УДК 517.5

Ю. А. БРУДНЫЙ

ЛОКАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ

1. При изучении свойств вещественных функций на основе приближения их полиномами фиксированной степени на измеримых подмножествах наилучшее приближение выступает не как функция от степени приближающего пространства полиномов, но как функция множества, на котором осуществляется аппроксимация. Такой подход может рассматриваться как возврат на современном уровне к первоначальному подходу П. Л. Чебышева, изучавшему асимптотику наилучшего приближения заданного порядка при стремлении к нулю интервала, на котором осуществлялась аппроксимация. Спустя почти столетие после статьи П. Л. Чебышева были опубликованы работы по локальной теории приближения: в 1939 г.— Д. А. Райкова [23] и в 1940 г.— С. Н. Бернштейна [2]. Однако интенсивное развитие начинается лишь с шестидесятых годов, когда обнаружилось, что многие результаты, имеющие отчетливо выраженный локально-аппроксимационный характер, играют существенную роль в ряде разделов современного анализа (теоремы вложения, квазилинейные дифференциальные уравнения в частных производных, сплайны, операторы, действующие в функциональных пространствах и др.). Это способствовало развитию теории, привело к расширению тематики и обогащению арсенала методов исследования. К настоящему времени локальная теория аппроксимации достигла определенной степени зрелости; ее, без сомнения, можно считать разделом конструктивной теории функций, если понимать под этим теорию, которая «... ставит себе целью дать возможно более простую и удобную основу для качественного изучения и вычисления как эмпирических функций, так и всяких функций, являющихся решениями естественно поставленных задач математического анализа (например, решений дифференциальных и функциональных уравнений)» [3].

Предлагаемая работа содержит значительную выборку результатов и методов; более полное представление о теории и ее приложениях можно составить из обзоров [10, 23].

2. Обозначим через π кубическую «укладку», т. е. множество попарно не пересекающихся n-мерных кубов, и пусть P_k обозначает множество полиномов от $x = (x_1, \ldots, x_n)$ степени $k-1$, а $\mathcal{P}_k(\pi)$ — множество измеримых функций $f: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$, совпадающих на каждом кубе $Q \in \pi$ с некоторым полиномом из $\mathcal{P}_k$.

О п р е д е л е н и е 1. *Локальное наилучшее приближение функции* $f \in L_p(\Omega)$, $\Omega \subset \boldsymbol{R}^n$, $0 < p \leqslant \infty$, *есть функция укладки, определяемая формулой*

$$E_k(f;\ \pi) = \inf \{ \|f - g\|_{Lp(\Omega)};\ g \in \mathscr{P}_k(\pi) \}. \tag{1}$$

В частности, если $\pi = \{Q\}$, то пишем $E_k(f;\ Q)$; легко видеть, что

$$E_k(f,\ \pi) = \Big\{ \sum_{Q \in \pi} E_k(f;\ Q)^p \Big\}^{\frac{1}{p}}.$$

Одной из основных задач является изучение связи между свойствами функции и поведением ее локальных приближений. Как и в случае общей теории аппроксимации, существенную роль в таком изучении играют неравенства для многочленов и их производных. Однако в соответствии с целями локальной теории приближения они носят существенно иной характер. Чтобы продемонстрировать один из таких результатов, положим для заданного выпуклого тела $V \subset \boldsymbol{R}^n$ $|f|_{C^s(V)} = \sup\limits_{|\alpha|=s} \| \partial^\alpha f \|_{C(V)}$.

Далее предположим, что $\Omega \subset V$ — произвольное измеримое подмножество относительной меры $\lambda > 0$ (т. е. $\lambda = \operatorname{mes} \Omega | \operatorname{mes} V$), и обозначим через r — радиус вписанного в V шара.

