ВЕСТНИК ХАРЬКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

СЕРИЯ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

Том 32 1966

Записки механико-математического факультета
и Харьковского математического общества

СТАЦИОНАРНЫЕ ПОТОКИ ОДНОРОДНЫХ СЛУЧАЙНЫХ СОБЫТИЙ

И. М. Сливняк

Одной из задач, выдвинутых в последнее время теорией массового обслуживания, является изучение стационарных потоков вызовов более общих, чем потоки без последействия или с ограниченным последействием.

В своей монографии [1] А. Я. Хинчин дал общее определение класса стационарных потоков и установил некоторые их свойства. В настоящей работе рассматриваются потоки того же класса. Результаты этой статьи были опубликованы без доказательства в работе [2].

Начнем с определения основных понятий (точные формулировки будут даны в § 1).

Потоком вызовов $X_p(t)$ называется число вызовов, поступивших за промежуток времени $[0, t]$. Через p обозначается соответствующая потоку $X_p(t)$ вероятностная мера на борелевских множествах в пространстве реализаций $x(t)$ процесса $X_p(t)$. В дальнейшем предполагается, что за конечный промежуток времени поступает конечное число вызовов и

$$p\{x(0)=0\}=1. \tag{1}$$

Поток $X_p(t)$ называется стационарным, если при любом $\Delta>0$ мера p инвариантна относительно преобразования сдвига Q_Δ, сопоставляющего каждому множеству вида

$$B=\{x(t_j)-x(0)=k_j;\ j=1, \ldots, n\}$$

множество

$$Q_\Delta B=\{x(t_j+\Delta)-x(\Delta)=k_j;\ j=1, \ldots, n\}.$$

Очевидно, всякий поток $X_p(t)$ взаимно-однозначно связан с последовательностью случайных величин $\{\xi_k^{(p)}\}_0^\infty$, где $\xi_0^{(p)}$ означает момент поступления первого вызова, $\xi_k^{(p)}$ — промежуток времени между вызовами с номерами k и $k+1$. Поэтому вместо потока $X_p(t)$ можно рассматривать соответствующую ему последовательность $\{\xi_k^{(p)}\}_0^\infty$.

Определения основных классов потоков принимают при этом весьма простой вид. Например, простейшим называется поток со взаимно независимыми случайными величинами $\xi_k^{(p)}$, для которых

$$p\{\xi_k \geqslant t\}=e^{-\lambda t};$$

потоком с ограниченным последействием (потоком типа Р)—стационарный поток со взаимно независимыми случайными величинами $\xi_k^{(p)}$ удовлетворяющими условию

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}p\{\xi_0+\xi_1\leqslant\Delta\}=0.$$

Однако само понятие стационарности потока, записанное с помощью случайных величин $\xi_k^{(p)}$, становится трудно обозримым. Действительно, стационарность потока $X_p(t)$ означает, что для любых $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ и любых целых $0 = k_0 \leqslant k_1 \leqslant \ldots \leqslant k_n$ вероятность

$$p\left\{\xi_0 > \Delta; \sum_{i=0}^{k_j-1} \xi_i \leqslant t_j + \Delta < \sum_{i=0}^{k_j} \xi_i;\ j = 1, \ldots, n\right\} +$$

$$+ \sum_{s=1}^{\infty} p\left\{\sum_{i=0}^{s+k_j-1} \xi \leqslant t_j + \Delta < \sum_{i=0}^{s+k_j} \xi_i;\ j = 0, 1, \ldots, n\right\}$$

не зависит от Δ.

Естественно постараться придать этому свойству в терминах последовательности $\{\xi_k\}_0^\infty$ более простой вид. С этой целью мы рассмотрим некоторый оператор $\boldsymbol{P}_1$, переводящий меру p, инвариантную относительно семейства преобразований Q_Δ, $\Delta > 0$, в меру, инвариантную относительно преобразования сдвига U:

$$U\xi_k = \xi_{k+1},\ k \geqslant 0. \tag{2}$$

Пусть S_Δ — отображение, увеличивающее координату ξ_0 каждой точки $\{\xi_k\}_0^\infty$ на Δ и не изменяющее других ее координат. Обозначим

$$\boldsymbol{P}_1 p\,(C) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta}\,[p\,(C) - p\,(S_\Delta C)], \tag{3}$$

где C — множество вида $\{\xi_0 > a_0 > 0;\ \xi_k \geqslant a_k \geqslant 0,\ k = 1, \ldots, n\}$.

Как доказано в теореме I (§ 2), для любого стационарного потока $X_p(t)$ оператор $\boldsymbol{P}_1$ переводит меру p в некоторую меру, инвариантную относительно сдвига U и взаимно-однозначно связанную с мерой p.

Мера $\boldsymbol{P}_1 p$, вообще говоря, не является вероятностной.

Однако согласно теореме II (§ 3) для стационарных потоков, удовлетворяющих условию

$$p\left\{\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k = 0\right\} = 0^*, \tag{4}$$

существует оператор $\boldsymbol{P}$, переводящий меру p в вероятностную меру, инвариантную относительно сдвига U.

Как показано в [2], меры $\boldsymbol{P}_1 p$, $\boldsymbol{P}_p$ можно рассматривать как обобщение функций Пальма, введенных А. Я. Хинчиным в [1].

Результаты § 2,3 позволяют установить взаимно-однозначное соответствие между стационарными потоками $X_p(t)$, удовлетворяющими (4), и стационарными в узком смысле последовательностями $\{\xi_k^{(\boldsymbol{P}p)}\}_0^\infty$ („порождающими" последовательностями).

В § 4 получена формула

$$p(B) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \boldsymbol{P} p\,(Q_\Delta B)\, d\Delta, \tag{5}$$

* Это условие выполнено, если, например, поток имеет конечную интенсивность (§ 6).

которая дает возможность восстановить стационарный поток $X_p(t)$ по порождающей последовательности $\{\xi_k^{(Pp)}\}_0^\infty$ или, иначе говоря, по потоку $X_{Pp}(t)$. Для этого нужно заменить момент включения $t=0$ механизма, вырабатывающего поток $X_{Pp}(t)$, случайной величиной, равномерно распределенной на интервале $(-T, 0)$, и перейти к пределу при $T \to \infty$.

В § 5 доказано, что единственными стационарными потоками $X_p(t)$, для которых меры p и Pp совпадают, являются простейшие потоки со случайным параметром. Класс таких потоков рассматривал по другому поводу А. Я. Хинчин [1, стр. 25].

В § 6 установлена связь параметра и интенсивности стационарного потока $X_p(t)$ с мерой $P_1 p$.

В § 7 рассмотрены некоторые специальные классы стационарных потоков.

§ 1. Определения

В этом параграфе собраны определения основных пространств, отображений, классов множеств и классов мер, используемые в настоящей работе.

Ниже используются терминология и обозначения книги [3]. Примем также следующие обозначения:

для любых целых чисел $m \leqslant n$ $\{k=\overline{m,n}\} = \{k: k = m, \ldots, n\}$;

для любых чисел $a_m, \ldots, a_n$

$$a_{m,n} = \begin{cases} \{a_m, \ldots, a_n\}, & n \geqslant m, \\ 0^*, & n < m; \end{cases}$$

$$a_{m,n} = \begin{cases} \sum_{i=m}^{n} a_i, & n \geqslant m, \\ 0, & n < m; \end{cases}$$

Δ, τ — положительные числа.

1.1. Пусть T—отображение σ-кольца S в S. Мера μ, заданная на S, называется инвариантной относительно T на классе множеств $\mathbf{M} \subseteq S$, если для любого $B \in \mathbf{M}$

$$\mu(TB) = \mu(B).$$

Множество $B \in S$ называется инвариантным относительно T по мере μ, если $\mu(B \Delta TB) = 0$.

Пусть (X, S, μ) — пространство с мерой; T — взаимно-однозначное отображение S в S, для которого при любых $B_k \in S$

$$T(B_1 - B_2) = TB_1 - TB_2, \quad T\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\Big) = \bigcup_{k=1}^{\infty} TB_k.$$

Обозначим J_μ класс множеств из S, инвариантных относительно T по мере μ. Как легко проверить, J_μ — σ-кольцо. Введем на S меру

$$\nu(B) = \int_B f d\mu,$$

* 0 — пустое множество.

где $f(P)$ — конечная неотрицательная функция точки $P \in X$, измеримая относительно S. Обозначим $E_\mu\{f/J_\mu\}$ любую функцию точки $P \in X$, измеримую относительно J_μ и такую, что для всякого $B \in J_\mu$

$$\int\limits_B E_\mu\{f/J_\mu\}\, d\mu = \int\limits_B f d\mu.$$

Если меры μ, ν вполне σ-конечны на J_μ, то в силу теоремы Радона-Никодима функция $E_\mu\{f/J_\mu\}$ существует и единственна $[\mu]$.

1.2. Следуя А. Н. Колмогорову [4], введем следующие понятия.

Пусть T и X — множества значений действительных переменных θ и x,

R^τ — некоторое множество функций $x(\theta)$, $\theta \in T$, принимающих значения из X.

Цилиндрическими множествами в R^τ называются множества вида

$$\left\{x(\theta) : x(\theta) \in R^\tau;\ [x(\theta_i),\ i = \overline{1, n}] \in \tilde{A}\right\},$$

где $\tilde{A}$ — n-мерное борелевское множество.

Для фиксированных $\theta_{\overline{1, n}}$ класс цилиндрических множеств есть σ-кольцо $F^\tau(\theta_{\overline{1, n}})$. Совокупность элементов всех σ-колец $F^\tau(\theta_{\overline{1, n}})$ есть кольцо F^τ_∞.

Обозначим $S(F^\tau_\infty) = F^\tau$. Множества из F^τ называются борелевскими множествами пространства R^τ.

С помощью конструкции, описанной в этом пункте, мы определим в п. 1.3 основные классы множеств, на которых будут заданы рассматриваемые в дальнейшем меры.

1.3. Пусть $R_m(\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_m})$ – m-мерное эвклидово пространство, натянутое на неотрицательные полуоси $\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_m}$;

P—точка пространства R_m;

$$R = R_\infty(\xi_{\overline{0, +\infty}}) \cap \left\{P : \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k = \infty\right\}. \tag{6}$$

Применим к R конструкцию п. 1.2. Обозначим при этом $F^\tau(\overline{0, n}) = \Phi_n$, $n \geqslant 0$; $F^\tau_\infty = \Phi_\infty$; $F^\tau = S(\Phi_\infty) = \Phi$ — σ-кольцо борелевских множеств в R. Каждой вероятностной мере μ, заданной на Φ, соответствует случайная последовательность $\left\{\xi^{(\mu)}_{\overline{0, \infty}}\right\}$, реализациями которой служат точки пространства R.

Любой точке $P \in R$ сопоставим числовую последовательность $\left\{t_{\overline{0, \infty}}\right\}$ и функцию $x(t)$:

$$t_k = \sum_{i=0}^{k} \xi_i;\quad x(t) = \begin{cases} \max\limits_{t_k < t}(k+1), & t \geqslant t_0, \\ 0, & 0 \leqslant t < t_0. \end{cases}$$

Совокупность функций $x(t)$ образует пространство Ω.

Применим к Ω конструкцию п. 1.2, где T — множество неотрицательных значений θ; X — совокупность целых значений x.

Обозначим

$$F^\tau(\theta_{\overline{1, n}}) = \Phi_x(\theta_{\overline{1, n}});\ F^\tau_\infty = \Phi_{\infty, x};$$

$F^{\tau} = \Phi_x$ — σ-кольцо борелевских множеств в Ω. Каждой вероятностной мере μ, заданной на Φ_x, соответствует случайный процесс $X_\mu(t)$, реализациями которого служат точки пространства Ω. Такие процессы, подчиненные дополнительному условию

$$\mu\{x(t): x(0) > 0\} = 0,$$

называются потоками однородных случайных событий ([1]). По определению, процесс $X_\mu(t)$ задан на полуоси $t \geqslant 0$.

Пусть, далее, $\tilde{\Phi}_x(\theta_{\overline{1,n}})$ — σ-кольцо цилиндрических множеств

$$A = \{x(t): x(t) \in \Omega;\ [x(\theta_i) - x(0),\ i = \overline{1,n}] \in \tilde{A}\},$$

где $\tilde{A}$ — n-мерное борелевское множество;

$\tilde{\Phi}_{\infty, x}$ — кольцо, образованное элементами всех σ-колец $\tilde{\Phi}_x(\theta_{\overline{1,n}})$;

$$\tilde{\Phi}_x = S(\tilde{\Phi}_{\infty, x}) \subset \Phi_x.$$

Очевидно,

$$\tilde{\Phi}_x \cap \{x(t): x(0) = 0\} = \Phi_x \cap \{x(t): x(0) = 0\}^*. \tag{7}$$

1.4. В этом пункте мы введем отображения, связанные со свойствами стационарности потока $X_\mu(t)$ и стационарности в узком смысле последовательности $\{\xi^{(\mu)}_{\overline{0,\infty}}\}$.

