазичастиц описываются как свойства газов квазичастиц. Сходство газов квазичастиц с газом частиц дает возможность использовать представления и термины статистической термодинамики и кинетики газов.

М.И.Каганов

Отнюдь не всегда движения в твердом теле сводятся к движению слабо взаимодействующих друг с другом частиц или квазичастиц.

М.И.Каганов

Квазичастицы – отдельные элементарные возбуждения, на которые можно разложить слабо возбужденное состояние системы многих частиц. Такие элементарные возбуждения существуют сравнительно долгое время в неизменном виде, и хотя каждое из них охватывает много частиц, составляющих систему, они в целом во многом подобны частицам, в частности характеризуются определенными энергией ε, импульсом $\vec{p}$ и спином σ.

А.И.Ларкин

То, что мы знаем сегодня, сохранится и в более широкой (и глубокой) системе знаний завтрашнего дня.

М.И.Каганов

ПОСЛЕСЛОВИЕ

Студенческий конспект содержит не полный курс лекций.

Нужно иметь в виду, что эти лекции читались теоретикам-педагогам, для которых материал отбирался в соответствии с укороченной и упрощенной программой курса (в отличие от более подробной и полной программы для теоретиков-производственников).

Как уже отмечалось в «Предисловии», я старался не переделывать текст, а лишь проставил знаки препинания, которыми обычно пренебрегают в студенческих конспектах, да кое-где исправил замеченные неточности.

Еще раз нужно подчеркнуть, что материал прошел три стадии возможных искажений: при записи слушателем реально читаемых лекций, при переписывании с расшифровкой этого конспекта, а также при компьютерном наборе. На всех стадиях, конечно, вносились некие искажения, но все равно ответственность за допущенные ошибки лежит на мне, хотя я старался проверять рукопись перед печатью. Однако прошло ведь 40 лет со времени чтения этих лекций, а я тогда не вел их записей.

ДОПОЛНЕНИЕ

В части тиража к пособию прилагается компакт-диск с электронными версиями следующих книг автора по квантовой теории (файлы формата pdf).

1. Ульянов В.В. Задачи по квантовой механике и квантовой статистике. - Х.: Высш. шк., 1980. - 216 с.
2. Ульянов В.В. Интегральные методы в квантовой механике. - Х.: Высш. шк., 1982. - 160 с.
3. Ульянов В.В. Методы квантовой кинетики. - Х.: Высш.шк., 1987. - 144 с.
4. Ульянов В.В. Вводные лекции по квантовой механике. Часть 1-я. - Х.: ХНУ имени В.Н.Каразина, 2002. - 40 с.
5. Ульянов В.В. Вводные лекции по квантовой механике. Часть 2-я. - Х.: ХНУ имени В.Н.Каразина, 2002. - 28 с.
6. Ульянов В.В. Вступ до квантової кінетики. - Х.: ХНУ імені В.Н.Каразіна, 2004. - 164 с.
7. Василевская Ю.В., Ульянов В.В. Новые квазиточнорешаемые модели в квантовой теории спиновых систем. - Х.: ХНУ имени В.Н.Каразина, 2005. - 124 с.
8. Ульянов В.В. Конспект вводных лекций по квантовой механике. Часть 3-я. - Х.: ХНУ имени В.Н.Каразина, 2011. - 52 с.
9. Ульянов В.В. Конспект вводных лекций по квантовой механике. Часть 4-я. - Х.: ХНУ имени В.Н.Каразина, 2011. - 52 с.
10. Ульянов В.В. Конспект лекций по квантовой статистике. Часть 1-я. - Х.: ХНУ имени В.Н.Каразина, 2011. - 40 с.
11. Ульянов В.В. Конспект лекций по квантовой статистике. Часть 2-я. - Х.: ХНУ имени В.Н.Каразина, 2011. - 40 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Навчальне видання

Володимир Володимирович Ульянов

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

З КВАНТОВОЇ СТАТИСТИКИ

Частина друга

Навчальний посібник

Російською мовою

Відповідальний за випуск Г.І.Рашба

Підп. до друку 20.05.2011. Формат 60x84/16.
Папір офсетний. Друк ризографічний.
Умов. друк. арк. 2,1. Тираж 50 пр. Ціна договірна.