Теорема 1. *Существует такая постоянная* $\gamma_p = \gamma_p\ (k,\ s,\ \lambda)$, *что для любого полинома* $f \in \mathrm{P}_{k+1}$

$$|f|_{C^s(V)} \leqslant \gamma_p r^{-s} \| f \|^*_{L_p(\Omega)}. \tag{2}$$

Здесь норма со звездочкой определяется формулой

$$\| f \|^*_{L_p(\Omega)} = \Big\{ \frac{1}{\operatorname{mes}\ \Omega} \int\limits_{\Omega} | f |^p\, dx \Big\}^{\frac{1}{p}}.$$

Метод, примененный в работе [12], позволяет получить следующую информацию о наименьшей постоянной γ_p, которая может стоять в (2). В случае $s = 0$ и $p = \infty$

$$\gamma_p(k,\ s,\ \lambda) = (t_k \circ \beta)(\lambda), \tag{3}$$

где $t_k(x) = \cos(k \arccos x)$; $\beta(x) = \dfrac{1 + \sqrt[n]{1 - x}}{1 - \sqrt[n]{1 - x}}$. Для случая многочленов одной переменной результат получен иным методом еще в работе Е. Я. Ремеза [24]. Применение неравенства (2) при $p = \infty$ к множеству $\Omega_t = \{x \in V;\ | f(x) | \leqslant t\}$ позволяет оценить функцию распределения многочлена f (т. е. $\operatorname{mes} \Omega_t$), и отсюда следует, что $\gamma_p(k,\ s,\ \lambda) \leqslant \Big\{ \frac{1}{\lambda} \int\limits_0^\lambda \gamma_\infty(k,\ s,\ t)^{-p}\, dt \Big\}^{-\frac{1}{p}}$.

Наконец, можно показать, что $\gamma_\infty(k,\ s,\ \lambda) \leqslant \beta(\lambda)^s (t_k^s \circ \beta)(\lambda)$. Отметим, что в рассматриваемой теории точные оценки постоянных никакой роли не играют; в частности, для приложений достаточно вытекающей из сказанного выше оценки $\gamma_p(k, s, \lambda) \approx \approx \lambda^{-k} (\lambda \to 0)$. Тем не менее, рассматриваемая экстремальная задача безусловно представляет самостоятельный интерес.

3. Чтобы продемонстрировать пример применения подобного неравенства, напомним

Определение 2 [16]. *Функция f из $L_p(\Omega)$ принадлежит тейлоровскому пространству $t_p^\lambda(x)$, $x \in Q$, если существует такой многочлен степени $\leqslant \lambda$, что для любого куба $Q = Q(x, r)$* будет*

$$\| f - R \|_{L_p}^{*} (Q \cap \Omega) = O(r^\lambda)\ (r \to 0). \tag{4}$$

Аналогично тому, как это имеет место в общей теории приближения [1, с. 261], при целом λ класс $t_p^\lambda(x)$ целесообразно расширить «по Зигмунду». Одним из многих эквивалентных способов такого расширения является использование вещественной интерполяции [17, с. 361]. Именно, для $0 < \varepsilon < \lambda$ положим

$$\tilde{t}_p^\lambda(x) \stackrel{\text{def}}{=} (t_p^{\lambda-\varepsilon}(x),\ t_p^{\lambda+\varepsilon}(x))_{\frac{1}{2},\,\infty}.$$

Можно показать, что определение от ε не зависит и при нецелом λ

$$\tilde{t}_p^\lambda(x) = t_p^\lambda(x). \tag{5}$$

Для формулировки соответствующих результатов предположим, что точка $x \in \Omega$ регулярна, т. е.

$$\inf_Q \frac{\operatorname{mes}(Q \cap \Omega)}{\operatorname{mes} Q} > 0, \tag{6}$$

где $Q = Q(x, r)$, $0 < r \leqslant 1$, и положим

$$\Phi_{k,\lambda}(Q) = (\operatorname{mes} Q)^{-\frac{\lambda}{n}+\frac{1}{p}} E_k(f; Q). \tag{7}$$

Теорема 2. *Условие*

$$\lim_{Q \to x} \Phi_{k,\lambda}(Q) = 0 \tag{8}$$

при $0 < \lambda < k$ необходимо и достаточно для принадлежности f к $\tilde{t}_p^\lambda(x)$.

В силу (5) этим дается и характеристика пространства $t_p^\lambda(x)$ при нецелых λ; при целом λ имеет место

Теорема 3. *Для принадлежности f к $t_p^\lambda(x)$ при целом λ, $0 < \lambda < k$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (8) и, кроме того, существовали пределы $\lim\limits_{Q \to x} \partial^\alpha (p_Q; x)$ $(|\alpha| = \lambda)$. Здесь $p_Q \in \mathcal{P}_k$ — многочлен, наименее уклоняющийся от f в пространстве $L_p(Q \cap \Omega)$.*

---

* Т. е. с центром x и объема r^n.

