ЗАПИСКИ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА
ХАРЬКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА им. А. М. ГОРЬКОГО
И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXIX. Серия 4 1963

О ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЯХ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ НЕКОТОРЫМ СПЕЦИАЛЬНЫМ НЕРАВЕНСТВАМ, СВЯЗАННЫМ С ТЕОРИЕЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ЗАКОНОВ

И. В. Островский

Целая характеристическая функция вероятностного закона есть (это можно принять в качестве определения) функция вида

$$\varphi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{izt}\, d\sigma(t), \tag{1}$$

где $\sigma(t)$ — неубывающая функция с полной вариацией 1 такая, что при любом $k > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{k|t|}\, d\sigma(t) < \infty.$$

Нетрудно показать, что относительно роста целой х. ф. * можно утверждать лишь следующее: любая целая х. ф., кроме х. ф. $\varphi(z) \equiv 1$, имеет рост по меньшей мере порядка 1 и нормального типа. Действительно, если $\varphi(z) \not\equiv 1$, то $\sigma(t)$ имеет точку роста $t_0 \neq 0$ и, следовательно,

$$\max_{|z|=r} |\varphi(z)| \geqslant \int_{-\infty}^{\infty} e^{(r \operatorname{sign} t_0)\, t}\, d\sigma(t) \geqslant e^{\frac{r|t_0|}{2}} \left| \sigma\left(\frac{3}{2} t_0\right) - \sigma\left(\frac{1}{2} t_0\right) \right|.$$

С другой стороны, подбирая надлежащим образом функцию $\nu(t) \uparrow \infty$, можно добиться того, чтобы х. ф.

$$\varphi_\nu(z) = k_\nu \int_0^{\infty} e^{izt - t\nu(t)}\, dt \quad \left(k_\nu^{-1} = \int_0^{\infty} e^{-t\nu(t)}\, dt\right) \tag{2}$$

имела наперед заданный рост не ниже нормального типа порядка 1 **.

И. Марцинкевич обнаружил [10], что для целых х. ф., у которых нули расположены редко, дело обстоит иначе. Он доказал, что если у целой х. ф. конечного порядка ρ показатель сходимости нулей $\rho_1 < \rho$,

---

* Мы будем использовать общепринятое сокращение «х. ф.» для записи термина «характеристическая функция вероятностного закона».

** Например, если $0 \leqslant \nu(t) \leqslant K < \infty$ при $0 \leqslant t \leqslant t_0$ и $\nu(t) = +\infty$ при $t > t_0$, то $\varphi_\nu(z)$ — порядка 1 и типа t_0. Если $\nu(t) = e^t$, то $\varphi_\nu(z)$ — максимального типа порядка 1. При $\nu(t) = t^{\frac{1}{\rho - 1}}$, $\rho > 1$, функция $\varphi_\nu(z)$ имеет порядок ρ. Если $\nu(t) = (\underbrace{\overset{+}{\ln}\overset{+}{\ln} \ldots \overset{+}{\ln}}_{n \text{ раз}} t)^\alpha$, $\alpha > 0$, то $\lim\limits_{r \to \infty} (\ln r)^{-1} \{\underbrace{\overset{+}{\ln}\overset{+}{\ln} \ldots \overset{+}{\ln}}_{n+2 \text{ раза}} M(r, \varphi_\nu)\} = \alpha^{-1}$ и т. д. ($M(r, \varphi_\nu) = \max\limits_{|z|=r} |\varphi_\nu(z)|$).

то обязательно $\rho \leqslant 2$. Оценку для ρ усилить нельзя — об этом свидетельствует пример х. ф. закона Гаусса

$$\varphi(z) = \exp(-\alpha z^2 + i\beta z) \quad (\alpha > 0,\ \beta \text{ — вещественно}).$$

Из результата Марцинкевича следует, что если х. ф. имеет вид

$$\varphi(z) = \exp f(z), \tag{3}$$

где $f(z)$ — полином, то степень $f(z)$ не больше 2. Однако нетрудно указать примеры х. ф. вида (3), где $f(z)$ — целая трансцендентная функция не ниже порядка 1 и нормального типа. Простейшим из таких примеров является х. ф. закона Пуассона

$$\varphi(z) = \exp\{\lambda(e^{i\mu z} - 1) + i\beta z\} \quad (\lambda > 0,\ \mu \text{ и } \beta \text{ — вещественны}).$$

В этом примере $f(z) = \lambda(e^{i\mu z} - 1) + i\beta z$ — целая функция порядка 1 и нормального типа. Примеры х. ф. вида (3) с любым наперед заданным бóльшим ростом $f(z)$ нетрудно построить с помощью функций (2) и следующей простой теоремы (см., напр., [6], стр. 42): если $\varphi(z)$ — х. ф., то и $\exp\{\varphi(z) - 1\}$ — х. ф.

Ю. В. Линник поставил вопрос ([6], стр. 255), может ли функция вида (3) быть х. ф., если $f(z)$ — целая трансцендентная функция не выше порядка 1 и минимального типа.

Из определения (1) вытекает, что всякая целая х. ф. $\varphi(z)$ должна удовлетворять неравенству

$$|\varphi(x+iy)| \leqslant |\varphi(iy)|, \quad -\infty < x,\ y < \infty.$$

Это свойство Ю. В. Линник назвал «свойством хребта», а функции, обладающие им — «хребтовыми». Известно, ([6], стр. 63), что класс хребтовых функций строго шире, чем класс целых х. ф.

Мы будем заниматься изучением целых функций следующих двух классов:

1) класс целых функций, удовлетворяющих неравенству *

$$|\varphi(x+iy)| \leqslant M(|y|, \varphi), \quad -\infty < x,\ y < \infty; \tag{4}$$

2) класс целых функций, удовлетворяющих неравенству

$$\operatorname{Re}\varphi(x+iy) \leqslant M(|y|, \varphi), \quad -\infty < x,\ y < \infty. \tag{5}$$

Легко видеть, что первый класс строго шире класса хребтовых функций, а второй — строго шире, чем первый.

Основные результаты настоящей работы можно сформулировать так.

I. *Пусть $F(w)$ и $f(z)$ — целые функции и $F(w) \not\equiv \mathrm{const}$. Положим*

$$\varphi(z) = F(f(z)).$$

Если $\varphi(z)$ удовлетворяет условию (4), то либо $f(z)$ — полином степени не больше 2, либо $f(z)$ — целая функция не ниже нормального типа порядка 1.

В этом результате содержится отрицательный ответ на вопрос Ю. В. Линника: для того, чтобы убедиться в этом, достаточно положить $F(w) = e^w$. Содержится в нем также и следующая теорема Э. Лукача [7]: Если $f(z)$ — полином, то функция $\varphi(z) = A \underbrace{\exp\exp\ldots\exp}_{n \text{ раз}} f(z)$, где n — любое натуральное, а A — постоянная, может являться х. ф. лишь в случае, когда $f(z)$ — степени не выше 2.

Замечание. Теорему I можно дополнить утверждением, что если $f(z)$ — полином степени не выше 2, то $F(w)$ является целой функцией не

* $M(r, \varphi) = \max\limits_{|z|=r} |\varphi(z)|$.

ниже нормального типа порядка $\frac{1}{2}$, а если $f(z)$ — степени не выше 1, то $F(w)$ — не ниже нормального типа порядка 1.

Мы не знаем, можно ли в теореме I требование принадлежности $\varphi(z)$ первому классу заменить более слабым условием принадлежности второму. Поэтому представляет интерес следующий результат.

II. *Пусть* $F(w)$ *и* $f(z)$ — *целые функции. Предположим, что функция* $F(w) \not\equiv \text{const}$ *и такова, что на каждой окружности* $|w| = \text{const}$ *найдется точка* w_0 *такая, что*

$$F(w_0) = M(|w_0|, F).$$

Положим

$$\varphi(z) = F(f(z)).$$

Если $\varphi(z)$ *удовлетворяет условию* (5) *то либо* $f(z)$ — *полином степени не выше* 2, *либо* $f(z)$ — *целая функция не ниже нормального типа порядка 1.*

Частный случай этого результата (отвечающий $F(w) = w$) был установлен ранее в нашей заметке [11].

Следующая теорема отличается от теорем I и II главным образом тем, что в ней $\varphi(z)$ не представляется суперпозицией $f(z)$ с некоторой целой функцией.

III. *Пусть* $f(z)$ — *целая трансцендентная функция порядка* ρ, *а* $g(z)$ — *целая функция, удовлетворяющая условию*

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} (\ln r)^{-1} \ln \ln \ln M(r, g) < \rho, \text{ если } \rho > 0, \tag{6}$$

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} (\ln r)^{-1} \ln \ln M(r, g) < \infty, \text{ если } \rho = 0. \tag{7}$$

Если функция

$$\varphi(z) = g(z) e^{f(z)}$$

удовлетворяет условию (4), *то* $f(z)$ — *не ниже нормального типа порядка 1.*

Наши рассуждения довольно громоздки. В основе доказательств всех наших теорем лежит простая идея, которую мы хотим сейчас описать.

Докажем теорему I при априорном предположении, что

$$f(z) = Az^n, \tag{8}$$

где A — постоянная.

На окружности $|z| = r$ имеем $|f(z)| = |A| r^n$. Обозначим через w_0 точку окружности $|w| = |A| r^n$, где выполняется $|F(w_0)| = M(|w_0|, F)$. В точках

$$z_k = r \exp\left\{\frac{\arg w_0 - \arg A}{n} i + \frac{2k\pi}{n} i\right\}, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

мы будем иметь $f(z_k) = w_0$ и, следовательно,

$$|\varphi(z_k)| = M(r, \varphi). \tag{9}$$

Если $n > 2$, то хотя бы одна из точек z_k не лежит на мнимой оси. Но если z_k не лежит на мнимой оси, то $|\operatorname{Im} z_k| < r$, поэтому, в силу (4)

$$|\varphi(z_k)| \leqslant M(|\operatorname{Im} z_k|, \varphi) < M(r, \varphi),$$

что противоречит (9).

Доказательство теоремы 1 отличается от этого рассуждения лишь техническими сложностями, ибо, как было обнаружено Виманом и Валироном, любая целая функция $f(z)$ в некоторой окрестности точки z_0, где $|f(z_0)| = M(|z_0|, f)$, ведет себя приблизительно как одночлен вида (8). Именно, в известном смысле можно говорить, что

$$f(z) \approx \left(\frac{z}{z_0}\right)^{N(z_0)} f(z_0) \quad (N(z_0) \uparrow \infty \text{ при } |z_0| \uparrow \infty). \tag{10}$$

Основная трудность, с которой мы сталкиваемся, возникает оттого, что нам нужно иметь соотношение типа (10), обладающее очень высокой степенью точности. Все известные нам по литературе соотношения типа (10) (см. [1], [2], [3], [4], [8]) оказываются недостаточными. Чтобы получить соотношение нужной степени точности, мы несколько усовершенствовали метод, с помощью которого соотношение типа (10) доказывал Макинтайр [8].

Работа состоит из двух частей. В первой части, имеющей вспомогательный характер, мы излагаем необходимые сведения о сильном уточненном порядке и доказываем соотношения типа (10). Вторая часть содержит доказательства перечисленных выше основных результатов.

