

4. Сингулярные интегральные операторы с ядром Коши и логарифмическим ядром на пространстве полиномов.

4.1. Определим многочлены Чебышева I и II рода, используя формулу Муавра и бином Ньютона.

Имеем

$$\begin{aligned} \cos n\theta + i \sin n\theta &= (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos^n \theta + i C_n^1 \cos^{n-1} \theta \sin \theta - \\ &- C_n^2 \cos^{n-2} \theta \sin^2 \theta - i C_n^3 \cos^{n-3} \theta \sin^3 \theta + \dots, \end{aligned}$$

и, отделяя вещественную и мнимую части, получаем тождества

$$\begin{aligned} \cos n\theta &= \cos^n \theta - C_n^2 \cos^{n-2} \theta \cdot (1 - \cos^2 \theta) + \dots, \\ \frac{\sin n\theta}{\sin \theta} &= C_n^1 \cos^{n-1} \theta - C_n^3 \cos^{n-3} \theta \cdot (1 - \cos^2 \theta) + \dots, \end{aligned}$$

в правых частях которых стоят полиномы, соответственно степеней n и $(n-1)$ от $\cos \theta$.

Теперь дадим определения многочленов Чебышева в параметрической форме.

Положим $t = \cos \theta, 0 \leq \theta \leq \pi$.

Многочлены Чебышева I рода степени n обозначают $T_n(t)$.

По определению $T_n(t) \equiv \cos n\theta$.

Таким образом, имеем

$$\boxed{T_n(t) = \cos(n \arccos t)} \quad (4.1)$$

и

$$T_n(t) = t^n + C_n^2 t^{n-2} (t^2 - 1) + \dots$$

Многочлены Чебышева II рода степени $(n-1)$ обозначают $U_{n-1}(t)$.

По определению $U_{n-1}(t) \equiv \frac{\sin n\theta}{\sin \theta}$.

Имеем

$$\boxed{U_{n-1}(t) = \frac{\sin(n \arccos t)}{\sin(\arccos t)}} \quad (4.2)$$

и

$$U_{n-1}(t) = C_n^1 t^{n-1} + C_n^3 t^{n-3} (t^2 - 1) + \dots$$

4.2. Нули многочленов Чебышева.

Корни уравнения $\cos(n \arccos t) = 0$ находим из соотношений

$$n \arccos t_k^n = k\pi - \frac{\pi}{2}, k = 1, \dots, n.$$

Откуда получаем n различных нулей многочлена Чебышева I рода степени n ($T_n(t_k^n) = 0$):

$$t_k^n = \cos \frac{2k-1}{2n} \pi, k = 1, \dots, n \quad (4.3)$$

Все нули многочленов $T_n(t)$ лежат в интервале $(-1, 1)$.

Корни уравнения $\sin(n \arccos t) = 0$ находим из соотношений

$$n \arccos t_{0j}^n = j\pi, j = 1, \dots, n-1$$

и поскольку $\sin(\arccos t_{0j}^n) > 0$, получаем $(n-1)$ различных нулей многочлена Чебышева II рода степени $(n-1)$ ($U_{n-1}(t_{0j}^n) = 0$):

$$t_{0j}^n = \cos \frac{j}{n} \pi, j = 1, \dots, n-1 \quad (4.4)$$

Все нули многочленов $U_{n-1}(t)$ лежат в интервале $(-1, 1)$.

Нули многочленов $T_n(t)$ и $U_{n-1}(t)$ простые и перемежаются.

Соотношения ортогональности для многочленов Чебышева соответственно I и II рода получим из соотношений ортогональности известных систем тригонометрических функций на интервале $(0, \pi)$:

$$\int_0^\pi \cos p\theta \cos q\theta d\theta = 0, p \neq q, p, q = 0, 1, \dots, \quad (4.5)$$

$$\int_0^\pi \sin p\theta \sin q\theta d\theta = 0, p \neq q, p, q = 1, 2, \dots \quad (4.6)$$

Делая в интегралах (5) и (6) замену переменных $t = \cos \theta$ и используя параметрические представления многочленов Чебышева, находим:

$$\boxed{\int_{-1}^1 T_p(t) T_q(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = 0, \quad p \neq q, \quad p, q = 0, 1, \dots} \quad (4.7)$$

$$\boxed{\int_{-1}^1 U_{p-1}(t) U_{q-1}(t) \sqrt{1-t^2} dt = 0, \quad p \neq q, \quad p, q = 1, 2, \dots} \quad (4.8)$$

а при $p=q$:

$$\boxed{\int_{-1}^1 |T_p(t)|^2 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \begin{cases} \pi, & p = 0 \\ \frac{\pi}{2}, & p \in N \end{cases}} \quad (4.9)$$

и

$$\boxed{\int_{-1}^1 |U_{p-1}(t)|^2 \sqrt{1-t^2} dt = \frac{\pi}{2}, \quad p \in N} \quad (4.10)$$

4.3. В дальнейшем будем рассматривать два экземпляра линейного пространства алгебраических полиномов Π^I и Π^{II} .