Положим для $P \in R$

$$UP = \{P_1 : P_1 \in R;\ \xi_{k+1}(P_1) = \xi_k(P),\ k \geqslant 0\} \in \Phi.$$

Очевидно, U — взаимно-однозначное отображение σ-кольца Φ в Φ.

Введем также отображение U_{-1}: для $P \in R$

$$U_{-1}P = P_1 \in R,\ \text{где}\ \xi_k(P_1) = \xi_{k+1}(P),\ k \geqslant 0.$$

Если вероятностная мера μ, заданная на Φ, инвариантна на Φ относительно U, то, как известно, случайная последовательность $\{\xi^{(\mu)}_{\overline{0,\infty}}\}$ называется стационарной в узком смысле.

Для $x(t) \in \Omega$ и любого $\Delta > 0$ положим

$$Q_\Delta x(t) = \{x_1(t): x_1(t) \in \Omega;\ x_1(t+\Delta) - x_1(\Delta) = x(t) - x(0)\} \in \tilde{\Phi}_x.$$

Очевидно, Q_Δ — взаимно-однозначное отображение σ-кольца $\tilde{\Phi}_x$ в $\tilde{\Phi}_x$.

Определим также отображение $Q_{-\Delta}$:

$$Q_{-\Delta} x(t) = \{x_1(t): x_1(t) \in \Omega;\ x_1(t) - x_1(0) = x(t+\Delta) - x(\Delta)\} \in \tilde{\Phi}_x.$$

Если вероятностная мера μ, заданная на Φ_x, инвариантна на $\tilde{\Phi}_x$ относительно Q_Δ при любом $\Delta > 0$, то поток $X_\mu(t)$ называется стационарным [1].

1.5. Установим связь между точками пространств R и Ω.

С этой целью положим для $P \in R$

$$LP = x(t) \in \Omega,$$

где функция $x(t)$ определена в п. 1·3.

---

* Для любого класса множеств $\boldsymbol{B}$ и любого множества B_0 символ $\boldsymbol{B} \cap B_0$ обозначает класс множеств вида $B \cap B_0$, где $B \in \boldsymbol{B}$.

Как легко проверить, L — взаимно-однозначное измеримое отображение (R, Φ) на (Ω, Φ_x). С помощью отображения L всякий поток $X_\mu(t)$ может быть заменен случайной последовательностью $\{\xi_{\overline{0,\infty}}^{(\mu L)}\}$. В дальнейшем мы не будем делать различия в обозначениях между классами потоков $X_\mu(t)$ и соответствующими им классами случайных последовательностей $\{\xi_{\overline{0,\infty}}^{(\mu L)}\}$, между мерами μ и $L\mu$, между множествами $B \in \Phi$ и $LB \in \Phi_x$.

1.6. Положим для $P \in R$ и $\alpha \geqslant 0$

$$S_\alpha P = P_1(\xi_0(P) + \alpha,\ \xi_{\overline{1,\infty}}(P)) \in R,\ S_{-\alpha} = S_\alpha^{-1}.$$

Очевидно, S_α — взаимно-однозначное измеримое отображение (R, Φ) в (R, Φ). Отображение $S_{-\alpha}$ определено на множестве $\{P : \xi_0(P) \geqslant \alpha\}$.

1.7. В этом пункте мы введем на σ-кольцах Φ_x, Φ основные классы мер, рассмотрению связей между которыми посвящена настоящая работа.

Пусть $\boldsymbol{X}_1$ — класс вероятностных мер p, заданных на Φ_x, инвариантных на $\tilde{\Phi}_x$ относительно Q_Δ и удовлетворяющих условию

$$p\{x(t) : x(0) > 0\} = 0; \tag{8}$$

$\boldsymbol{X}_2$ — класс мер $p \in \boldsymbol{X}_1$, удовлетворяющих условию:

$$p\left\{x(t) : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k = 0\right\} = 0; \tag{9}$$

$\boldsymbol{K}_1$ — класс мер $\varkappa$, заданных на Φ, инвариантных на Φ относительно U и удовлетворяющих условию

$$\int_R \xi_0 d\varkappa = 1; \tag{10}$$

$\boldsymbol{K}_2$ — класс мер $\varkappa \in \boldsymbol{K}_1$, удовлетворяющих условию:

$$\varkappa\left\{P: \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k = 0\right\}; \tag{11}$$

$\boldsymbol{B}$ — класс вероятностных мер q, заданных на Φ, инвариантных на Φ относительно U и удовлетворяющих условию: мера $\int_B \xi_0\, dq$ вполне σ-конечна на J_q — σ-кольце множеств из Φ, инвариантных относительно U по мере q.

Условимся понимать под $\boldsymbol{X}_1$, $\boldsymbol{X}_2$ также классы потоков $X_p(t)$, соответствующих по п. 1.3 мерам p, входящим в $\boldsymbol{X}_1$, $\boldsymbol{X}_2$. Аналогично под $\boldsymbol{B}$ будем понимать также класс случайных последовательностей $\{\xi_{\overline{0,\infty}}^{(q)}\}$, соответствующих по п. 1.3 мерам $q \in \boldsymbol{B}$.

Согласно п. 1.4 $\boldsymbol{X}_1$ — это класс всех стационарных потоков; случайные последовательности, входящие в $\boldsymbol{B}$, стационарны в узком смысле.

§ 2. Связь между классами X и K

Обозначим через Π кольцо, порожденное классом множеств вида $\{P : P \in R;\ \xi_0 > \Delta;\ \xi_{\overline{1,m}} \in C_m\}$, соответствующих любым $\Delta > 0$, m и любым борелевским множествам C_m в $R_m(\xi_{\overline{1,m}})$.

В этом параграфе доказывается следующая

Теорема 1. *Между элементами $p, \varkappa$ классов X_1 и K_1 (X_2 и K_2) можно установить взаимно-однозначное соответствие $\varkappa = P_1 p$ следующим образом: для $B \in \Pi$*

$$\varkappa(B) = -p_r'(S_\alpha B)\big|^{*}_{\alpha=0}. \tag{12}$$

При этом для $B \in \Phi$

$$p(B) = \int\limits_R \left[\int\limits_0^{\xi_0} \chi_B \, d\xi_0\right] d\varkappa^{**}. \tag{13}$$

В пунктах 2.2—2.4 собраны леммы, используемые при доказательстве теоремы 1.

В п. 2.5 устанавливаются некоторые свойства функции $f(\alpha) = d(S_\alpha B)$ на классе множеств $B \in G^{(0)}(l_{\overline{0, n+1}})$ (определение $G^{(0)}(l_{\overline{0, n+1}})$ дано в п. 2.1).

Результаты п. 2.5 позволяют ввести на $R(G^{(0)}(l_{\overline{0, n+1}}))$ п о формуле (12) функцию $\varkappa_N$. В п. 2.6 устанавливаются свойства этой функции, из которых следует, что $\varkappa_N$ — мера на $R(G^{(0)}(l_{\overline{0, n+1}}))$.

В п. 2.7 по мере $\varkappa_N$ с помощью расширения и аддитивного продолжения строится мера $\varkappa_N$ на $\overset{\circ}{\Phi}_N$, которая порождает меру $\varkappa$ на $\overset{\circ}{\Phi}$ (определение $\overset{\circ}{\Phi}_N$, $\overset{\circ}{\Phi}$ дано в п. 2.1).

В п. 2.8 мера $\varkappa$ продолжается с $\overset{\circ}{\Phi}$ на Φ. Доказывается, что полученная мера $\varkappa$ принадлежит K_1 и взаимно-однозначно связана с исходной мерой $p \in X_1$ формулами (12), (13).

Таким образом, из пунктов 2.4—2.8 следует включение

$$P_1 X_1 \subseteq K_1.$$

В п. 2.9 устанавливается обратное включение. Наконец, в п. 2.10 доказывается равенство $P_1 X_2 = K_2$.

2.1 При доказательстве теоремы 1 нам понадобятся следующие обозначения:
$0 = l_0 < l_1 < \cdots < l_{n+1} = N + 1$ — целые числа; $\Delta l_i = l_i - l_{i-1}$; $a_0 < b_0 < a_1 < \cdots < b_n$, $\tau_{\overline{0, n}}$ — положительные числа; $D(a;\ \lambda_{\overline{1, n+1}})$ — множество функций $x(t) \in \Omega$, у которых i-ый скачок в интервале $(a, +\infty)$ равен λ_i, $i = \overline{1, n}$, а $n+1$-й скачок не меньше λ_{n+1} (скачки нумеруются слева направо);

$G^{(0)}(l_{\overline{0, n+1}})$ — класс множеств вида

$$\{P : P \in R;\ \tau_{0,i} < \xi_{0,\, l_i} \leq \tau_{0,\, i+1},\ \xi_{\overline{l_i+1,\, l_{i+1}-1}} = 0;$$

$$i = \overline{0, n-1};\ \tau_{0,n} < \xi_{0,\, l_n};\ \xi_{\overline{l_n+1,\, l_{n+1}-1}} = 0\};$$

$G^{(1)}(l_{\overline{0, n+1}})$ — класс множеств вида

$$\{P : P \in R;\ a_i < \xi_{0,\, l_i} \leq b_i;\ \xi_{\overline{l_i+1,\, l_{i+1}-1}} = 0;\ i = \overline{0, n}\}; \tag{14}$$

$$G(l_{\overline{0, n+1}}) = R(G^{(1)}(l_{\overline{0, n+1}}));$$

$$\Phi(l_{\overline{0, n+1}}) = S(G(l_{\overline{0, n+1}}));$$

* $p_r'(S_\alpha B)$ — правая производная функции $p(S_\alpha B)$ по α.

** χ_B — характеристическая функция множества B.

для любого множества $B \subset R$

$$\overset{\circ}{B} = B \cap \{P : \xi_0 > 0\};$$

для любого класса $\boldsymbol{M}$ множеств из R

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{M}} = \boldsymbol{M} \cap \{P : \xi_0 > 0\}.$$

2.2 В этом и следующем пунктах мы приведем без доказательства несколько легко проверяемых утверждений.

1) Каждый элемент $G(l_{\overline{0,\,n+1}})$ может быть получен путем образования конечной суммы попарно непересекающихся элементов $G^{(1)}(l_{\overline{0,\,n+1}})$.

2) Каждый элемент $G^{(1)}(l_{\overline{0,\,n+1}})$ может быть получен путем образования собственных разностей элементов $G^{(0)}(l_{\overline{0,\,n+1}})$.

3) σ-кольцо $\overset{\circ}{\Phi}_N$ (см. п. 1.3) однозначно представимо в виде

$$\overset{\circ}{\Phi}_N = \left\{ B : B = \sum_{l_{\overline{0,\,n+1}}} B_{l_{\overline{0,\,n+1}}};\ B_{l_{\overline{0,\,n+1}}} \in \Phi(l_{\overline{0,\,n+1}}) \right\}^*. \tag{15}$$

2.3. Пусть $f(x)$ — выпуклая, ограниченная, неотрицательная и невозрастающая функция на интервале (a, ∞).

Тогда (см., например, [6])

1) $f(x)$ абсолютно непрерывна на $[a_1, \infty)$, где $a_1 > a$;

2) $f(x)$ имеет всюду в $(a; \infty)$ непрерывную справа правую производную $f'_r(x)$;

3) для любого $x > a$

$$|f'_r(x)| \leqslant \frac{f(a+0)}{x-a}. \tag{16}$$

2.4. ***Лемма 1.*** *Пусть заданная на $G(l_{\overline{0,\,n+1}})$ функция μ обладает следующими свойствами:*

1) μ конечна, неотрицательна и конечно-аддитивна на $G(l_{\overline{0,\,n+1}})$;

2) для любого $B \in G(l_{\overline{0,\,n+1}})$ функция $\mu(S_\Delta B)$ непрерывна справа по Δ.

Тогда функция μ счетно-аддитивна, т. е. является мерой на $G(l_{\overline{0,\,n+1}})$.

Доказательство. Проведем доказательство для $G(0,1)$ — кольца, порожденного согласно (14) классом полуоткрытых интервалов

$$(a, b] = \{P : 0 < a \leqslant \xi_0 < b\}.$$

Переход к общему случаю связан только с формальными усложнениями.

