



ISSN 0132-6414 (Print)
ISSN 1816-0328 (Online)

Физика низких температур

**Том 32
Приложение
2006**

**Low
Temperature
Physics**

www.ilt.kharkov.ua



Л.В. Шубников
(1901–1945)



В.Л. де Гааз
(1878–1960)



П.М. ван Альфен
(1906–1967)



Р.Е. Пайерлс
(1907–1995)



Л.Д. Ландау
(1908–1968)



Л. Онзагер
(1903–1976)



А.М. Косевич
(1928–2006)



И.М. Лифшиц
(1917–1982)



Д. Шенберг
(1911–2004)

Непростая история

М.И. Каганов

7 Agassiz Ave., #1, Belmont, MA 02478, USA

E-mail: MKaganov@compuserve.com

Статья поступила в редакцию 3 ноября 2005 г.

*К 75-летию работы Л.Д. Ландау
«Диамagnetизм электронного газа»*

*К 50-летию работы И.М. Лифшица и А.М. Косевича
«К теории магнитной восприимчивости
металлов при низких температурах»*

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	1
Уровни Ландау?	3
Предсказание осцилляционных явлений	5
Эффект де Гааза — ван Альфена у электронов с квадратичным законом дисперсии	8
Уровни Лифшица — Онсагера	9
Диамagnetизм электронного газа	11
Геометризация электронной теории металлов	12
Замечание об эффекте Шубникова — де Гааза	16
Геометризация электронной теории металлов (продолжение)	16
Для осцилляций магнитное поле не обязательно	19
Теория ферми-жидкости Ландау и фермиология	19
Магнитный пробой	20
Заключительные слова	22
Литература и примечания	22

PACS: 72.15.Gd

ВВЕДЕНИЕ

Работа Льва Давидовича Ландау [1], вышедшая в 1930 году, сыграла выдающуюся роль в истории электронной физики металлов. С этой работы начинается теоретическое исследование специфических магнитных свойств электронов проводимости.

В те годы физика металлов начала приобретать современные черты. Всего за несколько лет до 1930 года были сформулированы руководящие принципы, на которых основана квантовая теория металлов: в конце 20-х годов Арнольд Зоммерфельд показал, что электроны металла — вырожденный газ и, используя квантовую статистику, освободил теорию Друде — Лоренца от противоречий. Приблизительно тогда же Феликс Блох и Леон Бриллюэн заложили основы зонной теории. Зонная теория объяснила

«свободу» электронов проводимости, показав, что волновая функция электрона в периодическом поле ионов решетки — волна Блоха — модулированная плоская волна с определенным квазиимпульсом $\mathbf{p}$ — вектором, напоминающим импульс. Давая возможность, используя модели, вычислять энергетический спектр электронов (периодическую зависимость энергии электрона ϵ от квазиимпульса $\mathbf{p}$), зонная теория не отменила, а, скорее, обосновала представление об электронах проводимости (о «свободных» электронах) как о газе свободно перемещающихся по металлу частиц, длина пробега которых заметно превышает размер ячейки кристалла. Следствие зонной теории — зависимость $\epsilon = \epsilon(\mathbf{p}) \neq p^2/2m$, где m — масса электрона, изменила количественные результаты теоретических расчетов в сравнении с расчетами по теории Друде — Лоренца — Зом-

мерфеляда, но мало повлияла на качественную картину, основной чертой которой была и остается делокализация электронов проводимости.

Теория магнитных свойств электронов проводимости ограничивалась вычислением в 1927 году парамагнитной восприимчивости вырожденного газа частиц со спином $\frac{1}{2}$ (Вольфганг Паули). Наличие спина делает электрон микроскопическим магнитным диполем, а постоянное магнитное поле ориентирует диполи преимущественно по магнитному полю. Из-за вырождения электронного газа магнитная восприимчивость электронов проводимости мала (при сравнении с восприимчивостью классического газа) и очень слабо зависит от температуры. Явление получило название *парамагнетизма Паули*. Малость паулиевской парамагнитной восприимчивости создала впечатление, что диамагнетизм некоторых металлов (висмута, например) может быть результатом превосходства диамагнетизма ионного остова над парамагнетизмом электронов проводимости. Надо помнить, что в это время уже было понятно, что любой атом или ион, не обладающий собственным магнитным моментом, намагничивается так, что его магнитный момент направлен против магнитного поля (*диамагнетизм Ланжевена*, непосредственно связанный с локализацией электронов в атоме [2]).

Развитие низкотемпературной техники, с одной стороны, и появление источника сильного магнитного поля, с другой, привело к активному исследованию магнитных свойств металлов при низких температурах. Центрами этих исследований в конце двадцатых и в начале тридцатых годов прошлого века были Кембридж (Англия) и Лейден (Голландия). В Кембридже работал Петр Леонидович Капица, а в Лейдене работали Вандер Иоханес де Гааз и Лев Васильевич Шубников. В обеих лабораториях были получены уникальные (по тому времени) результаты, которые вошли в историю физики под именами тех, чьи усилия они были получены: *закон Капицы, эффекты Шубникова—де Гааза и де Гааза—ван Альфена*. Результаты Капицы и Шубникова—де Гааза на первый взгляд противоречили друг другу. В Кембридже наблюдали монотонную зависимость сопротивления с магнитным полем, а в Лейдене на экспериментальных кривых отчетливо были видны максимумы и минимумы. Потом они получили наименование *осцилляций* или даже *квантовых осцилляций*, но в первых публикациях термина *осцилляции* не было. Различие в результатах было причиной драматических переживаний. Большого труда стоило разобраться в причине расхождений.

История экспериментальных открытий, главным образом эффекта Шубникова—де Гааза, описана в статье Б.И. Веркина, С.А. Гредескула, Л.А. Пастура и Ю.А. Фреймана [3]. Работа де Гааза и ван Альфена [4] была естественным продолжением исследований Шубникова и де Гааза. Авторы были уверены, что немонотонная зависимость должна наблюдаться не только у сопротивления, а что она присуща также термодинамическим величинам. Измерение зависимости магнитного момента монокристаллов висмута от магнитного поля показало, что термодинамические характеристики ведут себя в магнитном поле аналогично сопротивлению. Явление получило название *эффект де Гааза—ван Альфена*.

Работа Л.Д. Ландау 1930 года ценна не только открытием диамагнетизма ферми-газа свободных электронов, но и *предсказанием* осцилляционных явлений. История построения теории эффекта де Гааза—ван Альфена весьма непростая. Большую и важную роль в ней сыграл Рудольф Пайерлс. Об этом будет здесь рассказано. А завершается история работой И.М. Лифшица и А.М. Косевича 1955 года «К теории магнитной восприимчивости металлов при низких температурах» [5], в которой построена современная полная теория осцилляционных явлений.

К 1955 году было выяснено, что осцилляции термодинамических и кинетических величин при низкой температуре и в достаточно сильном магнитном поле — общеметаллическое явление, причем характеристики осцилляций у разных металлов существенно различаются. Развитие модельных вычислительных методов исследования твердых тел позволяло определять форму поверхностей Ферми металлов. В большинстве случаев поверхности оказывались достаточно вычурными. Было понимание, что именно электроны, энергия которых равна энергии Ферми, определяют большинство свойств металлов.

Лифшиц и Косевич построили теорию осцилляций, не делая никаких предположений об энергетическом спектре электронов проводимости (для металлов с поверхностью Ферми любой формы). Это позволило сформулировать алгоритм восстановления формы поверхностей Ферми по данным, полученным в результате экспериментов.

Родилась *фермиология* — важный этап электронной теории металлов.

Работа Лифшица и Косевича была удивительно своевременной. Она выявила, что геометрические характеристики поверхностей Ферми определяют измеряемые на опыте величины. В эффектах де Гааза—ван Альфена и Шубникова—де Гааза площади

сечений и их производные по энергии — периоды осцилляций и их амплитуды. Подход оказался продуктивным. Он породил много теоретических работ, связавших разнообразные характеристики электронных свойств металлов с геометрическими образами их поверхностей Ферми.

Непростой путь открытия эффекта Шубникова — де Гааза — осцилляционной зависимости от магнитного поля сопротивления монокристаллов металлов при низких температурах — подробно и, я бы сказал, с горечью рассказан в статье четырех авторов [3]. Горевать было от чего: «6 августа 1937 г. в день возвращения из Крыма, где он (Л.В. Шубников) и Л.Д. Ландау проводили отпуск, Л.В. Шубников был арестован... по ложному обвинению». Произошло это в Харькове. «Через месяц он был переведен в Москву, в тюрьму на Лубянку, и 28 ноября 1937 г. осужден ОСО (Особым совещанием) на «десять лет без права переписки». Под приговором стоят подписи Ежова и Вышинского. В тот же день Л.В. Шубников был расстрелян» ([3], с. 1212). В [6] годом смерти Л.В. Шубникова указан 1945. По-видимому, таковой была лживая версия НКВД. С публикации открытия до расстрела прошло семь лет. Но преследование началось раньше: уже в 1931 году, через год после открытия, Льву Васильевичу не разрешили вернуться в Лейден, чтобы продолжить исследования.

Об аресте Ландау в 1938 году в цитируемой статье не сказано. Не потому, что авторы об этом не знали. Знали, конечно. Но дело в том, что статья посвящена экспериментальным исследованиям и открытиям. Роль Ландау, как бы, в стороне.

В той непростой истории, о которой хочу рассказать, речь пойдет о теории. И Лев Давидович Ландау играл в ней важную роль. Но не только он.

УРОВНИ ЛАНДАУ?

Начало непростой истории создания теории осцилляционных явлений в том же 1930 году, когда Шубников и де Гааз опубликовали свое открытие. Ландау (говорят, что на спор с Вольфгангом Паули) показал, что свободный электронный газ обладает не только парамагнетизмом, который обязан спине электрона, но и диамагнетизмом (см. [1]).

В плоскости, перпендикулярной магнитному полю, каждый электрон вращается по окружности, а токовый лепесток обладает магнитным моментом, направленным против поля. Неужели, споря с Ландау, этого не понимал Паули? Понимал, конечно. Но ситуация отнюдь не так очевидна. При наивном подходе радиус r орбиты электрона можно определить из равенства силы Лоренца центростремительной силе: $r = mv^2/eH$, где m , e и v — масса, заряд и ско-

рость электрона, c — скорость света, а H — величина напряженности магнитного поля. Отсюда «магнитный момент должен быть равен $\mu = mv^2/H$. Этот ответ несомненно абсурден. Значение μ не зависит от заряда электрона и уменьшается при увеличении магнитного поля, так что магнитный момент μ обращается в бесконечность при $H = 0$!» Это — цитата из книги Р. Пайерлса [7] (с. 108). Еще несколько слов из той же книги: «...ошибка давно была объяснена и исправлена Г.А. Лоренцом, на которого ссылается мисс ван Левен [8], а также Нильс Бор в копенгагенской диссертации 1911 г.» (с. 109). Правильный ответ, именуемый иногда *Бора — ван Левен теоремой* (см. [9], т. 1, с. 99), состоит в том, что при классическом описании движения электронов свободная энергия газа электронов от магнитного поля не зависит. Такой газ магнетизмом не обладает вовсе. Его магнитный момент равен нулю. Результат не зависит от того, какой статистикой описывать электронный газ: классической — максвелловской или квантовой — Ферми — Дирака.

То, что при рассмотрении диамагнетизма — при вычислении магнитного момента при $H \rightarrow 0$ — можно и нужно использовать *квантованные* (дискретные) уровни электрона, — нетривиальная идея, центральная мысль статьи.

Из статьи Л.Д. Ландау [1] история сохранила два термина: *Ландау уровни* и *Ландау диамагнетизм* (см., например, [9] т. 1, с. 462 и 466), хотя статья названа «Диамагнетизм металлов». Заметим, что из названия ясно, какой свой результат автор считал главным. Что касается диамагнетизма газа электронов, то присвоение ему имени Ландау абсолютно справедливо. Присвоение имени Ландау уровням энергии электрона в магнитном поле, надо признаться, не так бесспорно.

В том же 1930 году вышла статья Я.И. Френкеля и М.П. Бронштейна «Квантование свободных электронов в магнитном поле» [10] (см. также [11]). Формула (11) этой статьи ([11], с. 208) только обозначениями отличается от формулы (8) статьи Л.Д. Ландау. Таким образом, энергию электрона в магнитном поле практически одновременно с Ландау проквантовали Френкель и Бронштейн. В работе Ландау нет ссылки на работу Френкеля и Бронштейна, а у них — на работу Ландау.

У Ландау с Френкелем были непростые отношения (об этом сказано в [11]), но Бронштейн был близким другом Ландау. В 1930 году Бронштейн — молодой сотрудник Якова Ильича. Судьбы Бронштейна и Шубникова похожи. М.П. Бронштейн арестован 6 августа 1937 года и расстрелян 18 февраля 1938 года. То, что по ложному обвинению, не стоит добавлять. Если бы не массовость арестов и

расстрелов в период Большого террора, то сходство судеб Бронштейна и Шубникова, а также близость дат их ареста и смерти могли бы заставить подумать, что ленинградский и харьковский отделы НКВД действовали согласованно. Так это или не так, не знаю. Знаю, что преступления советского режима сопровождали непростую историю, как и все истории из жизни советских людей, внося трагические черты даже во вполне академические события.

Отвлечемся временно от того, что не связано с физикой.

Во Введении к статье Френкеля и Бронштейна есть ссылка на работу Раби [12] 1928 года, которая сопровождается следующим замечанием: «Раби показал на основании уравнений Дирака, что квантование свободных электронов в магнитном поле действительно имеет место. Для того чтобы убедиться, что дискретный ряд уровней энергии свободного электрона, движущегося в магнитном поле, не является одним из парадоксов, связанных с уравнениями Дирака, а соответствует *реальному физическому явлению* (курсив мой, М.К.), хотя еще и не обнаруженному экспериментально, полезно показать, что такое квантование неизбежно возникает во всякой форме квантовой теории — как в «полуклассической» механике Бора, так и в волновой механике Шредингера и Дирака».

Квантование, естественно, «возникает», что авторы, конечно, и показали. «Оправдание» избранной темы исследования вызывает улыбку. Но надо вспомнить, что Раби использовал релятивистское волновое уравнение в том же 1928 году, когда оно было сформулировано Дираком, а в 1930 году еще сомневались, всем ли следствиям из него можно доверять. Позитрон, открытие которого окончательно убедило в справедливости теории Дирака, был обнаружен в 1932 году, через два года после того, как Френкелем и Бронштейном была написана цитируемая статья.

