ЗАПИСКИ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА ХАРЬКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА им. А. М. ГОРЬКОГО И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXVIII. Серия 4 1961

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Г. В. Щербина

В настоящей статье рассматривается следующая краевая задача:

$$y'' + \varphi(x, y)\, y' + \psi(y) = 0, \tag{1}$$

$$y(0) = 0, \lim_{x \to +\infty} y(x) = 1 \qquad (0 \leqslant x < \infty). \tag{1'}$$

К данной краевой задаче при $\varphi = \frac{x}{\sqrt{y}}$, $\psi = 2\beta \frac{1-y}{\sqrt{y}}$ приводится задача об обтекании вязкой несжимаемой жидкостью клина, при $\varphi = \frac{x}{\sqrt{y}}$, $\psi \equiv 0$ — задача об обтекании вязкой несжимаемой жидкостью пластинки.

Относительно $\varphi(x, y)$ и $\psi(y)$ сделаем следующие предположения (A).

1) $\varphi(x, y)$ и $\psi(y)$ — неотрицательные невозрастающие функции y, причем в каждой точке интервала $0 < y < 1$ хотя бы одна из них строго монотонна и $\psi(1) = 0$.

2) $\varphi(x, y)$, $\varphi_x(x, y)$ и $\psi(y)$ непрерывны при $x > 0$, $y > 0$, $\varphi_y(x, y)$, $\psi'(y)$ непрерывны при $x > 0$, $0 < y < 1$.

3) $\int\limits_0^1 \varphi(y)\, dy < \infty$, $\int\limits_0^1 \varphi(x, ax)\, dx$ конечен при любом $a > 0$.

4) Для тех $y < 1$, для которых $\psi(y) = 0$, справедливо следующее: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\varphi(x, y)}{x^\alpha} = c(y) > 0$, где $\alpha > -1$ — некоторая константа.

При этих предположениях будет доказано существование единственного решения краевой задачи (1), (1′). Причем, если для достаточно малых $1 - y > 0$ имеет место

$$|\psi(y)| < C(1-y)^\beta, \ (\beta \geqslant 1) \tag{2}$$

то

$$0 < y(x) < 1. \tag{3}$$

Если же это условие не выполнено, то, вообще говоря, нельзя гарантировать неравенство (3).

Доказательство будет проведено так называемым методом введения параметра, уже применявшимся ранее к краевым задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений, встречающихся в приложениях,— [1], [2], [3], [4].

Сущность этого метода заключается в следующем. Строится однопараметрическое семейство решений задачи Коши для соответствующего дифференциального уравнения так, чтобы предполагаемое решение, если оно существует, содержалось в этом семействе. Затем исследуются свойства данного семейства. Часто удается доказать, что это семейство действительно содержит решение соответствующей краевой задачи.

Итак, рассмотрим однопараметрическое семейство решений уравнения (1) со следующими начальными условиями:

$$y(0)=0,\ y'(0)=\gamma>0.$$

Так как $\varphi(x, y)$ и $\psi(y)$, вообще говоря, могут иметь в точке $x=0$, $y=0$ особенности, то мы имеем здесь в виду, что $y(x, \gamma)$ удовлетворяет уравнению (1) при всех $x>0$ и выполняются условия $\lim\limits_{x\to 0} y(x, \gamma)= 0$, $\lim\limits_{x\to 0} y'(x, \gamma) = \gamma$. Для каждого $\gamma>0$ такое решение может быть построено, например, таким образом.

Закрепим $\gamma>0$ и обозначим через $y(x, \gamma, \varepsilon)$ семейство решений уравнения (1) с начальными условиями $y(\varepsilon)=\gamma\varepsilon$ $y'(\varepsilon)=\gamma$. По А (2) при каждом $1>\varepsilon>0$ такое решение существует. Покажем, что существует подпоследовательность $y(x, \gamma, \varepsilon_i)$, такая, что при любом x_1 $[0<x_1<x_0(\gamma)]$.

$$y'(x, \gamma, \varepsilon_i) \underset{\varepsilon_i\to 0}{\to} y'(x, \gamma),\ y(x, \gamma, \varepsilon_i) \underset{\varepsilon_i\to 0}{\to} y(x, \gamma),\ x_1\leqslant x\leqslant x_0(\gamma),$$

где $y(x, \gamma)$ удовлетворяет на сегменте $[x_1, x_0(\gamma)]$ уравнению (1) и $\lim\limits_{x\to 0} y(x, \gamma)=0$, $\lim\limits_{x\to 0} y'(x, \gamma)=\gamma$.