Чтобы продемонстрировать метод доказательства подобных результатов (он впервые, по-видимому, применен в работе [12]), рассмотрим два куба $Q = Q(x, r)$ и $Q' = Q(x, r')$, $r < r'$, и пусть $\{Q_j\}$ — лакунарная* возрастающая последовательность кубов, такая что $Q_0 = Q$ и $Q_l = Q'$. Тогда $\partial^\alpha(p_Q - p_{Q'}) = \sum_{j=0}^{l} \partial^\alpha(p_{Q_{j+1}} - p_{Q_j})$, и применение неравенства (2) с учетом (6), (8) показывает, что при $|\alpha| < \lambda$ правая часть стремится к нулю при r, $r' \to 0$; значит, существуют пределы $c_\alpha = \lim\limits_{Q \to x} \partial^\alpha(p_Q; x)$. Если λ нецелое, то, полагая

$$R(y) = \sum_{|\alpha| > \lambda} c_\alpha \frac{(y - x)^\alpha}{\alpha!},$$

легко убеждаемся, что R удовлетворяет (4). Этим утверждение теоремы 2 устанавливается для нецелого λ; затем применяется интерполяция.

4. Получение подобных результатов глобального характера нуждается в оценках скорости убывания локального приближения (1) в зависимости от величины $|\pi| = \sup\{\operatorname{diam} Q;\ Q \in \pi\}$. Первый результат такого типа содержится в [7, с. 79], где доказано, что если $f \in L_p(Q_0)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $Q_0 \subset \boldsymbol{R}^n$ куб, то

$$E_k(f;\ \pi) \leqslant \gamma(k,\ n,\ p)\, \omega_k(f;\ |\pi|); \tag{9}$$

справа стоит k-й модуль непрерывности**. В доказательстве существенную роль играет приводимая ниже эквивалентность [6], позволяющая путем индукции по размерности свести все к одномерному результату. Именно, если Δ_h^α обозначает смешанную разность порядка $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и шага $h = (h_1, \ldots, h_n)$, то

$$\omega_k(f;\ t) \approx \sup_{|\alpha| = k}\ \sup_{0 < h_i \leqslant t} \|\Delta_h^\alpha f\|_{L_p}. \tag{10}$$

В связи с этим результатом представляет интерес общий вопрос об эквивалентности $\omega_k(f;\ .)$ и обобщенного модуля непрерывности, построенного по данному семейству мер M с помощью формулы

$$\omega_M(f;\ t) = \sup_{\mu \in M}\ \sup_{0 < \lambda \leqslant t} \|\mu_\lambda * f\|_{L_p(R^n)}; \tag{11}$$

здесь $\mu_\lambda(f) = \mu(f(\lambda x))$. Некоторый частный результат приведен в работе [5]; затем в [7] доказано, что если аннулятор M содержит $\mathcal{P}_k$ и носитель M ограничен, то $\omega_M(f;\ t) \leqslant \gamma(M)\, \omega_k(f;\ t)$.

---

* Т. е. для некоторого $\mu > 1$ и всех j $\mu \leqslant \dfrac{\operatorname{mes} Q_{j+1}}{\operatorname{mes} Q_j} \leqslant 2\mu$.

** Неравенство (9) распространено и на случай $0 < p < 1$ (см. [27]).

Очень сильные результаты о сравнимости величин (11), дающие, в частности, достаточные условия для справедливости обратного неравенства, получены в [3].

Первоисточником результатов типа (9) можно считать теорему Уитни [28] (более слабый результат получен ранее Маршо [19]). Пусть I обозначает один из интервалов $I_0 = [0, 1]$, $I_1 = [0 + \infty)$ или $I_2 = (-\infty, +\infty)$.

Теорема (Уитни). *Если* $f \in C(I)$ *и* $\sup |\Delta_h^k(f; x)| < +\infty$, *то существует такая постоянная* $w_k(I)$, *что для некоторого многочлена* $p_f \in \mathcal{P}_k$ $|f(x) - p_f(x)| \leqslant w_k(I) \sup |\Delta_h^k(f; x)|$.