А вот как Рудольф Пайерлс, сыгравший в этой истории важную роль, описывает исходные положения, использованные Ландау для предсказания диамагнетизма электронного газа: «Чтобы получить ответ (*существует диамагнетизм или нет*, М.К.), Ландау рассмотрел сначала движение в плоскости, перпендикулярной магнитному полю. Так как классическое движение просто периодическое и уравнения движения линейны, сразу можно сделать вывод, что собственные значения энергии есть

$$E_n = (n + 1/2)(\hbar e H / c) = (2n + 1)\mu H, \quad (1)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots,$$

где μ — магнетон Бора» ([7], стр. 111).

Казалось бы, с этого и можно было начать. Но Ландау делает все вполне последовательно. Он выбирает наиболее удобный вид для вектора-потенциала, подчеркивает сходство с осциллятором и аккуратно квантует движение электрона в плоскости, перпендикулярной магнитному полю. Дело в том, что для вычисления магнитного момента необходимо знать не только уровни энергии, но и плотность состояний на каждом уровне. Именно для этого и была вся выкладка проделана столь аккуратно (см. формулу (19) в [1]).

Теперь о цитировании работы Френкеля и Бронштейна [10]. В работе 1930 года Ландау, по-видимому, не мог процитировать их работу, так как, скорее всего, ее не знал, как не знали о работе Ландау Френкель и Бронштейн. Сделал и написал Ландау свою работу в Англии, в Кембридже. В командировке за рубежом он находился уже довольно долго. Но если бы даже знал, должен ли был он ее цитировать? Скорее, работы Раби и Фока. Или все три?

На протяжении всей своей научной жизни Ландау цитировал только то, что было необходимо для понимания его статей. Похоже, Ландау всегда исходил из того, что автор не обязан заниматься историей науки, а должен донести до читателя тот *новый* результат, который он получил. Надо признаться, что к *заимствованиям* Ландау относился строго. Естественно, когда заимствовали нечто у него, особенно строго. Но ни о каком заимствовании в данном случае речи быть не может.

Должна ли была быть процитирована работа в «Квантовой механике» Ландау и Лифшица? В § 112 «Движение в однородном магнитном поле» (см. [13]) фамилия Ландау упоминается дважды. В начале параграфа (с. 522): «Определим уровни энергии в постоянном однородном магнитном поле (Л.Д. Ландау, 1930)». Все изложение ведется так же, как в работе Ландау 1930 года. Следует отметить, что в работе [10] использован другой вид вектора-потенциала, а аналогия с осциллятором вовсе не подчеркнута (ср. со сказанным Пайерлсом).

Второй раз сказано, что дискретные уровни энергии «*называют* уровнями Ландау» (с. 524). Хочу подчеркнуть: не *называются*, а *называют* (в третьем лице), что соответствует действительности. В тексте параграфа, правда, выделены слова «*уровнями Ландау*», а не глагол «*называют*».

С работой Френкеля и Бронштейна я познакомился по сборнику [11], когда писал статью «Сквозь призму истории» для Вестника Российской академии наук в рубрику «Рамышления над прочитанной книгой» (том 66, № 9, с. 841–847). Так как в [11] вопрос об отсутствии в работах Ландау и в «Квантовой механике» ссылок на обсуждаемую ра-

боту поставлен, я не обошел его молчанием. Но, как я там написал, лишь ограничился «постановкой этого вопроса». Хотя мне не хотелось так думать, я считал, что дело в натянутых отношениях между Ландау и Френкелем. Как и многие, я знал, что отношение Ландау к Френкелю было не очень хорошим. Как относился Френкель к Ландау, я не знал. Я не мог понять, в чем причина плохих отношений. Признаться, не понимаю и до сих пор.

Я обратился к Виктору Яковлевичу Френкелю — сыну и историографу Якова Ильича, надеясь, что он сможет разъяснить причину плохих отношений между двумя замечательными физиками. Вот как я описал в Вестнике РАН (с. 846, 847) ответ Виктора Яковлевича: «...не объяснив этих (плохих) отношений, В.Я. перечислил несколько поступков своего отца, несомненно доброжелательных по отношению к Ландау..., и заметил, что, по его мнению, Ландау, начиная с какого-то времени, стал несимпатичен его отцу». В качестве доказательства Виктор Яковлевич привел цитату из письма Якова Ильича (опубликовано на с. 190 в [11]): «Я замечаю, что проявляю излишнюю терпимость в оценке научных достижений тех физиков, которые мне не симпатичны...» Как считал Виктор Яковлевич, в большой мере эта цитата относится к Ландау.

В разговорах со мной Виктор Яковлевич, с которым мы дружили, говорил более определенно, подчеркивая неуважительное поведение Ландау по отношению к Якову Ильичу. Мне всегда казалось, что Виктор Яковлевич, безумно любивший отца, несколько преувеличивал серьезность проступков Ландау (для понимания поведения Ландау полезно прочесть очерк Е.Л. Фейнберга «Два Ландау» [14]). В частности, в отсутствии ссылки на работу Френкеля и Бронштейна в «Квантовой механике» я не вижу никакого злого умысла.

Полное забвение работы [10] огорчает. В этом есть несомненная историческая несправедливость. Ведь в работе есть по-настоящему оригинальное и опережающее время утверждение: «...электрон в магнитном поле занимает дискретные уровни энергии и при переходе из одного квантового состояния в более низкое испускает монохроматическое излучение..., переходу соответствует только одна длина волны $\lambda_0 = 1,1 \cdot 10^4 / H$ (см), где H — напряженность магнитного поля. Это излучение, еще не обнаруженное..., является, по-видимому, необходимым следствием квантовой механики ([11], с. 210)».

Там, где есть излучение, должно быть и поглощение. Если из цитаты убрать осторожное *по-видимому*, то, по-видимому, это утверждение — одно из первых, а, скорее всего, первое предсказание цик-

лотронного резонанса. Похоже, этот факт прошел даже мимо В.Я. Френкеля.

Циклотронный резонанс был открыт и изучен как в полупроводниках [15], так и в металлах, где, благодаря аномальному скин-эффекту, циклотронный резонанс имеет свою специфику, предсказанную М.Я. Азбелем и Э.А. Канером. Поэтому циклотронный резонанс в металлах называют Азбель — Канер-резонансом [16].

Сначала *циклотронный* резонанс назывался *диамагнитным*, но это название не закрепилось (см. [9], т. 1, с. 236, термин «диамагнитный резонанс»). Вспоминаю, что Яков Григорьевич Дорфман, предложивший использовать диамагнитный (циклотронный) резонанс для измерения эффективной массы электронов в полупроводниках, пытался «защитить» термин *диамагнитный резонанс*, утверждая, что не следует именовать физическое явление по названию прибора — циклотрона. И все же название *диамагнитный резонанс* не закрепилось.

Не могу ответить на вопрос, кто первым употребил термин *уровни Ландау*. Название закрепилось, похоже, навсегда.

Диамagnetизм электронного газа как результат квантования движения электронов в магнитном поле 75 лет назад, несомненно, предсказал Лев Давидович Ландау.

ПРЕДСКАЗАНИЕ ОСЦИЛЛЯЦИОННЫХ ЯВЛЕНИЙ

Статью [1] Л.Д. Ландау писал в Кавендишской лаборатории, в Кембридже, где Петр Леонидович Капица проводил исследования зависимости от магнитного поля сопротивления металлов (в частности, и висмута). Публикации с результатами о висмуте вышли из печати в 1928 году. Цикл работ Петра Леонидовича того времени [17] привел, как известно, к открытию *закона Капицы* — линейного роста сопротивления металлов с магнитным полем, если магнитное поле достаточно сильное. В это же время в Лейдене Лев Васильевич Шубников и Вандер Иоханес де Гааз установили, что сопротивление висмута при низких температурах отнюдь не монотонно зависит от достаточно сильного магнитного поля. Хотя рекордно большое магнитное поле было у Капицы, но, как установили в Лейдене, у Капицы были недостаточно хорошие образцы, а температура — недостаточно низка. Причина различия была понята. Капица не мог наблюдать осцилляций, или немонотонной зависимости, как тогда называли открытое в Лейдене явление.

Эта, несомненно, драматическая ситуация довольно подробно описана в статье Б.И. Веркина и др. [3]. Не буду ее цитировать. Теперь, когда поня-

то, что Шубников и де Гааз наблюдали квантовые осцилляции, в этом различии нет загадки: азотная температура, самая низкая, при которой производил эксперименты П.Л. Капица, слишком высока. К тому же, как оказалось, и образцы у Капицы были хуже, чем у Шубникова и де Гааза.

Чтобы наблюдать осцилляции, Шубников и де Гааз проводили эксперименты при водородной температуре. Выше упоминалось: в 1931 году Льва Васильевича не выпустили из СССР в Лейден, где он и де Гааз предполагали провести измерения при гелиевой температуре. Отличие от результатов Капицы было бы еще разительней. Позднее, в 1935 году, без непосредственного участия Шубникова, сопротивление висмута в магнитном поле при гелиевых температурах было измерено [18]. Следует подчеркнуть, что в составе авторского коллектива Лев Васильевич Шубников есть. Очевидно, соавторы хотели подчеркнуть роль коллеги, которому не дали возможности продолжить начатую им и такую успешную работу, а, возможно, де Гааз и Вольф пользовались советами Шубникова.

Цикл статей, сообщающих об открытии нового явления, был опубликован лишь в 1930 году в выпусках «Сообщений физической лаборатории Лейденского университета» (Leiden Commun., ссылки [1–6] в статье Б.И. Веркина и др. [3]).

Знал ли Ландау, когда писал работу о диамагнетизме, что неоспоримо наблюдается немонотонная зависимость от магнитного поля сопротивления и магнитного момента висмута в Лейдене? Я был уверен, что Ландау об этом не знал. Действительно, трудно себе представить, что, зная о наблюдении осцилляций, Ландау высказался бы столь определенно о ненаблюдаемости осцилляций. Не следует умалчивать, что, предсказывая периодическую зависимость магнитного момента, он вполне недвусмысленно замечает, что этот эффект ненаблюдаем.

Приведем цитату из [1]. Записав условие применимости теории диамагнетизма в виде неравенства (32): $\mu H \ll kT$, Ландау утверждает: «Условие (32) перестает выполняться при очень низких температурах и в сильных полях. В этом последнем случае могла бы возникнуть сложная нелинейная зависимость магнитного момента от поля, которая к тому же имела бы сильную периодичность по полю. Однако именно благодаря периодичности наблюдение нелинейных явлений вряд ли возможно экспериментально, поскольку из-за неоднородности реальных полей всегда будет происходить усреднение» ([1], с. 52 в Собрании трудов, т. I, курсив мой, М.К.).

Ю.А. Фрейман обратил мое внимание на то, что в 1929 году Ландау посетил Лейден [19]. Невозможно себе представить, чтобы знакомый ему по Ленингра-

ду Л.В. Шубников не поделился с ним своим открытием. Надо подчеркнуть, что Шубников и де Гааз свое открытие высоко оценивали. Краткое сообщение о нем публикуется в *Nature* [20]. И в лейденской публикации, и в *Nature* в названии статей есть слова *новое явление*.

В чем же дело, почему Ландау об этом не обмолвился? Сказать что-либо вполне определенное я не могу. Можно высказать лишь предположения. Теперь мы знаем, что период предсказанных Ландау осцилляций существенно зависит от размеров поверхности Ферми. Ландау делал оценку, исходя из модели Друде — Лоренца — Зоммерфельда. По этой модели плотность электронов проводимости (свободных электронов) должна быть $\sim 10^{23} \text{ 1/см}^3$. При такой плотности электронов период осцилляций очень мал. В 30-е годы осцилляции с такими периодами действительно были ненаблюдаемы (ни сверхчистых монокристаллов, ни необходимых магнитных полей не было в распоряжении экспериментаторов). Заметим к тому же, что в публикациях Шубникова и де Гааза слова *осцилляции* не было. Авторы считали своим открытием немонотонную зависимость характеристик висмута от магнитного поля, наличие минимумов и максимумов. Лейденские кривые значительно отличались от того, что следовало из оценок Ландау. Похоже, Ландау не мог себе представить, что природа открытых в Лейдене явлений та, о которой он упоминает в приведенном отрывке из работы [1].

Возможно, есть еще одна причина умолчания результатов Шубникова и де Гааза. Линейная зависимость от магнитного поля сопротивления уже как бы прошла проверку временем (с момента опубликования Капицей своих результатов прошло два года), а статьи с описанием немонотонных зависимостей либо только вышли из печати, либо даже еще не были опубликованы. Любопытно, что Ландау в работе [1], упоминая о линейной зависимости сопротивления, не приводит ссылку на опубликованную работу П.Л. Капицы (см. ниже).

Подчеркнем: хотя Ландау в статье [1] 1930 года сомневался в возможности наблюдения осцилляций, он понимал, что квантование энергии электрона должно привести к существованию осцилляционных явлений. Не теоретики, а экспериментаторы должны найти возможность и объекты, которые позволят обнаружить явление. Экспериментаторы в дальнейшем блестяще справились с этой задачей.

Будем точны: Ландау в работе [1] говорит не об эффекте Шубникова — де Гааза, а об эффекте де Гааза — ван Альфена. По-видимому, работа [1] несколько опередила публикацию де Гааза и ван Альфена. Описание экспериментального открытия

«сложной нелинейной зависимости магнитного момента от поля» авторы опубликовали в том же 1930 году и снова в *Leiden Commun.* Несомненно, что Ландау полученные в Лейдене результаты Шубникова—де Гааза не трактовал как осцилляции. Для меня остается открытым вопрос, знал ли Ландау о наблюдении немонотонной зависимости магнитного момента от магнитного поля. Экспериментаторы (Шубников и де Гааз), наблюдавшие осцилляции, не только не знали природы явления, но и не произнесли слово *осцилляции*.

Хочется обратить внимание на интуицию, которую проявили как Шубников и де Гааз, так и Ландау. Все они прекрасно понимали, что должна быть корреляция между зависимостями от магнитного поля магнитного момента и сопротивления металла. Понимали до того, как теория обоих явлений была построена. Знал Ландау, что осцилляционные явления наблюдаются, их теория была бы опубликована на несколько лет раньше, чем опубликована была фактически, а с ее публикацией не возникли бы драматические осложнения.

Как уже отмечалось, открытие нового макроскопического квантового явления — осцилляций с магнитным полем электронных характеристик металлов — знаменует начало нового этапа в изучении нормальных (несверхпроводящих) металлов. Теперь мы знаем, что осцилляционные эффекты необычайно информативны. Форма поверхностей Ферми большинства металлов установлена путем исследования осцилляционных явлений. Но еще до того, как началось планомерное восстановление формы ферми-поверхностей по периодам осцилляций, эффекты Шубникова—де Гааза и де Гааза—ван Альфена привлекали внимание тем, что в каждом металле осцилляционные эффекты выглядели непривычно индивидуально. Вспомним, что по большинству свойств, таких, как сопротивление, теплопроводность, поверхностный импеданс, теплоемкость, все металлы похожи друг на друга.