Для доказательства этого оценим $\Delta y'=y'(x_0)-y'(\varepsilon)$, считая $x_0>\varepsilon$ таким, что $y'>\frac{\gamma}{2}$. Так как $y>\frac{\gamma}{2}x\ (\varepsilon\leqslant x\leqslant x_0)$, то имеем

$$\Delta y' | = \int\limits_{\varepsilon}^{x_0} \varphi(x, y)\, y' dx + \int\limits_{\varepsilon}^{x_0} \psi(y)\, dx \leqslant \gamma\int\limits_{0}^{x_0} \psi\left(x, \frac{\gamma}{2}x\right) dx + \frac{2}{\gamma}\int\limits_{0}^{x_0\gamma+\varepsilon} \psi(y)\, dy. \tag{4}$$

Учитывая А (3), можно выбрать ε_0 и x_0 столь малыми, что для всех $\varepsilon<x<x_0$, $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ будет справедливо неравенство $|\Delta y'|<\delta$, где $\delta>0$ сколь угодно мало.

Так как $y(x, \gamma, \varepsilon)>\frac{\gamma}{2}x$, $y'(x, \gamma, \varepsilon)<\gamma$, если $0<x_1<x<x_0$, то из уравнения (1) $y''(x, \gamma, \varepsilon)$ равномерно ограничены на сегменте $[x_1, x_0]$, т. е. $y'(x, \gamma, \varepsilon)$ равномерно ограничены и равностепенно непрерывны. Переходя к пределу в уравнении (1), получим решение с нужными нам свойствами.

Отметим, что также, как и оценка (4), получается оценка

$$|\Delta y'(x, \gamma, \varepsilon)| \leqslant \gamma_2\int\limits_{0}^{x_0} \varphi\left(x, \frac{\gamma_1}{2}\right) dx + \frac{2}{\gamma_1}\int\limits_{0}^{x_0\gamma_2+\varepsilon} \psi(y)\, dy,$$

если $0<\gamma_1<\gamma<\gamma_2$, $x_0(\gamma_1, \gamma_2)$ достаточно мало. Из нее, учитывая, что $y'(x, \gamma, \varepsilon)$, $y(x, \gamma, \varepsilon)$ непрерывны по γ на любом конечном сегменте, следует, что $y'(x, \gamma)$, $y(x, \gamma)$ есть непрерывные функции γ.

Для доказательства единственности и в дальнейшем нам понадобится следующая несложная

Лемма 1. *Если* $y_1(x)$, $y_2(x)$ — *два решения уравнения* (1), $y_i\leqslant 1$, $y_i'\geqslant 0$, $y_1(0)\geqslant y_2(0)$, $y_1'(0)\geqslant y_2'(0)$, *причем хотя бы одно из двух последних неравенств строгое, то* $y_1'(x)>y_2'(x)$ *для всех* $x>0$, для которых $y_2'(x)>0$.

Доказательство. Пусть, например, $y_1(0)\geqslant y_2(0)\geqslant 0$, $y_1'(0)>y_2'(0)>0$. Если $y_1'(x)>y_2'(x)$ для всех $x>0$, лемма доказана. Пусть это не так и $x_0>0$ — первая точка, в которой $y_1'=y_2'>0$. Так как $y_1'(x)>y_2'(x)$ $(0<x<x_0)$, то $y_1''(x_0)\leqslant y_2''(x_0)$, $y_1(x_0)>y_2(x_0)$. Но из уравнения (1) в точке x_0 имеем:

$$y_1^{''}(x_0)-y_2^{''}(x_0)=y_2'(x_0)\,[\varphi(x_0,\,y_2(x_0))-\varphi(x_0,\,y_1(x_0))]+\psi(y_2(x_0))-\psi(y_1(x_0))$$