Обозначим Π_n^I $(n+1)$ -мерное подпространство пространства Π^I полиномов:

$$p_n(t) = a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_n$$

степени n (имеется в виду не выше n , будем говорить точно степени n , если $a_0 \neq 0$), а n -мерное подпространство пространства Π^{II} полиномов степени $(n-1)$:

$$p_{n-1}(t_0) = b_0 t_0^{n-1} + b_1 t_0^{n-2} + \dots + b_{n-1}$$

обозначим Π_{n-1}^{II} . Имеем

$$\begin{aligned} \Pi^I &= \bigcup_{n=0}^{\infty} \Pi_n^I, \quad \Pi_0^I \subset \Pi_1^I \subset \Pi_2^I \subset \dots, \\ \Pi^{II} &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \Pi_{n-1}^{II}, \quad \Pi_0^{II} \subset \Pi_1^{II} \subset \Pi_2^{II} \subset \dots \end{aligned}$$

Во введенных пространствах определим скалярное произведение с чебышевскими весами, соответственно в Π^I :

$$\boxed{(f, g)_I \equiv \int_{-1}^1 f(t) \overline{g(t)} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}} \quad (4.11)$$

и в Π^{II} :

$$(f, g)_{\Pi} \equiv \int_{-1}^1 f(t_0) \overline{g(t_0)} \sqrt{1-t_0^2} dt_0 \quad (4.12)$$

Как было показано выше, многочлены Чебышева I рода ортогональны (7) в Π^{I} со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_{\text{I}}$, а многочлены Чебышева II рода ортогональны (8) в Π^{II} со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_{\Pi}$.

Введем “нормированные” многочлены Чебышева I рода

$$\begin{aligned} \check{T}_0(t) &\equiv \frac{1}{\sqrt{\pi}} T_0(t), \quad \check{T}_n(t) \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}} T_n(t), n \in N, \\ \left(\left\| \check{T}_n \right\|_{\text{I}} \right) &\equiv \sqrt{\left(\check{T}_n, \check{T}_n \right)_{\text{I}}} = 1, n = 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (4.13)$$

и II рода

$$\begin{aligned} \check{U}_{n-1}(t) &\equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}} U_{n-1}(t), n \in N, \\ \left(\left\| \check{U}_{n-1} \right\|_{\Pi} \right) &\equiv \sqrt{\left(\check{U}_{n-1}, \check{U}_{n-1} \right)_{\Pi}} = 1, n = 1, 2, \dots. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Имеем ортонормированные системы $\left\{ \check{T}_n \right\}_{n=0}^{\infty} \subset \Pi^{\text{I}}$:

$$\left(\check{T}_p, \check{T}_q \right)_{\text{I}} = \delta_{pq}, p, q = 0, 1, \dots, \quad (4.15)$$

и $\left\{ \check{U}_{n-1} \right\}_{n=1}^{\infty} \subset \Pi^{\text{II}}$:

$$\left(\check{U}_{p-1}, \check{U}_{q-1} \right)_{\Pi} = \delta_{pq}, p, q = 1, 2, \dots \quad (4.16)$$

Здесь, как и в дальнейшем, подразумевается, что Π^{I} – пространство многочленов со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_{\text{I}}$, а Π^{II} – пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_{\Pi}$ (12). Это замечание относится и к подпространствам $\Pi_n^{\text{I}} \subset \Pi^{\text{I}}$ и $\Pi_n^{\text{II}} \subset \Pi^{\text{II}}$.