В учебниках и монографиях диамагнетизм (вместе с эффектом де Гааза—ван Альфена) и гальваномагнитные явления (вместе с эффектом Шубникова—де Гааза) излагаются в разных частях теории твердого тела: диамагнетизм и эффект де Гааза—ван Альфена — в статистической термодинамике, а гальваномагнитные явления и эффект Шубникова—де Гааза — в кинетике, хотя все эти явления — различные следствия одного и того же — влияния силы Лоренца на движение электронов проводимости.

Естественно, занимаясь в Кембридже исследованием поведения свободных электронов в магнитном поле, Ландау задумывался о результатах П.Л. Ка-

пицы. В статье об этом сказано: «В заключение я хотел бы высказать *предположение*, что изученное явление может прояснить причины открытого П.Л. Капицей эффекта линейного изменения сопротивления в магнитном поле» ([1], с. 55 в Собрании трудов, т. I). Слово *предположение* выделил я, чтобы подчеркнуть неполную уверенность автора в справедливости своего высказывания. Теперь известно, что монотонная зависимость сопротивления от магнитного поля не связана с квантованием движения электронов проводимости в плоскости, перпендикулярной магнитному полю. Существенную роль играет характер закона дисперсии электронов и, в частности, топология поверхности Ферми металла [21, 21a].

Приведем из работы [1] еще два важных замечания.

Во-первых, как сказано там, в малых полях зависимость сопротивления от магнитного поля должна быть квадратичной (квадратичная зависимость — следствие симметрии кинетических коэффициентов, чего Ландау не разъясняет).

Во-вторых, приведена оценка, какое поле надо считать большим. Оценка сформулирована в виде неравенства

$$H \gg e c(N/V) \rho, \quad (2)$$

((40) в [1]), где ρ (у Ландау R) — удельное сопротивление рассматриваемого кристалла. Это неравенство совпадает с неравенством $l \gg r_H$, где l и r_H — длина свободного пробега и радиус орбиты в магнитном поле фермиевских электронов. В статье это отмечено. Большая длина пробега по сравнению с радиусом орбиты обеспечивает электрону возможность несколько раз обойти вокруг магнитных силовых линий, что существенно и при описании осцилляционных эффектов (де Гааза—ван Альфена и Шубникова—де Гааза), и в теории гальваномагнитных явлений. Важно то, что неравенство записано Ландау через удельное сопротивление. Оно предвосхищает на восемь лет формулировку *правила Колера* [22].

Правило Колера позволило упорядочить данные по магнитосопротивлению и сформулировать общие утверждения о поведении различных металлов в магнитном поле. Это было весьма существенно для теории гальваномагнитных явлений и помогло при сравнении теории с экспериментом (см. [21], §§ 27, 28).

Напомним: согласно правилу Колера

$$\Delta \rho = [\rho(H) - \rho(0)] / \rho(0) \quad (3)$$

следует представлять как функцию $H_{\text{эфф}} = H[\rho_{273} / \rho(0)]$. Обозначения таковы: ρ_{273} — константа данного *металла* — удельное сопротивление

при температуре 273 К, $\rho(H)$ — удельное сопротивление в поле H , а $\rho(0) = \rho(H = 0)$ — удельное сопротивление образца при $H = 0$, в обоих случаях — при температуре эксперимента. При низкой температуре $\rho(0)$ и $\rho(H)$ зависят от состояния образца (его чистоты, наличия или отсутствия дислокаций и пр.). Эффективное магнитное поле $H_{\text{эфф}}$ с точностью до численного множителя, общего для всех образцов данного металла, совпадает с отношением l/r_H (см. выше).

В конце статьи Л.Д. Ландау пишет: «Поле (40) находится в хорошем согласии с критическим полем в опытах П.Л. Капицы, что можно рассматривать как подтверждение теории (см. выше, М.К.). Построить количественную теорию мне пока не удалось».

Эта грустная констатация, сделанная 75 лет назад, напомнила мне события 50-летней давности. Руководитель Криогенной лаборатории УФТИ Борис Георгиевич Лазарев любил подчеркивать, что теоретики не всегда правы. На семинаре Криогенной лаборатории, когда там докладывалась теория гальваномагнитных явлений [23,24] Б.Г. заметил: «А Ландау-то считал занятие гальваномагнитными явлениями зоологией». Зоологией Ландау называл получение и собирание большого количества опытных данных, не подкреплённых связывающей идеей. Действительно, долгое время Ландау не поддерживал экспериментальные исследования гальваномагнитных свойств металлов, считая, что получаемые экспериментальные данные малоинформативны.

Когда теория гальваномагнитных явлений рассказывалась Ландау, то обратила на себя внимание его необычная придирчивость. Казалось, ему не верится, что удалось построить теорию, свободную от упрощающих предположений об электронном спектре. Когда Ландау убедился, что результаты верны, он высоко оценил работу и подчеркивал ее значение. Неужели в течение 25 лет Ландау ощущал огорчение, что ему не удалось построить количественную теорию гальваномагнитных явлений?! Заметим, что теория гальваномагнитных явлений разъяснила природу закона Капицы (см., например, [25]; в обоих источниках есть ссылки на оригинальные работы).

ЭФФЕКТ ДЕ ГАЗА—ВАН АЛЬФЕНА У ЭЛЕКТРОНОВ С КВАДРАТИЧНЫМ ЗАКОНОМ ДИСПЕРСИИ

В «Курсе теоретической физики» Ландау и Лифшица теория эффекта де Гааза—ван Альфена изложена дважды — в обеих частях Статистической физики ([26] и [27]). В первой части выведена формула осцилляционной зависимости магнитного

момента газа свободных электронов в магнитном поле, а во второй части изложена теория эффекта де Гааза—ван Альфена металлов, у которых электроны проводимости — квазичастицы-фермионы, закон дисперсии которых произволен.

В первой части после получения выражения для осциллирующей части магнитного момента свободного газа электронов стоит: (Л.Д. Ландау, 1939), но после фразы «Эта функция осциллирует с большой частотой» есть подстрочное примечание: «Эффект осцилляций намагниченности был качественно предсказан Ландау (1930). Это явление в металлах называют эффектом де Гааза—ван Альфена.» (с. 205). Качественным предсказанием эффекта осцилляций авторы считают приведенную выше фразу из статьи Ландау «Диамagnetизм электронов» [1].

В Собрании трудов Л.Д. Ландау (1969) упоминается лишь одна работа, датированная 1939 годом: «Об эффекте де Гааза—ван Альфена» (том 1, с. 317). В примечании к названию статьи указано: «Приложение к статье Д. Шенберга, *Proc. Roy. Soc. A170*, 363 (1939)».

Статья начинается следующей фразой: «Для получения формулы для магнитной восприимчивости при низких температурах (в изотропном случае) мы начнем с уравнений (17) и (18) работы Блэкмана [1]...» В списке литературы стоит: [1] Blacman, *Proc. Roy. Soc. A166*, 1 (1938). И кончается текст упоминанием статьи Блэкмана: «Переход к анизотропному случаю производится аналогично тому, как это сделано в статье Блэкмана...» (с. 319).

Ссылка на работу Блэкмана выдает автора текста Приложения. Это, несомненно, Р. Пайерлс. В его книге [7] «Сюрпризы в теоретической физике», в которой кратко изложена теория эффекта де Гааза—ван Альфена (§ 4.4), есть историческая справка. Приведу ее полностью: «Осцилляторное поведение было отмечено Ландау в его первой работе по диамagnetизму, но он считал, что на практике эти осцилляции ненаблюдаемы. Поэтому открытие осцилляций в В_i де Гаазом и ван Альфеном показалось совершенно таинственным.» Затем автор этой книги (Р. Пайерлс), пропустив или забыв замечание Ландау, предложил квантование орбиты как источник эффекта и проиллюстрировал это грубыми численными расчетами, которые позднее были продолжены Блэкманом. *Использование формулы суммирования Пуассона было предложено Ландау* (курсив мой, М.К.). Более полное изложение вопроса см. в книге Д. Шенберга [28].

Всё — правда, но не вся правда. С апреля 1938 года до апреля 1939 года Ландау находился под арестом. История его освобождения героическими

усилиями Петра Леонидовича Капицы хорошо известна. К страданиям в застенках Лубянки невозможность опубликовать теорию эффекта де Гааза — ван Альфена для Ландау мало что добавила. Д. Шенберг в этот злополучный год заканчивал свою работу по исследованию квантовых осцилляций в *Bi* в Институте физических проблем, используя знаменитый капицевский магнит. По-видимому, вместе со своими записями он вывез черновик работы Ландау. Этот черновик и лег в основу Приложения к статье Шенберга.

И еще одно дополнение — цитата из воспоминаний Александра Ильича Ахиезера [29]: «...я был потрясен его математическим талантом..., когда Ландау занялся теорией эффекта де Гааза — ван Альфена... Для описания этих осцилляций Ландау применил некий прием, который нам сперва был непонятен. За разъяснением я обратился к моему брату (к математику Науму Ильичу Ахиезеру, М.К.), и он объяснил мне, что Ландау, по сути, пришел независимо к знаменитой формуле Пуассона, о которой он ничего не знал» (выделено мною, М.К.).

Конечно, в «Сюрпризы в теоретической физике» теория эффекта де Гааза — ван Альфена попала не из-за осложнений с ее публикацией. Р. Пайерлс посчитал сюрпризом, как легко справился Ландау с трудностью, обязанной тому, что эффект описывается функцией с существенной особенностью, для вычисления которой нельзя использовать теорию возмущений, хотя в задаче есть малый параметр. В дальнейшем использование формулы Пуассона при рассмотрении осцилляционных явлений в ферми-системах стало традиционным.

Перечитывая главу из книжки Рудольфа Пайерлса, поражаюсь скромности и чуткости автора. По сути, его усилиями не только метод расчета осцилляций, использованный Ландау, занял подобающее ему место в истории физики, но и замечание 1930 года превратилось в *предсказание* осцилляционных явлений. Несомненно, его (и Блэкмана) «грубые численные расчеты» были необходимы Д. Шенбергу, чтобы превратить наблюдение немонотонных зависимостей в четко выраженные квантовые осцилляционные явления. Конечно, слава первооткрывателям, но что было бы с их открытиями, если бы за ними не шли последователи?!

Я общался и с Р. Пайерлсом и с Д. Шенбергом. Пайерлс даже был у нас дома, в Москве. Общение с обоими доставило большое удовольствие. Какая-то особая интеллигентность отличала обоих. В письмах мы обсуждали некоторые возникавшие при редактировании переводов вопросы. Их замечания всегда были доброжелательными и при этом вполне четкими, разговоры с ними — искренними и довери-

тельными. Не стоит забывать, что происходили они в достаточно жесткие времена.

Не только Пайерлс, но и Шенберг бережно относился к памяти Ландау, ценил все сделанное им. Обидно читать в короткой биографии Дэвида Шенберга, помещенной в биографическом справочнике [6]: «Открыл эффект де Гааза — ван Альфена на многих металлах, построил (1939) его теорию и использовал для определения формы и размеров поверхности Ферми металлов» (с. 300, выделено мною, М.К.). Все сказанное после запятой неверно. То, что построение теории эффекта де Гааза — ван Альфена приписано Шенбергу, объясняется просто: ведь теория Л.Д. Ландау изложена в Приложении к работе Шенберга 1939 года. Она-то и приписана Шенбергу. Но и конец фразы ошибочен: в 1939 году не была еще построена теория эффекта де Гааза — ван Альфена для металлов с поверхностями Ферми произвольной формы. В Приложении (в работе Ландау) выведены формулы, пригодные для металла, поверхность Ферми которого — эллипсоид или несколько эллипсоидов.

Во второй части «Статистической физики» (см. [27]) изложению теории эффекта де Гааза — ван Альфена предшествует замечание: «Осциллирующая часть намагнитченности определяется, как мы увидим, лишь электронами проводимости в окрестности ферми-поверхности и может быть рассмотрена в общем виде (И.М. Лифшиц, А.М. Косевич, 1955). Именно эта часть и будет интересовать нас здесь» (с. 308).

УРОВНИ ЛИФШИЦА—ОНСАГЕРА

В 1955 году (50 лет назад) вышла подробная работа [5], которую имеют в виду Е.М. Лифшиц и Л.П. Питаевский. Во Введении И.М. Лифшиц и А.М. Косевич аккуратно перечисляют все известные им работы предшественников по теории эффекта де Гааза — ван Альфена. Воспроизведем часть Введения с небольшими купюрами:

«Периодическая зависимость магнитной восприимчивости от поля при низких температурах (эффект де Гааза — ван Альфена)... наблюдается для большого числа металлов (в работах кембриджских и харьковских физиков, М.К.) и может считаться общеметаллическим свойством. Между тем количественная теория этого эффекта была до последнего времени разработана только для случая электронного газа с квадратичным законом дисперсии [2] (см. здесь [30]), [2a] (см. здесь [31]).

Квадратичный закон дисперсии для электронов в металле справедлив лишь у дна... энергетической зоны и может быть использован при рассмотрении свойств металлов, имеющих малое число электро-

нов проводимости (например, висмут). В общем случае нет оснований пользоваться квадратичным законом дисперсии, вследствие чего представляется существенным выяснение того, в какой мере особенности эффекта связаны с законом дисперсии электронов. Некоторые качественные соображения по этому поводу были высказаны в работе [3] (см. здесь [32]). Количественная теория была дана в работе авторов [4] (см. здесь [33]).

Данная статья содержит подробное изложение результатов, опубликованных ранее в кратком сообщении [4] и дополненных учетом спинного парамагнетизма (учет спинного парамагнетизма в случае квадратичного закона дисперсии был произведен в работах [2а] (см. здесь [31])» ([5], с. 27).

Из этой цитаты следует, что теория фактически была построена не в 1955, а в 1954 году. Это стоит иметь в виду, иначе возникают противоречия. В Собрании трудов И.М. Лифшица, которое мы уже цитировали (см. [5]), работы расположены в хронологическом порядке. Если не учитывать работу [33], то может возникнуть впечатление, что работы, *развивающие* теорию эффекта де Гааза—ван Альфена (в частности, работа [34] с А.В. Погореловым о восстановлении электронного энергетического спектра по квантовым осцилляциям), сделаны до того, как построена сама теория. С другой стороны, учет спинного расщепления уровней энергии отличает работу [5] от ее краткого изложения [33], что делает именно 1955 год годом создания теории эффекта де Гааза—ван Альфена.

Я не знаю, была ли известна Шенбергу работа Ахиезера 1939 года [31]. Мне хочется думать, да. Тогда Шенберг мог на нее сослаться, но, по-видимому, вполне сознательно поместил в Приложение к своей статье теорию Ландау. Ландау находился в тюрьме, Дэвид Шенберг хотел подчеркнуть, что не забывает коллегу и друга. И это его чувство разделял с ним Р. Пайерлс.