Продолжим сперва функцию μ с кольца $G(0,1)$ на более широкий класс множеств.

Пусть $\tilde{G}_0^1$ — класс интервалов (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$, $[a, b]$, где $b \geqslant a > 0$,

$$\tilde{G}_0 = R(\tilde{G}_0^1).$$

---

* Символ ΣB_k означает сумму попарно непересекающихся множеств B_k.

Очевидно, кольцо $\tilde{G}_0$ может быть получено путем образования конечных сумм элементов $\tilde{G}_0^1$. Положим

$$\mu[b,\ b] = \lim_{a \uparrow b} \mu(a,\ b]$$

и продолжим функцию μ аддитивно с $G(0,\ 1)$ на $\tilde{G}_0^1$ и на $\tilde{G}_0$. Очевидно, это продолжение однозначно, причем функция μ конечна и неотрицательна на $\tilde{G}_0$. Заметим теперь, что по условиям леммы для любых $b > a > 0$

$$\lim_{\Delta \downarrow 0} \mu(a + \Delta,\ b + \Delta] = \mu(a,\ b],$$

откуда

$$\lim_{\Delta \downarrow 0} \mu(a,\ a + \Delta] = \lim_{\Delta \downarrow 0} \mu(b,\ b + \Delta].$$

В силу конечности функции μ $\lim\limits_{\Delta \downarrow 0} \mu[a,\ a + \Delta] = 0$. Поэтому для любого $B \in G(0,\ 1)$ и любого $\varepsilon > 0$ существует замкнутое множество $\overline{B} \in \tilde{G}_0$ такое, что $\overline{B} \subset B$ и $\mu\ B \ominus \overline{B}) < \varepsilon$*.

Отсюда, повторяя дословно заключительную часть доказательства теоремы А. Н. Колмогорова о вероятностях в бесконечномерных пространствах [4, стр. 41—42], получаем утверждение леммы.

Лемма 2. *Пусть заданная на* $\overset{\circ}{\Phi}_\infty$ *функция* μ *обладает следующими свойствами: 1) для любого* $n \geqslant 0$ μ*—мера на* $\overset{\circ}{\Phi}_n$; *2) если* $\inf\limits_{P \in B} \xi_0(P) > 0$, *то* $\mu(B) < \infty$. *Тогда функция* μ *является* σ*-конечной мерой на* $\overset{\circ}{\Phi}_\infty$.

Доказательство. Зададим числовую последовательность $\alpha_k \downarrow 0$ и обозначим для любого $B \in \Phi_\infty$

$$B^k = B \cap \{P : \alpha_k < \xi_0 \leqslant \alpha_{k-1}\},\ k = \overline{2,\ \infty};\ B^1 = B \cap \{P : \xi_0 > \alpha_1\};$$
$$\mu_k(B) = \mu(B^k). \tag{17}$$

Для доказательства леммы достаточно заметить, что при любом $k = \overline{1,\ \infty}$ в силу упомянутой выше теоремы А. Н. Колмогорова μ_k — вполне конечная мера на Φ_∞, причем $\mu = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu_k$.

Лемма 3. *Пусть* μ*—мера на* $\overset{\circ}{\Phi}$, *причем из* $\inf\limits_{P \in B} \xi_0(P) > 0$ *следует*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(U^i B \cap \{P : \xi_0 > 0;\ \xi_{\overline{1,\ i-1}} = 0\}) \leqslant \mu(B) < \infty. \tag{18}$$

Тогда мера μ *единственным образом продолжается до меры на* Φ, *инвариантной на* Φ *относительно* U.

Доказательство. Для любого $B \in \Phi$ имеет место тождество

$$U^n B \cap \{P : \xi_{\overline{0,\ n-1}} = 0\} = U^n B \ominus \sum_{i=1}^{n} U^{n-i} (U^i B \cap \{P : \xi_0 > 0;\ \xi_{\overline{1,\ i-1}} = 0\}).$$

Зададим числовую последовательность $\alpha_k \downarrow 0$ и введем обозначения (17). Требования аддитивности и инвариантности относительно U

*$A \ominus B$ — собственная разность множеств A и $B \subset A$.

искомой меры однозначно приводят для любых $nk>0$, $B\in\Phi$ к следующему определению:

$$\mu(U^n B^k \cap \{P:\xi_{\overline{0,n-1}}=0\}) = \mu(B^k) - \sum_{i=1}^{n} \mu(U^i B^k \cap \{P:\xi_0>0;\ \xi_{\overline{1,i-1}}=0\}).$$

Но всякое $B\in\Phi$ однозначно представимо в виде суммы

$$B=\sum_{n=0}^{\infty} U^n \overset{\circ}{B}_n \cap \{P:\xi_{\overline{0,n-1}}=0\} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} U^n B_n^k \cap \{P:\xi_{\overline{0,n-1}}=0\},$$

где $B_n\in\Phi$. Полагая для $B\in\Phi$

$$\mu(B)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\mu(U^n B_n^k \cap \{P:\xi_{\overline{0,n-1}}=0\}),$$

получаем искомую меру μ на Φ.

Лемма 4. *Пусть μ—мера на $\overset{\circ}{\Phi}_n$, для которой из $\inf\limits_{P\in B}\xi_0(P)>0$ следует $\mu(B)<\infty$. Тогда для любого $B\in\overset{\circ}{\Phi}_n$*

$$\int_0^{\infty}\mu(S_\Delta B)\,d\Delta = \int_{\overset{\circ}{R}}\left[\int_0^{\xi_0}\chi_B\,d\xi_0\right]d\mu.$$

Доказательство. Введем некоторые обозначения. Пусть L_A — класс множеств вида

$$C=\{P:P\in\overset{\circ}{R};\ 0<\beta<\xi_0\leq\gamma;\ \xi_{\overline{1,n}}\in A\}\in\overset{\circ}{\Phi}_n,$$

где A — борелевское множество в $R_n(\xi_{\overline{1,n}})$, β и γ — любые числа;

$$\Phi_A=S(L_A);\ R_A=\{P:P\in\overset{\circ}{R};\ \xi_{\overline{1,n}}\in A\};$$

W — измеримое отображение $(R_A,\ \Phi_A)$ на $(\overset{\circ}{R}_1(\xi_0),\ \overset{\circ}{\Phi}_0)$: для $P\in R_A$ $WP=\xi_0(P)$;

$$\nu(x)=\mu\{P:\xi_0>x>0;\ \xi_{\overline{1,n}}\in A\}=\mu W^{-1}\{\xi_0:\xi_0>x\}.$$

Очевидно,

$$\mu(S_\Delta C)=\nu(\beta+\Delta)-\nu(\gamma+\Delta).$$

Подсчитаем $\int_0^{\infty}\mu(S_\Delta C)\,d\Delta$. Для любого $b>\gamma-\beta$

$$\int_{+0}^{b+0}\mu(S_\Delta C)\,d\Delta = b[\nu(\beta+b+0)-\nu(\gamma+b+0)] -$$

$$-\int_{+0}^{b+0}\Delta d[\nu(\beta+\Delta)-\nu(\gamma+\Delta)] = b[\nu(\beta+b+0)-$$

$$-\nu(\gamma+b+0)] - \int_{\beta+0}^{\beta+b+0}(\Delta-\beta)\,d\nu(\Delta) + \int_{\gamma+0}^{\gamma+b+0}(\Delta-\gamma)\,d\nu(\Delta) =$$

$$=-\int_0^{\infty} f(\Delta;\ b)\,d\nu(\Delta),$$

где

$$f(\Delta;\ b)=\begin{cases}\Delta-\beta;\ \beta<\Delta\leqslant\gamma,\\ \gamma-\beta;\ \gamma<\Delta\leqslant\beta+b,\\ b+\gamma-\Delta;\ \beta+b<\Delta\leqslant\gamma+b,\\ 0;\ \ \Delta\,\overline{\in}\,(\beta,\ \gamma+b].\end{cases}$$

При $b\to\infty$

$$f(\Delta;\ b)\uparrow f(\Delta)=\begin{cases}0;\ \ \Delta\leqslant\beta,\\ \Delta-\beta;\ \beta<\Delta\leqslant\gamma,\\ \gamma-\beta;\ \Delta>\gamma.\end{cases}$$

Поэтому

$$\int\limits_0^\infty \mu(S_\Delta C)\,d\Delta=-\int\limits_0^\infty f(\Delta)\,d\nu(\Delta)=-\int\limits_{\overset{\circ}{R}} g(P)\,d\mu,$$

где

$$g(P)=\int\limits_0^{\xi_0}\chi_C\,d\xi_0=\begin{cases}fW,\ P\in R_A,\\ 0,\ P\,\overline{\in}\,R_A.\end{cases}$$

Таким образом, утверждение леммы доказано для всех $C\in L_n$, где L_n — соединение классов L_A, соответствующих любым борелевским множествам A в $R_n(\xi_{\overline{1,n}})$.

Рассмотрим теперь на $\overset{\circ}{\Phi}_n$ две функции:

$$\nu_1(B)=\int\limits_0^\infty \mu(S_\Delta B)\,d\Delta,\ \ \nu_2(B)=\int\limits_{\overset{\circ}{R}}\left[\int\limits_0^{\xi_0}\chi_B\,d\xi_0\right]d\mu.$$

Очевидно, ν_1, ν_2 — σ-конечные меры на $\overset{\circ}{\Phi}_n$, совпадающие, по доказанному выше, на L_n. Следовательно, они совпадают и на $\overset{\circ}{\Phi}_n=S(L_n)$.

Лемма 5. *Для любой меры μ на Φ и любого $B\in\Pi$*

$$\mu(B)=\lim_{\Delta\downarrow 0}\frac{1}{\Delta}\int\limits_R\left[\int\limits_0^{\xi_0}\chi_B\,d\xi_0-\int\limits_0^{\xi_0}\chi_{S_\Delta B}\,d\xi_0\right]d\mu. \qquad (19)$$

Доказательство. Пусть

$$B=\{P:P\in R;\ \xi_0>\tau>0;\ \xi_{\overline{1,m}}\in C_m\}, \qquad (20)$$

где C_m — борелевское множество в $R_m(\xi_{\overline{1;m}})$.

Как легко видеть, при $\Delta\downarrow 0$

$$\frac{1}{\Delta}\left(\int\limits_0^{\xi_0}\chi_B\,d\xi_0-\int\limits_0^{\xi_0}\chi_{S_\Delta B}\,d\xi_0\right)\uparrow\chi_B,$$

откуда следует (19) для любого множества B вида (20), а значит, и для любого $B\in\Pi$.

Лемма 6. *Пусть заданная на Φ мера μ инвариантна на Φ относительно U*, причем $\int\limits_R \xi_0\,d\mu<\infty$.

Тогда для любых $b > a > 0$

$$\int\limits_R \left[\int\limits_0^{\xi_0} \chi_{\{P:\xi_0 > \tau\}}\, d\xi_0 \right] d\mu = \int\limits_R \left[\int\limits_0^{\xi_0} \chi_A\, d\xi_0 \right] d\mu,$$

где

$$\tau = b - a,\ A = \sum_{m=0}^{\infty} \{P : \xi_{0,\ m-1} \leq a;\ \xi_{0,\ m} > b\}.$$

Доказательство. Обозначим

$$C_m = \{P : \xi_{0,\ m-1} \leq a;\ \xi_{0,\ m} > b\},\ m \geqslant 0. \tag{21}$$

Очевидно, $\chi_A = \sum\limits_{m=0}^{\infty} \chi_{C_m}$, откуда

$$\int\limits_R \left[\int\limits_0^{\xi_0} \chi_A\, d\xi_0 \right] d\mu = \sum_{m=0}^{\infty} \int\limits_R \left[\int\limits_0^{\xi_0} \chi_{C_m}\, d\xi_0 \right] d\mu. \tag{22}$$

В силу инвариантности μ на Φ относительно U

$$\int\limits_R \left[\int\limits_0^{\xi_0} \chi_{C_m}\, d\xi_0 \right] d\mu = \int\limits_R \left[\int\limits_0^{\xi_{n-m}} \chi_{U^{n-m} C_m}\, d\xi_{n-m} \right] d\mu = \int\limits_R \varphi_{n-m}^{(n)}\, d\mu,\ \ m = \overline{0, n}, \tag{23}$$

где

$$\varphi_k^{(n)} = \int\limits_0^{\xi_k} \chi_{U^k C_{n-k}}\, d\xi_k. \tag{24}$$