Часть I.

§ 1.1. Пусть $f(z)$ — целая функция конечного порядка ρ. Б. Я. Левин доказал ([5], стр. 52—60), что можно построить функцию $\rho(r)$, $0 \leqslant r < \infty$, названную им сильным уточненным порядком, такую, что будут справедливы утверждения*:

$$\ln M(r) \leqslant r^{\rho(r)}$$

для всех r, $0 \leqslant r < \infty$;

$$\ln M(r) = r^{\rho(r)}$$

для некоторого неограниченного множества значений r;

$$\rho(r) = \rho + \frac{\vartheta_1(\ln r) - \vartheta_2(\ln r)}{\ln r}, \tag{11}$$

где $\vartheta_1(t)$ и $\vartheta_2(t)$ — непрерывно дифференцируемые вогнутые функции с кусочно-непрерывной второй производной. Каждая из этих функций либо $\equiv 0$, либо удовлетворяет условиям

$$\lim_{t \to \infty} \vartheta_\alpha(t) = +\infty, \tag{12}$$

$$\lim_{t \to \infty} \vartheta'_\alpha(t) = 0, \tag{13}$$

$$\lim_{t \to \infty} \vartheta''_\alpha(t)\,[\vartheta'_\alpha(t)]^{-1} = 0. \tag{14}$$

Таким образом, любая целая функция конечного порядка имеет (очевидно, не один) сильный уточненный порядок.

Из конструкции Б. Я. Левина легко следует, что если функция $f(z)$ — максимального типа порядка ρ, то $\rho(r)$ можно выбрать так, чтобы $\vartheta_1(t) \not\equiv 0$, а $\vartheta_2(t) \equiv 0$. В частности, так можно поступить, если $\rho = 0$.

Если функция $f(z)$ — минимального типа порядка ρ, то $\rho(r)$ можно выбрать так, чтобы $\vartheta_1(t) \equiv 0$, а $\vartheta_2(t) \not\equiv 0$. Это утверждение непосредственно вытекает из следующей леммы, доказательство которой принадлежит Б. Я. Левину и публикуется здесь с его согласия.

Лемма 1. *Пусть* $u(x)$, $0 \leqslant x < \infty$, — *непрерывная функция, удовлетворяющая условиям:*

$$\lim_{x \to \infty} u(x) = -\infty, \tag{15}$$

$$\overline{\lim_{x \to \infty}}\, x^{-1} u(x) = 0. \tag{16}$$

---

* **Условимся:** $M(r)$ обозначает $M(r, f)$ (но не $M(r, g)$, $M(r, F)$, $M(r, \varphi)$ и т. д.).

Существует непрерывно дифференцируемая выпуклая функция $v(x)$ с кусочно-непрерывной второй производной такая, что

$$u(x) \leqslant v(x),$$

для всех x, $0 \leqslant x < \infty$;

$$u(x) = v(x)$$

для некоторого неограниченного множества значений x;

$$\lim_{x \to \infty} v(x) = -\infty;$$

$$\lim_{x \to \infty} v'(x) = 0;$$

$$\lim_{x \to \infty} v''(x)\,[v'(x)]^{-1} = 0.$$

Доказательство. Предварительно сделаем следующее замечание. Пусть даны кривые

$$C: y = e^{-\varepsilon x},$$
$$D: y = e^{-\delta x},$$

где $0 < \delta < \varepsilon$. Оставим кривую C неподвижной и, перемещая D параллельно себе*, приведем C и D в соприкосновение. Будем теперь двигать D параллельно себе так, чтобы точка соприкосновения перемещалась по кривой C вправо. Тогда, начиная с некоторого момента, кривая D будет лежать под C, имея с C единственную общую точку — точку соприкосновения,— справа от этой точки максимальное уклонение C от D не будет превышать 1.

Приступим к построению $v(x)$. Выберем произвольно последовательность положительных чисел $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3 > \ldots$, $\lim\limits_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0$. Рассмотрим семейство кривых

$$C_n: y = e^{-\varepsilon_n x}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Кривая $y = v(x)$ составляется из кусков кривых, получаемых из C_n с помощью параллельного переноса, и прямолинейных отрезков.

Перемещая кривую C_1 вверх или вниз, можно привести ее в такое положение, что вся кривая

$$y = u(x) \tag{17}$$

будет лежать под C_1, имея с ней, однако, общие точки. Фиксируем теперь кривую C_1; пусть уравнение ее в этом положении —

$$y = y_1(x).$$

Так как $u(x) \to -\infty$, а $|y_1(x)|$ ограничен при $x \to +\infty$, то найдется точка $x_0^{(1)} \geqslant 1$ такая, что

$$y_1(x) > u(x) + 1 \quad \text{при} \quad x > x_0^{(1)}. \tag{18}$$

Приведем теперь кривую C_2 в соприкосновение с C_1 в точке $(x_0^{(1)}, y_1(x_0^{(1)}))$ и будем затем перемещать C_2 так, чтобы точка соприкосновения двигалась по C_1 вправо. В силу (18) и сделанного в начале замечания, мы сможем прийти к такому положению C_2, что правее точки соприкосновения она будет лежать под C_1, не встречая кривой (17). Обозначим абсциссу точки соприкосновения C_2 с C_1 в этом положении C_2 через $x_1^{(1)}$. При $0 \leqslant x \leqslant x_1^{(1)}$ мы полагаем

$$v(x) = y_1(x).$$

* Мы сохраняем то же обозначение для перемещенной кривой.

Проведем в точке $x_1^{(1)}$ касательную T_1 к кривой C_1. Пусть уравнение T_1

$$y = t_1(x).$$

Угловой коэффициент T_1 отрицателен, поэтому из (16) следует, что T_1 при продолжении вправо обязательно пересечет кривую (17). Если мы заставим кривую C_2 скользить вправо по T_1, то наступит такой момент, что правее точки скольжения кривая C_2 будет лежать над кривой (17), имея с ней, однако, общие точки. Фиксируем это положение C_2; пусть абсцисса точки соприкосновения с T_1 будет $x_2^{(1)}$, а уравнение C_2:

$$y = y_2(x).$$

При $x_1^{(1)} \leqslant x \leqslant x_2^{(1)}$ мы положим

$$v(x) = t_1(x).$$

Далее выберем $x_0^{(2)} > x_2^{(1)} + 1$ настолько большим, чтобы

$$y_2(x) > u(x) + 1 \text{ при } x > x_0^{(2)}.$$

Приведем кривую C_3 в соприкосновение с C_2 в точке $(x_0^{(2)}, y_2(x_0^{(2)}))$ и будем перемещать C_3 так, чтобы точка соприкосновения двигалась по C_2 вправо. Мы сможем достичь такого положения кривой C_3, в котором правее точки соприкосновения она будет лежать под C_2, не встречая кривой (17). Обозначим абсциссу точки соприкосновения при этом положении C_3 через $x_1^{(2)}$. При $x_2^{(1)} \leqslant x \leqslant x_1^{(2)}$ полагаем

$$v(x) = y_2(x).$$

Проведем в точке $x_1^{(2)}$ касательную T_2 к кривой C_2, пусть уравнение T_2

$$y = t_2(x).$$

В силу отрицательности углового коэффициента и условия (16) T_2 при продолжении вправо обязательно пересечет кривую (17). Если мы заставим кривую C_3 скользить по T_2 вправо, то наступит момент, когда C_3 вправо от точки скольжения будет лежать над (17), имея с ней общие точки. Фиксируем это положение C_3; пусть абсцисса точки соприкосновения будет $x_2^{(2)}$, а уравнение C_3 —

$$y = y_3(x).$$

При $x_1^{(2)} \leqslant x \leqslant x_2^{(2)}$ мы положим

$$v(x) = t_2(x).$$

Мы проделали два цикла построения (первый неполный). Дальнейший ход состоит в повторении таких же циклов с последовательным привлечением кривых $C_4, C_5, \ldots$ Так как с каждым циклом мы продвигаемся вправо по меньшей мере на 1, то в итоге мы получим функцию

$$y = v(x),$$

определенную на всей полуоси $0 \leqslant x < \infty$. Легко видеть, что эта функция удовлетворяет всем требованиям, сформулированным в лемме.

Чтобы получить высказанное выше утверждение относительно сильного уточненного порядка целой функции минимального типа, нужно применить лемму к функции

$$u(x) = \overset{+}{\ln}\,\overset{+}{\ln}\, M(e^x) - \rho x$$

и положить $\vartheta_2(x) = -v(x)$.

Необходимые для дальнейшего сведения о сильном уточненном порядке функций минимального типа заключает в себе следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть $f(z)$ — целая функция порядка ρ и минимального типа. Для $f(z)$ можно построить сильный уточненный порядок, в котором $\vartheta_1(t) \equiv 0$, а $\vartheta_2(t) \not\equiv 0$ и удовлетворяет условию*

$$\vartheta_2'(t) \geqslant (1+t^2)^{-1}. \tag{19}$$

Доказательство. Достаточно установить существование функции $y = v(x)$, удовлетворяющей всем требованиям леммы 1 и, кроме того, требованию

$$v'(x) \leqslant -(1+x^2)^{-1}.$$

Рассмотрим функцию

$$u_1(x) = u(x) + \operatorname{arctg} x.$$

Эта функция, как и $u(x)$, удовлетворяет условиям (15) и (16). Построим для $u_1(x)$ мажоранту $v_1(x)$, существование которой доказано в лемме 1. Полагая

$$v(x) = v_1(x) - \operatorname{arctg} x,$$

получаем искомую функцию.

Условимся, рассматривая сильный уточненный порядок целой функции $f(z)$, считать, что если $f(z)$ — максимального типа, то $\vartheta_1(t) \not\equiv 0$, а $\vartheta_2(t) \equiv 0$, а если $f(z)$ — минимального типа, то $\vartheta_1(t) \equiv 0$, а $\vartheta_2(t) \not\equiv 0$ и удовлетворяет условию (19).

Примем следующие обозначения:

$$\Psi(t) = \ln M(e^t),$$

$$\Phi(t) = \exp[t\rho(e^t)]$$

($\rho(r)$ — сильный уточнённый порядок $f(z)$). Учитывая (11) и полагая

$$\vartheta(t) = \vartheta_1(t) - \vartheta_2(t),$$

мы можем $\Phi(t)$ записать в виде

$$\Phi(t) = \exp[\rho t + \vartheta(t)].$$

По определению сильного уточненного порядка, для всех t, $0 \leqslant t < \infty$, будем иметь

$$\Psi(t) \leqslant \Phi(t),$$

а для некоторого неограниченного множества значений t (обозначим это множество через E) — получим

$$\Psi(t) = \Phi(t).$$

Лемма 3. *При $t \in E$ функция $\Psi(t)$ дифференцируема и*

$$\Psi'(t) = \Phi'(t).$$

Доказательство. По теореме Адамара о трех кругах кривая

$$y = \Psi(t),\ 0 \leqslant t < \infty,$$

выпукла. Эта кривая лежит под гладкой кривой

$$y = \Phi(t),\ 0 \leqslant t < \infty,$$

встречаясь с ней при $t \in E$. Отсюда следует доказываемое.