По воспоминаниям А.И. Ахиезера ясно, что он, Ахиезер, делал работу по теории эффекта де Гааза—ван Альфена под непосредственным руководством Ландау. Могу себе представить переживания Александра Ильича, которому обстоятельства не позволили упомянуть в работе своего учителя.

Работа И.М. Лифшица и А.М. Косевича «К теории магнитной восприимчивости металлов при низких температурах» [5] сыграла выдающуюся роль. Прежде всего тем, что сформулировала алгоритм для расшифровки энергетического спектра электронов. Возникла возможность экспериментального определения формы поверхности Ферми $\epsilon(p) = \epsilon_F$ и значений скоростей v электронов на ней. Особенно

важна была возможность определения формы поверхности Ферми. В этом смысле наиболее очевидный результат теории — формула, связывающая период осцилляций $\Delta(1/H)$ с *экстремальной* площадью сечения поверхности Ферми плоскостью, перпендикулярной магнитному полю (обозначим ее $S_{\text{extr}}(\epsilon_F)$):

$$\Delta(1/H) = 2\pi e h / c S_{\text{extr}}(\epsilon_F). \quad (4)$$

Площадь сечения изоэнергетической поверхности плоскостью, перпендикулярной магнитному полю $\mathbf{H}$ ($H_x = 0$, $H_y = 0$, $H_z = H$), есть функция ϵ и p_z : $S = S(\epsilon, p_z)$, а $S_{\text{extr}}(\epsilon_F) = S(\epsilon_F, p_z^m)$, экстремум вычисляется по p_z , при $p_z = p_z^m$ производная $\partial S(\epsilon_F, p_z) / \partial p_z$ равна нулю.

В настоящее время поверхности Ферми практически всех металлов и многих интерметаллических соединений известны. Хотя, несомненно, важную роль играли и модельные расчеты, но используемые экспериментальные методы в большой степени основываются на формуле (4).

То, что осцилляционные эффекты были осознаны как общеметаллическое явление, — заслуга физиков-экспериментаторов Харькова (Украина) и Кембриджа (Англия). Исчерпывающая теория эффекта де Гааза—ван Альфена, пригодная для восстановления формы поверхности Ферми металлов, была создана в Харькове. Тогда же (1955 г.), в Харькове, И.М. Лифшиц и А.В. Погорелов [34] показали, что задача восстановления формы ферми-поверхности по зависимости периодов осцилляций $\Delta(1/H)$ от направления магнитного поля $\mathbf{H}$ имеет (при определенных предположениях) *аналитическое* решение, ими же было показано, что температурная зависимость амплитуд осцилляций позволяет восстановить скорости фермиевских электронов.

Казалось бы, близость теоретиков и экспериментаторов, занятых одной проблемой, могла бы привести к тому, что именно Харьков станет центром планомерных исследований по определению электронного спектра металлов с использованием осцилляционных явлений. Центр возник, но... «нет пророка в своем отечестве».

Восстановлением ферми-поверхностей металлов по периодам осцилляций занялись физики школы Д. Шенберга — его ученики и сотрудники, прежде всего в Кембридже. Теперь, когда прошло много лет после описываемых событий, можно с большой долей уверенности сказать, что физики-экспериментаторы в Харькове отвлеклись, занявшись не слишком важными и до сих пор не востребованными подробностями осцилляционных явлений, потратили много времени на описание кривых и их огибающих вместо того, чтобы главное внимание уделить детальному измерению анизотропии периодов ос-

цилляций. Именно анизотропия периодов, то есть зависимость периодов от направления магнитного поля $\mathbf{H}$, дает возможность восстанавливать форму поверхностей Ферми металлов.

Построение теории эффекта де Гааза—ван Альфена, естественно, не ограничивается вычислением периодов осцилляций. Лифшиц и Косевич, считая электроны проводимости идеальным газом фермионов с произвольным законом дисперсии, вычислили осциллирующую часть термодинамического потенциала Ω — функцию химического потенциала ζ_e электронов проводимости. Условиями наблюдения осцилляционных эффектов служат усиленные неравенства $\mu H \ll \zeta_e$ и $kT \ll \zeta_e$. Химический потенциал при этом с большой точностью равен энергии Ферми ($\zeta \cong \epsilon_F$). Неравенства позволяют использовать метод перевала. Метод перевала выделяет электроны с энергией порядка энергии Ферми ϵ_F и обеспечивает справедливость формулы (4). Очень важно, что вычисленный таким образом с помощью формул термодинамики магнитный момент металла (формулы (2.17) и (2.18) в [5]) определяется электронами поверхности Ферми. Остальные электроны оказываются неэффективными.

Амплитуда осцилляций весьма чувствительна к соотношению между μH и kT . При $\mu H \ll 2\pi^2 kT$ всеми гармониками, кроме основной, можно пренебречь, что делает ее особенно удобной для анализа.

ДИАМАГНЕТИЗМ ЭЛЕКТРОННОГО ГАЗА

Кроме осциллирующей части, магнитный момент $\mathbf{M}$ металла содержит монотонную часть, линейно стремящуюся к нулю при $H \rightarrow 0$ ($\mathbf{M} = \kappa \mathbf{H}$, в общем случае $M_i = \kappa_{ik} H_k$). Будет ли магнитная восприимчивость к больше или меньше нуля, зависит от соотношения между пара- и диамагнитными ее слагаемыми ($\kappa = \kappa_{\text{пара}} + \kappa_{\text{диа}}$, $\kappa_{\text{пара}} > 0$, $\kappa_{\text{диа}} < 0$). У многих металлов $\kappa_{\text{пара}}$ и $|\kappa_{\text{диа}}|$ одного порядка. В то время как парамагнитная восприимчивость создается электронами с энергией порядка энергии Ферми, диамагнитная восприимчивость создается всеми электронами; даже электроны заполненных зон и ионного остова дают в нее вклад.

В работе [5] есть Приложение (с. 37–39), в котором вычисляется $\mathbf{M}$ при $H \rightarrow 0$. Полученные выражения (формулы (П.1) и (П.2)) сопровождаются следующим справедливым замечанием: «Эти выражения должны описывать постоянную часть диамагнетизма электронного газа. В случае квадратичного закона дисперсии... (П.2) переходит в известную формулу Ландау. Однако в общем случае наши формулы для постоянной части диамагнитной восприимчивости могут оказаться неверными, поскольку

ку нельзя пользоваться квазиклассическими уровнями энергии в окрестности $S(\epsilon, p_z) = 0 \dots$ »

Вычисление диамагнитной восприимчивости электронов незаполненных зон (электронов проводимости) если и возможно, то только исходя из какой-либо модели, с помощью термодинамической теории возмущений по магнитному полю, что и было сделано в работах [35]. Однако и результаты этих работ вызывают сомнения, о чем будет сказано ниже при обсуждении описания электронов проводимости теорией ферми-жидкости Ландау.

Небольшое отступление, позволяющее продемонстрировать необычный взгляд на диамагнетизм Ландау. Обычно подчеркивают различную природу диамагнетизма Ландау и диамагнетизма Ланжевена (см. [26], § 52 и, особенно, 1-е примечание на с. 181). Выводя формулу Ланжевена, отмечают «жесткость» волновой функции электронов в атоме: слабое магнитное поле не может изменить характер движения электронов в атоме. Причина — дискретность уровней энергии.

Формула Ланжевена содержит сумму $\langle r_a^2 \rangle$, где индекс «a» нумерует электроны. Вычисление средних значений надо производить, используя волновые функции при $H = 0$. Приведем несколько слов из подстрочного примечания на с. 181: «...диамагнетизм имеет квантовую природу, хотя квантовая постоянная $\hbar$ не входит в формулу (Ланжевена) явно: в действительности ею определяются «размеры» атома». После этого показано, почему без использования квантовой механики вообще нельзя описать магнитные свойства макроскопических систем (без ссылки на Лоренца, Бора и ван Левен). Добавим к этому, что, если в формулу (52.7) подставить вместо $\langle r_a^2 \rangle$ боровский радиус $a = \hbar^2/mc^2$, а потом устремить $\hbar \rightarrow 0$, то, как и должно быть, диамагнитная (ланжевенская) восприимчивость обратится в нуль.

При выводе формулы Ландау используют уровни Ландау. Но, по-видимому, можно поступить иначе, начав так, как при выводе формулы Ланжевена. До конкретизации значений $\langle r_a^2 \rangle$ можно не уточнять, какому ансамблю принадлежат электроны.

Итак, начнем с формулы $\chi = -(e^2/6mc^2) \sum_a \langle r_a^2 \rangle$. Эта формула справедлива, если пренебречь анизотропией, которая при таком грубом подходе играет второстепенную роль (ср. формулу (52.7) с формулой (52.2) в [26]). Ферми-газ локализует частицу в области пространства, линейные размеры которого $\sim n^{-1/3}$, где n — число электронов в единице объема. Если это так, то $\chi \cong -(e^2/6mc^2) n (n^{-2/3}) = -e^2 n^{1/3}/6mc^2$. С точностью до численного множителя полученная формула совпадает с формулой Ландау, если в ней выразить фермиевский импульс

p_F через плотность электронов n . Потеря численной точности компенсируется большей наглядностью, из-за чего, возможно, могут быть сняты некоторые вопросы, возникающие при применении формулы Ландау к реальному электронному газу в металле.

В формуле Ландау отсутствует постоянная Планка, отсутствует она и в формуле для парамагнитной восприимчивости Паули, если обе восприимчивости выразить через плотность электронов n . В используемых обозначениях формула Паули имеет следующий вид: $\chi = e^2 n^{1/3} / 4\pi^{4/3} m c^2$. В обеих формулах не только отсутствует постоянная Планка, но в них не входит величина, которая, как r_a для атома, стремится к нулю при $\hbar \rightarrow 0$. Все же, конечно, обе формулы — квантовые. Они не допускают предельного перехода к классике. Дело в том, что по условию вывода формул изменение энергии, обязанное действию магнитного поля, должно быть много меньше энергии основного состояния. В обоих случаях это означает, что выполняется следующее неравенство: $\mu H \ll \epsilon_F$, где $\mu = e\hbar/2mc$ — магнетон Бора, а ϵ_F — энергия Ферми. Левая часть последнего неравенства пропорциональна $\hbar$, а правая — $\hbar^2$. Предельный переход к классике невозможен!

Если оценка области локализации электрона справедлива, то становится очевидным, что законность формулы Ландау не зависит от отношения r_H/l , где l — длина свободного пробега электрона, а r_H — радиус его орбиты в магнитном поле (см. выше). Важно только то, что из-за квантовой жесткости системы электронов при $H = 0$ можно применять теорию возмущений для вычисления изменения энергии электронов под действием магнитного поля. Предлагаемый вывод, конечно, не ликвидирует все осложнения, которые связаны с учетом зонной структуры.

Утверждения о большой величине диамагнитной восприимчивости (см., например, [7], с. 157) металлов типа висмута данный подход не затрагивает, так как введение эффективной массы может быть проведено при $H = 0$. В том приближении, которое позволяет ввести эффективную массу, квазиимпульс неотличим от импульса. При введении магнитного поля можно использовать эффективный гамильтониан. В результате исходное выражение для χ будет отличаться от ланжевеновского только заменой массы m на эффективную массу m^* , которая у полуметаллов, как правило, значительно меньше массы свободного электрона m .

Однако следует иметь в виду, что слишком буквальное использование эффективного гамильтониана может привести к ошибкам. При выводе формул для осцилляционных частей магнитного момента и магнитной восприимчивости совершенно оправдано

использовать выражение для эффективной массы m^* , приведенное в работе Лифшица и Косевича [5]:

$$m^* = (m_1 m_2 m_3)^{1/2} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)^{1/2},$$

$\alpha_{1,2,3}$ — направляющие косинусы вектора $\mathbf{H}$ относительно трех осей эллипсоида. Но это выражение не пригодно при обобщении формулы Ландау для диамагнитной восприимчивости. Если все же воспользоваться этим выражением, то, естественно, получающееся выражение будет отличаться от формулы Ландау только значением эффективной массы. Будем иметь: $\kappa_{\text{диа}} = -(1/3)(m_e/m^*)$. Это выражение, по порядку величины справедливое, однако неправильно описывает анизотропию диамагнитной восприимчивости, которая в случае анизотропии — симметричный тензор второго ранга, а не скаляр, зависящий от направления $\mathbf{H}$.

Соображение о том, что в газе каждая частица локализована в области с линейными размерами $\sim n^{-1/3}$, может быть использовано не только для «вывода» формулы Ландау. Например, простейший способ определить порядок величины температуры $T_{\text{кв}}$, ниже которой надо пользоваться законами квантовой статистики, таков. С понижением температуры средний импульс частицы массой m в классическом газе уменьшается пропорционально корню из температуры: $\langle p \rangle \sim (mT)^{1/2}$. С понижением температур средний импульс частицы газа становится меньше неопределенности импульса $\Delta p \sim \hbar/r_a \sim \hbar n^{1/3}$, обязанной локализации частицы в области $r_a \sim n^{-1/3}$. Естественный вывод: при $T \leq T_{\text{кв}} = \hbar^2 n^{2/3} / m$ классическая статистика заведомо неприменима.

ГЕОМЕТРИЗАЦИЯ ЭЛЕКТРОННОЙ ТЕОРИИ МЕТАЛЛОВ

Работа Лифшица и Косевича 1955 года [5] по теории эффекта де Гааза — ван Альфена была первой работой, которая показала, сколь удобен и продуктивен геометрический язык при теоретическом исследовании нормальных металлов. После нее геометрический подход в теории нормальных металлов становится общепринятым. Возникла и сформировалась новая область электронной теории металлов — фермиология.

Формула (4), положившая начало геометризации теории металлов, получена из условия квантования площадей:

$$S(p_z, \epsilon) = (2\pi e \hbar H / c)(n + \gamma), \quad n \gg 1, \quad \gamma \sim 1, \quad (5)$$

сформулированного независимо и приблизительно одновременно И.М. Лифшицем и Ларсом Онсаге-

ром за несколько лет до 1954 года. В «Курсе теоретической физики» Ландау — Лифшица ([27], с. 285) после вывода условия квантования площадей указано: «И.М. Лифшиц, 1951; L. Onsager, 1952». Смотри также ссылку [10] в обзоре [36], в которой Илья Михайлович указал, что вывод условия квантования он сообщил на сессии АН Украины в 1950 году.

В [5] авторы не уточняют значения константы γ в условии квантования, но отмечают: «в случае квадратичного закона дисперсии $\gamma = 1/2$, в общем же случае γ может быть отличной от $1/2$ » ([5], с. 28). В осцилляционных явлениях константа γ определяет фазу в периодической зависимости от обратного магнитного поля свободной энергии и магнитного момента. Проведенный позже анализ показал, что в большинстве случаев $\gamma = 1/2$, хотя возможны и исключения.