Как легко проверить, функции $\varphi_k^{(n)}$ имеют следующий вид:

$$\varphi_n^{(n)} = \begin{cases} 0;\ \xi_n \leq b, \\ \xi_n - b;\ \xi_n > b, \end{cases} \qquad \varphi_{n-1}^{(n)} = \begin{cases} 0;\ \xi_n \leq \tau, \\ 0;\ \tau < \xi_n \leq b,\ \xi_{n-1,\ n} \leq b, \\ \xi_{n-1,\ n} - b;\ \tau < \xi_n \leq b,\ \xi_{n-1,\ n} > b,\ \xi_{n-1} \leq a, \\ \xi_n - \tau;\ \tau < \xi_n \leq b,\ \xi_{n-1} > a, \\ \xi_{n-1};\ \xi_n > b,\ \xi_{n-1} \leq a, \\ a;\ \xi_n > b,\ \xi_{n-1} > a, \end{cases}$$

$$\varphi_k^{(n)} = \begin{cases} 0;\ \xi_n \leq \tau, \\ 0;\ \tau < \xi_n \leq b,\ \xi_{k,\ n} \leq b, \\ \xi_{k,\ n} - b;\ \tau < \xi_n \leq b,\ \xi_{k,\ n} > b,\ \xi_{k,\ n-1} \leq a,\ \xi_{k+1,\ n} \leq b, \\ \xi_n - \tau;\ \tau < \xi_n \leq b,\ \xi_{k,\ n-1} > a,\ \xi_{k+1,\ n} \leq b, \\ \xi_k;\ \tau < \xi_n \leq b,\ \xi_{k,\ n-1} \leq a,\ \xi_{k+1,\ n} > b, \\ a - \xi_{k+1,\ n-1};\ \tau < \xi_n \leq b,\ \xi_{k,\ n-1} > a,\ \xi_{k+1,\ n} > b,\ \xi_{k+1,\ n-1} \leq a, \\ 0;\ \tau < \xi_n \leq b,\ \xi_{k+1,\ n-1} > a, \\ 0;\ \xi_n > b,\ \xi_{k+1,\ n-1} > a, \\ \xi_k;\ \xi_n > b,\ \xi_{k,\ n-1} \leq a, \\ a - \xi_{k+1,\ n-1};\ \xi_n > b,\ \xi_{k,\ n-1} > a,\ \xi_{k+1,\ n-1} < a \end{cases}$$

при $k = \overline{0,\ n-2}$.

Подсчитаем сумму $\varphi_{0,n}^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\varphi_k^{(n)}$.

Как непосредственно следует из приведенных выше формул, при $\xi_n > b$

$$\varphi_{0,n}^{(n)}=\begin{cases}\xi_n-\tau; & \xi_{0,n-1}>a,\\ \xi_{0,n}-b; & \xi_{0,n-1}\leqslant a,\end{cases}$$

при $\xi_n\leqslant\tau$

$$\varphi_{0,n}^{(n)}=0.$$

Пусть $\tau<\xi_n\leqslant b$. Тогда

$$\varphi_{n-2,n}^{(n)}=\begin{cases}0; & \xi_{n-2,n}\leqslant b,\\ \xi_{n-2,n}-b; & \xi_{n-2,n}>b,\ \xi_{n-2,n-1}\leqslant a,\\ \xi_n-\tau; & \xi_{n-2,n-1}>a.\end{cases}$$

Применяя индукцию, получаем

$$\varphi_{0,n}^{(n)}=\begin{cases}0; & \xi_{0,n}\leqslant b,\\ \xi_{0,n}-b; & \xi_{0,n}>b,\ \xi_{0,n-1}\leqslant a,\\ \xi_n-\tau; & \xi_{0,n-1}>a.\end{cases}$$

Таким образом, при произвольном значении ξ_n

$$\varphi_{0,n}^{(n)}=\begin{cases}\xi_n-\tau; & \xi_n>\tau,\ \xi_{0,n-1}>a,\\ \xi_{0,n}-b; & \xi_n>\tau;\ \xi_{0,n-1}\leqslant a,\ \xi_{0,n}>b,\\ 0; & \xi_n>\tau,\ \xi_{0,n}\leqslant b,\\ 0; & \xi_n\leqslant\tau.\end{cases}$$

Отсюда в силу (22), (23)

$$\int\limits_R\left[\int\limits_0^{\xi_0}\chi_{\{P:\xi_0\geqslant\tau\}}\,d\xi_0\right]d\mu-\int\limits_R\left[\int\limits_0^{\xi_0}\chi_A\,d\xi_0\right]d\mu=\int\limits_R\left[\int\limits_0^{\xi_n}\chi_{\{P:\xi_n>\tau\}}\,d\xi_n\right]d\mu-$$

$$-\lim_{n\to\infty}\int\limits_R\left(\sum_{k=0}^{n}\varphi_k^{(n)}\right)d\mu=\lim_{n\to\infty}\int\limits_R F_n\,d\mu,$$

где

$$F_n=\int\limits_0^{\xi_n}\chi_{\{P:\xi_n>\tau\}}\,d\xi_n-\sum_{k=0}^{n}\varphi_k^{(n)}=\begin{cases}0; & \xi_n>\tau,\ \xi_{0,n-1}>a,\\ a-\xi_{0,n-1}; & \xi_n>\tau,\ \xi_{0,n-1}\leqslant a,\ \xi_{0,n}>b,\\ \xi_n-\tau; & \xi_n>\tau,\ \xi_{0,n}\leqslant b,\\ 0; & \xi_n\leqslant\tau.\end{cases}$$

Для окончания доказательства остается заметить, что

$$\lim_{n\to\infty}F_n=0,$$

откуда в силу условия $\int\limits_R\xi_0\,d\mu<\infty$ и неравенства $0\leqslant F_n<\xi_0$

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_R F_n\,d\mu=0. \tag{25}$$

2.5. Перейдем к доказательству теоремы 1.
Зададим меру $p \in \boldsymbol{X}_1$ и докажем, что для любого

$$B \in G^{(0)}(l_{\overline{0,\,n+1}}) \cap \{P : \xi_0 \geqslant \varepsilon > 0\} \text{ (см. п. 2.1)}$$

1) функция $p(S_\alpha B)$ абсолютно непрерывна на интервале $[\alpha_1, \infty)$, $\alpha_1 > -\varepsilon$;

2) правая производная $p'_r(S_\alpha B)$ по α существует и непрерывна справа на интервале $(-\varepsilon, \infty)$.

Обозначим

$$B(\tau_{\overline{0,\,n}};\ k_{\overline{0,\,n}};\ \lambda_{\overline{1,\,m}}) = \{x(t) : x(\tau_{0,\,i}) \leqslant k_i;\ i = \overline{0,\,n}\} \cap D(\lambda_{\overline{1,\,m}}), \tag{26}$$

где $k_n \geqslant \cdots \geqslant k_0 = 0$ — целые числа. Докажем сперва, что функция

$$f(\alpha) = p(S_\alpha B(\tau_{\overline{0,\,n}};\ k_{\overline{0,\,n}};\ \lambda_{\overline{1,\,m}}))$$

является ограниченной, неотрицательной, невозрастающей и выпуклой на интервале $(-\tau_0, \infty)$. Доказательства требуют только два последние свойства.

В силу инвариантности меры p относительно Q_Δ для любого $\alpha > -\tau_0$

$$f(\alpha) = p(\{x(t) : x(\tau_{0,\,i} + \alpha + \Delta) - x(\Delta) \leqslant k_i;\ i = \overline{0,\,n}\} \cap D(\Delta;\ \lambda_{\overline{1,\,m}})),$$

$$f(\alpha + \Delta) = p(\{x(t) : x(\Delta) = 0;\ x(\tau_{0,\,i} + \alpha + \Delta) - x(\Delta) \leqslant k_i;\ i = \overline{0,\,n}\} \cap D(\Delta;\ \lambda_{\overline{1,\,m}})).$$

Поэтому

$$f(\alpha;\ \Delta) = f(\alpha) - f(\alpha + \Delta) = p(\{x(t) : x(\Delta) > 0;\ x(\tau_{0,\,i} + \alpha + \Delta) - \\ - x(\Delta) \leqslant k_i;\ i = \overline{0,\,n}\} \cap D(\Delta;\ \lambda_{\overline{1,\,m}})) \geqslant 0, \tag{27}$$

т. е. $f(\alpha)$ — невозрастающая функция на $(-\tau_0, \infty)$.

Далее, для любого $\alpha_1 > \alpha$

$$f(\alpha;\ \Delta) - f(\alpha_1;\ \Delta) = p[(\{x(t) : x(\Delta) > 0;\ x(\tau_{0,\,i} + \alpha + \Delta) - \\ - x(\Delta) \leqslant k_i;\ i = \overline{0,\,n}\} \ominus \{x(t) : x(\Delta) > 0;\ x(\tau_{0,\,i} + \alpha_1 + \Delta) - \\ - x(\Delta) \leqslant k_i;\ i = \overline{0,\,n}\}) \cap D(\Delta;\ \lambda_{\overline{1,\,m}})] \geqslant 0,$$

откуда следует выпуклость $f(\alpha)$ на $(-\tau_0, \infty)$.
Таким образом функция $f(\alpha)$ удовлетворяет на интервале $(-\tau_0, \infty)$ условиям п. 2.3.

Рассмотрим теперь $\boldsymbol{K}_{n,\,\varepsilon}(\Delta l_{\overline{1,\,n+1}})$ — класс конечных линейных комбинаций функций

$$f(\alpha) = p(S_\alpha B(\tau_{\overline{0,\,n}};\ k_{\overline{0,\,n}};\ \Delta l_{\overline{1,\,n+1}})),$$

где $\tau_0 \geqslant \varepsilon > 0$, $\alpha > -\varepsilon$, $\Delta l_i = l_i - l_{i-1}$.

В силу п. 2.3 для доказательства утверждения этого пункта достаточно убедиться, что для любого $B \in G^{(0)}(l_{\overline{0,\,n+1}}) \cap \{P : \xi_0 \geqslant \varepsilon)$

$$p(S_\alpha B) \in \boldsymbol{K}_{n,\,\varepsilon}(\Delta l_{\overline{1,\,n+1}}).$$

Обозначим

$$B_j(k_{\overline{0,\,n}}) = \{x(t) : x(\tau_{0,\,i}) = \\ = k_i,\ i = \overline{0,\,j};\ x(\tau_{0,\,e}) \leqslant k_e,\ l = \overline{j+1,\,n}\} \cap D(0;\ \Delta l_{\overline{1,\,n+1}}),$$

где $k_n \geqslant \cdots \geqslant k_0 = 0$ — целые числа.

Согласно п. 2.1 $G^{(0)}(l_{\overline{0,\,n+1}})$ — это класс множеств вида $B_n(l_{\overline{0,\,n}})$. Поэтому достаточно доказать, что при $\tau_0 \geqslant \varepsilon$

$$p(S_\alpha B_n(l_{\overline{0,\,n}})) \in \boldsymbol{K}_{n,\,\varepsilon}(\Delta l_{\overline{1,\,n+1}}). \tag{28}$$

Очевидно, для любых $k_n \geqslant \cdots \geqslant k_2 \geqslant l_1$

$$p(S_\alpha B(l_{\overline{0,1}}, k_{\overline{2,n}})) = p(S_\alpha B(l_0, l_0, k_{\overline{2,n}})) + p(S_\alpha B_1(l_{\overline{0,1}}, k_{\overline{2,n}})),$$

откуда

$$p(S_\alpha B_1(l_{\overline{0,1}}, k_{\overline{2,n}})) \in K_{n,\varepsilon}(\Delta l_{\overline{1,n+1}}).$$

Далее, для любых $k_n \geqslant \cdots \geqslant k_3 \geqslant l_2$

$$p(S_\alpha B_1(l_{\overline{0,2}}, k_{\overline{3,n}})) = p(S_\alpha B_1(l_{\overline{0,1}}, l_1, k_{\overline{3,n}})) + p(S_\alpha B_2(l_{\overline{0,2}}, k_{\overline{3,n}})),$$

откуда

$$p(S_\alpha B_2(l_{\overline{0,2}}, k_{3,n})) \in K_{n,\varepsilon}(\Delta l_{\overline{1,n+1}}).$$

Применяя индукцию, получаем (28).

2.6. Пользуясь результатами предыдущего пункта, введем на $G^{(0)}(l_{\overline{0,n+1}})$ функцию $\varkappa_N$:

$$\varkappa_N(B) = -p'_r(S_\alpha B)|_{\alpha=0} = \lim_{\Delta \downarrow 0} \frac{1}{\Delta}[p(B) - p(S_\Delta B)], \tag{29}$$

где $N = l_{n+1} - 1$.