Условимся до конца этого параграфа рассматривать только те значения t, которые принадлежат множеству E, и в соответствии с этим понимать символ $\lim\limits_{t \to \infty}$.

Ниже, в леммах 4 и 5, выясняется поведение при $t \to \infty$ двух величин, построенных по функции $\Phi(t)$. Первая величина встретится в § 1. 2, при доказательстве теорем типа Вимана-Валирона; вторая естественно появляется при доказательстве основных теорем. Леммы 4 и 5 можно считать следствиями большой близости $\Phi(t)$ к $e^{\rho t}$.

Лемма 4. *Пусть*

$$\Delta = \Delta(t) = \Phi(t + \varepsilon R) - \Phi(t) - \Phi'(t)\varepsilon R, \tag{20}$$

где

$$R = R(t) = \{\Phi'(t)\}^{-\frac{1}{2}}, \tag{21}$$

а $\varepsilon = \varepsilon(t) = \pm 1$ *выбрано так, чтобы выражение в правой части* (20) *было возможно бо́льшим.*

Если функция $f(z)$ *трансцендентна, то*

$$\lim_{t \to \infty} \Delta(t) = \frac{1}{2}\rho. \tag{22}$$

Лемма 5. *Пусть вещественные функции*

$$\theta = \theta(t), \ \varkappa = \varkappa(t), \ \lambda = \lambda(t)$$

удовлетворяют требованиям:

$$0 < \theta(t) < 1,$$

$$|\varkappa(t)| \leqslant \frac{1}{2}\theta(t)\{\Phi'(t)\}^{-p}$$

для некоторого p, $\frac{1}{2} < p < 1$,

$$\frac{1}{2}\theta(t)\{\Phi'(t)\}^{-\frac{1}{2}} \leqslant |\lambda(t)| \leqslant \theta(t)\{\Phi'(t)\}^{-\frac{1}{2}}.$$

Если целая функция $f(z)$ *порядка* $\rho \leqslant 1$ *такова, что*

$$\lim_{r \to \infty} r^{-1} \ln M(r) = 0, \tag{23}$$

то для всех достаточно больших значений $t \ (\in E)$ *справедливо неравенство*

$$\Phi(t + \varkappa + \ln\cos\lambda) - \Phi(t) - \Phi'(t)\varkappa + \\ + \frac{1}{2}\max[\Phi''(t-0), \Phi''(t+0)]\lambda^2 \leqslant \frac{1}{9}\theta^2(t)[\rho - 1 - (1 + t^2)^{-1}]. \tag{24}$$

Доказательство леммы 4. Предварительно заметим, что из трансцендентности $f(z)$ следует соотношение

$$\lim_{t \to \infty} R(t) = 0. \tag{25}$$

Действительно, в силу трансцендентности $f(z)$

$$\lim_{t \to \infty} t^{-1}\Psi(t) = +\infty. \tag{26}$$

Так как $\Psi(t)$ выпукла, то из (26) следует, что левая производная $\Psi(t) \to \infty$ при $t \to \infty$. Применяя лемму 3, получаем соотношение

$$\lim_{t \to \infty} \Phi'(t) = \infty,$$

которое равносильно (25).

По теореме о конечных приращениях можно найти величину $k = k(t)$, $0 < k(t) < 1$ так, что будет справедливо равенство*)

$$\Delta(t) = \frac{1}{2}\Phi''(t + k\varepsilon R)R^2. \tag{27}$$

Это равенство можно записать в таком виде:

$$\Delta(t) = \frac{1}{2}\frac{[\rho + \vartheta'(t + k\varepsilon R)]^2 + \vartheta''(t + k\varepsilon R)}{\rho + \vartheta'(t)} e^{k\varepsilon R + \vartheta(t + k\varepsilon R) - \vartheta(t)}. \tag{28}$$

*) Так как $\vartheta''(t)$ существует не при всех t, $0 \leqslant t < \infty$, то в соотношениях (27), (28) и ниже под $\Phi''(t + k\varepsilon R)$ ($\vartheta''(t + k\varepsilon R)$) следует понимать некоторую величину, лежащую между левым и правым пределами функции $\Phi''(t)$ ($\vartheta''(t)$) в точке $t + k\varepsilon R$.

Из условий (13) и (14) и соотношения (25) вытекает

$$\vartheta(t+k\varepsilon R)-\vartheta(t)=o(1),$$
$$\vartheta'(t+k\varepsilon R)=o(1),$$
$$\vartheta''(t+k\varepsilon R)=o(1).$$

Этого достаточно, чтобы при $\rho>0$ убедиться в справедливости соотношения (22).

Если $\rho=0$, то нужно еще доказать, что

$$\lim_{t\to\infty}[\vartheta'(t)]^{-1}\{[\vartheta'(t+k\varepsilon R)]^2+\vartheta''(t+k\varepsilon R)\}=0. \tag{29}$$

Но мы имеем $\vartheta(t)=\vartheta_1(t)$. В силу невозрастания $\vartheta_1'(t)$ и условий (13) и (14)

$$[\vartheta_1'(t+k\varepsilon R)]^2\leqslant[\vartheta_1'(t-R)]^2=o(\vartheta_1'(t-R)), \tag{30}$$

$$\vartheta_1''(t+k\varepsilon R)=o(\vartheta_1'(t+k\varepsilon R))=o(\vartheta_1'(t-R)). \tag{31}$$

Кроме того,

$$\vartheta_1'(t-R)=\vartheta_1'(t)+o(\vartheta_1'(t-R)R=\vartheta_1'(t)+o(\vartheta_1'(t-R))$$

и, следовательно,

$$\vartheta_1'(t-R)=O(\vartheta_1'(t)). \tag{32}$$

Соотношение (29) вытекает из (30), (31) и (32).

Доказательство леммы 5. Вначале мы установим справедливость леммы при дополнительном предположении, что $\varkappa(t)\equiv 0$.

Обозначим левую часть доказываемого неравенства через $L_0(t)$. Имеем

$$L_0(t)=\Phi(t)\{\exp[\rho\ln\cos\lambda+\vartheta(t+\ln\cos\lambda)-\vartheta(t)]-1+$$
$$+\frac{1}{2}[(\rho+\vartheta'(t))^2+\max(\vartheta''(t-0),\vartheta''(t+0))]\lambda^2\}.$$

Будем различать 3 случая: 1) $\rho=0$, 2) $0<\rho<1$, 3) $\rho=1$.

1). В этом случае $\vartheta(t)\equiv\vartheta_1(t)\not\equiv 0$. Мы имеем

$$\vartheta_1(t+\ln\cos\lambda)-\vartheta_1(t)\leqslant\vartheta_1'(t)\ln\cos\lambda=-\frac{1+o(1)}{2}\vartheta_1'(t)\lambda^2.$$

Следовательно,

$$L_0(t)\leqslant\Phi(t)\left\{1-\frac{1+o(1)}{2}\vartheta_1'(t)\lambda^2-1+o(\vartheta_1'(t)\lambda^2)\right\}=$$
$$=-\frac{1+o(1)}{2}\Phi(t)\vartheta_1'(t)\lambda^2\leqslant$$
$$\leqslant-\frac{1+o(1)}{2}\Phi(t)\vartheta_1'(t)\cdot\frac{1}{4}\theta^2(t)\{\vartheta_1'(t)\Phi(t)\}^{-1}=-\frac{1+o(1)}{8}\theta^2(t),$$

что и требовалось.

2). Мы имеем

$$\rho\ln\cos\lambda+\vartheta(t+\ln\cos\lambda)-\vartheta(t)=\rho\ln\cos\lambda+o(1)\ln\cos\lambda=$$
$$=-\frac{1+o(1)}{2}\rho\lambda^2.$$

Поэтому

$$L_0(t)=\Phi(t)\left\{1-\frac{1+o(1)}{2}\rho\lambda^2+o(\lambda^2)-1+\frac{1}{2}\rho^2\lambda^2+o(\lambda^2)\right\}=$$
$$=\frac{1+o(1)}{2}\rho(\rho-1)\Phi(t)\lambda^2\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1+o(1)}{2}\rho(\rho-1)\Phi(t)\cdot\frac{1}{4}\theta^2(t)\{(\rho+\vartheta'(t))\Phi(t)\}^{-1}=$$
$$=\frac{1+o(1)}{8}(\rho-1)\theta^2(t),$$

что и требовалось.

3). Теперь у нас $\vartheta(t) \equiv -\vartheta_2(t) \neq 0,\ \vartheta_2'(t) \geqslant (1+t^2)^{-1}$ и, очевидно,
$$\lambda^2(t) = o(\vartheta_2'(t)).$$
Мы имеем
$$\ln\cos\lambda - \vartheta_2(t+\ln\cos\lambda) + \vartheta_2(t) = \ln\cos\lambda - \vartheta_2'(t)\ln\cos\lambda + o(1)(\ln\cos\lambda)^2 =$$
$$= -\frac{\lambda^2}{2} + \vartheta_2'(t)\frac{\lambda^2}{2} + o(\vartheta_2'(t)\lambda^2).$$
Таким образом,
$$L_0(t) = \Phi(t)\Big\{1 - \frac{\lambda^2}{2} + \vartheta_2'(t)\cdot\frac{\lambda^2}{2} + o(\vartheta_2'(t)\lambda^2) - 1 +$$
$$+ \frac{1}{2}(1 - 2\vartheta_2'(t)\lambda^2 + o(\vartheta_2'(t))\lambda_2\Big\} = -\frac{1+o(1)}{2}\Phi(t)\vartheta_2'(t)\lambda^2 \leqslant$$
$$\leqslant -\frac{1+o(1)}{2}\Phi(t)\vartheta_2'(t)\cdot\frac{1}{4}\theta^2(t)\{(1-\vartheta_2'(t))\Phi(t)\}^{-1} \leqslant$$
$$\leqslant -\frac{1+o(1)}{8}\theta^2(t)(1+t^2)^{-1}.$$
В предположении $\varkappa(t) \equiv 0$ лемма доказана. Заметим теперь, что левая часть (24) отличается от $L_0(t)$ на величину
$$L_1(t) = \Phi(t+\varkappa+\ln\cos\lambda) - \Phi(t+\ln\cos\lambda) - \Phi'(t)\varkappa.$$
По теореме о конечных приращениях можно найти величины $k_1(t)$ и $k_2(t)$, $0 < k_\alpha < 1$ $(\alpha = 1,2)$ так, что
$$L_1(t) = \Phi''(t + k_1k_2\varkappa + k_2\ln\cos\lambda)\,\varkappa\,(k_1\varkappa + \ln\cos\lambda).$$
Легко видеть, что
$$\Phi''(t) = O(\Phi'(t)).$$
Поэтому
$$L_1(t) = O(\Phi'(t + k_1k_2\varkappa + k_3\ln\cos\lambda)) \times$$
$$\times O(\theta(t)\{\Phi'(t)\}^{-\rho})\cdot O(\theta(t)\{\Phi'(t)\}^{-\rho} + \theta^2(t)\{\Phi'(t)\}^{-1}).$$
Убеждаясь, что
$$\Phi'(t + k_1k_2\varkappa + k_2\ln\cos\lambda) = O(\Phi'(t)),$$
получаем в случае $0 \leqslant \rho < 1$
$$L_1(t) = o(\theta^2(t)),$$
а в случае $\rho = 1$ имеем
$$L_1(t) = o(\theta^2(t)(1+t^2)^{-1}).$$
Лемма доказана.