Сравнительно недавно опубликован очень интересный обзор А.М. Косевича «Топология и физика твердого тела» [37]. В нем есть параграф (§ 2.7) «Фаза Бэрри и топология траекторий в магнитном поле». Вывод формулы (5) без уточнений (в частности, без определения значения γ) нагляден, но уточнение формулы (то есть определение константы γ) потребовало тонкого анализа и усилий нескольких авторов (см. ссылки в [37]).

В § 2.7 обзора [37] показано, что значение константы γ однозначно связано с фазой Бэрри: $\gamma = 1/2 + \Delta\beta$, где $\Delta\beta = \beta(T) - \beta(0)$ — набег геометрической фазы (фазы Бэрри) при полном обороте электрона вдоль его траектории в магнитном поле (здесь T — период обращения). «... роль фазы Бэрри, — утверждается в обзоре, — имеет чисто топологический характер и не зависит ни от формы $\epsilon(\mathbf{k})$ (то есть от вида закона дисперсии $\epsilon = \epsilon(\mathbf{p})$, $\mathbf{k} = \mathbf{p}/\hbar$ — квазиволновой вектор, М.К.) в окрестности линии вырождения, ни от размеров траектории... Результат зависит только от того, охватывает эта траектория линию сингулярности для блоховской волновой функции (тогда $\gamma = 0$) или не охватывает (тогда имеет обычное значение $\gamma = 1/2$)».

Заканчивается параграф утверждением о возможности по сдвигу фазы осцилляций выделить наличие линий вырождения в энергетическом спектре. Таким образом, осцилляционные явления оказываются более информативными, чем Лифшиц и Косевич предсказывали в [5].

Итак, условие квантования (5) определяет уровни энергии электрона с произвольным законом дисперсии $\epsilon = \epsilon(\mathbf{p})$ при фиксированном значении проекции квазиимпульса на магнитное поле. Они служат обобщением уровней Ландау. Их называют *уровнями Лифшица—Онсагера*. Если поверхности энергии — сферы, то уровни Лифшица—Онсагера

совпадают с уровнями Ландау. Правда, формула квантования площадей (5) справедлива в квазиклассическом приближении (при $n \gg 1$), а формула (1) при $n = 0, 1, 2, 3$ и т.д. при произвольных целых $n \geq 0$.

Квазиклассического приближения для построения теории де Гааза—ван Альфена вполне достаточно, так как осцилляционная зависимость наблюдается при расстояниях между уровнями Лифшица—Онсагера $\Delta\epsilon = \hbar\omega_c$, значительно меньшими энергии Ферми ϵ_F . Здесь $\omega_c = eH/m^*c$ — частота классического вращения электрона вокруг магнитного поля или *циклотронная частота*. Входящая в выражение для циклотронной частоты эффективная масса есть

$$m^* = (1/2\pi)[\partial S(\epsilon, p_z)/\partial \epsilon]p_z. \quad (6)$$

Соотношение между температурой в энергетических единицах kT и $\hbar\omega_c$ произвольно, но величина kT (как и $\hbar\omega_c$) для наблюдения осцилляционной картины должна быть значительно меньше энергии Ферми ($kT \ll \epsilon_F$). Возможность получить обозримые выражения для намагнитченности при произвольном законе дисперсии электронов обеспечивается применением формулы Пуассона (см. выше), а также метода перевала (метода стационарных точек, см. ссылки [5] и [7] в статье Лифшица и Косевича [5]).

Важно отметить, что эффективная масса (6) при произвольном законе дисперсии — функция ϵ и p_z . Следовательно, уровни Лифшица—Онсагера в отличие от уровней Ландау лишь приближенно эквидистантны.

В амплитуду осцилляций входит эффективная масса на том сечении поверхности Ферми, которое имеет *экстремальную площадь*. В условие циклотронного резонанса, например, входит другая величина — *экстремальная эффективная масса*. Экстремальная масса и масса на экстремальном сечении могут заметно отличаться друг от друга.

Использование структурно-чувствительных методов в принципе позволяет выяснить всю зависимость эффективной массы от p_z . Среди таких методов важное место занимают методы, сочетающие высокочастотные эффекты с размерными в пластинах (см., например, обзор В.Г. Песчанского [38]).

В формулы, полученные на основе концепции квазичастиц с произвольным законом дисперсии, масса электрона (его настоящая масса $m_e = 9,1096 \cdot 10^{-28}$ г) не входит. Могу припомнить только инерционные эффекты (их называют эффектами Стюарта—Толмена), описание которых содержит «настоящую» массу электрона m_e . Эффекты Стюар-

та — Толмена позволяют измерить отношение заряда к массе (e/m_e) электрона проводимости.

Почему в инерционных эффектах изменение закона дисперсии себя не проявляет? Ответ необычайно прост. Сила инерции, действующая на электрон в образце, который движется с ускорением $\mathbf{a}$, равна $m_e \mathbf{a}$. Если проводник разомкнут, в нем возникает разность потенциалов, то есть на электрон действует также сила $e\mathbf{E}$. Суммарная сила равна нулю (ток же не течет!). Значит, $\mathbf{E} = (m_e/e)\mathbf{a}$. Измерение разности потенциалов и ускорения дает возможность измерить отношение e/m_e . Измерение показало, что, как и в вакууме, это отношение равно e/m_e — совпадает с отношением для свободных электронов.

Инерционные эффекты и, конечно, электронная эмиссия подтверждают тот сегодня абсолютно очевидный факт, что электроны в металле (их называют электронами проводимости) — обычные электроны в необычных условиях — в поле сил периодически расположенных ионов кристаллической решетки.

В поле кристаллической решетки стационарные состояния электронов — блоховские волны, их энергия — периодическая функция квазиимпульса. В квазиклассическом приближении квазиимпульс играет роль импульса, а закон дисперсии (зависимость энергии от квазиимпульса при фиксированном номере зоны) следует трактовать как кинетическую энергию. При несомненном сходстве электронов в периодическом поле со свободными электронами движение электронов в металле под воздействием внешних полей не похоже на движение электронов в вакууме, а формулы, описывающие свойства металлов (особенно в магнитном поле), кардинально отличаются от формул, описывающих свойства вырожденного газа свободных электронов.

Сравнивая различные формулы, описывающие свойства вырожденного газа свободных электронов, с формулами, справедливыми для металлов, то есть для электронов с произвольным законом дисперсии, вводят величины размерности массы — эффективные массы. Вводимые эффективные массы зависят от явления. Значения эффективных масс, введенные для описания разных явлений, отличаются друг от друга. Повторим: для металлов, поверхности Ферми которых существенно отличаются от сферы или эллипсоида, эффективные массы, найденные с помощью осцилляционных явлений и с помощью циклотронного резонанса, отличаются.

Насколько мне известно, не существует обзора, в котором суммируются значения эффективных масс разных металлов. В обзорах, монографиях, учебниках, справочной литературе значения эффективных

масс электронов в полупроводниках приводятся всегда. Их значения необходимы при вычислении различных характеристик полупроводников, а закон дисперсии электронов и дырок в полупроводниках, как правило, квадратичен. В металлах знания эффективных масс недостаточно: надо знать форму поверхности Ферми, а также величину и направление скоростей всех электронов с энергией, равной энергии Ферми. Но эффективная масса — *наглядная* характеристика электрона проводимости. Именно поэтому составление каталога эффективных масс разных металлов, эффективных масс, введенных разными способами, по моему мнению, было бы очень полезно.

Вблизи экстремумов в законе дисперсии значения компонент тензора эффективных масс могут быть вычислены без конкретизации периодического поля (см. [27], § 59). Наличие близко расположенных зон — свидетельство их ширины, то есть большой величины обменных интегралов, — уменьшает значение эффективных масс. Нередки случаи, о которых мы упоминали, когда эффективная масса электрона проводимости *меньше массы свободного электрона*. С другой стороны, следует упомянуть: целый класс веществ (ряд металлических соединений на основе редкоземельных элементов) имеет аномально большие значения эффективных масс $\sim (10^2\text{--}10^3)m_e$. Эти вещества получили название *системы с тяжелыми фермионами*.

Когда перечитываешь работы, сделанные много лет назад, то обращаешь внимание не только на то, что в них *написано*, но и на то, что *не написано* (не зафиксировано словами), а в дальнейшем оказалось важным.

В работе Лифшица и Косевича словесно не введена эффективная масса m^* по приведенной выше формуле (6). Кроме того, словами не сказано, что траектория электрона в магнитном поле в пространстве квазиимпульсов подобна проекции электронной траектории в обычном координатном пространстве на плоскость, перпендикулярную магнитному полю. Подчеркнем: и то и другое в формулах работы [5], естественно, есть. Величина $(1/2\pi)(\partial S/\partial \epsilon)p_z$ входит в формулы так же, как масса m в формулы для электронов с поверхностью Ферми $\epsilon = p^2/2m$. Для электронов с квадратичным законом дисперсии, поверхность Ферми которых — трехосный эллипсоид (электронный или дырочный), эффективная масса при произвольном направлении магнитного поля введена и вычислена (она приведена на с. 18 в [5]), но определение (6) словами и формулой не зафиксировано. Сделано это *нами* в теории гальваномагнитных явлений [23], где знак эффективной массы m^* важен для строгого введе-

ния электронов и дырок. Выделил «нами» не для того, чтобы подчеркнуть наш приоритет — приоритет авторов работы [23]. Скорее, наоборот: для того, чтобы извиниться. Только через какое-то время мы узнали, что формулу (6) впервые ввел У.Б. Шокли в 1950 году. Мы тогда этого не знали.

Формула квантования площадей (5) выведена на основе квазиклассического квантования действия (формулы Бора). От интегрирования по координате к интегрированию по проекции квазимпульса можно перейти только благодаря подобию траекторий. И при этом слово *подобие* не употреблено. Подобие проекции на плоскость, перпендикулярную магнитному полю $\mathbf{H}$, траектории в $\mathbf{r}$ -пространстве и траектории в $\mathbf{p}$ -пространстве ($\mathbf{r}$ — радиус вектор) не только упоминается, но и подчеркивается, когда вычисляются формулы для описания циклотронного резонанса, размерных эффектов (см. [38] и, например, главу VIII «Размерные эффекты» в [21a]; в обоих источниках есть список оригинальных статей).

Вслед за более поздними работами, чем описанные здесь, подчеркнем, что подобие траекторий в $\mathbf{r}$ - и $\mathbf{p}$ -пространствах позволяет записать условие квантования площадей (5) в виде условия квантования магнитного потока $\Phi = S_r H$, окруженного траекторией электрона ($S_r = (c/eH)^2 S$ — площадь проекции траектории электрона в $\mathbf{r}$ -пространстве на плоскость $z = 0$):

$$\Phi = \Phi_0(n + \gamma); \quad \Phi_0 = 2\pi\hbar c/e. \quad (5a)$$

«Квант потока» Φ_0 вдвое больше кванта потока, принятого при описании свойств двухсвязных сверхпроводников ($2e$ в знаменателе кванта потока сверхпроводников — свидетельство спаривания электронов). Подчеркнем, что в нормальном металле квантуется не поток, а движение электрона в плоскости, перпендикулярной магнитному полю.

Обычно при использовании квазиклассического приближения начинают с решения соответствующей классической задачи. При построении теории эффекта де Гааза—ван Альфена обычный порядок был нарушен. Классическая задача о движении в постоянном и однородном магнитном поле электрона проводимости с произвольным законом дисперсии была решена в работе [23], где, как говорилось, была введена эффективная масса m^* путем сравнения выражения для циклотронной частоты электрона с произвольным законом дисперсии с циклотронной частотой свободного электрона. Но, кроме того, там же было выяснено, что закон дисперсии электрона проводимости в кристалле допускает ситуацию, которая для свободного электрона невозможна. Было установлено, что в плоскости, перпендикулярной

магнитному полю, электрон может совершать *инфинитное движение*, если изоэнергетическая поверхность непрерывно проходит по всему $\mathbf{p}$ -пространству обратной решетки.

Приведем еще одну цитату из работы [5] Лифшица и Косевича: «Следует заметить, что компоненты p_i в (1.1) для электрона в металле являются компонентами *квазимпульса*. Это, однако, не влияет на результаты, если поверхность (1.6) не имеет самопересечений и каждая из кривых (1.4) расположена внутри одной ячейки обратной решетки; помимо этого, ... предполагается, что радиус кривизны электронной траектории (в координатном пространстве, $M.K.$) велик по сравнению с постоянной решетки» (с. 28 в «Избранных трудах» И.М. Лифшица).

Авторы хотят подчеркнуть, что вектор $\mathbf{p}$ — *квазимпульс*, а не импульс (слово в цитате выделено мною, $M.K.$). Уравнение изоэнергетической поверхности в [5] записано в компонентах вектора $\mathbf{p}$: $\epsilon = \epsilon(p_x, p_y, p_z)$. Изоэнергетическая поверхность (1.6) и уравнение траектории электрона в магнитном поле (1.4) выражены через компоненты кинематического импульса $\mathbf{P}$ ($P_x = p_x + e\hbar y/c$, $P_y = p_y$, $P_z = p_z$; $H_z = H$), что весьма важно не только при рассмотрении квазиклассического квантования (при выводе условия квантования площадей (5)), но и при рассмотрении эффекта де Гааза—ван Альфена в тонких слоях металлов (двузначные номера формул из цитируемой работы).

Из приведенной цитаты видно, что авторы хорошо понимают: надо проявлять осторожность. Причина в том, что оператор координаты $\hat{\mathbf{r}}$ в $\mathbf{p}$ -представлении содержит слагаемое $\hat{\Omega}$ — оператор, описывающий возможность перехода между зонами (см., например, [27], § 55, формула (55.14)). Переход между зонами служит причиной *магнитного пробоя*, весьма усложняющего картину осцилляционных явлений в металлах.

О магнитном пробое будет сказано дальше. Здесь же заметим, что, в каком-то смысле, авторы проявляют даже несколько излишнюю осторожность. Если изоэнергетическая поверхность открытая, то траектории электрона по ней могут быть замкнутыми, но не помещаться «внутри одной ячейки обратной решетки». При этом квантование площадей происходит, а эффекты де Гааза—ван Альфена и Шубникова—де Гааза должны наблюдаться и наблюдаются. Правда, не менее важно, что, если поверхность Ферми открытая, магнитное поле может быть направлено так, что и траектория открыта, электрон не совершает периодического финитного движения, его энергия не квантуется, в результате чего соответствующая полость ферми-поверхности

перестает давать вклад в осцилляционные явления («перестает» — в том смысле, что при других направлениях магнитного поля дает).