В силу п. 2.2 функцию $\varkappa_N$ можно аддитивно продолжить на $G(l_{\overline{0,n+1}})$. Очевидно, формула (29) остается при этом в силе.

Установим некоторые свойства функции $\varkappa_N$.

1) Функция $\varkappa_N$ конечна и неотрицательна на $G(l_{\overline{0,n+1}})$.

Проверки требует только второе свойство, причем в силу п. 2.2 можно ограничиться множествами $B \in G^{(1)}(l_{\overline{0,n+1}})$.

Аналогично (27) получаем:

$$\begin{aligned} p(B) - p(S_\Delta B) = p(\{x(t): x(\Delta) > 0;\ x(a_0) = x(\Delta);\ x(b_i) - x(a_i) = \\ = \Delta l_{i+1};\ x(a_{i+1}) = x(b_i);\ i = \overline{0, n-1};\ x(b_n) - x(a_n) \geqslant \\ \geqslant \Delta l_{n+1}\} \cap D(\Delta;\ \Delta l_{\overline{1,n+1}})) = p(\{x(t): x(\Delta) > 0\} \cap Q_\Delta B) \geqslant 0. \end{aligned} \tag{30}$$

2) Для любого $B \in G(l_{\overline{0,n+1}})$ функция $\varkappa_N(S_\Delta B)$ непрерывна справа по Δ (это свойство следует из п. 2.5).

3) Функция $\varkappa_N$ конечно-аддитивна на $G(l_{\overline{0,n+1}})$ (это свойство следует из (29)).

4) Если для $B \in G(l_{\overline{0,n+1}})$ $\inf\limits_{P \in B} \xi_0(P) = \varepsilon > 0$, то

$$\varkappa_N(B) \leqslant \frac{1}{\varepsilon}. \tag{31}$$

Действительно, используя п. 2.2, (30) и (16), получаем:

$$\begin{aligned} \varkappa_N(B) \leqslant \lim_{\Delta \downarrow 0} \frac{1}{\Delta} p\{x(t): x(\Delta) > 0;\ x(\varepsilon + \Delta) = x(\Delta)\} = \\ = -p'_r(S_\alpha\{x(t): x(\varepsilon) = 0\})|_{\alpha=0} \leqslant \frac{1}{\varepsilon} p(S_\alpha\{x(t): x(\varepsilon) = 0\})|_{\alpha=-\varepsilon+0} \leqslant \frac{1}{\varepsilon}. \end{aligned} \tag{32}$$

2.7. Как следует из свойств 1) — 4) п. 2.6 и леммы 1, функция $\varkappa_N$ является σ-конечной мерой на $G(l_{\overline{0,n+1}})$. Расширяя ее, получаем меру $\varkappa_N$ на $\Phi(l_{\overline{0,n+1}})$. Согласно (15) последняя однозначно продолжается на $\overset{\circ}{\Phi}_N$.

Докажем, что меры p и $\varkappa_N$ связаны на $\mathring{\Phi}_N$ формулами (12), (13) теоремы 1. В силу (31) мера $\varkappa_N$ удовлетворяет условиям леммы 4. Следовательно, для $B \in \mathring{\Phi}_N$

$$\int_0^\infty \varkappa_N(S_\Delta B)\,d\Delta = \iint_{\mathring{R}} \left[\int_0^{\xi_0} \chi_B\,d\xi_0\right] d\varkappa_N. \tag{33}$$

Пусть теперь $B \in G(l_{\overline{0,\,n+1}})$. Согласно пунктам 2.5, 2.6

$$\int_0^\infty \varkappa_N(S_\Delta B)\,d\Delta = -\int_0^\infty p'_r(S_\Delta B)\,d\Delta = p(B) - \lim_{\Delta\to\infty} p(S_\Delta B) = p(B),$$

так как

$$\lim_{\Delta\to\infty} p(S_\Delta B) \leqslant \lim_{\Delta\to\infty} p\{x(t) : x(\Delta) = 0\} = 0.$$

Таким образом, меры $p(B)$ и $\nu(B) = \int_0^\infty \varkappa_N(S_\Delta B)\,d\Delta$ совпадают на $G(l_{\overline{0,\,n+1}})$, т. е. на $\Phi(l_{\overline{0,\,n+1}}) = S(G(l_{\overline{0,\,n+1}}))$, а значит, в силу (15), и на $\mathring{\Phi}_N$. С помощью (33) отсюда получаем (13).

Далее, применяя лемму 5 к множествам класса $\Pi \cap \mathring{\Phi}_N$, получаем (12). Из последнего результата следует согласованность мер $\varkappa_N$ на $\mathring{\Phi}_\infty$. Действительно, для любого $M > N$ и $B \in \Pi \cap \mathring{\Phi}_N \subset \Pi \cap \Phi_M$ в силу (12)

$$\varkappa_M(B) = -p'_r(S_\alpha B)|_{\alpha=0} = \varkappa_N(B),$$

т. е. меры $\varkappa_M$ и $\varkappa_N$ совпадают на $\Pi \cap \mathring{\Phi}_N$, а значит и на $\mathring{\Phi}_N = S(\Pi \cap \mathring{\Phi}_N)$.

Это позволяет однозначно ввести на $\mathring{\Phi}_\infty$ функцию $\varkappa$:

$$\varkappa(B) = \varkappa_N(B),$$

где $B \in \mathring{\Phi}_N$.

В силу свойства 4) п. 2.6 функция $\varkappa$ удовлетворяет условиям леммы 2. Следовательно, $\varkappa$ — σ-конечная мера на $\mathring{\Phi}_\infty$. Расширяя ее, получаем меру $\varkappa$ на $\mathring{\Phi}$. Как легко видеть, меры p и $\varkappa$ связаны формулами (12), (13).

2.8. Докажем, что мера $\varkappa$ удовлетворяет условиям леммы 3. В силу свойства 4) п. 2.6 достаточно проверить выполнение неравенства (18). Заметим сперва, что для любых ε, $k > 0$

$$\varkappa\{P : \xi_0 > 0;\ \xi_{\overline{1,\,k-1}} = 0,\ \xi_k > \varepsilon\} \leqslant \frac{1}{\varepsilon}. \tag{34}$$

Действительно, обозначим

$$A_\Delta = \{P : 0 < \xi_0 \leqslant \Delta;\ \xi_{\overline{1,\,k-1}} = 0;\ \xi_{0,\,k} > \varepsilon + \Delta\}.$$

В силу (13)

$$p(A_\Delta)=\int\limits_{\overset{0}{R}}\left[\int\limits_0^{\xi_0}\chi_{A_\Delta}\,d\xi_0\right]d\varkappa,$$

причем при $\Delta\downarrow 0$

$$\frac{1}{\Delta}\int\limits_0^{\xi_0}\chi_{A_\Delta}\,d\xi_0\uparrow\chi_{\{P:\xi_0>0;\ \xi_{\overline{1,k-1}}=0;\ \xi_k>\varepsilon\}}.$$

Поэтому, согласно (32)

$$\varkappa\{P:\xi_0>0;\ \xi_{\overline{1,k-1}}=0;\ \xi_k>\varepsilon\}=\lim_{\Delta\downarrow 0}\frac{1}{\Delta}p(A_\Delta)\leqslant$$

$$\leqslant\lim_{\Delta\downarrow 0}\frac{1}{\Delta}p\{x(t):x(\Delta)>0;\ x(\varepsilon+\Delta)=x(\Delta)\}\leqslant\frac{1}{\varepsilon}.$$

Пусть теперь $B\in G(l_{\overline{0,n+1}})$; $\varepsilon=\inf\limits_{P\in B}\xi_0(P)$;

$$C_k=\{P:0<\xi_0\leqslant\Delta;\ \xi_{\overline{1,k-1}}=0;\ \xi_{0,k}>\Delta\}\cap Q_\Delta B.$$

Согласно (13)

$$\frac{1}{\Delta}p(C_k)=\frac{1}{\Delta}\int\limits_{\overset{0}{R}}\left[\int\limits_0^{\xi_0}\chi_{C_k}\,d\xi_0\right]d\varkappa.$$

Перейдем в этом равенстве к пределу при $\Delta\downarrow 0$.
В силу (34) и легко проверяемых соотношений

$$\frac{1}{\Delta}\int\limits_0^{\xi_0}\chi_{C_k}\,d\xi_0\leqslant\chi_{\{P:\xi_0>0;\ \xi_{\overline{1,k-1}}=0;\ \xi_k>\varepsilon\}};$$

$$\lim_{\Delta\downarrow 0}\frac{1}{\Delta}\int\limits_0^{\xi_0}\chi_{C_k}\,d\xi_0=\chi_{\{P:\xi_0>0;\ \xi_{\overline{1,k-1}}=0\}\cap U^kB}\leqslant\chi_{\{P:\xi_0>0;\ \xi_{\overline{1,k-1}}=0;\ \xi_k>\varepsilon\}}$$

можно воспользоваться теоремой об ограниченной сходимости: для любого $B\in G(l_{\overline{0,n+1}})$

$$\varkappa(\{P:\xi_0>0;\ \xi_{\overline{1,k-1}}=0\}\cap U^kB)=\lim_{\Delta\downarrow 0}\frac{1}{\Delta}p(C_k). \tag{35}$$

Отсюда, аналогично (30), для любого m

$$\sum_{k=1}^{m}\varkappa(\{P:\xi_0>0;\ \xi_{\overline{1,k-1}}=0\}\cap U^kB)\leqslant\lim_{\Delta\downarrow 0}\frac{1}{\Delta}p(\{x(t):x(\Delta)>0\}\cap Q_\Delta B)=$$

$$=\lim_{\Delta\downarrow 0}\frac{1}{\Delta}[p(B)-p(S_\Delta B)]=\varkappa(B).$$

Таким образом, неравенство (18) выполняется на $G(l_{\overline{0,n+1}})$, а значит и на $\overset{0}{\Phi}$.

На основании леммы 3 мера $\varkappa$ может быть продолжена на σ-кольцо Φ. Очевидно, полученная мера $\varkappa = P_1 p$ инвариантна на Φ относительно U, связана с мерой p формулами (12), (13) и однозначно определяется по мере p формулой (12) и требованием инвариантности на Φ относительно U. Эта мера принадлежит классу $\boldsymbol{K}_1$.

Действительно, при $B = R$ из (13) следует

$$\int\limits_R \xi_0 \, d\varkappa = \int\limits_R \Big[\int\limits_0^{\xi_0} \chi_R \, d\xi_0 \Big] d\varkappa = p(R) = 1.$$

Таким образом, оператор $\boldsymbol{P}_1$ устанавливает взаимно-однозначное соответствие между классами $\boldsymbol{X}_1$ и $\boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{X}_1$, причем

$$\boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{X}_1 \subseteq \boldsymbol{K}_1.$$

2.9. В этом пункте мы получим обратное включение:

$$\boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{X}_1 \supseteq \boldsymbol{K}_1. \tag{36}$$

Зададим меру $\varkappa \in \boldsymbol{K}_1$ и положим для любого $B \in \Phi$

$$p(B) = \int\limits_R \Big[\int\limits_0^{\xi_0} \chi_B d\xi_0 \Big] d\varkappa. \tag{37}$$

Очевидно, функция p является мерой на Φ, причем согласно лемме 5 меры p и $\varkappa$ связаны формулой (12).

С помощью отображения L (п. 1.5) получим меру p на Φ_x. Для доказательства включения (36) нужно доказать, что $p \in \boldsymbol{X}_1$. В силу (37), (10) p — вероятностная мера на Φ_x, причем

$$p\{x(t) : x(0) > 0\} = 0. \tag{38}$$

Остается проверить инвариантность p на $\tilde{\Phi}_x$ относительно Q_Δ. Обозначим

$$A(\theta_{\overline{0, N}};\ k_{\overline{1, N}}) = \{x(t) : x(t) \in \Omega;\ x(\theta_i) - x(\theta_{i-1}) = k_i,\ i = \overline{1, N}\},$$

где

$$\theta_N > \ldots, > \theta_0 \geqslant 0;\ k_i \geqslant 0.$$

Докажем инвариантность меры p относительно Q_Δ на классе множеств $A(\theta_{\overline{0, N}};\ k_{\overline{1, N}})$. Пусть $k_{\overline{1, s-1}} = 0$, $k_s > 0$; $s = \overline{1, N+1}$. Рассмотрим сперва случай $s = N + 1$. В этом случае

$$A(\theta_{\overline{0, N}};\ k_{\overline{1, N}}) = \{x(t) : x(\theta_n) = x(\theta_0)\} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \{P : P \in R;\ \xi_{0, m-1} \leqslant \theta_0;\ \xi_{0, m} > \theta_n\} = A.$$

Мера $\varkappa$ удовлетворяет условиям леммы 6. Следовательно,

$$p\{x(t) : x(\theta_n - \theta_0) - x(0) = 0\} - p\{x(t) : x(\theta_n) - x(\theta_0) = 0\} =$$

$$= p\{P : \xi_0 > \theta_n - \theta_0\} - p(A) = \int\limits_R \Big[\int\limits_0^{\xi_0} \chi_{\{P : \xi_0 > \theta_n - \theta_0\}} \, d\xi_0 \Big] d\varkappa -$$

$$- \int\limits_R \Big[\int\limits_0^{\xi_0} \chi_A \, d\xi_0 \Big] d\varkappa = 0, \tag{39}$$

откуда следует инвариантность p относительно Q_Δ на классе множеств $A(\theta_{\overline{0,N}};\ k_{\overline{1,N}})$ при $s = N+1$.