В заключение параграфа докажем следующее нужное нам в дальнейшем утверждение.

Лемма 6. *Выберем на каждой окружности* $|z| = e^t$ *точку* ζ, *в которой* $|f(\zeta)| = M(e^t)$. *Положим*
$$N_k = N_k(\zeta) = \frac{1}{k!}\left(\frac{d}{d\ln z}\right)^k \ln f(z)\Big|_{z=\zeta}.$$
1*. *Величина* $N_1(\zeta)$ *положительна и заключена между* $\Psi'(t-0)$ *и* $\Psi'(t+0)$.

2. *Справедливы соотношения*
$$N_1(\zeta) = \Phi'(t), \tag{33}$$
$$\operatorname{Re} N_2(\zeta) \leqslant \frac{1}{2}\max[\Phi''(t-0), \Phi''(t+0)]. \tag{34}$$

---

* Это утверждение принадлежит Макинтайру [8]. В пункте 1 не предполагается, что $f(z)$ имеет конечный порядок и что $t \in E$.

Доказательство. В силу условий Коши-Римана мы имеем

$$N_1(\zeta) = \frac{\partial}{\partial x} \ln |f(e^{x+i\arg\zeta})| \,|_{x=t}.$$

Кривая $y = \ln|f(e^{x+i\arg\zeta})|$, $-\infty < x < \infty$, лежит под кривой $y = \Psi(x)$, встречаясь с последней в точке $x = t$. Отсюда следует утверждение пункта 1.

Соотношение (33) следует из пункта 1 и леммы 3. Для доказательства (34) достаточно заметить, что

$$\operatorname{Re} N_2(\zeta) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln|f(e^{x+i\arg\zeta})| \,|_{x=t}$$

и воспользоваться тем, что кривая $y = \ln|f(e^{x+i\arg\zeta})|$ лежит под кривой $y = \Phi(x)$, встречаясь с последней в точке $x = t$.

§ 1. 2. Теперь перейдем к доказательству теоремы, выражающей закономерность (10) в удобной для наших приложений форме.

Теорема IV. *Пусть* $R = R(t)$ *и* $\Delta = \Delta(t)$ *определены посредством соотношений* (20) *и* (21), *функция* $\theta = \theta(t)$ *удовлетворяет условию*

$$0 < \theta(t) \leqslant \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}\Delta},$$

а ζ *таково, что*

$$|\zeta| = e^t,\ t \in E,\ |f(\zeta)| = M(e^t).$$

Если $|\tau| \leqslant \theta R$, $n = 2, 3, 4, \ldots$, *то имеет место соотношение*

$$f(\zeta e^\tau) = f(\zeta) \exp[N_1\tau + N_2\tau^2 + \ldots + N_n\tau^n]\{1 + \omega_n(\tau)\},$$

где

$$|\omega_n(\tau)| \leqslant Kn(\theta e^{\frac{1}{2}\Delta})^{n+1},$$

а K — *абсолютная постоянная.*

Доказательство мы разобьем на ряд лемм*. Самую важную роль играет принадлежащая Макинтайру лемма 7.

Пусть h — произвольное положительное число. Положим

$$\delta = \delta(h, \zeta) = \Psi(t + \varepsilon_1 h) - \Psi(t) - N_1(\zeta)\varepsilon_1 h,$$

где $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(h, \zeta) = \pm 1$ выбрано так, чтобы выражение справа было возможно бóльшим. В силу леммы 6 и выпуклости $\Psi(t)$ величина $\delta(h, \zeta)$ положительна.

Лемма 7. (Макинтайр [8]). *Если* $0 < \theta(t) < 1$, $|\tau| \leqslant \theta h$, *то имеет место соотношение*

$$f(\zeta e^\tau) = f(\zeta) e^{N_1\tau} \{1 + \omega(\tau)\},$$

где

$$|\zeta| = e^t,\ |f(\zeta)| = M(e^t),$$

$$|\omega(\tau)| \leqslant \frac{\theta^2(e^{2\delta} - 1)}{e^\delta - \theta^2}. \tag{35}$$

Доказательство. Положим

$$\chi(\tau) = \frac{f(\zeta e^\tau)}{f(\zeta)} e^{-N_1\tau}.$$

Мы имеем

$$\ln|\chi(\tau)| \leqslant \Psi(t + \operatorname{Re}\tau) - \Psi(t) - N_1(\zeta)\operatorname{Re}\tau.$$

В силу леммы 6 и выпуклости $\Psi(t)$ при $|\tau| \leqslant h$ получаем

$$\ln|\chi(\tau)| \leqslant \delta(h, \zeta).$$

* В леммах 7—10 не предполагается, что $f(z)$ имеет конечный порядок и что $t \in E$.

Легко видеть, что

$$\chi(0)=1,\ \chi'(0)=0.$$

Поэтому функция

$$\psi(\tau)=\frac{e^{\delta}h^2(\chi(\tau)-1)}{\tau^2(\chi(\tau)-e^{2\delta})}$$

при $|\tau|\leqslant h$ голоморфна и по модулю не превосходит **1**. Следовательно, при $|\tau|\leqslant\theta h$

$$e^{\delta}|\chi(\tau)-1|\leqslant\theta^2|\chi(\tau)-e^{2\delta}|\leqslant\theta^2|\chi(\tau)-1|+\theta^2(e^{2\delta}-1),$$

откуда

$$|\chi(\tau)-1|\leqslant\frac{\theta^2(e^{2\delta}-1)}{e^{\delta}-\theta^2},$$

что и требовалось доказать.

Лемма 8. *Если* $0<\theta(t)<e^{-\frac{1}{2}\delta}$, *то при* $|\tau|\leqslant\theta h$ *функция* $f(\zeta e^{\tau})$ *не обращается в нуль.*

Доказательство: если $0<\theta(t)<e^{-\frac{1}{2}\delta}$, то в лемме 7

$$|\omega(\tau)|<1.$$

Лемма 9. *При* $k=2,3,4,\ldots$ *справедлива оценка*

$$|N_k(\zeta)|\leqslant\frac{1}{2}kh^{-k}e^{\frac{1}{2}k\delta}.$$

Доказательство. Мы имеем

$$N_k(\zeta)=\frac{1}{k!}\left(\frac{d}{d\tau}\right)^k\ln f(\zeta e^{\tau})_{\tau=0}=\frac{1}{k!}\left(\frac{d}{d\tau}\right)^k\ln\{1+\omega(\tau)\}|_{\tau=0}.$$

Пусть θ—произвольное число, удовлетворяющее неравенству $0<\theta<e^{-\frac{1}{2}\delta}$. Тогда

$$\left(\frac{d}{d\tau}\right)^k\ln\{1+\omega(\tau)\}|_{\tau=0}=\frac{k!}{2\pi i}\oint\limits_{|\beta|=\theta h}\beta^{-k-1}\ln\{1+\omega(\beta)\}\,d\beta.$$

Используя для оценки интеграла неравенство (35), получим

$$|N_k(\zeta)|\leqslant(\theta h)^{-k}\left|\ln\left(1-\frac{\theta^2(e^{2\delta}-1)}{e^{\delta}-\theta^2}\right)\right|,$$

откуда

$$|N_k(\zeta)|\leqslant h^{-k}\frac{\theta^{2-k}(e^{2\delta}-1)}{e^{\delta}(1-\theta^2e^{\delta})}. \tag{36}$$

Если $k=2$, то, устремляя θ к 0, получим оценку

$$|N_2(\zeta)|\leqslant h^{-2}e^{\delta}(1-e^{-2\delta})\leqslant h^{-2}e^{\delta}.$$

Если $k>2$, то, находя θ в интервале $(0,e^{-\frac{1}{2}\delta})$ так, чтобы правая часть (36) была наименьшей, будем иметь

$$|N_k(\zeta)|\leqslant h^{-k}\left(1-\frac{2}{k}\right)^{-\frac{2}{k}}\left(\frac{k}{2}-1\right)e^{\frac{k\delta}{2}}(1-e^{-2\delta})\leqslant\frac{1}{2}kh^{-k}e^{\frac{k\delta}{2}}.$$

Лемма доказана.

Лемма 10. *Если* $0<\theta(t)\leqslant\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}\delta}$, $n=2,3,4,\ldots,|\tau|\leqslant\theta h$, *то имеет место соотношение*

$$f(\zeta e^{\tau})=f(\zeta)\exp[N_1\tau+N_2\tau^2+\ldots+N_n\tau^n]\{1+\omega_n(\tau)\},$$

где

$$|\omega_n(\tau)|\leqslant 2e(n+1)(\theta e^{\frac{\delta}{2}})^{n+1}.$$

Доказательство. Положим

$$\chi_n(\tau) = \frac{f(\zeta e^{\tau})}{f(\zeta)} \exp\left[-N_1\tau - N_2\tau^2 - \ldots - N_n\tau^n\right].$$

По лемме 8 функция $\ln \chi_n(\tau)$ голоморфна при $|\tau| \leqslant \theta h$. Мы имеем

$$\ln \chi_n(\tau) = \sum_{k=n+1}^{\infty} N_k(\zeta)\,\tau^k \qquad (|\tau| \leqslant \theta h),$$

откуда

$$|\ln \chi_n(\tau)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} |N_k(\zeta)|\,(\theta h)^k \qquad (|\tau| \leqslant \theta h).$$

Используя лемму 9, получим

$$|\ln \chi_n(\tau)| \leqslant \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{\infty} k\,(\theta e^{\frac{\delta}{2}})^k = \frac{1}{2}\,\frac{n+1-ne^{\frac{\delta}{2}}\theta}{(1-\theta e^{\frac{\delta}{2}})^2} \cdot (\theta e^{\frac{\delta}{2}})^{n+1} \leqslant$$

$$\leqslant 2(n+1)\,(\theta e^{\frac{\delta}{2}})^{n+1} < 1. \tag{37}$$

Так как

$$\omega_n(\tau) = \exp\{\ln \chi_n(\tau)\} - 1,$$

то

$$|\omega_n(\tau)| \leqslant |\ln \chi_n(\tau)| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} |\ln \chi_n(\tau)|^{k-1} \leqslant |\ln \chi_n(\tau)| \exp\{|\ln \chi_n(\tau)|\},$$

и в силу (37) получаем

$$|\omega_n(\tau)| \leqslant 2(n+1)\,(\theta e^{\frac{\delta}{2}})^{n+1} \cdot e,$$

что и требовалось.

Лемма 11. *Если целая функция $f(z)$ имеет конечный порядок, а $R = R(t)$ определено соотношением* (21) *и $t \in E$, то*

$$\delta(R, \zeta) \leqslant \Delta(t).$$

Лемма является простым следствием соотношения (33) и неравенств, связывающих $\Psi(t)$ с $\Phi(t)$.

Теорема IV является комбинацией лемм 10 и 11.

Если комбинировать лемму 11 с леммой 7, то получим следующий результат.