В Π_n^{I} имеем ортонормированный базис $\left\{ \check{T}_k \right\}_{k=0}^n$ и для

$p_n(t) \in \Pi_n^{\text{I}}$ – разложение

$$p_n(t) = \sum_{k=0}^n c_k \overset{\vee}{T}_k(t), \quad \text{где } c_k = \left(p_n, \overset{\vee}{T}_k \right)_I, \quad (4.17)$$

а в Π_{n-1}^{Π} — ортонормированный базис $\left\{ \overset{\vee}{U}_{k-1} \right\}_{k=1}^n$ и для $p_{n-1}(t_0) \in \Pi_{n-1}^{\Pi}$ — разложение

$$p_{n-1}(t_0) = \sum_{k=1}^n d_k \overset{\vee}{U}_{k-1}(t_0), \quad \text{где } d_k = \left(p_{n-1}, \overset{\vee}{U}_{k-1} \right).$$

4.4. Введем в *паре* пространств Π^I, Π^{Π} *сингулярный интегральный оператор с ядром Коши*

$$\Gamma: \Pi^I \rightarrow \Pi^{\Pi}$$

$$\boxed{(\Gamma p)(t_0) \equiv \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{p(t)}{t-t_0} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}} \quad (4.18)$$

Во втором разделе, формула (2.42), было показано

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin \theta_0}{\cos \theta_0 - \cos \theta} \cos k\theta \, d\theta = -\sin k\theta_0. \quad (4.19)$$

Рассматривая это тождество лишь при $0 < \theta_0 < \pi$ и вводя новые переменные $\cos \theta = t$; $\cos \theta_0 = t_0$, $|t_0| < 1$, а также используя параметрические представления полиномов Чебышева, получаем

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{t-t_0} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = 0, \quad |t_0| < 1 \quad (4.20)$$

и

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_n(t)}{t-t_0} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = U_{n-1}(t_0), \quad |t_0| < 1, \quad n \in \mathbb{N} \quad (4.21)$$

В дальнейшем оператор Γ будем рассматривать на пространстве полиномов, ортогональных константам: $\Pi^{I,0} \equiv \{p \in \Pi^I : (p, 1)_I = 0\}$.

В силу (21)

$$\boxed{\Gamma: \Pi^{I,0} \rightarrow \Pi^{\Pi} : T_n(t) \mapsto U_{n-1}(t_0), \quad n \in \mathbb{N}} \quad (4.22)$$

Разложим $p_n(t) \in \Pi_n^{I,0}$ по ортогональному базису $\{T_k\}_{k=1}^n$:

$$p_n(t) = \sum_{k=1}^n c_k T_k(t), \text{ где } c_k = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 p_n(t) T_k(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$\Gamma : p_n(t) \mapsto g_{n-1}(t_0), \quad (4.23)$$

где $g_{n-1}(t_0) = \sum_{k=1}^n c_k U_{k-1}(t_0)$, так что оператор $\Gamma : \Pi^{1,0} \rightarrow \Pi^\Pi$ отображает n -мерное подпространство полиномов степени n ортогональных константам на n -мерное подпространство полиномов степени $(n-1)$:

$$\Gamma : \Pi_n^{1,0} \rightarrow \Pi_{n-1}^\Pi \quad (4.24)$$

и, в силу (23), для $p_n(t), q_n(t) \in \Pi_n^{1,0}$ выполняются соотношения

$$(p_n, q_n)_I = (\Gamma p_n, \Gamma q_n)_\Pi \quad (4.25)$$

и

$$\|p_n\|_I = \|\Gamma p_n\|_\Pi \quad (4.26)$$

Поскольку отображение (22) $\Gamma : \Pi^{1,0} \rightarrow \Pi^\Pi$ взаимно однозначное, в паре пространств $\Pi^\Pi, \Pi^{1,0}$ существует оператор $\Gamma^{-1} : \Pi^\Pi \rightarrow \Pi^{1,0}$, обратный к оператору Γ .

Так как в силу (2.43)

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin \theta_0}{\cos \theta - \cos \theta_0} \sin k \theta_0 d\theta_0 = \cos k \theta,$$

то, делая замену $\cos \theta_0 = t_0$; $\cos \theta = t$, $|t| \leq 1$ и используя параметрические представления полиномов Чебышева, находим

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{U_{n-1}(t_0)}{t - t_0} \sqrt{1 - t_0^2} dt_0 = T_n(t), \quad n \in N \quad (4.27)$$

Таким образом, получаем интегральное представление для оператора

$$\Gamma^{-1} : \Pi^\Pi \rightarrow \Pi^{1,0} : U_{n-1}(t_0) \mapsto T_n(t), \quad n \in N \quad (4.28)$$

$$(\Gamma^{-1} p)(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{p(t_0)}{t - t_0} \sqrt{1 - t_0^2} dt_0 \quad (4.29)$$

которое проверено на базисе пространства Π^Π (27).