Пусть теперь $s = \overline{1, N}$. Зададим натуральное M и разобьем интервал $[\theta_{s-1}, \theta_s]$ на M равных частей точками $\alpha_{\overline{0,M}}$. Обозначим

$$\Delta = \frac{\theta_s - \theta_{s-1}}{M};$$

$$L_{m,j} = \{P : P \in R;\ \xi_{0,m-1} \leqslant \theta_0;\ \alpha_{j-1} < \xi_{0,m} \leqslant \alpha_j;\ \xi_{m+1,\ m+k_{1,i}-1} \leqslant$$
$$\leqslant \theta_i - \alpha_j;\ \xi_{m+1,\ m+k_{1,i}} > \theta_i - \alpha_{j-1};\ i = \overline{s, N}\},\ m \geqslant 0;$$

$$L_j = \sum_{m=0}^{\infty} L_{m,j},\quad j = \overline{1, M-1};$$

$$K_{l,\Delta} = \{x(t) : x(t) \in \Omega;\ x(\theta_l + \Delta) > x(\theta_l - \Delta)\},\ l = \overline{s, N}.$$

Очевидно,

$$\sum_{j=1}^{M-1} p(L_j) \leqslant p(A(\theta_{\overline{0,N}};\ k_{\overline{1,N}})) \leqslant \sum_{j=1}^{M-1} p(L_j) + \sum_{l=s}^{N} p(K_{l,\Delta}),$$

причем согласно (38), (39)

$$\lim_{\Delta \downarrow 0} p(K_{l,\Delta}) = \lim_{\Delta \downarrow 0} [1 - p\{x(t) : x(\theta_l + \Delta) = x(\theta_l - \Delta)\}] =$$
$$= 1 - \lim_{\Delta \downarrow 0} p\{x(t) : x(2\Delta) = 0\} = 0.$$

Поэтому достаточно доказать инвариантность меры p относительно Q_Δ на классе множеств $L_j \in \tilde{\Phi}_x$.

Обозначим аналогично (21), (24)

$$C_{m,j} = \{P : \xi_{0,m-1} \leqslant \theta_0;\ \xi_{0,m} > \alpha_j\},\ m \geqslant 0;$$

$$\varphi_{k;j}^{(n)} = \int_0^{\xi_k} \chi_{U^k C_{n-k,j}}\, d\xi_k,\ k = \overline{0, n}.$$

Тогда

$$U^k L_{n-k,j} = U^n D \cap U^k \{P : \xi_{0,n-k-1} \leqslant \theta_0;\ \alpha_{j-1} < \xi_{0,n-k} \leqslant \alpha_j\} =$$
$$= U^n D \cap U^k (C_{n-k,j-1} \ominus C_{n-k,j}),$$

где

$$D = \{P : \xi_{1,k_{1,i}-1} \leqslant \theta_i - \alpha_j;\ \xi_{1,k_{1,i}} > \theta_i - \alpha_{j-1};\ i = \overline{s, N}\}.$$

Отсюда

$$\int_0^{\xi_k} \chi_{U^k L_{n-k,j}}\, d\xi_k = (\varphi_{k;j-1}^{(n)} - \varphi_{k;j}^{(n)})\, \chi_{U^n D};$$

$$p(L_j) = \int_R \left[\int_0^{\xi_0} \chi_{L_j}\, d\xi_0\right] d\varkappa = \sum_{m=0}^{\infty} \int_R \left[\int_0^{\xi_0} \chi_{L_{m,j}}\, d\xi_0\right] d\varkappa =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \int_R \left[\int_0^{\xi_k} \chi_{U^k L_{n-k,j}}\, d\xi_k\right] d\varkappa = \lim_{n\to\infty} \int_{U^n D} \left[\sum_{k=0}^{n} \varphi_{k;j-1}^{(n)} - \sum_{k=0}^{n} \varphi_{k;j}^{(n)}\right] d\varkappa.$$

В силу (25), полагая

$$F_{n;\,j}=\int_0^{\xi_n}\chi_{\{P:\xi_n>\alpha_j-\theta_0\}}\,d\xi_n-\sum_{k=0}^{n}\varphi_{k;\,j}^{(n)},$$

получим

$$p(L_j)=\lim_{n\to\infty}\int_{U^nD}\Big[\int_0^{\xi_n}(\chi_{\{P:\xi_n>\alpha_{j-1}-\theta_0\}}-\chi_{\{P:\xi_n>\alpha_j-\theta_0\}})\,d\xi_n\Big]\,d\varkappa=$$

$$=\int_D\Big[\int_0^{\xi_0}\chi_{\{P:\alpha_{j-1}-\theta_0<\xi_0\leqslant\alpha_j-\theta_0\}}d\xi_0\Big]\,d\varkappa=$$

$$=\int_R\Big[\int_0^{\xi_0}\chi_{D\,\cap\,\{P:\alpha_{j-1}-\theta_0<\xi_0\leqslant\alpha_j-\theta_0\}}d\xi_0\Big]\,d\varkappa=$$

$$=p(D\cap\{P:\alpha_{j-1}-\theta_0<\xi_0\leqslant\alpha_j-\theta_0\}).$$

Множества D и $\{P:\alpha_{j-1}<\xi_0\leqslant\alpha_j-\theta_0\}$ зависят только от разностей $\theta_i-\theta_0$, $i=\overline{1,N}$. Следовательно, мера p инвариантна относительно Q_Δ на множествах типа L_j, а значит, как указывалось выше, и на множествах $A(\theta_{\overline{0,N}};\,k_{\overline{1,N}})$.

Отсюда легко следует инвариантность p относительно Q_Δ на любом σ-кольце $\tilde{\Phi}_x(\theta_{\overline{0,n}})$ (п. 1.6), а значит, и на $\tilde{\Phi}_x$.

2.10. Для окончания доказательства теоремы 1 остается получить равенство

$$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{X}_2=\boldsymbol{K}_2,$$

т. е. убедиться в равносильности условий (9), (11).

Пусть $p\in\boldsymbol{X}_1$, $\varkappa=\boldsymbol{P}_1p$. Обозначим

$$B=\Big\{P:\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\xi_{1,\,n}=0\Big\}.$$

Согласно (13)

$$p(B)=\int_R\Big[\int_0^{\xi_0}\chi_B\,d\xi_0\Big]\,d\varkappa=\int_B\xi_0\,d\varkappa,\tag{40}$$

и, следовательно, из (11) вытекает (9). Если же $p(B)=0$, то согласно (40) $\varkappa(\overset{0}{B})=0$, что в силу равенства

$$B=\bigcup_{k=0}^{\infty}U^k\overset{0}{B}$$

дает

$$\varkappa(B)\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}\varkappa(U^k\overset{0}{B})=\sum_{k=0}^{\infty}\varkappa(\overset{0}{B})=0.$$

§ 3. Связь между классами K_2 и B

В этом параграфе доказывается следующая

Теорема II. *Между элементами* $\varkappa$, q *классов* $\boldsymbol{K}_2$ *и* $\boldsymbol{B}$ *можно установить* *взаимно-однозначное соответствие* $q = \boldsymbol{P}_2\varkappa$ *следующим образом: для* $B \in \Phi$

$$q(B) = \int_B E_\varkappa \{\xi_0 / J_\varkappa\} \, d\varkappa^*, \tag{41}$$

где $J_\varkappa$ — σ*-кольцо множеств из* Φ, *инвариантных относительно* U *по мере* $\varkappa$ (*п. 1.1*). *При этом*

$$\varkappa(B) = \int_B \frac{dq}{E_q\{\xi_0/J_q\}} \, . \tag{42}$$

3.1. Пусть μ — мера, заданная на Φ; J_μ — σ-кольцо множеств из Φ, инвариантных относительно U по мере μ; $f(P)$, $\varphi(P)$ — конечные неотрицательные функции точки $P \in R$, измеримые соответственно относительно J_μ и Φ.

Нам понадобятся следующие простые утверждения.

1) Если мера μ инвариантна относительно U на Φ, то мера $\int_B f d\mu$ обладает тем же свойством.

2) Если $E_\mu\{\varphi/J_\mu\}$ существует, то для $B \in J_\mu$

$$\int_B f E_\mu \{\varphi/J_\mu\} \, d\mu = \int_B f\varphi d\mu. \tag{44}$$

3) Если $B \in J_\mu$ и $B \subset \{P : \xi_0 = 0\}$ $[\mu]$, то $\mu(B) = 0$.

4) Если $E_\mu\{\xi_0/J_\mu\}$ существует, то

$$E_\mu\{\xi_0/J_\mu\} > 0 \ [\mu]. \tag{45}$$

3.2. Лемма 8. *Для* $\varkappa \in \boldsymbol{K}_1$ *условие (11) равносильно вполне* σ*-конечности* $\varkappa$ *на* σ*-кольце* $J_\varkappa$ *множеств из* Φ, *инвариантных относительно* U *по мере* $\varkappa$.

Доказательство Рассмотрим пространство $\overset{*}{R}$ последовательностей $\{\xi_{\overline{-\infty, +\infty}}\}$, $\xi_k \geqslant 0$, подчиненных условию $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \xi_k = \infty$.

Пусть $\overset{*}{\Phi}$ — σ-кольцо борелевских множеств в $\overset{*}{R}$; $\overset{*}{U}$ — преобразование сдвига, увеличивающее номер каждой координаты точки $P \in \overset{*}{R}$ на единицу:

$$\xi_k(P) = \xi_{k+1}(\overset{*}{U} P), \ k = \overline{-\infty, +\infty}.$$

Как нетрудно показать, всякая мера $\varkappa \in \boldsymbol{K}_1$ однозначно продолжается до меры $\overset{*}{\varkappa}$ на $\overset{*}{\Phi}$, инвариантной на $\overset{*}{\Phi}$ относительно $\overset{*}{U}$.

Множество $B \in \overset{*}{\Phi}$ называется блуждающим [5], если для любого целого k

$$\overset{*}{\varkappa}(B \cap \overset{*}{U}{}^k B) = 0.$$

Докажем, что пространство с мерой $(\overset{*}{R}, \ \overset{*}{\Phi}, \ \overset{*}{\varkappa})$ не содержит блуждающих множеств положительной меры. Пусть B—такое множество.

* Определение функции $E_\varkappa\{\xi_0/J_\varkappa\}$ дано в п. 1.1.

Тогда

$$\int\limits_{\bigcup\limits_{k=-\infty}^{+\infty} \overset{*}{U}{}^{k}B} \xi_0 d\overset{*}{\varkappa} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int\limits_{\overset{*}{U}{}^{k}B} \xi_0 d\overset{*}{\varkappa} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int\limits_{B} \xi_k d\overset{*}{\varkappa} = \int\limits_{B} \Big(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \xi_k \Big) d\overset{*}{\varkappa} = \infty,$$

что невозможно, так как в силу (10)

$$\int\limits_{\bigcup\limits_{k=-\infty}^{+\infty} \overset{*}{U}{}^{k}B} \xi_0 d\overset{*}{\varkappa} \leqslant \int\limits_{\overset{*}{R}} \xi_0 d\overset{*}{\varkappa} = \int\limits_{R} \xi_0 d\varkappa = 1.$$

Из доказанного следует [5, стр. 166], что

$$\int\limits_{R} \psi d\varkappa \leqslant \int\limits_{R} \xi_0 d\varkappa = 1,$$

где

$$\psi(P) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n} \xi_{0,\, n-1}.$$

Заметим теперь, что всякое множество вида $\{P : \psi(P) < a\}$ принадлежит $J_\varkappa$. Поэтому, если выполнено условие (11), т. е.

$$\varkappa\{P : \psi(P) = 0\} = 0,$$

то мера $\varkappa$ вполне σ-конечна на $J_\varkappa$.