Теорема IV′. *Пусть $R = R(t)$ и $\Delta = \Delta(t)$ определены посредством соотношений* (21) *и* (20), *функция $\theta = \theta(t)$ удовлетворяет условию $0 < \theta(t) < 1$, а ζ таково, что*

$$|\zeta| = e^t,\ t \in E,\ |f(\zeta)| = M(e^t).$$

Если $|\tau| \leqslant \theta R$, то имеет место соотношение

$$f(\zeta e^{\tau}) = f(\zeta)\,e^{N_1\tau}\{1 + \omega(\tau)\},$$

где

$$|\omega(\tau)| \leqslant \frac{\theta^2(e^{2\Delta}-1)}{e^{\Delta}-\theta^2}. \tag{38}$$

Эта теорема формулируется проще, чем теорема IV, поэтому нам будет выгодно пользоваться ею в тех случаях, когда большая точность не нужна.

З а м е ч а н и е. Результаты, которые получаются комбинированием теорем IV и IV′ с леммой 4, целесообразно сравнить с основной теоремой работы Макинтайра [8]. Результат [8] является более общим, так как применим к целым функциям конечного нижнего порядка. Однако наша оценка остаточного члена ω не следует из оценок [8]. Наиболее существенное для нас отличие от результатов Макинтайра состоит в том, что мы можем дать оценку остаточного члена для всех $t \in E$.

Отметим еще одно утверждение, которое понадобится при доказательстве основных результатов.

Лемма 12. *Для любого* $\rho' > \rho$ и $k = 2, 3, 4, \ldots$, при $t \in E$ справедлива *оценка*

$$|N_k(\zeta)| \leqslant \frac{1}{2} k e^{\frac{k\rho'}{2}} \{\Phi'(t)\}^{\frac{k}{2}}.$$

Лемма 12 является непосредственным следствием лемм 9, 11 и 4.

Часть II

В дальнейшем рассматриваются только те значения t, которые принадлежат множеству E. Обозначения $R(t)$, $\Delta(t)$ и ζ имеют тот же смысл, что и в формулировке теоремы IV.

§ 2. 1. В этом параграфе мы докажем ряд утверждений относительно отображения, даваемого функцией

$$w(\tau) = f(\zeta e^{\tau}).$$

Характер этого отображения определяется приближенным равенством

$$w(\tau) \approx f(\zeta) e^{N_1 \tau}.$$

Наши утверждения в силу своей специфики, вряд ли интересны вне связи с их приложениями при доказательстве теорем I—III, поэтому мы не будем стремиться к максимальной общности.

Лемма* 13. *Пусть* k *— наперед заданное положительное число,* $\frac{1}{2} < p < p' < 1$, *а* $\theta = \theta(t)$ *удовлетворяет неравенству*

$$\{\Phi'(t)\}^{p'-1} \leqslant \theta(t) \leqslant \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}\Delta(t)}. \tag{39}$$

Тогда для всех достаточно больших значений $t\,(\in E)$ *функция*

$$w(\tau) = f(\zeta e^{\tau})$$

отображает каждый из прямоугольников

$$|\mathrm{Re}\,\tau| \leqslant \frac{1}{2}\theta R^{2p}, \quad \frac{1}{4}\theta R \leqslant \mathrm{Im}\,\tau \leqslant \frac{1}{2}\theta R, \tag{40$^{(1)}$}$$

$$|\mathrm{Re}\,\tau| \leqslant \frac{1}{2}\theta R^{2p}, \quad -\frac{1}{2}\theta R \leqslant \mathrm{Im}\,\tau \leqslant -\frac{1}{4}\theta R \tag{40$^{(2)}$}$$

на область, покрывающую кольцо

$$e^{-k}|f(\zeta)| \leqslant |w| \leqslant e^{k}|f(\zeta)|. \tag{41}$$

Доказательство. По теореме IV′ мы имеем

$$\ln f(\zeta e^{\tau}) - \ln f(\zeta) = N_1 \tau + \eta(\tau),$$

где

$$\eta(\tau) = \ln\{1 + \omega(\tau)\}. \tag{42}$$

В силу правого неравенства (39) и оценки (38)

$$|\eta(\tau)| \leqslant \frac{1}{3}. \tag{43}$$

Теорема Руше дает возможность утверждать, что функция

$$\mu(\tau) = N_1 \tau + \eta(\tau) = \Phi'(t)\tau + \eta(\tau) \tag{44}$$

* Утверждение, близкое к этой лемме, имеется в работе Макинтайра [9].

отображает прямоугольники $(40^{(1)})$, $(40^{(2)})$ соответственно на области:

$\Omega_{\mu}^{(1)}$ — содержащую прямоугольник

$$|\operatorname{Re}\mu| \leqslant \frac{1}{2}\Phi'(t)\,\theta R^{2p} - \frac{1}{3},\ \frac{1}{4}\Phi'(t)\,\theta R + \frac{1}{3} \leqslant \operatorname{Im}\mu \leqslant \frac{1}{2}\Phi'(t)\,\theta R - \frac{1}{3},$$

$\Omega_{\mu}^{(2)}$ — содержащую прямоугольник

$$|\operatorname{Re}\mu| \leqslant \frac{1}{2}\Phi'(t)\,\theta R^{2p} - \frac{1}{3},\ -\frac{1}{2}\Phi'(t)\,\theta R + \frac{1}{3} \leqslant \operatorname{Im}\mu \leqslant -\frac{1}{4}\Phi'(t)\,\theta R - \frac{1}{3}.$$

При $t \to \infty$ оба измерения этих прямоугольников неограниченно растут. Поэтому функция

$$w(\tau) = f(\zeta)\exp\{\mu(\tau)\}$$

отображает прямоугольники $(40^{(1)})$, $(40^{(2)})$ соответственно на многолистные области $\Omega_w^{(1)}$ и $\Omega_w^{(2)}$, каждая из которых покрывает кольцо (41).

Лемма 14. *Какова бы ни была точка* w_0 *из кольца* (41), *в одном из прямоугольников* (40) *найдется точка* $\tau = \tau(\zeta, w_0)$, *такая, что*

$$f(\zeta e^{\tau}) = w_0, \tag{45}$$

$$|\operatorname{Im}(\zeta e^{\tau})| \leqslant |\zeta e^{\tau}|\cos(\operatorname{Im}\tau). \tag{46}$$

Доказательство. В прямоугольниках $(40^{(1)})$, $(40^{(2)})$ можно найти точки (лежащую в $(40^{(1)})$ обозначим $\tau_1(\zeta, w_0)$, а лежащую в $(40^{(2)})$ — $\tau_2(\zeta, w_0)$), такие, что

$$f(\zeta e^{\tau_j}) = w_0 \quad (j = 1,\ 2).$$

Полагая $\tau = \tau_1(\zeta, w_0)$, если $\frac{\pi}{2} \leqslant \arg\zeta < \pi$ или $\frac{3\pi}{2} \leqslant \arg\zeta < 2\pi$, и полагая $\tau = \tau_2(\zeta, w_0)$, если $0 \leqslant \arg\zeta < \frac{\pi}{2}$ или $\pi \leqslant \arg\zeta < \frac{3\pi}{2}$, убеждаемся в справедливости леммы.

Лемма 14 используется при доказательстве теорем I и II. Следующая лемма нужна для доказательства теоремы III.

Лемма 15. *Пусть* $\mathfrak{C}_t$ — *множество, зависящее от* t, *состоящее из кружков с суммой радиусов* $\leqslant 1$. *Если* $f(z)$ *имеет порядок не больше** 1, *то для всех достаточно больших значений* $t\,(\in E)$ *в одном из прямоугольников* (40) *найдется точка* $\tau = \tau(\zeta)$, *такая что*

$$f(\zeta e^{\tau}) > 0,$$

$$\zeta e^{\tau} \,\overline{\in}\, \mathfrak{C}_t,$$

$$|\operatorname{Im}(\zeta e^{\tau})| \leqslant |\zeta e^{\tau}|\cos(\operatorname{Im}\tau).$$

Доказательство. Проведем на каждом листе областей $\Omega_w^{(1)}$ $\Omega_w^{(2)}$ прямолинейные разрезы, лежащие над положительным лучом w — плоскости. На μ — плоскости этим разрезам отвечают две системы горизонтальных отрезков, удаленных друг от друга по вертикали на целое кратное 2π. В силу близости отображения $\mu = \mu(\tau)$ к линейному (это выражается соотношениями (43) и (44)) среди этих отрезков найдутся такие, которым в прямоугольниках $(40^{(1)})$ и $(40^{(2)})$ отвечают соответственно кривые $L_{\tau}^{(1)}$ и $L_{\tau}^{(2)}$, соединяющие вертикальные стороны. На плоскости $z = \zeta e^{\tau}$ этим кривым отвечают кривые $L_z^{(1)}$ и $L_z^{(2)}$. Расстояние между концами кривой $L_z^{(j)}$, $j = 1,\ 2$, не меньше

$$e^{t}\{e^{\frac{1}{2}\theta R^{2p}} - e^{-\frac{1}{2}\theta R^{2p}}\} \geqslant e^{t}\cdot\theta R^{2p}.$$

---

* Это ограничение можно ослабить.

Так как

$$e^t\theta R^{2p} \geqslant e^t\{\Phi'(t)\}^{p'-1}\{\Phi'(t)\}^{-p} = e^t\{\Phi'(t)\}^{p'-p-1} = \\ = \exp\{[1+(p'-p-1)\rho]t + (p'-p-1)\vartheta(t)\}[\rho + \\ + \vartheta'(t)]^{p'-p-1} \to \infty \quad \text{при } t\to\infty,$$

то для достаточно больших t ни одна из кривых $L_z^{(j)}$, $j=1, 2$, не может поместиться в множестве $\mathfrak{C}_t$. На каждой кривой $L_z^{(j)}$ выберем точку ζe^{τ_j}, не принадлежащую $\mathfrak{C}_t$. По построению кривых $L_z^{(j)}$ справедливо

$$f(\zeta e^{\tau_j}) > 0, \quad (j=1, 2).$$

Полагая $\tau=\tau_1$, если $\frac{\pi}{2} \leqslant \arg\zeta < \pi$ или $\frac{3\pi}{2} \leqslant \arg\zeta < 2\pi$, и полагая $\tau=\tau_2$, если $0 \leqslant \arg\zeta < \frac{\pi}{2}$ или $\pi \leqslant \arg\zeta < \frac{3\pi}{2}$, получаем доказываемое утверждение.

§ 2.2. *Доказательство теоремы I.*

Вначале рассмотрим сравнительно тривиальный случай, когда $f(z)$ á priori полином. Весь аппарат, развитый ранее, при этом нам не потребуется.