Надруковано з готових оригінал-макетів у друкарні ФОП “Азамаєв В.Р.”
Свідоцтво про державну реєстрацію ВО2 № 229278 від 25.11.1998 р.
Свідоцтво про внесення суб’єкта визначеної справи до державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції.
Серія ХК № 135 від 23.02.05 р.
м.Харків, вул. Познанська 6, к. 84 тел. 8(057) 362-01-52

Издания кафедры теоретической физики имени академика И.М.Лифшица (вклад Ульяновых)

К 200-летию Харьковского университета

Серия монографий и учебных пособий

1. В.В.Ульянов. ВСТУП ДО КВАНТОВОЇ КІНЕТИКИ. – 2004.
2. Ю.В.Василевская, В.В.Ульянов
НОВЫЕ КВАЗИТОЧНОРЕШАЕМЫЕ МОДЕЛИ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ СПИНОВЫХ СИСТЕМ. – 2005.
3. Е.Н.Синельник, В.В.Ульянов
ФРАКТАЛЫ: ОТ МАТЕМАТИКИ К ФИЗИКЕ(+CD). – 2005.
4. А.В.Лымарь, В.В.Ульянов. ФРАКТАЛЫ: ОТ МАТЕМАТИКИ К ФИЗИКЕ. Ч. 2 (+CD). – 2010.
5. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА НА ФИЗИЧЕСКОМ ФАКУЛЬТЕТЕ ХАРЬКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. Сост. В.В.Ульянов. – 2009.
6. В.В.Ульянов. О КВАЗИКЛАССИЧЕСКОМ ДВИЖЕНИИ ЧАСТИЦ В ПОЛЯХ С ОСОБЕННОСТЯМИ. – 2002.

7,8. В.В.Ульянов, Н.В.Ульянов. КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ КВАНТОВЫХ ЯВЛЕНИЙ. Ч. 1, 2 (+CD). – 2011, 2012.

9,10,11,12. В.В.Ульянов. ВВОДНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ. Ч. 1, 2, 3, 4. – 2002, 2011.

13,14. В.В.Ульянов. ЛЕКЦИИ ПО КВАНТОВОЙ СТАТИСТИКЕ. Ч. 1, 2. – 2011.

15. В.В.Ульянов. К ИСТОРИИ ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА И КАФЕДРЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ. Ч. 1. – 2003.
16. В.В.Ульянов. К ИСТОРИИ ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА И КАФЕДРЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ. Ч. 2. – 2003.
17. А.М.Ермолаев, В.В.Ульянов
К ИСТОРИИ ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА И КАФЕДРЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ. Ч. 3. – 2004.
18. А.М.Ермолаев, Н.В.Ульянов. СПИНОВЫЕ ВОЛНЫ В НЕФЕРРОМАГНИТНЫХ ПРОВОДНИКАХ С ПРИМЕСНЫМИ СОСТОЯНИЯМИ ЭЛЕКТРОНОВ. – 2006.
19. A.M.Ermolaev, N.V.Ulyanov. ELECTRON SPIN WAVES IN NONMAGNETIC CONDUCTORS WITH RESONANCE STATES OF ELECTRONS. – 2008.
20. О.М.Єрмолаєв, В.В.Ульянов. СТИСЛИЙ НАРИС ІСТОРІЇ КАФЕДРИ ТЕОРЕТИЧНОЇ ФІЗИКИ ІМЕНІ АКАДЕМІКА І.М.ЛІФШИЦЯ. – 2008.