В работе [28] даны еще оценки этой постоянной при $k = 1, \ldots, 5$; например, показано, что $w_k(I_0) = \frac{1}{2}$ при $k = 1, 2$ и что $\frac{8}{15} \leqslant W_3(I_0) \leqslant \frac{7}{10}$. Поскольку константы Уитни связаны теперь со многими задачами теории приближения, представляют интерес возможно более точные оценки $W_k(I_0)$ при больших k. Что касается $w_k(I_s)$, $s = 1, 2$, то здесь имеются результаты, близкие к окончательным.

5. Результаты пунктов 4, 5 уже достаточны для изучения средствами локальной теории приближения дифференциальных свойств функций на выпуклых областях. Так, в [5] получен, в частности, следующий результат, в котором $f \in L_p(Q_0)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $Q_0 \subset R^n$ — куб и $\lambda = s + \mu$, где $0 < \lambda \leqslant k$ и s наибольшее целое $< \lambda$.

Теорема 4. *Условие** $\sup\limits_Q \Phi_{k, \lambda}(Q) < +\infty$ *в случае нецелого* λ *или в случае* $\lambda = k$ *необходимо и достаточно для того, чтобы* f *принадлежала* $C^{s, \mu}(\bar{Q}_0)$. *В оставшихся случаях** это условие эквивалентно тому, что* $f \in C^s(\bar{Q}_0)$ *и старшие производные удовлетворяют условию Зигмунда*

$$|f^{(s)}(x + h) - 2f^{(s)}(x) + f^s(x - h)| = O(|h|). \tag{12}$$

В выполненной независимо и опубликованной несколько ранее работе Кампанато [16] изучен случай, относящийся к областям значительно более общего типа. Следуя этому автору, назовем ограниченную область $\Omega \subset \boldsymbol{R}^n$ регулярной, если неравенство (6) выполняется равномерно по $x \in \Omega$. Далее рассмотрим пространство $L_p^{(k, \lambda)}(\Omega)$, состоящее из функций $f \in L_p(\Omega)$, для которых конечна норма

$$\| f \| L_p^{(k, \lambda)}(\Omega) = \| f \|_{L_p} + \sup_Q \Phi_{k, \lambda}(Q). \tag{12'}$$

Теорема (Кампанато). *Если* Ω — *регулярная ограниченная область и* λ *либо нецелое и* $0 < \lambda < k$, *либо* $\lambda = k$, *то*

$$L_p^{(k, \lambda)}(\Omega) \subset \overset{0}{C}{}^{s, \mu}(\Omega). \tag{13}$$

---

* См. (7) по поводу определения.

** Т. е. когда λ целое $< k$.

Здесь $\overset{0}{C}{}^{s,\mu}(\Omega)$ состоит из функций, которые имеют равномерно непрерывные производные до порядка s в Ω и при этом старшие производные удовлетворяют условию Гельдера порядка μ.

Существуют примеры, показывающие, что вложение (13) не может быть заменено равенством; таким образом, остается открытым вопрос о полной характеристике функций из пространств $L_p^{(k,\lambda)}(\Omega)$. Оказывается, что полное описание можно получить из теоремы 4, если использовать соответствующую теорему продолжения. В случае, рассмотренном Кампанато, а также в более общем случае, когда предполагается лишь, что множество Ω регулярно, но не обязательно открыто, такой результат приведен в [9]. Нам удалось так модифицировать использованный там метод продолжения, что появилась возможность изучить и случай целого λ, $0<\lambda<k$. Таким образом, верна

Теорема 5. *Существует линейный оператор продолжения* ε: $L_p^{(k,\lambda)}(\Omega)\to L_p^{(k,\lambda)}(\boldsymbol{R}^n)$; *здесь* $0<\lambda\leqslant k$ и Ω — *регулярное измеримое множество.*

Чтобы описать ε, обозначим через $\{k_i\}$ разбиение Уитни дополнения множества $\overline{\Omega}$ на кубы [26, с. 27] и через $\{\psi_i\}$ —подчиненное $\{k_i\}$ разбиение единицы. Обозначим через k_i^* наименьший куб с центром в $\overline{\Omega}$, содержащий k_i, и пусть Z_i — оператор (ортогонального) проектирования пространства $L_p(k_i^*\cap\Omega)$ на $\mathcal{P}_k$. Тогда для $x\in\boldsymbol{R}^n/\Omega$ оператор ε определяется формулой $\varepsilon(f,x)=\sum\psi_i(x)Z_i\times$ $\times(f;x)$. Соответствующие выкладки показывают, что ε дает требуемое продолжение при $0<\lambda<k$; случай $\lambda=k$ приходится рассматривать отдельно.