и, учитывая А (1), $y_1^{''}(x_0)>y_2^{''}(x_0)$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Покажем, что для любого решения краевой задачи верно неравенство $y\leqslant 1$. Пусть это не так. Тогда в некоторой точке x_0 $(y(x_0)=y_0=1+a>1)$ мы имеем максимум $y(x)$. Так как $y''(x_0)=-\psi(y_0)\leqslant 0$, то $\psi(y_0)=0$ и по А (1) $\psi(y)\equiv 0$ $(1\leqslant y\leqslant y_0)$. Возьмем точку $\xi>x_0$, в которой $1<y(\xi)<1+\frac{a}{2}$. В интервале $(x_0,\ \xi)$ найдется точка ξ_0, в которой $y'(\xi_0)<0$. Пусть теперь ξ_1 — первый слева от ξ корень уравнения $y'(x)=0$. В интервале $(\xi_1,\ \xi_0)$ $y'(x)\leqslant 0$, но $y'(\xi)=-\int\limits_{\xi_1}^{\xi}\varphi(x_1 y)\,y'(x)\,dx\geqslant 0$ из-за А (1). Получим противоречие с выбором ξ_0. Значит, для любого решения $0\leqslant y\leqslant 1$, $y'(x)\geqslant 0$.

Пусть мы имеем теперь два решения краевой задачи.

Так как $y_1(x)$, $y_2(x)$ —разные решения, то найдется точка x_0 такая, что $y_1(x_0)>y_2(x_0)$. Пусть $0\leqslant x_1<x_0$ — первая от x_0 точка, в которой $y_1=y_2$. Тогда в интервале $(x_1,\ x_0)$ существует точка ξ, в в которой $y_1'>y_2'$ и так как $y_1(x)>y_2(x)$ на интервале $(x_1,\ x_0)$, то в точке ξ

$$y_1'(\xi)>y_2'(\xi),\ \ y_1(\xi)>y_2(\xi),$$

и по лемме (1) $y_1'(x)>y_2'(x)\,(x>x_1)$, т. е. $\lim\limits_{x\to+\infty}y_1(x)-y_1(x_1)>\lim\limits_{x\to\infty}y_2(x)-y_2(x_1)$, что невозможно.

Итак, если решение существует, оно единственно. Докажем теперь, что решение действительно существует.

Лемма 2. *При достаточно больших* $\gamma>0$ $y(x,\ \gamma)$ *пересекает прямую* $y\equiv 1$.

Доказательство. В самом деле, рассмотрим $y(x,\ \gamma)$ при γ, больших некоторого $\gamma_0>0$. Пусть $y(x,\ \gamma)\leqslant 1$ при всех $x>0$ и $\gamma>0$. Возьмем такое $x_0>0$, что $y'(x_0,\ \gamma_0)>\frac{\gamma_0}{2}$. При $\gamma>\gamma_0$ по лемме 1 $y'(x,\ \gamma)>\frac{\gamma_0}{2}$, $y(x,\ \gamma)>\frac{\gamma_0 x}{2}$ $(0\leqslant x\leqslant x_0)$.

Тогда

$$y(x,\ \gamma)=\gamma x-\int\limits_0^x\int\limits_0^t\varphi(s,y(s))\,y'(s)\,ds dt-\int\limits_0^{x_0}\psi(y(x)\,dx\geqslant$$

$$\geqslant\gamma x-\gamma\int\limits_0^x dt\int\limits_0^t\varphi(s,\ y(s))\,ds-\frac{2}{\gamma_0}\int\limits_0^1\psi(y)\,dy\geqslant$$

$$\geqslant\gamma x-\gamma x\int\limits_0^x\varphi(t,\ \frac{\gamma_0}{2}t)\,dt-M.$$

Если $0<x_1<x_0$ таково, что $\int\limits_0^{x_1}\varphi(t,\ \frac{\gamma_0}{2}t)\,dt<\frac{1}{2}$, то $y(x,\ \gamma)>\frac{1}{2}\gamma x_1-M\to\infty$ при $\gamma\to\infty$, а это противоречит предположению, что $y(x,\gamma)<1$ при всех x и γ. Лемма доказана.

Будем считать в дальнейших рассуждениях $\psi\neq 0$ $(0<y<1)$. Из уравнения (1) видим, что, если в некоторой точке $y'=0$, $y<1$, то в этой точке $y''=-\psi(y)<0$ и y достигает максимума. Поэтому, если для всех $x>0$, $y(x)<1$, то либо существует $\lim\limits_{x\to\infty}y(x)=a\leqslant 1$, либо $y'(x)$ меняет знак. В первом случае $a=1$, так как иначе было бы $a<y_0<1$, $\lim\limits_{x\to\infty}y''(x)\leqslant\psi(y_0)<0$ и $y(x)\underset{x\to\infty}{\to}-\infty$, что невозможно в силу $0<y<1$.