Если $f(z)=a_0z^n+\ldots+a_n$ — полином степени n, то ветви линии уровня $\arg f(z)=c$ асимптотически при $z\to\infty$ приближаются к лучам $\arg z = \frac{1}{n}\{c-\arg a_0+2k\pi\}$, $k=1, 2, \ldots, n$. Это приближение равномерно относительно c. Возьмем w_0 таким, чтобы

$$|F(w_0)| = M(|w_0|, F).$$

Если $|w_0|$ достаточно велико, то на линии уровня

$$|f(z)| = |w_0|$$

найдется ровно n точек $z_k(w_0)$, $k=1, 2, \ldots, n$, где

$$f(z_k) = w_0 \quad (k=1, 2, \ldots, n).$$

Мы имеем

$$|\varphi(z_k)| = M(|f(z_k)|, F),$$

с другой стороны, в силу (4)

$$|\varphi(z_k)| \leqslant M(|\operatorname{Im} z_k|, \varphi)^* \leqslant M(M(|\operatorname{Im} z_k|), F).$$

Следовательно, **

$$|f(z_k)| \leqslant M(|\operatorname{Im} z_k|). \tag{47}$$

Если $w_0\to\infty$, то точки $z_k(w_0)$ удаляются на бесконечность так, что абсолютная величина разности аргументов двух соседних точек стремится к $\frac{2\pi}{n}$. Поэтому при $n>2$ для достаточно больших $|w_0|$ среди точек z_k найдется такая, что $|\operatorname{Im} z_k| < \frac{3}{4}|z_k|$. В силу (47) будем иметь

$$|f(z_k)| \leqslant M\left(\frac{3}{4}|z_k|\right).$$

Так как $|z_k|$ принимает сколь угодно большие значения, а $f(z)$ — полином, получаем противоречие, которое показывает, что предположение $n>2$ неверно.

Теперь проведем доказательство для случая, когда $f(z)$ — трансцендентная функция.

---

* Далее мы используем очевидное соотношение $M(r, \varphi) \leqslant M(M(r), F)$.

** Мы пользуемся тем, что $M(r, F)$ — строго возрастающая функция от r.

В кольце (41) возьмем точку $w_0 = w_0(\zeta)$, такую, что

$$|F(w_0)| = M(|w_0|, F). \tag{48}$$

Пусть τ — точка, отвечающая w_0 в силу леммы 14. По теореме IV справедливо соотношение

$$f(\zeta e^{\tau}) = f(\zeta)\, e^{N_1\tau + N_2\tau^2}\{1 + \omega_2(\tau)\}, \quad |\tau| \leqslant \theta R, \tag{49}$$

где

$$|\omega_2(\tau)| \leqslant 2Ke^{\frac{3}{2}\Delta}\theta^3.$$

В силу леммы 4 $\lim\limits_{t\to\infty} \Delta(t) = \frac{1}{2}\rho$, поэтому

$$|\omega_2(\tau)| \leqslant A\theta^3,$$

где постоянная A зависит лишь от ρ. Принимая $\tau = \varkappa + i\lambda$, мы из (49) получаем неравенство

$$|f(\zeta e^{\tau})| \geqslant |f(\zeta)| \exp\{N_1\varkappa + \operatorname{Re} N_2 \cdot (\varkappa^2 - \lambda^2) - 2\operatorname{Im} N_2 \cdot \varkappa\lambda\}\{1 - A\theta^3\}. \tag{50}$$

Левую часть оценим сверху с помощью условия (4). В силу (48) и (45) мы имеем

$$|\varphi(\zeta e^{\tau})| = M(|f(\zeta e^{\tau})|, F).$$

По условию (4)

$$|\varphi(\zeta e^{\tau})| \leqslant M(|\operatorname{Im}(\zeta e^{\tau})|, \varphi) \leqslant M(M(|\operatorname{Im}(\zeta e^{\tau})|), F).$$

Следовательно,

$$|f(\zeta e^{\tau})| \leqslant M(|\operatorname{Im}(\zeta e^{\tau})|).$$

Отсюда, используя (46), получаем

$$|f(\zeta e^{\tau})| \leqslant M(e^{t+\varkappa}\cos\lambda).$$

Подставляя эту оценку в (50) и логарифмируя, получим:

$$\Psi(t + \varkappa + \ln\cos\lambda) \geqslant \Psi(t) + N_1\varkappa + \operatorname{Re} N_2 \cdot (\varkappa^2 - \lambda^2) - \\ - 2\operatorname{Im} N_2\, \varkappa\lambda + \ln\{1 - A\theta^3\}. \tag{51}$$

Так как по лемме 12

$$|N_2(\zeta)| = O(\Phi'(t)),$$

то

$$\operatorname{Re} N_2 \cdot \varkappa^2 - 2\operatorname{Im} N_2 \cdot \varkappa\lambda = O(\Phi'(t))\,|\varkappa\lambda|.$$

В силу утверждения 2) леммы 6

$$N_1(\zeta) = \Phi'(t),$$

$$\operatorname{Re} N_2(\zeta) \leqslant \frac{1}{2}\max[\Phi''(t-0),\ \Phi''(t+0)].$$

Учитывая, что

$$\Psi(t) = \Phi(t),$$

$$\Psi(t + \varkappa + \ln\cos\lambda) \leqslant \Phi(t + \varkappa + \ln\cos\lambda),$$

мы из (51) получаем соотношение

$$\Phi(t + \varkappa + \ln\cos\lambda) - \Phi(t) - \Phi'(t)\varkappa + \frac{1}{2}\max[\Phi''(t-0),\ \Phi''(t+0)]\lambda^2 \geqslant \\ \geqslant \ln\{1 - A\theta^3\} + O(\Phi'(t))\,|\varkappa\lambda|.$$

Предположим теперь, что функция $f(z)$ удовлетворяет условию (23). Тогда при помощи леммы 5 мы заключаем, что для всех достаточно больших значений $t\,(\in E)$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{9}\theta^2[\rho - 1 - (1 + t^2)^{-1}] \geqslant \ln\{1 - A\theta^3\} - O(\Phi'(t)) \cdot \theta^2\{\Phi'(t)\}^{-\frac{1}{2}-p}.$$

Вспомним, что в качестве $\theta = \theta(t)$ в этом соотношении мы имеем право брать любую функцию, удовлетворяющую неравенству (39). Мы выберем

$$\theta(t) = \{\Phi'(t)\}^{p'-1}, \quad \left(\frac{1}{2} < p < p' < 1\right).$$

Тогда для достаточно больших t будем иметь

$$\frac{1}{9}\{\Phi'(t)\}^{2p'-2}[\rho - 1 - (1 + t^2)^{-1}] \geqslant -2A\{\Phi'(t)\}^{3p'-3} + O(\{\Phi'(t)\}^{-\frac{3}{2}-p+2p'}),$$

откуда

$$1 - \rho - (1 + t^2)^{-1} \leqslant 18A\{\Phi'(t)\}^{p'-1} + O(\{\Phi'(t)\}^{\frac{1}{2}-p}).$$

Но если $0 \leqslant \rho < 1$, то при $t \to \infty$ предел правой части равен нулю, а левой — положителен. Если $\rho = 1$, то правая часть все же стремится к нулю быстрее левой. Следовательно, предположение о том, что $f(z)$ удовлетворяет условию (23) — неверно.

Теорема доказана.

§ 2. 3. *Доказательство теоремы* II отличается от доказательства теоремы 1 лишь тем, что точку w_0 нужно выбирать так, чтобы

$$F(w_0) = M(|w_0|, F).$$

§ 2. 4. Замечание. Теоремы I и II можно дополнить следующим образом. Пусть мы имеем на плоскости конечное множество произвольно расположенных невырожденных полос. Обозначим множество точек, не попавших в эти полосы, через P.

Теорема V. *Пусть $F(w)$ и $f(z)$ — целые функции, причем $F(w) \neq \neq \mathrm{const}$, а $f(z)$ — трансцендентна. Если функция $\varphi(z) = F(f(z))$ удовлетворяет условию*

$$|\varphi(x + iy)| \leqslant M(|y|, \varphi), \quad x + iy \in P, \tag{52}$$

то $f(z)$ — не ниже нормального типа порядка 1. *Это утверждение останется в силе, если относительно $F(w)$ предположить, что на каждой окружности $|w| = \mathrm{const}$ найдется точка w_0, такая, что*

$$F(w_0) = M(|w_0|, F),$$

а условие (52) *заменить более слабым*

$$\mathrm{Re}\,\varphi(x + iy) \leqslant M(|y|, \varphi), \quad x + iy \in P.$$

Доказательство. Достаточно дополнить лемму 14 утверждением, что если порядок $f(z)$ не больше 1, то τ можно выбрать таким образом, чтобы $\zeta e^{\tau} \in P$.

Не уменьшая общности, можно считать, что средние линии полос суть прямые, проходящие через начало координат, и что одна из полос содержит мнимую ось. Этого всегда можно добиться, добавляя к имеющимся полосам новые.

Пусть средние линии полос суть

$$x \sin \alpha_j - y \cos \alpha_j = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n;$$

$$0 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_e = \frac{\pi}{2} < \alpha_{e+1} < \ldots < \alpha_n < \pi.$$

Пусть β — величина наименьшего угла между этими прямыми, H — ширина самой широкой из полос.

Если точка τ лежит в одном из прямоугольников (40), то при $t \to \infty$

$$\arg(\zeta e^{\tau}) - \arg \zeta = \mathrm{Im}\,\tau \to 0,$$

расстояние точки ζe^{τ} от луча $\arg z = \arg \zeta$ не меньше

$$e^{t+\operatorname{Re}\tau}\,|\sin(\operatorname{Im}\tau)| \geqslant \exp\left\{t-\frac{1}{2}\theta\{\Phi'(t)\}^{-p}\right\}\cdot\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{4}\theta\{\Phi'(t)\}^{-\frac{1}{2}}$$

и, следовательно, стремится к бесконечности. Это расстояние для всех достаточно больших значений t строго больше H, а $|\arg(\zeta e^{\tau})-\arg\zeta|$ строго меньше $\frac{1}{4}\beta$.

Пусть теперь $\tau_1(\zeta, w_0)$ и $\tau_2(\zeta, w_0)$ имеют тот же смысл, что и в доказательстве леммы 14. Величину $\tau=\tau(\zeta, w_0)$ выберем теперь несколько иначе. Если точка ζ попадает в один из углов

$$\alpha_1\leqslant\arg z<\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2},\quad \alpha_2\leqslant\arg z<\frac{\alpha_2+\alpha_3}{2},\ \ldots,$$

то положим $\tau=\tau_1(\zeta, w_0)$, а если точка ζ попадает в один из углов

$$\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\leqslant\arg z<\alpha_2,\quad \frac{\alpha_2+\alpha_3}{2}\leqslant\arg z<\alpha_3,\ \ldots,$$

то положим $\tau=\tau_2(\zeta, w_0)$. Очевидно, тогда будут выполняться (45), (46) и, кроме того, точка ζe^{τ} для достаточно больших t будет принадлежать множеству P.

Ценой некоторого усложнения рассуждений можно показать возможность замены множества P множеством точек, не попадающих внутрь конечного числа кривых, получаемых из кривых

$$y=k|x|^{2+\varepsilon}\quad (k>0 \text{ и } \varepsilon>0 \text{ — произвольны})$$

с помощью поворота и переноса.

§ 2.5. *Доказательство теоремы* III.

Нам понадобится лемма об оценке модуля целой функции снизу вне множества кружков с суммой радиусов $\leqslant 1$. Отметим, что оценки такого рода, даже более точные, но вне более широкого множества, хорошо известны (см. напр., [5], стр. 33).