Такая «неуниверсальность» оператора продолжения ε может быть преодолена; это было сделано в дипломной работе П. А. Шварцмана, который построил более эффективный метод продолжения, пригодный при любых λ, $0\leqslant\lambda\leqslant k$, и даже в значительно более общих ситуациях [29]. Метод П. А. Шварцмана отличается от изложенного выше в одном решающем пункте: вместо кубов k_i^*, покрывающих Ω с, вообще говоря, бесконечной кратностью, выбираются множества $G_i\subset K_i^*$, для которых $\operatorname{mes}(\Omega\cap G_i)\approx\operatorname{mes}(\Omega\cap k_i^*)$ и в то же время кратность покрытия конечна. Чтобы сформулировать результат П. А. Шварцмана применительно к изучаемой ситуации, предположим, что $f\in L_p(\Omega)$, $0<p\leqslant\infty$, Ω — регулярное измеримое множество, и при этом для всех $Q=Q(x,r)$, $x\in\Omega$, $E_k(f;Q)\leqslant\varphi(r)$.

Теорема (П. А. Шварцман). *Функция* f *может быть так продолжена на все пространство* $\boldsymbol{R}^n$ *до функции* $\tilde{f}$, *что для любого куба* $Q=Q(x,r)$, $x\in\boldsymbol{R}_n$, *будет* $E_k(\tilde{f};Q)\leqslant\gamma\tilde{\varphi}(r)$. *Здесь* $\gamma=\gamma(k,p,\Omega)$; $\varphi(t)=t^k\sup\limits_{s\geqslant t}\{s^{-k}\varphi(s)\}$.

Применение теорем 4 и 5 позволяет дать полную характеристику пространств $Z^{(k,\ \lambda)}_{p}$ при $0 < \gamma \leqslant k$, а результат П. А. Шварцмана — получить такую же характеристику и при $\lambda = 0$.

Теорема 5′. *Пусть H^λ обозначает пространство функций из $C^s(\boldsymbol{R}^n)$, $\lambda - 1 \leqslant S < \lambda$, старшие производные которых удовлетворяют условию Гельдера порядка $\lambda - s$ при λ нецелом и условию Зигмунда при λ целом. Тогда при $0 < \lambda < k$ $L_p^{(k,\ \lambda)}(\Omega) = H^\lambda/\Omega$ и существует линейный оператор продолжения $L^{(k,\ \lambda)}_{p}(\Omega) \to H^\lambda$. В случае $\lambda = k$ нужно H^λ заменить на $C^{k-1,\ 1}(\boldsymbol{R}^n)$.*

6. Другая точка зрения на теорему 5 состоит в том, что она дает локально-аппроксимационную характеристику следов функций из H^λ. Аналогичный результат для функций из $C^s(\boldsymbol{R}^n)$ в общем случае неизвестен; в случае функций одной переменной имеется следующая замечательная

Теорема (С. Н. Бернштейн [2]). *Для того чтобы функция f из $C\,[0,\ 1]$ принадлежала $C^k[0,\ 1]$, необходимо и достаточно, чтобы семейство $\{r^{-k}\ E_k(f;\ x-r,\ x+r)_C;\ r > 0\}$ при $r \to 0$ сходилось равномерно по $x \in (0,\ 1)$ к некоторой функции $\lambda(x)$. При этом $K!\ 2^{2k-1}\lambda(x) = |f^{(k)}(x)$.*

В то же время локально-аппроксимационная характеристика функций из пространств Соболева W_p^k или соответствующих пространств дробной гладкости известны (см. [5, 7]). Чтобы привести соответствующую формулировку, обозначим через AC_r множество функций куба I, для которых $|I|^r$ абсолютно непрерывна. Далее, предположим, что число r, $1 \leqslant r < \infty$, таково, что $W_r^k(Q_0) \subset L_p(Q_0)$. Отметим, что случай $r \geqslant p$ не исключается; при $r < p$ это число определяется теоремой вложения С. Л. Соболева [25].