Серия воспоминаний об ученых-физиках

1. В.В.Ульянов
   ИЛЬЯ МИХАЙЛОВИЧ ЛИФШИЦ. – 2001, 2007(+DVD).
2. А.М.Ермолаев, В.В.Ульянов
   МОИСЕЙ ИСААКОВИЧ КАГАНОВ. – 2001.
3. В.В.Ульянов. ЛЕВ ЭЛЕАЗАРОВИЧ ПАРГАМАНИК. – 2002.
4. В.Г.Песчанский, В.В.Ульянов
   ЛЕОНИД СТЕПАНОВИЧ ГУЛИДА. – 2002.
5. В.В.Ульянов
   БОРИС ИЕРЕМИЕВИЧ ВЕРКИН. – 2002.
6. А.М.Ермолаев, В.В.Ульянов
   АРНОЛЬД МАРКОВИЧ КОСЕВИЧ. – 2002.
7. В.В.Ульянов
   ВИКТОР МОИСЕЕВИЧ ЦУКЕРНИК. – 2002.
8. А.М.Ермолаев, В.В.Ульянов
   ВАЛЕНТИН ГРИГОРЬЕВИЧ ПЕСЧАНСКИЙ. 2002.
9. А.М.Ермолаев, В.В.Ульянов
   ЭМАНУИЛ АЙЗИКОВИЧ КАНЕР. – 2002.
10. А.М.Ермолаев, Ю.П.Степановский, В.В.Ульянов
    АЛЕКСАНДР ИЛЬИЧ АХИЕЗЕР. – 2002.
11. В.В.Ульянов
    АНДРЕЙ ВЛАДИМИРОВИЧ ЖЕЛЕХОВСКИЙ. – 2003.
12. В.Г.Песчанский, В.В.Ульянов
    ВЛАДИМИР ПЕТРОВИЧ ГАЛАЙКО. – 2003.
13. А.М.Ермолаев, В.В.Ульянов
    ИГОРЬ ИВАНОВИЧ ФАЛЬКО. – 2003.
14. Г.И.Рашба, В.В.Ульянов
    АЛЕКСАНДР МИХАЙЛОВИЧ ЕРМОЛАЕВ. –2003.
15.
16. А.М.Ермолаев, В.В.Ульянов
    ОЛЕГ ИВАНОВИЧ ЛЮБИМОВ. – 2005.
17. В.В.Ульянов. ЛАНДАУ В ХАРЬКОВЕ. – 2008.
18. В.В.Ульянов. ВОСПОМИНАНИЯ ФИЗИКА-ТЕОРЕТИКА. Ч.1. – 2008.
19. В.В.Ульянов. К 95-ЛЕТИЮ Л.Э.ПАРГАМАНИКА. – 2009 (CD).
20. В.В.Ульянов. ЛАНДАУ В ХАРЬКОВЕ (2-е изд., доп.). – 2010.
21. А.М.Ермолаев, В.В.Ульянов. М.И.КАГАНОВ В ХГУ. – 2011.
22. В.В.Ульянов. К 90-ЛЕТИЮ М.И.Каганова. – 2011 (CD).