Говоря о геометризации электронной теории металлов, начавшейся с работ И.М. Лифшица и А.М. Косевича по теории эффекта де Гааза—ван Альфена, надо подчеркнуть нетривиальность и важность введения новых для физики металлов понятий. Наверное, каждому физико-теоретику приходилось решать вопрос, в каких терминах написать окончательный (для данной задачи!) ответ. После работ Лифшица и Косевича стало очевидным, что для этого пригодны геометрические образы, связанные с поверхностями Ферми. Геометрические образы сравнительно быстро начали появляться в работах по электронной теории металлов: пояски на поверхности Ферми, хорды, линии параболических точек и даже отдельные точки с характеристикой поверхности вокруг них — все они входят в выражения, полученные в теории различных явлений и свойств. Иногда такие выражения рассматриваются как окончательные.

ЗАМЕЧАНИЕ ОБ ЭФФЕКТЕ ШУБНИКОВА—ДЕ ГАЗА

По традиции, с тридцатых годов (со времен Шубникова) в УФТИ изучали не эффект де Гааза—ван Альфена, а эффект Шубникова—де Гааза. Хотя зависимость магнитосопротивления от поля значительно сложнее, чем зависимость от поля магнитного момента, периоды осцилляций в обоих эффектах совпадают (если, правда, не учитывать усложнения, обязанные магнитному пробоем, см. ниже). Оба эффекта пригодны для восстановления формы поверхностей Ферми.

Осцилляционные эффекты — де Гааза—ван Альфена и Шубникова—де Гааза — результат квантования движения электронов в магнитном поле. В эффекте Шубникова—де Гааза квантовые осцилляции наблюдаются на фоне монотонной зависимости сопротивления от магнитного поля. Последняя для своего вывода не требует учета дискретности энергии в магнитном поле. Для выявления монотонной зависимости сопротивления от магнитного поля движение электронов проводимости со сложным законом дисперсии $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{p})$ под действием силы Лоренца можно рассматривать с помощью классического уравнения движения. При таком подходе $\varepsilon(\mathbf{p})$ есть кинетическая энергия, а квазиимпульс $\mathbf{p}$ не отличим от импульса (мы это уже отмечали).

Правда, закон дисперсии $\varepsilon(\mathbf{p})$ — квантовый уровень энергии электрона в периодическом поле кристаллической решетки, а вырождение газа электронов проводимости, столь существенное для

выделения роли поверхности Ферми, — результат применения квантовой статистики Ферми—Дирака. Оговорки не мешают именовать монотонную зависимость от магнитного поля классическим эффектом, оставляя эпитет квантовый за эффектом Шубникова—де Гааза.

Напомним, что все перечисленные квантовые эффекты (закон дисперсии, квантовая статистика) не приводят к зависимости термодинамических характеристик электронов проводимости от магнитного поля: и диамагнетизм, и эффект де Гааза—ван Альфена — квантовые явления в том смысле, который принят в предыдущем абзаце.

Во многих случаях амплитуда осцилляций Шубникова—де Гааза мала не только по сравнению с сопротивлением при $H = 0$, но и по сравнению с изменением сопротивления в магнитном поле за счет классического эффекта. Это облегчает вычисление осцилляционной зависимости. Более того, это и только это дает право и возможность выводить формулы, описывающие плавную зависимость гальваномагнитных характеристик, используя классическое кинетическое уравнение, а полученные формулы применять для анализа экспериментальных фактов.

Если амплитуда осцилляций велика, монотонную зависимость выделить практически невозможно. Поэтому важен строгий вывод классических формул для гальваномагнитных характеристик, беря за основу квантовые выражения. Такой подход дает возможность сделать необходимые оценки (см. вывод формулы (90.15) в § 90 «Физической кинетики» [39]).

ГЕОМЕТРИЗАЦИЯ ЭЛЕКТРОННОЙ ТЕОРИИ МЕТАЛЛОВ (продолжение)

Думаю, не ошибусь, сказав, что популяризации новых представлений в электронной теории металлов способствовали три обзора в УФН, написанные Ильей Михайловичем с моим участием. Выходили они с интервалами в три года [40]. Сама структура обзоров была для того времени необычной. Кристаллическая решетка (и прямая и обратная) рассматривалась как координатное и квазиимпульсное пространства с элементами симметрии, диктующими «условия существования» электронам, фононам — всем квазичастицам твердого тела.

Изотропия и однородность свободного пространства не оставляет выбора для закона дисперсии элементарных частиц в нем. Зависимость энергии ε от импульса $\mathbf{p}$ одна и та же у всех частиц. Частицы и их законы дисперсии отличаются только величиной массы m . У фотона и, возможно, у нейтрино $m = 0$.

При любом значении энергии поверхность равной энергии любой частицы — сфера.

В твердом теле изоэнергетические поверхности квазичастиц (электронов и фононов, в частности) причудливы и разнообразны не только для квазичастиц разной природы или в разных веществах. Изоэнергетические поверхности у квазичастиц определенного вида при изменении энергии в пределах одной зоны существенно меняются.

С изменением энергии квазичастицы зависимость энергии от квазиимпульса изменяется не только количественно. С обязательностью происходит качественное изменение — изменяется топология изоэнергетических поверхностей. Теорема ван Хофа [41] утверждает, что в каждой зоне есть не менее двух значений энергии, так называемых *критических значений* ($\epsilon = \epsilon_c$), при которых изменяется связность изоэнергетических поверхностей. При $\epsilon = \epsilon_c$ плотность состояний квазичастиц имеет особенность (в общем случае корневую). Существование в энергетическом спектре электронов проводимости вдали от энергии Ферми особых точек при $\epsilon = \epsilon_c$ из-за вырождения электронного газа не сказывается практически в свойствах металлов, но, как показал И.М. Лифшиц [42], совпадение критического значения ϵ_c с энергией Ферми ϵ_F должно наблюдаться в свойствах металла в виде аномалии.

Добиться равенства $\epsilon_c = \epsilon_F$, то есть изменения связности поверхности Ферми, можно, воздействуя на металл давлением, изменяя концентрацию примесей или комбинируя то и другое. Аномалии, наблюдаемые при определенном *критическом* значении параметра, описывающего воздействие, можно трактовать как фазовый переход $2\frac{1}{2}$ рода, если пользоваться терминологией Эренфеста. В литературе используют три термина: *Лифшица переход* (см. [9], том 1, с. 479), топологический переход и переход $2\frac{1}{2}$ рода. Предсказанное И.М. Лифшицем явление было обнаружено различными путями тремя группами экспериментаторов — из УФТИ, МГУ и ИФВД. В 1982 году — через 22 года после предсказания — коллектив из восьми человек с участием И.М. Лифшица получил свидетельство об открытии. Оно было названо так: «Явление электронно-топологического перехода металлов при упругих деформациях». Аномалии, обязанные топологическому переходу, наблюдались многократно. Со сравнительно полным (до 1994 года) перечнем литературы по этому вопросу можно познакомиться по обзору [43].

В работе [42] Ильи Михайлович не упоминает, к каким последствиям в эффектах де Гааза — ван Альфена и Шубникова — де Гааза должно привести изменение топологии поверхности Ферми, восприни-

мая, по-видимому, подобное предсказание очевидным. При разрыве или образовании перегибки у кривой, описывающей осцилляции, исчезает или появляется один из периодов. При образовании или исчезновении полости поверхности Ферми происходит то же самое [44]. Между тем, один из наиболее убедительных экспериментов, который зарегистрировал разрыв перегибки поверхности Ферми, был эксперимент Будько, Гапотченко и Ицкевича по наблюдению эффекта Шубникова — де Гааза на кадмии под давлением [45].

В середине 50-х годов численные методы расчета законов дисперсии квазичастиц только начинали развиваться. Этому, конечно, способствовало развитие вычислительной техники. Отсутствие надежных данных о законах дисперсии квазичастиц способствовало тому, что принятый в обзорах [40] подход, исходящий из симметричных свойств законов дисперсии квазичастиц, оказался успешным и информативным. Полушутливая формулировка подхода такова: «если так..., то так...». Имеется в виду следующее: если закон дисперсии обладает таким-то свойством, то такое-то явление или свойство должно иметь такие-то черты.

Когда поверхность Ферми не сфера, площади ее экстремальных сечений зависят от направления магнитного поля $\mathbf{H}$. При не всюду выпуклой поверхности Ферми от направления вектора $\mathbf{H} = \eta \mathbf{H}$ зависит число экстремальных сечений. Изменение числа сечений с экстремальной площадью (периодов или частот осцилляций) происходит при определенном, критическом направлении η_c и сопровождается аномалией, напоминающей топологический переход. Характер аномалии, то есть форма осцилляционных кривых при $|\eta - \eta_c| \ll 1$, зависит от структуры поверхности Ферми. Легко это проследить на модельной поверхности Ферми, напоминающей гантель. На рис. 28 в [36] рассмотрены два случая: а) гантель с толстой перегибкой и б) гантель с тонкой перегибкой. В первом случае при критическом направлении амплитуда осцилляций резко возрастает. По-видимому, подобный эффект был обнаружен на Cu [46]. Во втором случае аномалия сложнее. Так как одно из экстремальных сечений при $\eta = \eta_c$ имеет точку самопересечения, в которой скорость движения электрона по поверхности Ферми обращается в нуль, то амплитуда соответствующей осцилляции должна быть аномально мала. Не знаю, наблюдалась ли подобная ситуация.

Работа Ильи Михайловича [42] — первая из работ, предсказавшая, что изменение топологии геометрического образа, фигурирующего в описании свойств металлов, порождает аномалию. При описании термодинамики электронов проводимости

благодаря вырождению фигурирует *поверхность* Ферми; формулы, описывающие квантовые осцилляции в магнитном поле, содержат *площади* перпендикулярных магнитному полю сечений этой поверхности; в теории аномального скин-эффекта и в теории поглощения ультразвука фигурируют *пояски* на поверхности Ферми, скорость расположенных на них электронов перпендикулярна заданному вектору. Меняя условия эксперимента, можно все эти геометрические фигуры «заставить» изменить топологию. И каждое такое изменение приводит к аномалии, которую можно назвать топологическим переходом и которая в принципе может быть обнаружена. Такой подход обобщает идею И.М. Лифшица на широкий круг явлений [47].

В названии обзора [47] ощущается полемический задор. Правильней было бы весь круг явлений, описанных в нем, назвать *топологическими аномалиями*. По обе стороны от точки *фазового перехода* термодинамическая система находится в разных фазах. При топологическом переходе И.М. Лифшица так и происходит, хотя фазы по обе стороны от перехода близки друг другу. В случае аномалий, описанных в обзоре [47], этого нет.

Сейчас хорошо известно, что поверхности Ферми большинства металлов имеют много полостей и весьма вычурны. Только металлы первой группы таблицы Менделеева сравнительно просты. Но не стоит забывать, что поверхности Ферми Cu, Ag, Au и Pt — открытые поверхности.

Предсказание, а потом и открытие топологического перехода — одно из ярких проявлений отличия закона дисперсии электронов проводимости от закона дисперсии свободных электронов.

Практически на поверхностях Ферми всех металлов есть вмятины и перемычки, то есть на поверхностях Ферми имеются области с гауссовой кривизной различного знака. Следовательно, на поверхностях есть и *линии параболических точек*, на которых одна из главных кривизн меняет знак. Есть даже точки уплощения — точки пересечения линий параболических точек.

Рисунок линий параболических точек на поверхности Ферми можно сравнить с географической картой. При внешнем воздействии на металл изменяется и рисунок линий параболических точек. Обычно изменение не меняет топологию линий параболических точек, но при определенных воздействиях возможно изменение связности линий параболических точек. Простейший пример: появление новой вмятины приводит к появлению новой петли параболических точек. Изменение связности линий параболических точек не сопровождается аномалией плотности состояний электронов (для этого необхо-

димо изменение связности поверхности Ферми; так при переходе Лифшица). Поэтому изменение связности линий параболических точек не приводит к топологическому переходу. Правда, как обращено внимание в работе [48], при определенной огранке кристалла изменение связности линий параболических точек может привести к *обобщенному топологическому переходу*. Так в [48] названа аномалия *поверхностной энергии металла* при изменении связности линий параболических точек.

Анализ различных свойств металлов (особенно высокочастотных) показал, что за некоторые из свойств ответственны только электроны, расположенные в *отдельных точках* на поверхности Ферми. Особенно отчетливо это видно на примере поглощения звука в магнитном поле, когда звук распространяется перпендикулярно магнитному полю (см. рис. 23 в [36]). Изменяя условия эксперимента, можно двигать точку по поверхности Ферми. Когда точка окажется параболической или точкой уплощения, коэффициент поглощения звука испытывает аномалию. В этом случае меняется не связность, а меняется *метрика*, окружающая избранную условиями эксперимента точку на ферми-поверхности.

Исследованию роли локальной геометрии поверхностей Ферми металлов в высокочастотных свойствах металлов посвящено много работ. Некоторые из них упомянуты в обзоре [35]. Сравнительно недавно по-русски и по-английски вышла монография Н.А. Зимбовской [49], основанная в основном на работах автора по этой тематике.

Фермиология открыла удивительный мир своеобразных структур. Согласно первому впечатлению, вычурность поверхностей Ферми — загадочное явление. Помню, как смущало тех из нас, кто был занят электронной теорией металлов в середине прошлого века, существование у поверхностей Ферми поливалентных металлов наряду с большими полостями малых полостей или, как тогда говорили, малых групп электронов проводимости. И ведь именно они наиболее отчетливо проявляют себя в осцилляционных явлениях, так как им соответствуют большие периоды. Оказалось, происхождение малых полостей проще, чем можно было себе представить. Модель, основанная на теории почти свободных электронов, примененная к поливалентным металлам, показала, что в нулевом приближении их поверхности Ферми суть сферы с радиусами, превосходящими размеры первой зоны Бриллюэна, центры которых находятся во всех ячейках обратной решетки. С целью устранить вырождение сферы приходится «разрезать», перераспределив электроны по вновь образовавшимся полостям (модель

Харрисона). Поверхности Ферми, построенные таким образом, состоят из многих полостей, включают нередко в себя открытые поверхности и совершенно не похожи на исходные сферы (см. раздел 4 в обзоре [35] и рис. 18 там же).

ДЛЯ ОСЦИЛЛЯЦИЙ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ НЕ ОБЯЗАТЕЛЬНО

Использование формулы Пуассона при вычислении термодинамических характеристик металлов в магнитном поле очень удобно. И все же, несомненно, полезно познакомиться с качественными соображениями о причине осцилляций.

Почему существует близкая к периодической зависимость различных электронных характеристик от H или, точнее, от $1/H$? Когда расстояния между квантованными уровнями значительно меньше энергии Ферми ($\Delta \epsilon \ll \epsilon_F$), число магнитных зон, содержащих электроны, велико. Не столь важно, сколько именно зон под энергией Ферми. Важнее, какова структура зоны с энергией $\epsilon \sim \epsilon_F$. Квантование Лифшица — Онсагера определяет зависимость энергии ϵ в n -й зоне от p_z при фиксированном значении магнитного поля H . В каждой зоне $\epsilon = \epsilon_n(p_z)$ плотность энергетических состояний имеет особенности (там, где $\partial S(p_z, \epsilon)/\partial p_z = 0$). При изменении обратного магнитного поля $1/H$ на величину $\Delta(1/H) = 2\pi\hbar/cS_{\text{extr}}(\epsilon_F)$ особенность переходит в соседнюю зону, а вся картина меняется слабо.