Теорема 6. *Для принадлежности функций f из $L_p(Q_0)$ пространству $W_r^k(Q_0)$ необходимо и достаточно, чтобы функция $\Phi_{k,\ k}$ (7), принадлежала к AC_r.*

7. Теоремы, подобные приведенным в пунктах 5, 6, играют существенную роль при исследовании свойств функций многих переменных методами локальной теории приближения. Приведем несколько примеров результатов, которые здесь получены. Рассмотрим шкалу пространств $B_p^{\lambda\Theta}(Q_0)$, [19, с. 151] по поводу определения. Тогда верен следующий аналог C — свойства Лузина (см. [7, с. 120] в случае нецелого λ).

Теорема 7. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует разложение функции f из $B^{\lambda\ \theta}_{p}(Q_0)$ в сумму $g_\varepsilon + h_\varepsilon$, такое что мера носителя h_ε меньше ε, а g_ε принадлежит пространству $C^s(Q_0)$, $\lambda - 1 \leqslant s < \lambda$, причем старшие производные при нецелом λ удовлетворяют неравенству*

$$|g_\xi^s(x) - g_\varepsilon^s(y)| \leqslant 0\,(1)\,|x-y|^{\lambda-s}\ln^s\frac{1}{|x-y|}\quad (x-y \to 0). \tag{14}$$

Здесь σ — любое число, строго большее $\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{\theta}$ при $p < \theta$, и $\sigma = 0$ при $p \geqslant \theta$.

В случае целого λ то же верно при замене слева в (14) первой разности на вторую.

В частном случае пространства $B_p^{\lambda\theta}(0, 1)$, $\theta=\infty$ и $0<\lambda<1$, недавно К. И. Осколков [20] обнаружил, что утверждение теоремы неулучшаемо в том смысле, что нельзя (14) взять $\sigma=\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}$. Отметим также, что теорема носит окончательный характер и при $p=\theta$; вероятно результат неулучшаем и при других значениях параметров.

Приведем, далее, результат о поточечной дифференцируемости функций из пространств B_p^λ ($B_p^{\lambda\theta}$ при $\theta=p$). Пусть q определяется равенством $\frac{\lambda}{n}=\frac{1}{p}-\frac{1}{q}$; тогда верна

Теорема 8. *Функция f из $B_p^\lambda(Q_0)$ принадлежит тейлоровскому пространству $\tilde{t}_q^\lambda(x_0)$* для почти всех x.

Наконец, приведем теорему, показывающую, что локально-аппроксимационный подход может быть использован и в задачах общей теории приближения. Для этого обозначим через $R_N(f; p)$ наилучшее приближение функции $f\in L_p(0, 1)$ с помощью рациональных дробей степени N.

Теорема 9. *Если при $N\to\infty$ $R_N(f;\ p)=0(N^{-\lambda})$, $\lambda>0$, то для любого $\varepsilon>0$ функция f представима в виде суммы $q_\varepsilon+h_\varepsilon$ где мера носителя h_ε меньше ε, а $g_\varepsilon\in C^s[0, 1]$, $\lambda-1\leqslant s<\lambda$ причем в случае нецелого λ*

$$|g_\varepsilon^s(x)-g_\varepsilon^s(y)|=0(1)\,|x-y|^{\lambda-s}\ln^\delta\frac{2}{|x-y|}, \tag{15}$$

где δ — любое число, строго большее $\lambda+\frac{1}{p}$.

В случае целого λ то же верно при замене первой разности слева в (15) на вторую.

Теорема 9 неулучшаема и дает существенное усилие соответствующих результатов А. А. Гончара и Е. П. Долженко, полученных иными средствами (см. обзор [13]).

8. В заключение приведем применения локальной теории приближения в другой области, связанной с теоремами вложения. Ограничиваясь хорошо изученным случаем пространств $B_p^{\lambda\theta}(\boldsymbol{R}^n)$, покажем, что предлагаемый подход дает возможность получить здесь существенно новые результаты. При этом не будем ограничивать область параметров p, θ, считая, что $0<p$, $\theta\leqslant\infty$; определение, пригодное в случае $p\geqslant 1$ и в случае $0<p<1$, основано на использовании нормы*

$$\|f\|_{B_p^{\lambda\theta}(R)^n}=\|f\|_{L_p}+\left\{\int_0^\infty\left|\frac{\omega_k(f;\ t)}{t^\lambda}\right|^\theta\frac{dt}{t}\right\}^{\frac{1}{\theta}}. \tag{16}$$

---

* Квазинормы при $0<p<1$ или $0<\theta<1$.