Если же

$$\varkappa\{P : \psi(P) = 0\} \neq 0,$$

то мера $\varkappa$ не является вполне σ-конечной на $J_\varkappa$. Действительно, предположим, что существует множество $B \in J_\varkappa$ конечной положительной меры, содержащееся в $\{P : \psi(P) = 0\}$. По эргодической теореме [5, стр. 163].

$$\int\limits_{B} \xi_0 d\varkappa = \int\limits_{B} \psi d\varkappa = 0,$$

т. е. $B \subset \{P : \xi_0 = 0\}$ $[\varkappa]$, что в силу 3), п. 3.1 дает $\varkappa(B) = 0$. Таким образом, мера $\varkappa$ не является вполне σ-конечной на $J_\varkappa$.

3.3. Перейдем к доказательству теоремы II.

Зададим меру $\varkappa \in \boldsymbol{K}_2$. Согласно (10), (11) и лемме 8, меры $\varkappa$ и $\int\limits_{B} \xi_0 d\varkappa$ вполне σ-конечны на $J_\varkappa$. Поэтому в силу п. 1.1 и 4), п. 3.1 функция $E_\varkappa\{\xi_0 / J_\varkappa\}$ существует и > 0 $[\varkappa]$. Введем на Φ меру q по формуле (41) и докажем, что $q \in \boldsymbol{B}$. Согласно 1), п. 3.1 мера q инвариантна на Φ относительно U. Далее,

$$q(R) = \int\limits_{R} E_\varkappa\{\xi_0 / J_\varkappa\}\, d\varkappa = \int\limits_{R} \xi_0\, d\varkappa = 1,$$

т. е. q — вероятностная мера.

Наконец, обозначая

$$B_k = \{P : k < E_\varkappa\{\xi_0 / J_\varkappa\} \leqslant k + 1\} \in J_\varkappa,\ k \geqslant 0,$$

получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} B_k = R; \quad \int_{B_k} \xi_0\, dq = \int_{B_k} \xi_0 E_\varkappa \{\xi_0/J_\varkappa\}\, d\varkappa \leq (k+1) \int_{B_k} \xi_0\, d\varkappa < \infty.$$

Следовательно, мера $\int_B \xi_0\, dq$ вполне σ-конечна на $J_\varkappa$, а значит и на J_q, так как в силу эквивалентности мер q и $\varkappa$

$$J_q = J_\varkappa.$$

Мера $\varkappa$ выражается через q по формуле (42).

Действительно, в силу (41)

$$\varkappa(B) = \int_B \frac{dq}{E_\varkappa \{\xi_0/J_\varkappa\}}.$$

Поэтому достаточно доказать, что

$$E_\varkappa \{\xi_0/J_\varkappa\} = E_q \{\xi_0/J_q\}\ [q]. \tag{46}$$

В силу вполне σ-конечности мер q и $\int_B \xi_0 dq$ на J_q, функция $E_q \{\xi_0/J_q\}$ существует и единственна $[q]$. При этом согласно 2), п. 3.1 для $B \in J_\varkappa = J_q$

$$\int_B \xi_0\, dq = \int_B \xi_0 E_\varkappa \{\xi_0/J_\varkappa\}\, d\varkappa = \int_B (E_\varkappa \{\xi_0/J_\varkappa\})^2\, d\varkappa = \int_B E_\varkappa \{\xi_0/J_\varkappa\}\, dq,$$

откуда и следует (46).

Таким образом, оператор $\boldsymbol{P}_2$ устанавливает взаимно-однозначное соответствие между классами $\boldsymbol{K}_2$ и $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{K}_2$, причем

$$\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{K}_2 \subseteq \boldsymbol{B}.$$

Так же просто доказывается и обратное включение.

§ 4. Связь между классами X_2 и B. Порождающая последовательность

В силу теорем I, II оператор

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1 \tag{47}$$

устанавливает взаимно-однозначное соответствие $q = \boldsymbol{P}p$ между элементами p, q классов $\boldsymbol{X}_2$ и $\boldsymbol{B}$.

Иначе говоря, в обозначениях п. 1.4 каждому стационарному потоку $X_p(t) \in \boldsymbol{X}_2$ соответствует одна и только одна стационарная в узком смысле последовательность $\{\xi^{(\boldsymbol{P}p)}_{0,\,\infty}\} \in \boldsymbol{B}$.

Определение. *Случайная последовательность* $\{\xi^{(\boldsymbol{P}p)}_{0,\,\infty}\} \in \boldsymbol{B}$ *называется последовательностью, порождающей поток* $X_p(t) \in \boldsymbol{X}_2$.

Согласно (13), (42) для $B \in \Phi$

$$\boldsymbol{P}^{-1} q(B) = \int_R \frac{\int\limits_0^{\xi_0} \chi_B\, d\xi_0}{E_q \{\xi_0/J_q\}}\, dq. \tag{48}$$

В этом параграфе доказывается теорема, дающая другой, весьма естественный способ получения всякого потока $X(t) \in \boldsymbol{X}_2$ из порождающей его последовательности.

Теорема III. *Для любой меры* $q \in \boldsymbol{B}$ и $B \in \tilde{\Phi}_x$

$$\boldsymbol{P}^{-1} q(B) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T q(Q_\Delta B)\, d\Delta. \tag{49}$$

4.1. Пусть $q \in \boldsymbol{B}$; $f(P)$ — конечная неотрицательная функция точки $P \in R$, измеримая относительно Φ, причем $f(P) \leq \xi_0(P)$. Тогда, как следует из эргодической теоремы [5, стр. 163],

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N} f U_{-1}^i = E_q \{f / J_q\}\ [q]^*.$$

Пусть, далее, F_T — σ-кольцо борелевских множеств на интервале $(-T, 0]$, $T > 0$.

Введем отображение V_T пространства $\Omega \times (-T, 0]$ на Ω: для любой пары $(x(t), \alpha) \in \Omega \times (-T, 0]$

$$V_T(x(t), \alpha) = Q_\alpha x(t).$$

Как легко проверить, для любого $B \in \tilde{\Phi}_x$

$$V_T^{-1} B \in \tilde{\Phi}_x \times F_T.$$

Следовательно, всякая мера μ на $\tilde{\Phi}_x \times F_T$ определяет меру μV_T^{-1} на $\tilde{\Phi}_x$.

4.2. Перейдем к доказательству теоремы III. Зададим меру $q \in L$. Пусть μ_T — нормированная на единицу мера Лебега на интервале $(-T, 0]$. Согласно п. 4.1 введем на $\tilde{\Phi}_x$ вероятностную меру

$$p_T = (q \times \mu_T)\, V_T^{-1}.$$

Зададим $B \in \tilde{\Phi}_x$ и обозначим

$$E(x(t), \alpha) = V_T^{-1} B \in \tilde{\Phi}_x \times F_T.$$

Очевидно, при фиксированном $\alpha \in (-T, 0]$

$$E(x(t), \alpha) = Q_{-\alpha} B,$$

откуда по теореме Фубини

$$p_T(B) = \int_{\Omega \times (-T, 0]} \chi_E\, d(q \times \mu_T) = \frac{1}{T} \int_{-T}^{0} \left[\int_\Omega \chi_E\, dq \right] d\alpha = \frac{1}{T} \int_0^T q(Q_\Delta B)\, d\Delta. \tag{50}$$

---

* Отображение U_{-1} определено в п. 1.4.

Таким образом, в силу (48) для доказательства теоремы III достаточно доказать, что

$$\lim_{T\to\infty} p_T(B) = \int\limits_R \frac{\int\limits_0^{\xi_0} \chi_B \, d\xi_0}{E_q\{\xi_0/J_q\}}\, dq, \tag{51}$$

где J_q — σ-кольцо множеств из Φ_x, инвариантных относительно U по мере q.

4.3. Из (50) получаем:

$$p_T(B) = \int\limits_R \left[\frac{1}{T}\int\limits_{-T}^{0} \chi_E(P, \alpha)\, d\alpha\right] dq. \tag{52}$$

Займемся функцией $\int\limits_{-T}^{0} \chi_E(P, \alpha)\, d\alpha$. Зафиксируем точку $P \in R$ и введем обозначения:

$M = M(P, T)$ — число, определяемое неравенствами

$$\xi_{0,\, M-1}(P) < T \leqslant \xi_{0,\, M}(P); \tag{53}$$

E_P — множество значений $\alpha \in (-T, 0]$, для которых

$$Q_\alpha(P) \in B;$$

$$E_{P,\, i} = E_P \cap \{\alpha : -\xi_{0,\, i}(P) < \alpha \leqslant -\xi_{0,\, i-1}(P)\},\quad i = \overline{1, M-1};$$

$$E_{P,\, M} = E_P \cap \{\alpha : -T < \alpha \leqslant -\xi_{0,\, M-1}(P)\};$$

$$E_{P,\, 0} = E_P \cap \{\alpha : -\xi_0(P) < \alpha \leqslant 0\};\ f(P) = \int\limits_{E_{P,\,0}} d\alpha = \int\limits_0^{\xi_0(P)} \chi_B(P_1)\, d\xi_0, \tag{54}$$

где $\xi_0(P_1) = \xi_0$, $\xi_i(P_1) = \xi_i(P)$, $i > 0$.
Очевидно,

$$E_P = \sum_{i=0}^{M} E_{P,\, i};\ \int\limits_{-T}^{0} \chi_E\, d\alpha = \int\limits_{E_P} d\alpha = \sum_{i=0}^{M} \int\limits_{E_{P,\, i}} d\alpha. \tag{55}$$

Далее, как легко видеть,

$$\int\limits_{E_{P,\, i}} d\alpha = fU_{-1}^{i}(P),\ i = \overline{1, M-1};\quad \int\limits_{E_{P,\, M}} d\alpha \leqslant fU_{-1}^{M}(P).$$

Поэтому в силу (55) для любой точки $P \in R$

$$\sum_{i=0}^{M-1} fU_{-1}^{i}(P) \leqslant \int\limits_{-T}^{0} \chi_E(P, \alpha)\, d\alpha \leqslant \sum_{i=0}^{M} fU_{-1}^{i}(P). \tag{56}$$

4.4. Дальнейшее доказательство основано на следующих легко проверяемых фактах.

1) Для любой числовой последовательности $\varepsilon_n \downarrow 0$ и любого Δ существует такое n_1, что

$$q(A_1) \geqslant 1 - \Delta,$$

где $A_1 = \{P : E_q\{\xi_0/J_q\} \geqslant \varepsilon_{n_1}\}$ (это следует из (45)).

2) Для любого Δ существует такое n_2, что

$$q(A_2) \geqslant 1 - \Delta, \; q(A_3) \geqslant 1 - \Delta,$$

где

$$A_2 = \{P : E_q\{\xi_0/J_q\} \leqslant n_2\}, \; A_3 = \{P : E_q\{f/J_q\} \leqslant n_2\}$$

(это следует из вполне σ-конечности меры $\int\limits_B \xi_0\, dq$ на J_q и очевидного неравенства

$$E_q\{f/J_q\} \leqslant E_q\{\xi_0/J_q\}).$$

3) Для любых ε, Δ существуют такие n_4, n_5, что

$$q(A_4) \geqslant 1 - \Delta, \; q(A_5) \geqslant 1 - \Delta,$$

где

$$A_4 = \left\{P : \left| \frac{1}{n}\xi_{0,\, n-1} - E_q\{\xi_0/J_q\} \right| \leqslant \varepsilon; \; n \geqslant n_4 \right\},$$

$$A_5 = \left\{P : \left| \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} fU^i_{-1} - E_q\{f/J_q\} \right| \leqslant \varepsilon; \; n \geqslant n_5 \right\}$$

(это следует из п. 4.1).

4) Для любых n, Δ существует такое $T(n, \Delta)$, что для всех $T \geqslant T(n, \Delta)$

$$q(A_6) \geqslant 1 - \Delta,$$

где $A_6 = \{P : M(P, T) \geqslant n\}$.

Действительно, если $M(P, T) < n$, то хотя бы для одного $k = \overline{0, M}$

$$\xi_k \geqslant \frac{T}{n},$$

откуда

$$q(A_6') \leqslant \sum_{k=0}^{M} q\left\{P : \xi_k \geqslant \frac{T}{n}\right\} \leqslant nq\left\{P : \xi_0 \geqslant \frac{T}{n}\right\} < \Delta$$

при достаточно больших T*.