Таким образом, причина осцилляций — большое число уровней под энергией Ферми и зависимость расстояния между уровнями от параметра, при изменении которого число уровней ниже уровня Ферми может быть изменено. В результате электронные характеристики металла осциллируют.

В том же 1955 году, когда была построена теория эффекта де Гааза — ван Альфена, И.М. Лифшиц и А.М. Косевич опубликовали работу «Об осцилляциях термодинамических величин для вырожденного ферми-газа при низких температурах» [50], которую следует считать общей теорией осцилляционных явлений в металлах. Во Введении в эту работу сказано: «Эффект осцилляционной зависимости термодинамических величин для вырожденного ферми-газа частиц с квантованными уровнями энергии от тех параметров, которые определяют положение этих уровней, будет иметь место всегда, когда присутствуют причины, вызывающие квантование уровней (например, ограниченный объем, внешние поля с возрастающим потенциалом и т.д.)». Так же, как и теория эффекта де Гааза — ван Альфена, общая теория осцилляционных явлений построена при весьма общих предположениях. Квазиклассическое приближение позволило использовать условия

квантования Бора. Считая, что классическая задача о движении частиц ферми-газа решена, энергию квазичастицы можно выразить через переменные действия I_1, I_2, I_3 : $\epsilon = \epsilon(I_1, I_2, I_3)$. Квазиклассическое квантование требует: $I_i = (n_i + \gamma_i)\hbar$, где n_i — целые числа, а $0 < \gamma_i < 1$. Отсюда энергия — функция $\mathbf{n}$ -вектора с целочисленными компонентами n_i : $\epsilon = \epsilon(\mathbf{n})$. В этих терминах, не уточняя закона дисперсии квазичастиц-фермионов, авторы проделали все вычисления и получили обозримые формулы в ряде конкретных случаев (электронный газ в потенциальном ящике, в пластине при наличии магнитного поля и др.).

Работа [50] стимулировала экспериментальные исследования осцилляционной зависимости термодинамических и кинетических свойств пленок твердых тел. В этой области был достигнут заметный успех.

ТЕОРИЯ ФЕРМИ-ЖИДКОСТИ ЛАНДАУ И ФЕРМИОЛОГИЯ

До появления теории ферми-жидкости Ландау, первая публикация которой была в 1956 году [51], делались попытки построить многоэлектронную теорию металлов. Они были столь громоздки, что о рассмотрении с их помощью сложных эффектов, таких как эффект де Гааза — ван Альфена и Шубникова — де Гааза, нечего было и думать.

Теория ферми-жидкости появилась, когда работы, давшие возможность сформулировать, а в результате и решить задачу о восстановлении электронного энергетического спектра по опытным данным, были в разгаре. Все такие работы использовали представление об электронах проводимости как о вырожденном ферми-газе. Пытаюсь вспомнить свое отношение в 50-е годы к тому, что при построении теории металлов практически все результаты были получены в предположении об электронах проводимости как о ферми-газе. Существенную роль играла традиция. Творцы электронной теории металлов (Зоммерфельд, а до него Лоренц) исходили из того, что электроны свободны и не взаимодействуют друг с другом. Ферми-частицы со сложным законом дисперсии были существенно ближе к реальности. Использование таких представлений ощущалось как весьма заметный прогресс.

Мне казалось, что строгое доказательство справедливости газового подхода будет основано на двух обстоятельствах. Первое — нейтральность электрон-ионной системы металла, да еще усиленная экранировкой, ликвидирующей кулоновское дальное действие. Второе — большая плотность вырожденного газа электронов, которая может обеспе-

чить превосходство энергии Ферми над средним значением кулоновской энергии взаимодействия между электронами. Но эти соображения, по-моему, ни на семинарах, ни в беседах с Ильей Михайловичем не обсуждались.

Не помню, был ли я на семинаре Ландау в ИФП, когда Лифшиц и Косевич докладывали свою работу [5] по теории эффекта де Гааза—ван Альфена. Но что помню *точно*: вскоре после доклада о теории эффекта де Гааза—ван Альфена (наверное, через несколько месяцев) на семинаре Ландау докладывалась теория гальваномагнитных явлений Лифшица, Азбеля и Каганова [22]. О ферми-жидкости никто не говорил. Ни докладчик И.М. Лифшиц, ни Л.Д. Ландау. Всех (меня, по крайней мере) устраивало переименование электрона с произвольно сложным законом дисперсии из частицы в квазичастицу.

Когда же пришло время осуществить задуманное — написать обзоры [39], а потом собрать их в книгу «Электронная теория металлов» [21], в большой мере основанную на работах фермиологического толка, то выяснилось, что Илья Михайлович готов четко ответить на вопрос, как и когда осуществляется переход на «жидкостной» язык (см. [21], §§ 16 и 23). Параграф 16 называется «Эффект де Гааза—ван Альфена и теория ферми-жидкости». Он весь посвящен этому вопросу. Задача параграфа показать, что в квазиклассическом приближении, достаточном при расчете осцилляционных явлений, можно использовать классическое кинетическое уравнение Больцмана теории ферми-жидкости. Нам хотелось остаться на том уровне использования теоретической техники, которая применялась во всей книге (в книге не фигурировали функции Грина).

Как известно, расстояния $\Delta\epsilon$ между квазиклассическими уровнями равны $\hbar\omega$, где ω — частоты классического движения. Для частиц ферми-газа частоту ω можно было вычислять, используя уравнение движения *отдельной* частицы. Если частицы взаимодействуют (ферми-жидкость), необходимо исходить из уравнений движения *всей* жидкости. Частоты ω были определены из фермижидкостного кинетического уравнения, включающего силу Лоренца $(e/c)[\mathbf{v}\mathbf{H}]$ со значением скорости $\mathbf{v} = \partial\epsilon(\mathbf{p})/\partial\mathbf{p} \neq \mathbf{p}/m$. Формула для частоты колебаний по внешнему виду не отличается от eH/m^*c , и m^* по-прежнему определяется формулой (6). Различие все же есть. Оно состоит в том, что закон дисперсии $\epsilon = \epsilon(\mathbf{p})$ включает в себя межэлектронное взаимодействие.

Вывод: формулы теории эффекта де Гааза—ван Альфена, полученные в «газовом» приближении, справедливы *буквально*, если считать, что закон дисперсии $\epsilon = \epsilon(\mathbf{p})$ включает в себя межэлектронное

взаимодействие. На основании непосредственного расчета впервые это утверждение было высказано и доказано в 1962 году Ю.А. Бычковым и Л.П. Горьковым [52].

Интерес к решению обратных задач, то есть поиски и обнаружение возможностей определения формы поверхности Ферми $\epsilon(\mathbf{p}) = \epsilon_F$ и скоростей $\mathbf{v}_F$ фермиевских электронов путем сравнения теоретических формул с результатами эксперимента, заставил продумать, насколько пригодны для этого формулы, выведенные для ферми-газа. Ответ на этот вопрос в книге [21] дан (см. § 23). Уравнение Больцмана теории ферми-жидкости, линеаризованное по электрическому полю, если $\omega\tau \ll 1$, может быть переписано так, что позволяет «забыть» об отличии ферми-жидкости от ферми-газа. Утверждение справедливо и в отсутствие магнитного поля, и тогда, когда металл находится в магнитном поле. Тем самым было показано, что в теории большинства наиболее характерных фермиологических эффектов — в теории гальваномагнитных и многих размерных явлений, в теории аномального скин-эффекта, в теории поглощения ультразвука электронами проводимости — можно применять «газовое» описание. Теория циклотронного резонанса, наблюдение которого требует выполнения условия $\omega\tau \gg 1$, построенная в приближении ферми-газа, не чувствительна к переходу от ферми-газа к ферми-жидкости. Причина в роли выделенных электронов, движущихся параллельно поверхности металла (см. [21], § 35).

Формулы, полученные в результате расчета, проведенного на базе ферми-газового подхода, во всех перечисленных случаях содержат геометрические характеристики не газовой, а *истинной*, ферми-жидкостной поверхности Ферми — той, которая учитывает взаимодействие между электронами — *поверхности Ферми электронов-квазичастиц*.

Теория ферми-жидкости при вычислении электронных характеристик металла использует термины, которые относятся к квазичастицам с энергией, близкой к фермиевской (только у них достаточно большое время жизни). Диамагнетизм определяется *всеми* электронами. Это вносит дополнительную трудность, как мне кажется, не преодоленную до сих пор.

Структура истинного электронного энергетического спектра нормальных металлов и его генетическая связь с зонной теорией подробно описана в главе VI части 2 «Статистической физики» (IX том «Курса» Ландау и Лифшица [26]).

МАГНИТНЫЙ ПРОБОЙ

Если бы восстановление энергетического спектра электронов проводимости использовало только данные эффектов де Гааза—ван Альфена и Шубникова—де Гааза, то не было бы возможности выяснить, как расположены отдельные полости ферми-поверхностей относительно друг друга в $\mathbf{p}$ -пространстве. Магнитный пробой обнаруживает близко расположенные полости. Магнитный пробой — квантовое туннелирование электронов проводимости в магнитном поле между квазиклассическими траекториями, принадлежащими разным энергетическим зонам. Описывая магнитный пробой, удобнее пользоваться $\mathbf{p}$ -пространством, в котором траектории фермиевских электронов располагаются непосредственно на ферми-поверхности.

Существование магнитного пробоя было предсказано Козном и Фаликовым в 1961 году [53]. Правильное значение вероятности магнитного пробоя W получено Блаунтом [54] в 1962 году: $W = \exp(-H_0/H)$, где коэффициент H_0 , называемый *полем пробоя*, имеет сравнительно небольшое значение ($\mu H_0 \sim \Delta^2/\epsilon_F$, здесь $\mu \sim e\hbar/m^*c$, Δ — потенциальный барьер, отделяющий одну классическую траекторию от другой в месте наибольшего сближения, m^* — эффективная масса; оценки показывают, что часто $H_0 \sim 10^4$ – 10^5 Э).

Экспериментально магнитный пробой был открыт в 1963 году Пристли [55] при изучении эффекта де Гааза—ван Альфена на магнии, когда среди периодов осцилляций был обнаружен «странный» период: соответствующая ему орбита не помещалась в первой зоне Бриллюэна. Было очевидно, что электрон движется вокруг магнитного поля, не «замечая» небольших щелей, разделяющих классические орбиты. Поверхность Ферми Mg строится с использованием модели Харрисона (см. выше). В соответствии с моделью близость классических орбит — следствие снятия вырождения за счет слабого периодического поля [56]. Магнитопробойная орбита, обнаруженная Пристли, получилась как результат пересечения сферы Ферми свободных электронов плоскостью, перпендикулярной магнитному полю.

Магнитный пробой — достаточно общее явление. Он обнаружен практически у всех поливалентных металлов. К счастью, на него обратили внимание тогда, когда природа осцилляционных явлений уже была хорошо понята. В противном случае разобратся во всей картине было бы значительно трудней.

Как же проявляет себя магнитный пробой в осцилляционных явлениях?

При $H \ll H_0$ вероятность пробоя равна нулю. Картина осцилляционных явлений описана выше.

При $H \gg H_0$ вероятность пробоя $W = 1$. Как и в малых полях, электроны движутся по классическим орбитам, но не по тем, по которым двигались в малом поле. Их траектории составлены из кусков прежних траекторий.

Своеобразная картина возникает в случае промежуточных полей, когда $W(1 - W) \sim 1$. Динамика электрона при этом имеет не квазиклассический, а существенно квантовый характер. Квантовый характер движения электронов в условиях магнитного пробоя, обусловленный интерференцией квазиклассических электронных волн, возникающих при многократном рассеянии на центрах магнитного пробоя, изменяет энергетический спектр электронов и характер большинства явлений — изменяет по сравнению с предельными случаями $H \ll H_0$ и $H \gg H_0$. Именно это — яркое проявление квантовых волновых свойств электронов — привлекает к магнитному пробояу внимание физиков, занимающихся свойствами нормальных металлов при низких температурах (экспериментаторов и особенно теоретиков). До открытия магнитного пробоя низкотемпературная электронная физика нормальных металлов, особенно фермиология, казалось, целиком принадлежит квазиклассике.

Теория магнитного пробоя — в настоящее время интересная глава современной электронной теории металлов. По сути практически полностью основы теории магнитного пробоя созданы А.А. Слуцкиным в его докторской диссертации [57]. С изложением теории магнитного пробоя можно познакомиться по двум главам (III и IV) коллективной монографии [58]. Там же (в главе V) описаны экспериментальные исследования магнитного пробоя. Главы содержат сравнительно полную (на время написания обзоров) библиографию.

Описывая влияние магнитного пробоя на осцилляционные явления, отметим только несколько обстоятельств. При этом будем иметь в виду именно случай развитого магнитного пробоя, когда $W(1 - W) \sim 1$. Если магнитопробойная конфигурация достаточно сложна, то электрон может совершить много разных периодических движений — таких, которые были невозможны в предельных случаях. Каждой траектории соответствует своя площадь, а площади с помощью уравнения квантования Лифшица—Онсагера (5) определяют набор уровней при фиксированном значении p_z . Естественно, при этом заметно возрастает число гармоник в эффекте де Гааза—ван Альфена. Столь же естественно они проявляются и в эффекте Шубникова—де Гааза, хотя не исчерпывают всех периодов осцилляций кинетических величин. Два красивых эффекта увеличивают число гармоник в эффекте Шубникова—де Гааза.

ва — де Гааза: осцилляции за счет *квантового интерферометра* и гигантские осцилляции за счет эффекта *реле*.

Квантовый интерферометр создается на магнитопробойной конфигурации двумя участками, соединяющими два узла пробоя, по которым электрон движется в одну сторону. Вероятность пройти такую область осциллирует, причем период в зависимости сопротивления от $1/H$ определяется формулой (4), хотя электрон не описывает область, входящую в уравнение (4), и потому соответствующий период отсутствует в эффекте де Гааза — ван Альфена.

Под *реле* понимают малый участок магнитопробойной конфигурации, соединяющий два больших участка. Вероятность электрону пройти малый участок осциллирует и вместе с этим осциллирует, например, сопротивление или «константа» Холла. Амплитуда таких осцилляций очень велика, так как определяется не квантовым эффектом, а изменением классического движения электрона: скажем, при выключенном реле траектории замкнуты, а при включенном — открыты.