По поводу эквивалентности этого определения при $p \geqslant 1$ первоначальным определениям С. М. Никольского, О. В. Бесова и Тейблсона см., например, [19, с. 212, 26, с. 176]. Для формулировки соответствующего результата введем две шкалы пространства. Пространство $\mathrm{BMO}_p(\boldsymbol{R}^n)$ при $p=\infty$ совпадает по определению с пространством BMO функций ограниченного колебания в среднем Йона и Ниренберга [14], а при $p=1$ с пространством $C(\boldsymbol{R}^n)$. При других значениях p определим его так: пусть f_Q обозначает среднее значение функции f на кубе Q и пусть f_Q^* непрерывная справа, обратная к функции распределения $t \mapsto \operatorname{mes}\{x \in Q;\ |f(x)-f_Q|>t\}$. Тогда BMO_p определяется с помощью нормы

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}_p} = \sup_Q \left\{ |f_Q| + \left[\int_0^{\operatorname{mes} Q} \left| \frac{f_Q^*(t)}{\log \frac{2\operatorname{mes} Q}{t}} \right|^p \frac{dt}{t} \right]^{\frac{1}{p}} \right\}. \tag{17}$$

Пространство BMO_p можно определить и как интерполяционное пространство между BMO (BMO_p при $p=\infty$) и L_∞, что подтверждает «естественность» этой шкалы.

Другая шкала пространств $\mathrm{Var}_p(\boldsymbol{R}^n)$, $0<p\leqslant\infty$, является обобщением для случая функций многих переменных функций ограниченной p-вариации (в смысле Винера — Л. Юнг). Именно, определим сначала колебание порядка S функции $f \in \mathbf{C}(\boldsymbol{R}^n)$ на кубе Q, полагая $\omega_s(f;\ Q)=\sup\{|\Delta_h^s(f;\ x)|;\ x,\ x+Sh \in Q\}$. Тогда f принадлежит пространству $\mathrm{Var}_p(\boldsymbol{R}^n)$, если при $s \geqslant \frac{1}{p}$ $\mathrm{Var}_p(f) = \sup_\pi \left\{\sum_{Q\in\pi} \omega_s(f;\ Q)^p\right\}^{\frac{1}{p}} < +\infty$. Теперь все готово для формулировки теоремы вложения. Пусть числа λ, μ, $0 \leqslant \mu < \lambda - \frac{n-m}{p}$ и q $p<q\leqslant\infty$, связаны соотношением $\lambda-\mu=\frac{n}{p}-\frac{m}{q}$ $(0<m\leqslant n)$. Тогда верна

Теорема 10. *Пространство $B_p^{\lambda\theta}(\boldsymbol{R}^n)$ непрерывно вложено в одно из следующих пространств: а) пространство $B_q^{\mu\theta}(\boldsymbol{R}^m)$ при $\mu>0$; б) пространство Лоренца $L_{q\theta}(\boldsymbol{R}^m)$ при $\mu=0$, $q<\infty$; в) пространство $\mathrm{BMO}_\theta(R^m)$ при $\mu=0$, $q=\infty$ и $1<\theta\leqslant\infty$; г) пространство $\mathrm{Var}_\alpha(R^m)$, где $\alpha=\max(\theta,\ p)$, в оставшемся случае $\mu=0$, $q=\infty$ и $0<\theta\leqslant 1$.*

Разумеется, при p, $\theta \geqslant 1$ случаи а) и б) теоремы хорошо известны (см., например, [19, гл. 6] по поводу первого случая и [21] по поводу второго); но случаи в) и г) содержат новые результаты и при p, $\theta \geqslant 1$. Следует отметить, что все утверждения получаются единым методом, основанным на оценке убывающей перестановки функции f из $B_p^{\lambda\Theta}$ с помощью локальной аппроксимации.

Впервые такой подход применен в работе [14] в случае пространства BMO; иной метод использован в [9]. Наконец, частный случай $p = q$, $0 < p < 1$, утверждения а) недавно получен И. П. Иродовой на другом пути.