Лемма 16. *Пусть $g(z)$ — целая функция. В круге $|z|\leqslant u$ и вне множества кружков с суммой радиусов $\leqslant 1$ справедлива оценка*

$$\ln|g(z)|\geqslant -2\ln u\cdot\ln M(2eu, g)+O(\ln u).$$

Доказательство. Предположим дополнительно, что $|g(0)|=1$. Из формулы Иенсена

$$\int_0^u\frac{n(r)}{r}\,dr=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|g(ue^{i\theta})|\,d\theta \tag{53}$$

($n(r)$ — число нулей $g(z)$ в круге $|z|\leqslant r$) следует

$$0\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|g(ue^{i\theta})|\,d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overset{+}{\ln}|g(ue^{i\theta})|\,d\theta-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overset{+}{\ln}\frac{1}{|g(ue^{i\theta})|}\,d\theta,$$

откуда

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overset{+}{\ln}\frac{1}{|g(ue^{i\theta})|}\,d\theta\leqslant\ln M(u, g). \tag{54}$$

Из (53) также следует

$$n(u)\leqslant\int_u^{eu}\frac{n(r)}{r}\,dr\leqslant\int_0^{eu}\frac{n(r)}{r}\,dr\leqslant\ln M(eu, g).$$

По формуле Пуассона — Иенсена при $|z| < 2u$ мы имеем

$$\ln|g(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|g(2ue^{i\theta})| \frac{4u^2 - r^2}{4u^2 + r^2 - 4ur\cos(\varphi - \theta)}\, d\theta + \sum_{k=1}^{n(2u)} \ln\left|\frac{2u(z - a_k)}{4u^2 - \bar{a}_k z}\right|$$

($z = re^{i\varphi}$, a_k — корни $g(z)$). Следовательно, при $|z| < 2u$

$$\ln|g(z)| \geqslant -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\ln}\frac{1}{|g(2ue^{i\theta})|} \cdot \frac{4u^2 - r^2}{4u^2 + r^2 - 4ur\cos(\varphi - \theta)}\, d\theta + \ln\left|\prod_{k=1}^{n(2u)} (z - a_k)\right| + \sum_{k=1}^{n(2u)} \ln\frac{2u}{|4u^2 - \bar{a}_k z|} = I_1 + I_2 + I_3.$$

В силу (54) при $|z| \leqslant u$

$$I_1 \geqslant -\frac{2u + r}{2u - r} \cdot \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\ln}\frac{1}{|g(2ue^{i\theta})|}\, d\theta \geqslant -3\ln M(2u, g)$$

и, очевидно,

$$I_3 \geqslant \sum_{k=1}^{n(2u)} \ln\left(\frac{2u}{4u^2 + |a_k z|}\right) \geqslant \sum_{k=1}^{n(2u)} \ln\frac{1}{3u} = -n(2u)\ln 3u.$$

Для оценки I_2 мы применим теорему Картана об оценке модуля полинома снизу ([5], стр. 31). Получим вне множества кружков с суммой радиусов $\leqslant 1$

$$I_2 \geqslant -n(2u)\ln 2e.$$

Таким образом, при $|z| \leqslant u$ и вне множества кружков имеем

$$\begin{aligned} \ln|g(z)| &\geqslant -3\ln M(2u, g) - n(2u)\ln 6eu \geqslant \\ &\geqslant -3\ln M(2u, g) - \ln M(2eu, g)\ln 6eu \geqslant \\ &\geqslant -\ln M(2eu, g) \cdot \ln 6e^4 u, \end{aligned}$$

откуда и следует доказываемое.

Случай $|g(0)| \neq 1$ сводится к уже рассмотренному делением $g(z)$ на cz^m, где c — константа, а m — кратность корня в нуле.

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы III. Предположим, что ее утверждение неверно.

Обозначим через $\mathfrak{C}_t$ множество кружков, отвечающее в силу леммы 16 функции $g(z)$ и значению $u = e^{t+1}$. Пусть $\tau = \tau(\zeta)$ — величина, существование которой установлено леммой 15. Принимая $\tau = \varkappa + i\lambda$, мы так же, как и при доказательстве теоремы I, приходим к соотношению

$$|f(\zeta e^{\tau})| \geqslant |f(\zeta)| \exp\{N_1\varkappa + \operatorname{Re}N_2(\varkappa^2 - \lambda^2) - 2\operatorname{Im}N_2 \cdot \varkappa\lambda\}\{1 - A\theta^3\}. \quad (50)$$

Оценим в нем левую часть сверху. Имеем

$$|f(\zeta e^{\tau})| = \operatorname{Re} f(\zeta e^{\tau}) = \ln|\varphi(\zeta e^{\tau})| - \ln|g(\zeta e^{\tau})|.$$

В силу условия (4)

$$\begin{aligned} \ln|\varphi(\zeta e^{\tau})| &\leqslant \ln M(|\operatorname{Im}(\zeta e^{\tau})|, \varphi) \leqslant \\ &\leqslant M(|\operatorname{Im}(\zeta e^{\tau})|) + \ln M(|\operatorname{Im}(\zeta e^{\tau})|, g) \leqslant \\ &\leqslant M(e^{t+\varkappa}\cos\lambda) + \ln M(e^{t+1}, g). \end{aligned}$$

А в силу леммы 16

$$-\ln|g(\zeta e^{\tau})| \leqslant 2t \ln M(e^{t+3}, g) + O(t).$$

Таким образом, для достаточно больших t

$$|f(\zeta e^{\tau})| \leqslant M(e^{t+\varkappa}\cos\lambda) + 3t\ln M(e^{t+3}, g).$$

Подставляя эту оценку в (50) и учитывая затем те же самые соображения, что и в соответствующем месте доказательства теоремы I, получим неравенство

$$\Phi(t+\varkappa+\ln\cos\lambda) - \Phi(t) - \Phi'(t)\varkappa +$$
$$+\frac{1}{2}\max[\Phi''(t-0), \Phi''(t+0)]\lambda^2 \geqslant$$
$$\geqslant \ln\left\{1 - A\theta^3 - \frac{4t\ln M(e^{t+3}, g)}{M(e^t)} e^{-N_1\varkappa - ReN_2\cdot(\varkappa^2-\lambda^2)+2\operatorname{Im}N_2\cdot\varkappa\lambda}\right\} -$$
$$- O(\Phi'(t))|\varkappa\lambda| - \ln\{1 - A\theta^3 - \gamma(t)\} - O(\Phi'(t))|\varkappa\lambda|.$$

По лемме 5 левая часть этого неравенства для достаточно больших t не превосходит

$$\frac{1}{9}\theta^2(t)[\rho - 1 - (1+t^2)^{-1}].$$

Выберем теперь $\theta(t) = \{\Phi'(t)\}^{p'-1}$ и оценим снизу правую часть. Мы имеем

$$-N_1\varkappa + \operatorname{Re}N_2\cdot(\lambda^2-\varkappa^2) + 2\operatorname{Im}N_2\cdot\varkappa\lambda \leqslant$$
$$\leqslant \Phi'(t)|\varkappa| + O(\Phi'(t))\lambda^2 + O(\Phi'(t))|\varkappa\lambda| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\theta\{\Phi'(t)\}^{1-p} + O(1),$$

следовательно,

$$\gamma(t) \leqslant \ln M(e^{t+3}, g)\exp\{O(\ln t) - \Phi(t) + \frac{1}{2}\theta\{\Phi'(t)\}^{1-p}\} =$$
$$= \ln M(e^{t+3}, g)\exp\{-(1+O(1))\Phi(t)\}.$$

Если $\rho = 0$, то в силу условия (7) при некотором $k > 0$.

$$\ln M(e^{t+3}, g) = O(e^{kt}).$$

Но $t = 0(\Phi(t))$, поэтому при любом $l > 0$

$$\gamma(t) = O(e^{-lt}) = o(\theta^3(t))$$

Если же $\rho > 0$, то в силу (6) можно найти ε, $0 < \varepsilon < \rho$, так, что для достаточно больших t будут иметь место соотношения

$$\Phi(t) \geqslant \exp\left\{\left(\rho - \frac{\varepsilon}{2}\right)t\right\},$$
$$\ln M(e^{t+3}, g) \leqslant \exp\{e^{(\rho-\varepsilon)t}\},$$

откуда получаем

$$\gamma(t) = O(\exp\{e^{(\rho-\varepsilon)t} - e^{\left(\rho-\frac{\varepsilon}{2}\right)t}\}) = o(\theta^3(t)).$$

Таким образом, для достаточно больших t

$$\ln\{1 - A\theta^3 - \gamma(t)\} \geqslant -2A\theta^3(t).$$

Итак, мы имеем неравенство

$$\frac{1}{9}\theta^2(t)\{\rho - 1 - (1+t^2)^{-1}\} \geqslant -2A\theta^3(t) - O(\{\Phi'(t)\}^{\frac{1}{2}-p})\theta^2(t),$$

или, иначе,

$$1 - \rho + (1+t^2)^{-1} \leqslant 18A\{\Phi'(t)\}^{p'-1} + O(\{\Phi'(t)\}^{\frac{1}{2}-p}).$$

Отсюда следует противоречие, доказывающее теорему.

Замечание. Легко видеть, что условие теоремы, состоящее в том, что $\varphi(z)=g(z)e^{f(z)}$ удовлетворяет (4), можно заменить более слабым

$$\operatorname{Re} f(x+iy)+\ln|g(x+iy)|\leqslant M(|y|)+\ln M(|y|,g), \quad -\infty<x,y<\infty.$$

§ 2.5. В работе [7] Э. Лукач получил, в частности, следующее предложение, несколько усиливающее результат И. Марцинкевича.

Целая функция вида

$$\varphi(z)=\exp\{\lambda_1 e^{iz}+\lambda_2 e^{-iz}+f(z)\}, \quad \lambda_1\geqslant 0, \quad \lambda_2\geqslant 0,$$

где $f(z)$ — полином, может являться х. ф. лишь в том случае, когда степень $f(z)$ не больше 2.

С помощью нашего метода удается получить более общий результат.

Теорема VI. *Пусть $F(w)$ и $f(z)$ — целые функции. Предположим, что*

$$F(r)=M(r,F), \quad 0\leqslant r<\infty. \tag{55}$$

Положим

$$\varphi(z)=F(\lambda_1 e^{iz}+\lambda_2 e^{-iz}+f(z)), \quad \lambda_1\geqslant 0, \quad \lambda_2\geqslant 0.$$

Если $\varphi(z)$ удовлетворяет условию «хребта»

$$|\varphi(x+iy)|\leqslant|\varphi(iy)|, \quad -\infty<x, \ y<\infty, \tag{56}$$

то либо $f(z)$ — полином степени не больше 2, либо порядок $f(z)$ не меньше ρ_0, где ρ_0, $0<\rho_0\leqslant 1$ — абсолютная постоянная.

Нам не удалось найти точное значение ρ_0.