Докажем, что если $\gamma > 0$ достаточно мало, то имеем второй случай. В самом деле, пусть это не так и $y'(x, \gamma) > 0$ для всех $x > 0$ и всех $\gamma > 0$. Тогда

$$y'(x, \gamma) \leqslant \gamma - \int_0^x \varphi(x, y)\, y'\, dx - \int_0^x \psi(y)\, dx \leqslant \gamma -$$

$$- \int_0^y \frac{\psi(y)}{y'}\, dy \leqslant \gamma - \frac{1}{\gamma} \int_0^{\frac{1}{2}} \psi(y)\, dy$$

и $y'(x, \gamma) \to -\infty$ при $\gamma \to 0$.

Обозначим через $\bar{\gamma}_0$ точную нижнюю грань тех $\gamma > 0$, для которых $y(x, \gamma)$ пересекает прямую $y \equiv 1$. Если бы $y'(x, \bar{\gamma}_0)$ меняла знак, то существовала бы такая окрестность точки $\bar{\gamma}_0$, что когда γ принадлежит этой окрестности, $y'(x, \gamma)$ меняет знак, а это не совместимо с определением $\bar{\gamma}_0$.

Значит либо $y(x, \bar{\gamma}_0)$ пересекает прямую $y \equiv 1$, либо $\lim\limits_{x \to \infty} y'(x, \bar{\gamma}_0) = 1$, и мы имеем решение задачи.

Допустим, что имеет место первый случай, т. е. существует точка $\tilde{x}$ такая, что $y(\tilde{x}, \bar{\gamma}_0) = 1$. Если $y'(\tilde{x}, \bar{\gamma}_0) = 0$, то, положив $y(x, \bar{\gamma}_0) \equiv 1$ при $x > \tilde{x}$, мы получим решение.

Если же $y(\tilde{x}, \bar{\gamma}_0) = 1$, $y'(\tilde{x}, \bar{\gamma}_0) > 0$, то найдется точка $x_1 > \tilde{x}$, в которой $y(x, \bar{\gamma}_0) > 1$; пользуясь непрерывностью $y(x, \gamma)$ по γ на конечном сегменте $[0, x_1]$, получим, что $\bar{\gamma}_0$ не является точной нижней гранью тех γ, для которых $y(x, \gamma)$ пересекает прямую $y \equiv 1$. Существование решения в случае $\psi \neq 0$ полностью доказано.

Докажем, что если выполняется неравенство (2), то верно и (3). Для доказательства этого, достаточно показать, что не существует такой точки x_0, в которой $y(x_0, \bar{\gamma}_0) = 1$, $y'(x_0, \gamma_0) = 0$, $y'(x_0, \gamma_0) = 0$. Доказывать это будем от противного. Обозначив $y' = p(y)$, получим

$$\int_0^1 \frac{dy}{p(y)} = x_0 < \infty. \tag{5}$$

Уравнение (1) заменится уравнением

$$\frac{dp}{dy} + \varphi(x, y) + \frac{\psi(y)}{p(y)} = 0$$

и

$$p = \int_y^1 \varphi(x, y)\, dy + \int_y^1 \frac{\psi(y)}{p(y)}\, \partial y \leqslant [c_1 + cx_0](1 - y),$$

что противоречит (5).

Заметим, что, как показывает ниже приведенный пример, вообще говоря, если не выполнено условие (2), то нельзя гарантировать (3).