Список литературы: **1.** *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. — М.: Физматгиз, 1965. — 323 с. **2.** *Бернштейн С. Н.* К вопросу о локальном наилучшем приближении. — Соч. М., Изд-во АН СССР, 1954. Т. 2. — 627 с. **3.** *Boman J.* Equivalence of generalised moduli of continuity. Stockholm's Un. m. p., 1978, № 1, p. 1—54. **4.** *Брудный Ю. А.* О локальных наилучших приближениях. — Докл. АН СССР, 1965, **161**, № 4, с. 746—749. **5.** *Брудный Ю. А.* Исследование свойств непериодических функций многих переменных методами теории приближения. — Усп. мат. наук, 1965, № 5, с. 276—279. **6.** *Брудный Ю. А.* Многомерный аналог одной теоремы Уитни. — Мат. сб., 1970, **82**, № 2, с. 169—191. **7.** *Брудный Ю. А.* Пространства, определяемые с помощью локальных приближений. — Тр. Моск. мат. о-ва, 1971, **24**, с. 69—132. **8.** *Брудный Ю. А.* Об одной теореме продолжения. — Функц. анализ и его приложения, 1970, **4**, № 3, с. 97—98. **9.** *Брудный Ю. А.* О перестановке гладкой функции. — Усп. мат. наук, 1972, **27**, № 2, с. 165—166. **10.** *Brudnyi Yu. A.* Piecewise polynomial approximation, embedding theorems and rational appr. — Lect. Notes math., 1976, № 556, p. 73—98. **11.** *Брудный Ю. А. Гопенгауз И. Е.* Приближение кусочно-полиномиальными функциями. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1963, **27**, № 4, 723—746. **12.** *Брудный Ю. А. Ганзбург М. И.* Об одной экстремальной задаче для многочленов. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1973, **37**, № 2, с. 344—355. **13.** *Гончар А. А.* Скорость приближения рациональными дробями и свойства функций. — Тр. междунар. конгресса математиков. — М.: Мир, 1968, с 329—356. **14.** *John F., Nirenberg Z.* On functions of bounded mean oscillation. Comm. Pure Appl. Math., 1961, **4**, p. 415—426. **15.** *Calderon A. P., Zugmund A.* Local properties of solutions of elliptic partial differential equations. — Studia Math., 1961, **20**, p. 171—225. **16.** *Campanato S.* Proprieta di una famiglia di spazi funzionali. — Ann. Schuola Norm. Sup. Pisa, 1964, **18**, p. 137—160. **17.** *Крейн С. Г., Петунин Ю. И. Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. — М.: Наука, 1978. — 303 с. **18.** *Marchand A.* Sur les derivees et sur les differences de fonctions de variables reels. — Journ. Math. pures et appl., 1927, **6**, p. 337—425. **19.** *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. — М.: Наука, 1977. — 395 с. **20.** *Осколков К. И.* Равномерный модуль непрерывности суммируемых функций. — Докл. АН СССР, 1976, **229**, № 2, с. 304—306. **21.** *Peetre J.* Espaces d'interpolation et theorem den Soboleff. — Ann. Inst. Fourier, 1966, **16**, p. 279—317. **22.** *Peetre J.* On the theory of $L_{p,\lambda}$ spaces. — Journ. Funct. Analysis, 1969, **4**, 71—87. **23.** *Райков Д. А.* О локальном приближении дифференцируемых функций. — Докл. АН СССР, 1939, **24**, с. 652—655. **24.** *Ремез Е. Я.* Sure une propriete extremale des polynomes de Tchebychev. — Зап. наук.-дослід. ін-т мат. Харківськ. ун-ту. Сер. 4. 1936, XIII, с. 93—95. **25.** *Соболев С. Л.* Об одной теореме функционального анализа. — Мат. сб., 1938, **4**. № 3, с. 471—497. **26.** *Стейн И. М.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. — М.: Мир, 1973. — 342 с. **27.** *Стороженко Э. А. Освальд П.* Теорема Джексона в пространствах $L_p(R^k)$, $0 < p < 1$. — Сиб. мат. журн., 1978, **XIX**, № 4. с. 888—901. **28.** *Whitney H.* On functions with bounded n-th differences. — Journ. Math. pure appl; 1957, **9**, № 36, p. 67—95. **29.** *Шварцман П. А.* Теорема продолжения для одного класса пространств определяемых приближениями. — Исследования по теории функций многих переменных, 1978, вып. 2, с. 215—241. **30.** *Чебышев П. Л.* Теория механизмов, известных под названием параллелограммов. Соч., 1947, т. 2, М. — Л. —520 с.

Поступила 25 декабря 1979 г.