Если á priori предположить, что $f(z)$ — полином, то доказательство получается легко. Действительно, если n — степень $f(z)$, то ветви линии уровня $\arg f(z)=0$ при $z\to\infty$ асимптотически приближаются к n лучам, составляющим друг с другом угол $\frac{2\pi}{n}$. Если $n>2$, то хотя бы один из лучей не накладывается на мнимую ось и на соответствующей ветви линии уровня найдутся сколь угодно далеко точки z такие, что

$$|\operatorname{Im} z|<\nu|z| \quad (\nu - \text{const}, \ 0<\nu<1),$$
$$\operatorname{Re} z\equiv 0 \pmod{2\pi}.$$

Для каждой такой точки $z=x+iy$ мы будем иметь

$$\varphi(z)=F(\lambda_1 e^{-y}+\lambda_2 e^{y}+f(z))=|\varphi(z)|.$$

С другой стороны, в силу условий (55) и (56)

$$|\varphi(z)|\leqslant|\varphi(iy)|=|F(\lambda_1 e^{-y}+\lambda_2 e^{y}+f(iy))|\leqslant F(\lambda_1 e^{-y}+\lambda_2 e^{y}+|f(iy)|).$$

Поэтому

$$|f(z)|\leqslant|f(iy)|,$$

откуда

$$|f(z)|\leqslant M(\nu|z|).$$

Это соотношение не может выполняться для достаточно больших значений $|z|$, что и доказывает теорему.

Для доказательства теоремы в трансцендентном случае нам нужно иметь более точную информацию об отображении

$$w=f(\zeta e^{\tau}),$$

чем даваемая леммами 13—15.

Лемма 17. *Если порядок $f(z)$ меньше ρ_0 (ρ_0 — абсолютная постоянная, $0<\rho_0\leqslant 1$), то в одном из прямоугольников (40) найдется точка τ такая, что*

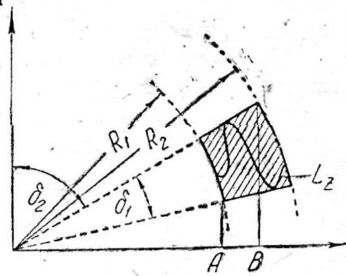
$$f(\zeta e^{\tau})>0, \tag{57}$$
$$|\operatorname{Im}(\zeta e^{\tau})|\leqslant|\zeta e^{\tau}|\cos(\operatorname{Im}\tau), \tag{58}$$
$$\operatorname{Re}(\zeta e^{\tau})\equiv 0 \pmod{2\pi}. \tag{59}$$

Доказательство. Предварительно заметим, что для производной функции $\eta(\tau)$, определенной соотношением (42), справедлива в (40) оценка

$$|\eta'(\tau)| \leqslant \{32\theta \operatorname{sh}\Delta\}\{\Phi'(t)\}^{\frac{1}{2}}.$$

Эта оценка получается с помощью формулы Коши и неравенства (38).

На каждом листе областей* $\Omega_w^{(1)}$, $\Omega_w^{(2)}$ проведем прямолинейный разрез, лежащий над положительным лучом плоскости w. Среди соответствующих горизонтальных разрезов областей $\Omega_\mu^{(1)}$, $\Omega_\mu^{(2)}$ найдутся такие, которым в прямоугольниках (40) отвечают кривые $L_\tau^{(1)} \subset (40^{(1)})$, $L_\tau^{(2)} \subset (40^{(2)})$, соединяющие вертикальные стороны. Пусть $h^{(1)}$ ($h^{(2)}$)— ширина наименьшей горизонтальной полосы, содержащей кривую $L_\tau^{(1)}$ ($L_\tau^{(2)}$); положим $h = \max(h^{(1)}, h^{(2)})$. Оценим величину h сверху. Имеем



$$h \leqslant \max_{|\tau| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}\theta R} \left| \operatorname{Im} \frac{1}{N_1 + \eta'(\tau)} \right| \cdot \left\{ \Phi'(t) \cdot \frac{1}{2}\theta R^{2p} + \frac{1}{3} \right\} \leqslant \frac{\max\limits_{|\tau| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}\theta R} |\eta'(\tau)|}{\left(N_1 - \max\limits_{|\tau| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}\theta R} |\eta'(\tau)|\right)^2} \left\{ \Phi'(t) \times \frac{1}{2}\theta R^{2p} + \frac{1}{3} \right\} \leqslant \{16\theta^2 \operatorname{sh}\Delta\}(1 + o(1))\{\Phi'(t)\}^{-\frac{1}{2} - p}.$$

Рис. 1.

На плоскости z прямоугольникам $(40^{(1)})$, $(40^{(2)})$ отвечают секторы $\Omega_z^{(1)}$, $\Omega_z^{(2)}$ кольца

$$R_1 = \exp\left\{t - \frac{1}{2}\theta\{\Phi'(t)\}^{-p}\right\} \leqslant |z| \leqslant \exp\left\{t + \frac{1}{2}\theta\{\Phi'(t)\}^{-p}\right\} = R_2,$$

а кривым $L_\tau^{(1)}$, $L_\tau^{(2)}$,— кривые $L_z^{(1)}$, $L_z^{(2)}$ соединяющие внешнюю окружность кольца с внутренней. Каждую из кривых $L_z^{(1)}$, $L_z^{(2)}$ можно заключить в сектор, раствор которого не превышает h, причем так, что хотя бы один из этих секторов (обозначим его S_z, а соответствующую кривую просто L_z) будет отстоять от мнимой оси на угол, абсолютная величина которого больше по $\operatorname{mod}\pi$, чем

$$\beta = \frac{1}{4}\theta\{\Phi'(t)\}^{-\frac{1}{2}}$$

Оценим снизу длину проекции L_z на ось абсцисс. Не уменьшая общности, можно считать, что расположение сектора S_z таково, как изображено на рис. 1 (сектор S_z заштрихован). Имеем

$$|\text{пр. } L_z| \geqslant B - A = R_2 \sin\delta_2 - R_1 \sin(\delta_1 + \delta_2) \geqslant R_2 \sin\beta - R_1 \sin(\beta + \delta_1) \geqslant$$
$$\geqslant R_2 \sin\beta - R_1 \sin(\beta + h) \geqslant R_2 \sin\beta - R_1 \sin\beta - R_1 \sin h =$$
$$= e^t \sin\beta \left\{ R_2 e^{-t} - R_1 e^{-t} - R_1 e^{-t} \frac{\sin h}{\sin\beta} \right\} \geqslant$$
$$\geqslant e^t \sin\beta \left\{ e^{\frac{1}{2}\theta\{\Phi'(t)\}^{-p}} - e^{-\frac{1}{2}\theta\{\Phi'(t)\}^{-p}} - \frac{\sin h}{\sin\beta} \right\} \geqslant$$
$$\geqslant e^t \sin\beta \left\{ \theta\{\Phi'(t)\}^{-p} - \frac{\sin h}{\sin\beta} \right\} \geqslant$$
$$\geqslant e^t \cdot \frac{2}{\pi}\beta \left\{ \theta\{\Phi'(t)\}^{-p} - (1 + o(1))[64\theta \sin\Delta]\{\Phi'(t)\}^{-p} \right\} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1 + o(1)}{4} e^t \theta^2 \{\Phi'(t)\}^{-\frac{1}{2} - p}\{1 - 65\Delta\}.$$

---

* Обозначения те же самые, что и при доказательстве лемм 13—15.

В качестве абсолютной постоянной ρ_0 возьмем корень уравнения $1-65\,\mathrm{sh}\,\frac{\rho}{2}=0$. Так как $\lim\limits_{t\to\infty}\Delta(t)=\frac{1}{2}\rho$, то при $\rho<\rho_0$ будем иметь

$$\lim_{t\to\infty}\{1-65\,\mathrm{sh}\,\Delta\}>0.$$

Таким образом, для достаточно больших t

$$|\text{пр. } L_z|\geqslant\frac{1}{8}\theta^2\exp\left\{\left[1-\rho\left(\frac{1}{2}+p\right)\right]t-\left(\frac{1}{2}+p\right)\vartheta(t)\right\}\lim_{t\to\infty}\{1-65\,\mathrm{sh}\,\Delta\}.$$

Замечая, что $\left[1-\rho\left(\frac{1}{2}+p\right)\right]>0$, получаем, что

$$|\text{пр. } L_z|\to\infty \text{ при } t\to\infty.$$

Следовательно, на L_z найдутся точки ζe^{τ}, в которых выполнено (59). То, что для этой точки справедливо (57) и (58) — тривиально.

Докажем теорему VI для случая трансцендентной $f(z)$. Выберем τ так, чтобы выполнялись условия (57) — (59) и запишем с этим $\tau=\varkappa+i\lambda$ соотношение (50). Из рассуждений, проведенных при доказательстве теоремы I, следует, что нам достаточно установить справедливость соотношения

$$|f(\zeta e^{\tau})|\leqslant M(e^{t+\varkappa}\cos\lambda). \tag{60}$$

Докажем это соотношение. Мы имеем, в силу (55), (57) и (58),

$$\varphi(\zeta e^{\tau})=F(\lambda_1 e^{-\mathrm{Im}(\zeta e^{\tau})}+\lambda_2 e^{\mathrm{Im}(\zeta e^{\tau})}+f(\zeta e^{\tau}))=|\varphi(\zeta e^{\tau})|.$$

С другой стороны, в силу (56) и (55),

$$\begin{aligned}|\varphi(\zeta e^{\tau})|&\leqslant|\varphi(i\,\mathrm{Im}(\zeta e^{\tau}))|=\\&=|F(\lambda_1 e^{-\mathrm{Im}(\zeta e^{\tau})}+\lambda_2 e^{\mathrm{Im}(\zeta e^{\tau})}+f(i\,\mathrm{Im}(\zeta e^{\tau})))|\leqslant\\&\leqslant F(\lambda_1 e^{-\mathrm{Im}(\zeta e^{\tau})}+\lambda_2 e^{\mathrm{Im}(\zeta e^{\tau})}+M(|\mathrm{Im}(\zeta e^{\tau})|)).\end{aligned}$$

Следовательно,

$$|f(\zeta e^{\tau})|\leqslant M(|\mathrm{Im}(\zeta e^{\tau})|),$$

откуда с помощью (58) получаем (60).

Выражаю глубокую признательность Б. Я. Левину за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Valiron, Lectures on the general theory of integral functions, Toulouse, 1923.
2. A. Wiman, Über den Zusammenhang zwischen dem Maximalbetrage einer analytischen Funktion und dem größten Betrage bei gegebenem Argument der Funktion, Acta Math., 41, 1—28 (1918).
3. W. Saxer, Über die Picardschen Ausnahmewerte sukzessiver Derivierten. Math. Zs., 17, 206—227 (1923).
4. J. Clunie, The determination of an integral function of finite order by its Taylor series, J. of the London Math. Soc., 28, 58—66 (1953).
5. Б. Я. Левин, Распределение корней целых функций, М, ГИТТЛ, 1956.
6. Ю. В. Линник, Разложения вероятностных законов, Л., Изд-во ЛГУ, 1960.
7. E. Lukacs, Some extensions of a theorem of Marzinkiewicz, Pacif. J. of Math., 8, № 3, 487—501 (1958).
8. A. J. Macintyre, Wiman's method and the «flat regions» of integral functions, Quart. J. of Math., Oxf. ser., 9, 81—88 (1938).
9. A. J. Macintyre, On Bloch's theorem, Math. Zs., 44, 536—540 (1938).
10. J. Marzinkiewicz, Sur une propriété de la loi de Gauß, Math. Zs., 44, 612—618 (1938).
11. И. В. Островский, О применении одной закономерности, установленной Виманом и Валироном, к исследованию характеристических функций вероятностных законов, «Докл. АН СССР», 143, № 3, 532—535 (1962)