Рассмотрим краевую задачу (1′) для следующего уравнения

$$y'' + (1 - y)^{\beta} = 0 \cdot (\beta < 1).$$

Очевидно, здесь выполнены все условия (A), единственное же решение имеет вид

$$y = 1 - \left(1 - x\sqrt{\frac{2}{1+\beta}}\right)^{\frac{2}{1-\beta}}, \quad \left(0 \leqslant x \leqslant \sqrt{\frac{1+\beta}{2}}\right.$$

$$y \equiv 1. \quad \left(x > \sqrt{\frac{1+\beta}{2}}\right).$$

Более того, если $|\psi(y)| > c(1-y)^{\beta_0}$ $(\beta_0 < 1)$ для достаточно малых $1-y$, то решение обязательно удовлетворяет условию $y \equiv 1$ при $x > x_0$, где $x_0 > 0$ — некоторое число. Будем доказывать это от противного. Ясно, что можно считать $c = 1$. Так как $y' > 0$ $(0 < x < \infty)$, то $y'' < 0$. Разделив (1) на $-y''$, получим $\left|\frac{\psi(y)}{y''}\right| < 1$ и, тем более, $\left|\frac{(1-y)^{\beta_0}}{y''}\right| < 1$. Обозначим $1 - y = u$. Ясно, что $u > 0$, $u' < 0$, $u'' > 0$. Пусть $u' = z(u)$. Тогда

$$u^{\beta_0} < z\frac{dz}{du}, \quad \int_0^u u^{\beta_0} du < \int_0^u z\frac{dz}{du}du, \quad \frac{u^{\beta_0+1}}{\beta_0+1} < \frac{z^2}{2}, \text{ т. к. } u(0) = 0.$$

Далее,

$$-u^{-\frac{\beta_0+1}{2}}\frac{du}{dx} > \sqrt{\frac{2}{\beta_0+1}}, \quad \frac{2u(1)}{1-\beta_0} - \frac{u^{\frac{1-\beta_0}{2}}}{1-\beta_0} > \sqrt{\frac{2}{\beta_0+1}}(x-1),$$

что несовместимо с $\lim\limits_{x\to\infty} u = 0$.

Рассмотрим теперь случай $\psi(y) \equiv 0$. В этом случае всегда $y'(x, \gamma) > 0$, так как, если бы было $y'(x_0) = 0$, $y(x_0) = y_0$ то, учитывая, что $\psi(y)$ удовлетворяет в точке y_0 условию $|\psi(y)| \leqslant |y - y_0|$, получим так же, как и ранее, что это невозможно.

Покажем, что для достаточно малых $\gamma > 0$ существует $\lim\limits_{x\to\infty} y(x, \gamma) < y_0 < 1$. Для этого оценим $y'(x, \gamma)$ при $x > 1$. Пусть $\frac{\varphi(x, y_0/2)}{x^\alpha} > c > 0$ для $x > 1$.

Из уравнения получим, считая $y(x) < \frac{y_0}{2}$ (деление на y' законно):

$$\ln\frac{y'(x,\gamma)}{y'(1,\gamma)} \leqslant -\int_1^x \varphi\left(x, \frac{y_0}{2}\right)dx < -c\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \frac{c}{\alpha+1},$$

$$y' \leqslant y'(1,\gamma)\exp\left[\frac{c}{\alpha+1} - \frac{cx^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right] < \gamma\exp\left[\frac{c}{\alpha+1} - \frac{cx^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right],$$

т. е.

$$|\Delta y| < \gamma\int_1^\infty \exp\left[-\frac{cx^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \frac{c}{\alpha+1}\right]dx, \tag{6}$$

причем (6) верно для тех $x > 1$, для которых $y(x) \leqslant \frac{y_0}{2}$. Если взять $\gamma < \frac{y_0}{2}\left[\int_1^\infty \exp\left[-\frac{cx^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \frac{c}{\alpha+1}\right]dx\right]^{-1}$, то (6) верно для всех $x > 1$. Поэтому при таких γ $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x, \gamma)$ существует.

Обозначим опять через $\bar\gamma_0$ точную нижнюю грань тех γ, для которых $y(x, \gamma)$ пересекает прямую $y \equiv 1$. Очевидно, что $\lim y(x, \bar\gamma_0) = b \leqslant 1$. Если $b = 1$, мы имеем решение задачи. Пусть теперь $b < 1$. Напишем для $y'(x, \bar\gamma_0)$ оценку, аналогичную (6):

$$y'(x, \bar\gamma_0) < y'(1, \bar\gamma_0)\exp\left[\frac{c(b_1)}{\alpha+1} - \frac{c(b_1)}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right], \tag{7}$$

где

$$c(y) = \inf_{x>1}\frac{\varphi(x, y)}{x^\alpha} > 0 \quad (y > b).$$

Возьмем $b_2 = b_1 + \frac{1-b_1}{2}$, γ достаточно близкое к $\bar{\gamma}_0$ и проведем оценку $y'(x, \gamma')$ до тех $x > 0$, до которых $y(x, \gamma) < b_2$:

$$y'(x, \gamma) \leqslant y'(x_2, \gamma) \exp\left[\frac{c(b_2)\, x_2^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{c(b_2)}{\alpha+1} x^{\alpha+1}\right], \tag{8}$$

где x_2 — любое достаточно большое число. Очевидно, можно считать, что $c(b_1) > c(b_2)$.