Серия воспоминаний о Детях физмата

1. В.В.Ульянов. АНАТОЛИЙ ИВАНОВИЧ ШАРАПОВ. – 2002, 2007.
2. В.В.Ульянов. НА УНИВЕРСИТЕТСКОЙ. – 2002, 2007.
3. В.В.Ульянов. АНАТОЛИЙ ГАВРИЛОВИЧ КЛАДКОВОЙ (Мой друг Толька). – 2002, 2007(CD).
4. ЛЕГЕНДЫ И БЫЛИ СТАРОГО ФИЗМАТА
   Ч.I. Сборник рассказов. Агафонова Н.Ф., Дзюба А.С., Перваков В.А., Сизова З.И., Ульянов В.В., Шарапов А.И. - 2002.
   Ч. I I. Сборник рассказов. Агафонова Н.Ф., Бляшенко Г.С., Гапон Э.В, Иванов И.Г., Кондратьев Б.В., Мерисов Б.А., Ульянов В.В., Хижковый В.П., Шарапов А.И. - 2002.
   Ч.I I I. Сборник рассказов. Агафонова Н.Ф., Бляшенко Г.С., Козинец В.В., Кондратьев Б.В., Николаев Г.Т., Ульянов В.В.,Шарапов А.И.- 2002.
   Ч.IV. Сборник рассказов. Бляшенко Г.С., Гребенник И.П., Мерисов Б.А., Ульянов В.В., Чебанова Т.С. - 2002.
   Ч.V. Сборник рассказов. Бляшенко Г.С., Валиев Б.М., Гребенник И.П., Мерисов Б.А., Сизова З.И., Ульянов В.В. - 2002.
   Ч.VI. Сборник рассказов. Барьяхтар В.Г., Гребенник И.П., Креснин А.А., Манжелий В.Г., Пустовалов В.В., Рофе-Бекетов Ф.С., Ульянов В.В., Яцук К.П. - 2003.
   Ч.VII. Сборник стихов. Николаев Г.Т., Рогинкина Н.А., Рофе-Бекетов Ф.С., Сизова З.И., Степановский Ю.П., Ульянов В.В., Шарапов А.И. - 2003.
   Ч.VIII. Сборник рассказов. Гребенник И.П., Тартаковский В.К., Ульянов В.В., Яцук К.П. - 2003.
   Ч.IX. Сборник рассказов. Бляшенко Г.С., Гребенник И.П., Пустовалов В.В., Ульянов В.В., Яцук К.П. - 2003..
   Ч.X. Сборник рассказов. Гребенник И.П., Ульянов В.В., Хижковый В.П., Яцук К.П. - 2003.
   Ч.XI. Сборник стихов. Бирюков В.Я., Кан Я.С., Николаев Г.Т., Рофе-Бекетов Ф.С., Ульянов В.В., Шарапов А.И., Яцук К.П., Яцук Л.П. - 2003.
   Ч.XII. Сборник рассказов. Боярский Л.А., Гребенник И.П., Малеев В.Я., Пустовалов В.В., Ульянов В.В., Чебанова Т.С. - 2004.
   Ч.XIII. Сборник рассказов. Ковинько Н.М., Мазель Е.З., Ривкина Э.М., Розенберг В.Я., Тартаковский В.К., Ульянов В.В., Шарапов А.И. - 2008.
   Ч.XIV. Сборник стихов. Бирюков В.Я., Евланов М.В., Кан Я.С., Николаев Г.Т., Рогинкина Н.А., Рофе-Бекетов Ф.С., Сизова З.И., Степановский Ю.П., Таранова Г.М., Ульянов В.В., Шарапов А.И., Яцук К.П., Яцук Л.П. - 2009.
   Ч.XV. Сборник рассказов. Креснин А.А., Ульянов В.В., Федченко Л.Ю., Хайтман Е.Н., Яровая Р.Г. - 2009.
   Ч.XVI. Сборник рассказов. Рофе-Бекетов Ф.С., Татарченко Л.П., Ульянов В.В. – 2009.
5. В.В.Ульянов. КАК МЫ ПРАЗДНОВАЛИ 50-ЛЕТИЕ ОКОНЧАНИЯ УНИВЕРСИТЕТА (+CD). – 2007.