4.5. Тесно связан с сингулярными интегральными операторами Γ и Γ^{-1} оператор с логарифмическим ядром

$$(L^1 p)(t_0) \equiv \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln|t - t_0| p(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \quad (4.30)$$

Сначала вычислим интеграл (30) при $p(t) = T_0(t) \equiv 1$. Имеем

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln|t - t_0| \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \ln|\cos \theta - \cos \theta_0| d\theta = \ln 2 + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi \ln \left| \sin \frac{\theta - \theta_0}{2} \right| d\theta,$$

и в силу (3.20) окончательно получаем

$$\boxed{\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln|t - t_0| \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\ln 2} \quad (4.31)$$

Далее, используя тождество

$$\frac{T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}} = -\frac{1}{n} \frac{d}{dt} \left[U_{n-1} \sqrt{1-t^2} \right], \quad *) \quad (4.32)$$

для интеграла $(L^1 T_n)(t_0)$, $n = 1, 2, \dots$ последовательно находим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln|t - t_0| \frac{T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt &= -\frac{1}{\pi n} \int_{-1}^1 \ln|t - t_0| \left(U_{n-1}(t) \sqrt{1-t^2} \right)' dt = \\ &= -\frac{1}{\pi n} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left\{ \int_{-1}^{t_0 - \varepsilon} \ln|t - t_0| \left(U_{n-1}(t) \sqrt{1-t^2} \right)' dt + \int_{t_0 + \varepsilon}^1 \ln|t - t_0| \left(U_{n-1}(t) \sqrt{1-t^2} \right)' dt \right\}. \end{aligned}$$

Интегрируя по частям и переходя к пределу, находим

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln|t - t_0| \frac{T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{U_{n-1}(t)}{t - t_0} \sqrt{1-t^2} dt, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.33)$$

и, с учетом (27), получаем окончательно

$$\boxed{\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln|t - t_0| \frac{T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = -\frac{T_n(t_0)}{n}, \quad n \in N} \quad (4.34)$$

Итак, для оператора на пространстве полиномов L^1 , заданного интегральным представлением (30), имеем:

* В самом деле,

$$\frac{d}{dt} \left[U_{n-1}(t) \sqrt{1-t^2} \right] = \frac{(\sin n\theta)'}{(\cos \theta)'} = \frac{n \cos n\theta}{-\sin \theta} = -n \frac{T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$\boxed{L^I : \Pi^I \rightarrow \Pi^I : T_0(t) \mapsto (-\ln 2)T_0(t_0); T_n(t) \mapsto -\frac{T_n(t_0)}{n}, \quad n = 1, 2, \dots} \quad (4.35)$$

Пусть теперь $p_n(t)$ – произвольный полином степени n . Разложим его по базису Π_n^I :

$$p_n(t) = \sum_{k=0}^n a_{n,k} T_k(t),$$

$$\text{где } a_{n,k} = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 p_n(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, & \text{при } k = 0 \\ \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 p_n(t) T_k(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, & \text{при } k = 1, \dots, n \end{cases}$$

Используя оператор (35), находим

$$(L^I p_n)(t_0) = -a_{n,0} \ln 2 - \sum_{k=1}^n \frac{a_{n,k}}{k} T_k(t_0), \quad (4.36)$$

так что оператор L^I отображает Π_n^I на Π_n^I взаимно однозначно.

Замечание. С учетом тождества

$$T_n'(t) = n U_{n-1}(t) \quad *) \quad (4.37)$$

перепишем интегральное соотношение (33) в таком виде

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln|t - t_0| T_n(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{n^2} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{(T_n(t))'}{t - t_0} \sqrt{1-t^2} dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

В заключение установим связь между операторами L^I, Γ^{-1} и оператором дифференцирования

$$\boxed{D : \Pi^I \rightarrow \Pi^{I,0} : p(t) \mapsto p'(t)} \quad (4.38)$$

* Действительно, используя параметрические представления полиномов Чебышева, имеем

$$T_n'(t) = \frac{(\cos n\theta)'}{(\cos \theta)'} = \frac{-n \sin n\theta}{-\sin \theta} = n U_{n-1}(t)$$

На базисных элементах пространства непосредственно проверяется “правило дифференцирования интеграла с логарифмическим ядром”:

$$\boxed{\frac{d}{dt_0} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln|t-t_0| p(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{p(t)}{t-t_0} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}} \quad (4.39)$$

или в операторной форме:

$$\boxed{DL^I = -\Gamma} \quad (4.40)$$