Выберем теперь x_2 так, чтобы

$$y'(1, \bar{\gamma}_0) \int_0^\infty \exp\left[-\frac{c(b_2)}{\alpha+1} x^{\alpha+1}\right] dx \cdot \exp\left[\frac{c(b_1)}{\alpha+1}(1 - x_2^{\alpha+1}) + x_2^{\alpha+1} \frac{c(b_2)}{\alpha+1}\right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1-b_1}{4}. \tag{9}$$

Так как $y'(x, \gamma)$ непрерывна по γ на сегменте $[0, x_2]$, выберем $\gamma > \bar{\gamma}_0$ столь близко к $\bar{\gamma}_0$, чтобы выполнялось неравенство

$$y(x_2, \gamma) < b_1$$

и

$$y'(x_2, \gamma) < y'(1, \gamma) \exp\left[\frac{c(b_1)}{\alpha+1} - \frac{c(b_1)}{\alpha+1} x_2^{\alpha+1}\right]$$

и подставим в (8). Учитывая (9), получим $|\Delta y| \leqslant \frac{1-b_2}{4}$, $y < b_1 + \frac{1-b_1}{4} < b_2$, т. е. оценка (8) верна для всех $x > x_2$, что противоречит определению $\bar{\gamma}_0$ как точной нижней грани. В случае $\psi \not\equiv 0$, $\psi = 0$ при $y_0 \leqslant y < 1$ рассмотрения аналогичны.

Теорема полностью доказана.

Замечание 1. Если в уравнении (1) вместо $\psi(y)$ взять $\psi(x, y)$ ($\psi \geqslant 0$, $\int_0^1 \psi(x, ax)\, dx < \infty$, $\int_a^\infty \psi(x, y_0)\, dx = +\infty$ при любых $a > 0$, $0 < y_0 < 1$), то все приведенные рассмотрения остаются справедливыми и в этом случае, т. е. существует единственное решение.

Замечание 2. Условие А (4) нельзя, вообще говоря, ослабить в том смысле, что при $\alpha \leqslant -1$ решение может не существовать. Для того чтобы убедиться в этом рассмотрим следующую краевую задачу (1), (1′) с $\varphi \equiv 1$, $(0 \leqslant x \leqslant 1)$, $\varphi = \frac{1}{x^{1+\alpha}}$ $(x > 1,\ \alpha \geqslant 0)$.

Решение имеет следующий вид:

$$y = \gamma[e^x - 1], \quad (0 \leqslant x \leqslant 1)$$
$$y = \gamma(e-1) + \gamma e \ln x, \quad (x \geqslant 1, \alpha = 0)$$
$$y = \gamma e - 1 + \gamma e \int_1^x e^{-\frac{x^\alpha}{\alpha}} dx, \quad (x \geqslant 1, \alpha > 0)$$

и равенство $\lim_{x \to \infty} y = 1$ невозможно. Но А(4) можно заменить, например, на $\varphi > \frac{1+c}{x}$ $(c > 0)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Iglisch. «Elementarer Exisfenzbeweis für die Strömung in der laminaren Grenzschicht». (ZAMM, 33, 1953)

2. R. Iglisch. «Elementarer Beweis für die Eindeutigkeit der strömung in der laminaren Grenzschicht» (ZAMM, 34, 1954).

3. R. Iglisch. «Über die in der Grenzschichtteorie auftretende Differēnzialgleichung $f''' + ff'' + \beta(1 - f'^2) = 0$». («50 Jahre Grenzschichtforsch», Akad — verl. Berl.)

4. Сансоне. Обыкновенные дифференциальные уравнения, т. II, стр. 376—380. Изд-во И. Л., М., 1953 г.