В статье А.А. Слуцкого «Пробой магнитный в металлах» [59] есть рисунки, помогающие наглядно представить себе особенности осцилляционных явлений при развитии магнитного пробоя.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ СЛОВА

На этом кончается изложение «Непростой истории». История развития электронной теории металлов, конечно, продолжается. 75 лет — большой срок. Большинство из тех, кто сыграл в ней определенную роль, ушло из жизни. По какой бы причине это ни произошло, смерть каждого воспринималась как преждевременная.

За прошедшие годы у электронной теории металлов было много достижений. Металлы в нормальном состоянии изучены с большой подробностью. О металлах стало известно многое из того, чего не знали физики 75 лет назад. Более того: интерес к тем явлениям, которые позволили понять, что из себя представляют поверхности Ферми практически всех металлов, начал иссякать. Электронная теория металлов перестала быть модной. Особенно тот ее раздел, который назван фермиологией. Но физика твердого тела продолжает быть одной из активно развивающихся областей физики. Круг объектов физики твердого тела за прошедшие годы необычайно расширился. На смену природным металлам пришли рукотворные объекты: низкоразмерные системы, органические материалы, проявляющие металлические свойства, миниатюрные элементы, изучение которых составило новую область физики —

мезоскопию. Осцилляционные эффекты во всех этих объектах имеют свою специфику, но большинство из них — модификация либо эффекта Шубникова — де Гааза, либо эффекта де Гааза — ван Альфена. Открываются и совершенно неожиданные явления. Настоящей сенсацией оказалось открытие *квантового эффекта Холла*. Квантовый эффект Холла — квантование поперечной проводимости и сопротивления двумерного электронного газа. При всем своеобразии явления первопричина его — квантование энергии электронов в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, то есть восходит к работе Ландау 1930 года.

Многие сравнительно новые объекты физики твердого тела трудно назвать твердыми: жидкие кристаллы, квантовые жидкости, полимеры и биополимеры. Все чаще физику твердого тела именуют *физикой конденсированного состояния*. Вклад в развитие физики конденсированного состояния всех, кто назван, а иногда лишь упомянут в этой статье, не ограничен тем, что отмечено в «Непростой истории». Но это уж точно совсем другая история.

Когда я писал «Непростую историю», я с грустью и с нежностью вспоминал прошлое. Фиксируя события далеких лет, я не претендовал на историко-научное сочинение: боялся, что заинтересованный взгляд автора несколько исказит картину. Надеюсь, помощь, которую оказали мне Ю.А. Фрейман и В.Д. Нацик своими советами, помогла мне избежать ошибок.

Выражаю благодарность Ю.А. Фрейману и В.Д. Нацiku и подчеркиваю: за оставшиеся ошибки или неточности ответственность несу только я.

Я благодарен Л.Н. Маринчак, которая помогла оформить текст для публикации.

Благодарю В.В. Еременко, без поддержки которого эта статья не была бы написана и опубликована.

P.S. Когда статья была полностью подготовлена к публикации, пришла трагическая весть о неожиданной смерти Арнольда Марковича Косевича. Нас с Аликом Косевичем связывало не только то, что оба мы — ученики Ильи Михайловича Лифшица, но и многолетняя дружба. Признаюсь, «Непростую историю» я рассматривал как подарок А.М. Косевичу — единственному из живых авторов статей, юбилей которых хотел отметить. Опоздал. От этого еще грустнее.

ЛИТЕРАТУРА И ПРИМЕЧАНИЯ

1. L.D. Landau, *Z. Phys.* **64**, 629 (1930), перевод на русский язык в Собрании трудов Л.Д. Ландау, Наука, Москва, т. 1, с. 47 (1969).

2. Поль Ланжевен (1872–1947) доказал универсальность атомного диамагнетизма в 1905 году.
3. Б.И. Веркин, С.А. Гредескул, Л.А. Пастур, Ю.А. Фрейман, *История открытия эффекта Шубникова–де Гааза*, *ФНТ* **16**, 1203 (1990). Статья содержит библиографию из 32 источников. В этом же номере некролог Бориса Иеремиевича Веркина (1919–1990). В перечне авторов инициалы и фамилия Б.И. Веркина в черной рамке.
4. W.J. de Haas and P.M. van Alphen, *Note on the Dependence of the Susceptibility of Diamagnetic Metal on the Field*, *Leiden Comm.* **280**, 31 (1930).
5. И.М. Лифшиц, А.М. Косевич, *К теории магнитной восприимчивости металлов при низких температурах*, *ЖЭТФ* **29**, 730 (1955). Воспроизведена в книге И.М. Лифшиц, *Избранные труды. Электронная теория металлов. Полимеры и биополимеры*, Наука, Москва (1994).
6. Ю.А. Храмов, *Физики, биографический справочник*, Наука, Москва (1983).
7. R. Peierls, *Surprises in Theoretical Physics*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey (1979), Р. Пайерлс, *Сюрпризы в теоретической физике*, Наука, Москва (1988). Перевод на русский язык И.М. Кагановой под редакцией М.И. Каганова.
8. J.A. Van Leeuwen, *J. Phys. (Paris)* **2**, 361 (1921).
9. Энциклопедический словарь *Физика твердого тела*, Наукова думка, Киев (1996).
10. Я.И. Френкель, М.П. Бронштейн, *Журнал Русского физико-химического общества* **62**, 485 (1930). В сборнике [11] в немного сокращенном виде.
11. *Вопросы теоретической физики*, Сборник статей к 100-летию со дня рождения Я.И. Френкеля, Санкт-Петербург (1994).
12. I. Rabi, *Der freie Electron in Homogenen Magnetfeld nach Diracschen Theorie*, *Z. Phys.* **49**, 507 (1928). В том же году вышла работа В.А. Фока (*Z. Phys.* **47**, 446 (1928)), в которой получен спектр электронов в магнитном поле и в параболической потенциальной яме. Из нее немедленно следуют значения уровней Ландау. Работа Фока не упоминается ни в работе Ландау, ни в работе Френкеля и Бронштейна. Я благодарен Э.И. Рашбе, который дал мне ссылку на работу В.А. Фока.
13. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Теоретическая физика*, том III, *Квантовая механика*, Издание третье, переработанное и дополненное при участии Л.П. Питаевского, Наука, Москва (1974).
14. Е.Л. Фейнберг, *Эпоха и личность. Физики*, Физматлит, Москва, с. 383–387 (2003).
15. Считается, что циклотронный резонанс в полупроводниках независимо предсказали Я.Г. Дорфман, *ДАН СССР* **81**, 765 (1951) и R.B. Dingle, *Proc. Roy. Soc. A* **212**, 38 (1952). Резонанс неоднократно наблюдался (см., например, G. Dresselhaus, A. Kip, and C. Kittel, *Phys. Rev.* **92**, 827 (1953)) и сыграл важную роль в определении энергетического спектра электронов в полупроводниках.
16. М.Я. Азбель, Э.А. Канер, *Теория циклотронного резонанса в металлах*, *ЖЭТФ* **30**, 811 (1956); *ЖЭТФ* **32**, 896 (1957). Теория Азбель–Канер–резонанса подробно изложена в учебниках (см., например, [21] и [21a]).
17. P.L. Kapitza, *Study of the Specific Resistance of Bismuth Crystals and Change in Strong Magnetic Fields and Some Applied Problems. I–III*, *Proc. Roy. Soc. A* **119**, 358 (1928).
18. W.J. de Haas, J.W. Blom, and L. Schubnikow, *Über die Widerstandsänderung von Wismuteinkristallen im Magnetfeld bei tiefen Temperaturen*, *Physica* **2**, 907 (1935).
19. Ю.А. Фрейман, электронное письмо от 21 ноября 2005 г. в мой адрес (М.К.). Я очень благодарен Юре Фрейману за важное разъяснение.
20. L. Shubnikov and van Alphen, *A New Phenomenon in the Change of Resistance in a Magnetic Field of Single Crystals of Bismuth*, *Nature (London)* **126**, 500 (1930).
21. И.М. Лифшиц, М.Я. Азбель, М.И. Каганов, *Электронная теория металлов*, Наука, Москва (1971).
- 21a. А.А. Абрикосов, *Основы теории металлов*, Наука, Москва (1987).
22. M. Koler, *Ann. Phys. (Paris)* **32**, 211 (1938) или [21], § 26, с. 220.
23. И.М. Лифшиц, М.Я. Азбель, М.И. Каганов, *К теории гальваномагнитных явлений в металлах*, *ЖЭТФ* **31**, 63 (1956).
24. И.М. Лифшиц, В.Г. Песчанский, Гальваномагнитные характеристики металлов с открытыми поверхностями Ферми. I, *ЖЭТФ* **35**, 1251 (1958); II, *ЖЭТФ* **38**, 188 (1960).
25. В.Г. Песчанский, *ФНТ* **20**, 694 (1994), а также [21a], § 5.5.
26. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Теоретическая физика*, том V, *Статистическая физика*, часть 1, § 60, Наука, Москва (1995).
27. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Теоретическая физика*, том IX; Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский, *Статистическая физика*, часть 2, § 63, Наука, Москва (1978).
28. Д. Шенберг, *Магнитные осцилляции в металлах*, В.С. Эдельман и Д.Ю. Шарвин (пер. с англ.), М.И. Каганов (ред.), Мир, Москва (1986).
29. А.И. Ахиезер, *Воспоминания о Л.Д. Ландау* (к 85-летию со дня рождения), *ФНТ* **19**, 106 (1993). Цитирую по книге: А.И. Ахиезер, *Очерки и воспоминания*, Факт, Харьков (2003), с. 48.
30. L. Landau, *Z. Phys.* **64**, 629 (1930). Добавление к статье: D. Shoenberg, *Proc. Roy. Soc. A* **170**, 341 (1939).
31. А. Ахиезер, *ДАН СССР*, **23**, 872 (1939); Ю. Румер, *ЖЭТФ* **18**, 1081 (1948); Г. Зильберман, *ЖЭТФ* **21**, 1209 (1951); E. Sondheimer and A.A. Wilson, *Proc. Roy. Soc. A* **210**, 173 (1951).
32. L. Onsager, *Philos. Mag.* **43**, 1006 (1952).
33. И.М. Лифшиц, А.М. Косевич, *ДАН СССР* **96**, 650 (1954).

34. И.М. Лифшиц, А.В. Погорелов, *Определение поверхности Ферми и скоростей электронов в металле по осцилляциям магнитной восприимчивости*, ДАН СССР **96**, 1143 (1954). В Избранных трудах И.М. Лифшица, Наука, Москва (1994), с. 19–22.
35. E.N. Adams, *Phys. Rev.* **89**, 633 (1953); М.В. Нищович, *ФММ* **7**, 641 (1959); J.E. Hebborn, J.M. Luttinger, E.H. Sondheimer, and P.J. Stiles, *J. Phys. Chem. Solids* **25**, 741 (1964); J. Ruvalds, *J. Phys. Chem. Solids* **30**, 305 (1969); Н. Fukuyama, *Prog. Theor. Phys.* **45**, 704 (1971). Я благодарен И.В. Свечкареву, который указал мне последние три ссылки.
36. М.И. Каганов, И.М. Лифшиц, *Электронная теория металлов и геометрия*, УФН **129**, 487 (1979).
37. А.М. Косевич, *ФНТ* **30**, 135 (2004). Приведенный здесь список оригинальных статей содержит исчерпывающий перечень источников.
38. V.G. Peschansky, *Kinetic Size Effects in Metals in a Magnetic Field*, *Sov. Scient. Rev./Section A, Phys. Rev.* **16**, part I, I.M. Khalatnikov (ed.) (1992).
39. Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский, *Физическая кинетика*, Наука, Москва (1979). (Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшиц, *Теоретическая физика*, том X.)
40. И.М. Лифшиц, М.И. Каганов, *Некоторые вопросы электронной теории металлов. I. Классическая и квантовая механика электронов в металле*, УФН **69**, 419 (1959). II. *Статистическая механика и термодинамика электронов в металле*, УФН **78**, 411 (1962). III. *Кинетические свойства электронов в металле*, УФН **87**, 389 (1965).
41. L. Van Hove, *Phys. Rev.* **89**, 1189 (1953).
42. И.М. Лифшиц, *Об аномалиях электронных характеристик металла в области больших давлений*, ЖЭТФ **38**, 1569 (1960); (в Избранных трудах с. 98–107).
43. Ya.M. Blanter, M.I. Kaganov, A.V. Pantsulaya, and A.A. Varlamov, *The Theory of Electronic Topological Transitions*, *Phys. Rept.* **245**, 160 (1994).
44. Это очевидно из рис. 1 в [42], который стал графическим символом топологического перехода и многократно повторялся в различных публикациях.
45. С.Л. Бudyко, А.Г. Гапотченко, Е.С. Ицкевич, ЖЭТФ **47**, 106 (1988).
46. D. Shoenberg and I.M. Templeton, *Physica* **69**, 293 (1973).
47. М.И. Каганов, Ю.В. Грибокова, *Топологические переходы в нормальных металлах*, ФНТ **17**, 907 (1991).
48. М. Каганов, А. Нурмагамбетов, ЖЭТФ **83**, 2296 (1982).
49. Н.А. Зимбовская, *Локальная геометрия поверхности Ферми и высокочастотные свойства металлов*, Екатеринбург (1996). N.A. Zimbovskaaya, *Local Geometry of the Fermi Surface and High-frequency Phenomena in Metals*, Springer-Verlag, NY, Berlin, Heidelberg (2001).
50. И.М. Лифшиц, А.М. Косевич, *Известия АН СССР, Сер. физ.* **19**, 395 (1955).
51. Л.Д. Ландау, ЖЭТФ **30**, 1058 (1956).
52. Ю.А. Бычков, Л.П. Горьков, ЖЭТФ **41**, 1592 (1962).
53. М.Н. Cohen and L.M. Falicov, *Phys. Rev. Lett.* **7**, 231 (1961).
54. E.I. Blount, *Phys. Rev.* **126**, 1636 (1962).
55. M.G. Priestley, *Proc. Roy. Soc.* **A276**, 258 (1963).
56. Природу малости поля, снимающего вырождение, мы не обсуждаем. Часто малость связана с тем, что вырождение снимается лишь спин-орбитальным взаимодействием (см. § 10.7 в [21a]).
57. А.А. Слуцкий, *Динамика электронов проводимости и кинетические явления в металлах в условиях магнитного пробоя*, докторская диссертация, ФТИНТ АН УССР, Харьков (1980). Первые публикации А.А. Слуцкина по этой теме относятся к 1967 году.
58. *Электроны проводимости*, М.И. Каганов, В.С. Эдельман (ред.), Наука, Москва (1985). Книга посвящена памяти Ильи Михайловича Лифшица. Главы III и IV написаны М.И. Кагановым и А.А. Слуцким, глава V — Н.Е. Алексеевским и В.И. Нижанковским.
59. *Физическая энциклопедия*, т. 4, *Большая Российская энциклопедия*, Москва (1994), с. 128.

Индекс 71064

Ф
Н
Т