Серия воспоминаний о жизни в XX веке

1. В.В.Ульянов. Д О В О Й Н Ы (1934-1941). – 2002.
2. В.В.Ульянов. В О Е Н Н Ы Е Г О Д Ы (1941-1945). – 2002.
3. В.В.Ульянов. В Ш К О Л Е (1945-1952). – 2002.
4. В.В.Ульянов
   Р А С С К А З Ы О ЛЕТНЕМ ОТДЫХЕ (1934-1950). – 2003.
5. В.В.Ульянов
   Р А С С К А З Ы О ЛЕТНЕМ ОТДЫХЕ (1951-1954). – 2003.
6. В.В.Ульянов, И.П.Ульянова
   Р А С С К А З Ы О ЛЕТНЕМ ОТДЫХЕ (1955-1957). – 2003.
7. В.В.Ульянов, И.П.Ульянова
   Р А С С К А З Ы О ЛЕТНЕМ ОТДЫХЕ (1958-1961). – 2003.
8. В.В.Ульянов. Д В А Д Н Я В А Л У Ш Т Е. – 2003.
   (Волейбольные грёзы)
9. В.В.Ульянов. Д В А Д Ц А Т Ы Й Д О М. – 2003.
10. В.В.Ульянов. 5 0 Л Е Т С П У С Т Я. – 2003.
11. В.А.Ульянов
    ВОСПОМИНАНИЯ ДЕТСТВА И ЮНОСТИ. – 2003.
12. В.А.Ульянов. МОЯ ПОЕЗДКА В США И ОБРАТНО. – 2003.
13. В.А.Ульянов. С Т Р А Н И Ч К И Ж И З Н И. – 2003.
14. В.В.Ульянов
    Р О Д О С Л О В Н А Я Н А Ш Е Й С Е М Ь И. – 2004.
15. В.В.Ульянов. П О Л В Е К А В У Н И В Е Р С И Т Е Т Е. – 2004.
16. В.В.Ульянов, И.П.Ульянова
    Р А С С К А З Ы О ЛЕТНЕМ ОТДЫХЕ (1962-1967)+CD. – 2006.
17. В.В.Ульянов.ПОЛВЕКА В УНИВЕРСИТЕТЕ(2-е изд., доп.).– 2007.
18. В.В.Ульянов. ВИКТОР ЕВГЕНЬЕВИЧ РУБАНОВИЧ(+CD). – 2008.
19. В.В.Ульянов. НОВОЕ О ПУШКИНЕ И ГОГОЛЕ. – 2009 (CD).
20. В.В.Ульянов. ИЗДАНИЯ. ВЫСТАВКА КНИГ. – 2009 (CD).
21. Н.В. и И.П.Ульяновы. ЧЕРНОГОРИЯ. ИЮЛЬ 2009. – 2009 (CD).
22. Н.В.Ульянов, И.П.Ульянова. ПО ЮГУ ЕВРОПЫ. – 2009 (CD).
23. В.В.Ульянов. К 150-ЛЕТИЮ А.П.ЧЕХОВА. – 2010 (CD).
24. В.В.Ульянов. К 170-ЛЕТИЮ П.И.ЧАЙКОВСКОГО. – 2010 (CD).
25. Н.В. и И.П.Ульяновы. БОЛГАРИЯ И РУМЫНИЯ. – 2010 (CD).
26. В.В. и Н.В.Ульяновы. МИСХОР – АВГУСТ 2010. – 2010 (CD).
27. В.В.Ульянов. К 110-летию В.А.Ульянова.Рисунки отца.–2011(CD).
28. В.В.Ульянов.АНАТОЛИЙ ПАВЛОВИЧ ЗАВАЛИШИН.–2011(CD).
29. В.В.Ульянов
    М О Я М У З Ы К А Л Ь Н А Я И С Т О Р И Я (+DVD).– 2011.
30. В.В.Ульянов, И.П.Ульянова
    Р А С С К А З Ы О ЛЕТНЕМ ОТДЫХЕ (1968-1973)+DVD. – 2011.

Одно из важнейших понятий, возникших в результате применения квантовой механики к макроскопическому коллективу (ансамблю) взаимодействующих частиц, есть *квазичастица*…

Система сильно взаимодействующих частиц «сводится» к системе слабо взаимодействующих квазичастиц – к газу квазичастиц.

М.И.Каганов