4.5. Зададим числовую последовательность $\varepsilon_n \downarrow 0$ и числа $m > 1$ и $\Delta > 0$. Согласно п. 4.4 по $\{\varepsilon_{\overline{1,\,\infty}}\}$ и Δ получим n_1, n_2, A_1, A_2, A_3; по $\varepsilon = \frac{1}{m}\varepsilon_{n_1}$ и Δ получим n_4, n_5, A_4, A_5; наконец, по Δ и $n = \max\left\{\frac{n_2}{\varepsilon} + 1, n_4, n_5\right\}$ получим $T(n, \Delta)$, A_6.

Зададим $T \geqslant T(n, \Delta)$ и обозначим

$$A = \bigcap_{k=1}^{6} A_k.$$

---

* A' — дополнение множества A в R.

Согласно п. 4.4

$$q(A) \geqslant 1 - 6\Delta, \tag{57}$$

причем в каждой точке $P \in A$ выполняются следующие неравенства:

$$E_q\{f/J_q\} \leqslant E_q\{\xi_0/J_q\} \leqslant n_2;\ E_q\{\xi_0/J_q\} \geqslant \varepsilon_{n_1} = m\varepsilon; \tag{58}$$

$$M \geqslant n;\ \left|\frac{1}{M}\xi_{0,\,M-1} - E_q\{\xi_0/J_q\}\right| \leqslant \varepsilon;\ \left|\frac{1}{M}\sum_{i=0}^{M-1} fU_{-1}^i - E_q\{f/J_q\}\right| \leqslant \varepsilon;$$

$$\frac{1}{M}\xi_{0,\,M} - \frac{1}{M+1}\xi_{0,\,M} \leqslant \frac{1}{n}\left(E_q\{\xi_0/J_q\} + \varepsilon\right) \leqslant \varepsilon,$$

т. е.

$$\left|\frac{1}{M}\xi_{0,\,M} - E_q\{\xi_0/J_q\}\right| \leqslant 2\varepsilon,$$

и аналогично

$$\left|\frac{1}{M}\sum_{i=0}^{M} fU_{-1}^i - E_q\{f/J_q\}\right| \leqslant 2\varepsilon.$$

4.6. Для $P \in A$ в силу (53), (56)

$$\frac{\frac{1}{M}\sum\limits_{i=0}^{M-1} fU_{-1}^i(P)}{\frac{1}{M}f_{0,\,M}(P)} \leqslant \frac{1}{T}\int_{-T}^{0}\chi_E(P, \alpha)\,d\alpha \leqslant \frac{\frac{1}{M}\sum\limits_{i=0}^{M} fU_{-1}^i(P)}{\frac{1}{M}\xi_{0,\,M-1}(P)}$$

или согласно п. 4.5

$$\frac{E_q\{f/J_q\} - \varepsilon}{E_q\{\varepsilon_0/J_q\} + 2\varepsilon} \leqslant \frac{1}{T}\int_{-T}^{0}\chi_E(P, \alpha)\,d\alpha \leqslant \frac{E_q\{f/J_q\} + 2\varepsilon}{E_q\{\xi_0/J_q\} - \varepsilon}. \tag{59}$$

Интегрируя это неравенство по A, получаем с помощью (58):

$$\frac{1}{1+\frac{2}{m}}\int_A \frac{E_q\{f/J_q\}}{E_q\{\xi_0/J_q\}}\,dq - \frac{1}{m+2} \leqslant \int_A\left[\frac{1}{T}\int_{-T}^{0}\chi_E(P, \alpha)\,d\alpha\right]dq \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{1-\frac{1}{m}}\int_A \frac{E_q\{f/J_q\}}{E_q\{\xi_0/J_q\}}\,dq + \frac{2}{m-1}.$$

В силу (52), (57) отсюда следует

$$\frac{1}{1+\frac{2}{m}}\int_R \frac{E_q\{f/J_q\}}{E_q\{\xi_0/J_q\}}\,dq - \frac{6\Delta}{1+\frac{2}{m}} - \frac{1}{m+2} \leqslant p_T(B) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{1-\frac{1}{m}}\int_R \frac{E_q\{f/J_q\}}{E_q\{\xi_0/J_q\}}\,dq + \frac{2}{m-1} + 6\Delta.$$

Зафиксируем Δ и перейдем к пределу при $m \to \infty$.

При этом согласно п. 4.5 $T \to \infty$. Следовательно,

$$\int\limits_R \frac{E_q\{f/J_q\}}{E_q\{\xi_0/J_q\}}\,dq - 6\Delta \leqslant \underline{\lim}_{T\to\infty}\, p_T(B) \leqslant \overline{\lim}_{T\to\infty}\, p_T(B) \leqslant \int\limits_R \frac{E_q\{f/J_q\}}{E_q\{\xi_0/J_q\}}\,dq + 6\Delta,$$

откуда, используя произвольность Δ и (44), (54), получаем (51).

§ 5. Структура классов $\boldsymbol{X}_1 \cap \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{X}_2 \cap \boldsymbol{B}$

Как известно, простейшим потоком $X_{p_\lambda}(t)$ с параметром λ называется поток со взаимно независимыми случайными величинами $\xi^{(p_\lambda)}_{0,\,\infty}$ (см. п. 1.3), для которого

$$p_\lambda\{P : \xi_k > t\} = e^{-\lambda t},\ k \geqslant 0. \tag{60}$$

Обозначим через $\boldsymbol{X}_3$ совокупность мер

$$p(B) = \int\limits_0^\infty p_\lambda(B)\,dF(\lambda), \tag{61}$$

где $B \in \Phi$; $F(\lambda)$ — функция распределения на полуоси $\lambda > 0$; p_λ — мера, соответствующая простейшему потоку $X_{p_\lambda}(t)$ с параметром λ.

Класс потоков $\boldsymbol{X}_3$ был рассмотрен А. Я. Хинчиным [1, стр. 25].

Теорема IV. *Класс $\boldsymbol{X}_3$ есть совокупность мер $p \in \boldsymbol{X}_2$, для которых*

$$\boldsymbol{P}p = p; \tag{62}$$

при этом

$$\boldsymbol{X}_3 = \boldsymbol{X}_1 \cap \boldsymbol{L} = \boldsymbol{X}_2 \cap \boldsymbol{B}.$$

Формула (61) допускает обращение:

$$F(\beta) - F(\alpha) = p\left\{P : \alpha < \frac{1}{E_p\{\xi_0/J_p\}} \leqslant \beta\right\}, \tag{63}$$

где J_p — σ-кольцо множеств из Φ, инвариантных относительно U по мере p.

В п. 5.1 мы получим равенство

$$\boldsymbol{X}_1 \cap \boldsymbol{B} = \boldsymbol{X}_2 \cap \boldsymbol{B} \tag{64}$$

и докажем, что класс $\boldsymbol{X}_2 \cap \boldsymbol{B}$ есть совокупность мер $p \in \boldsymbol{X}_2$, для которых выполняется (62).

В. п. 5.2 будет получено включение

$$\boldsymbol{X}_3 \subseteq \boldsymbol{X}_1 \cap \boldsymbol{B};$$

в п. 5.3 — обратное включение и формула (63).

5.1. Зададим меру $p \in \boldsymbol{X}_1 \cap \boldsymbol{B}$ и обозначим

$$\tilde{\boldsymbol{P}}^{-1} p = \hat{p} \in \boldsymbol{X}_2.$$

По теореме III, для $B \in \Phi_x$

$$\hat{p}(B) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T p(Q_\Delta B)\,d\Delta.$$

В силу включения $p \in \boldsymbol{X}_1$ мера p инвариантна относительно Q_Δ на $\tilde{\Phi}_x$. Следовательно, для $B \in \tilde{\Phi}_x$

$$\hat{p}(B) = p(B).$$

Согласно (7), (8) это равенство справедливо и для любого $B \in \Phi_x$. Таким образом,

$$\boldsymbol{P}^{-1} p = p,$$

т. е. получено включение

$$\boldsymbol{X}_1 \cap \boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{X}_2,$$

из которого непосредственно следует (64).

Одновременно доказано, что для каждой меры $p \in \boldsymbol{X}_2 \cap \boldsymbol{B}$ выполняется (62). Если же для меры $p \in \boldsymbol{X}_2$ справедливо (62), то, очевидно, $p \in \boldsymbol{B}$ откуда $p \in \boldsymbol{X}_2 \cap \boldsymbol{B}$.

Таким образом, класс $\boldsymbol{X}_2 \cap \boldsymbol{B}$ есть совокупность мер $p \in \boldsymbol{X}_2$, удовлетворяющих (62).

5.2. Зададим меру $p \in x_3$ и докажем, что

$$p \in \boldsymbol{X}_1 \cap \boldsymbol{B}.$$

Как показал А. Я. Хинчин [1, стр. 25, 26], p — вероятностная мера на Φ_x, инвариантная на $\tilde{\Phi}$ относительно Q_Δ. В силу (60), для любого $\lambda > 0$

$$p_\lambda \{x(t) : x(0) > 0\} = p_\lambda \{P : \xi_0 = 0\} = 0,$$

откуда, согласно (61),

$$p\{x(t) : x(0) > 0\} = 0.$$

Таким образом, $p \in \boldsymbol{X}_1$.

Далее, при любом $\lambda > 0$ мера p_λ инвариантна на Φ относительно U, так как случайные величины $\xi^{(p_\lambda)}_{0,\infty}$ взаимно независимы и одинаково распределены. Отсюда в силу (61) следует инвариантность меры p на Φ относительно U.

Для получения включения $p \in \boldsymbol{B}$ остается доказать, что мера $\int_B \xi_0 \, dp$ вполне σ-конечна на J_p. Докажем сперва, что для принадлежности $B \in J_p$ необходимо и достаточно, чтобы для почти всех λ по мере $F(\lambda)$

$$p_\lambda(B) = 0 \text{ или } p_\lambda(B) = 1.$$

Пусть $B \in J_p$. Тогда согласно (61)

$$\int_0^\infty p_\lambda(B \Delta UB)\, dF(\lambda) = p(B \Delta UB) = 0,$$

откуда

$$p_\lambda(B \Delta UB) = 0 \;\; [F(\lambda)],$$

т. е.

$$B \in J_{p_\lambda} \;[F(\lambda)].$$

Следовательно, в силу взаимной независимости случайных величин $\xi^{(p_\lambda)}_{0,\infty}$ по закону нуля или единицы

$$p_\lambda(B) = 0 \text{ или } p_\lambda(B) = 1 \;\; [F(\lambda)]. \tag{65}$$

Наоборот, пусть $B \in \Phi$ удовлетворяет условиям (65). Тогда в силу инвариантности меры p_λ на Φ относительно U

$$p_\lambda (B \Delta UB) = 0 \ [F(\lambda)],$$

откуда в силу (61)

$$p(B \Delta UB) = 0,$$

т. е. $B \in J_p$.

Перейдем к доказательству вполне σ-конечности меры $\int\limits_B \xi_0 dp$ на J_p.

Для любого $B \in J_p$ в силу (61), (65)

$$\int\limits_B \xi_0 \, dp = \int\limits_0^\infty dF(\lambda) \int\limits_B \xi_0 \, dp_\lambda = \int\limits_{A_B} dF(\lambda) \int\limits_R \xi_0 \, dp_\lambda = \int\limits_{A_B} dF(\lambda) \int\limits_0^\infty \lambda x e^{-\lambda x} dx = \int\limits_{A_B} \frac{dF(\lambda)}{\lambda},$$

где

$$A_B = \{\lambda : p_\lambda (B) = 1\}.$$

Поэтому достаточно построить возрастающую последовательность множеств $B^{(\nu)} \in J_p$, для которой

$$p_\lambda (B^{(\nu)}) = \begin{cases} 0; & \lambda \leqslant \dfrac{1}{\nu}, \\ 1; & \lambda > \dfrac{1}{\nu}, \end{cases} \tag{66}$$

$$\lim_{\nu \to \infty} p(B^{(\nu)}) = 1.$$

Обозначим

$$x_i = \nu \ln \frac{i+1}{\alpha}, \text{ где } \nu > 0, \ 0 < \alpha < 1;$$

$$B_\alpha^{(\nu)} = \{P : \xi_i < x_i, \ i \geqslant 0\}; \ B^{(\nu)} = \lim_{\alpha \downarrow 0} B_\alpha^{(\nu)}.$$

Убедимся, что последовательность $\{B^{(\nu)}\}$ обладает требуемыми свойствами. Для любого $\lambda > 0$

$$p_\lambda (B_\alpha^{(\nu)}) = \prod_{i=0}^\infty (1 - e^{-\lambda x_i}) = \prod_{i=0}^\infty \left(1 - \left(\frac{\alpha}{i+1}\right)^{\nu\lambda}\right),$$

откуда

$$-\ln p_\lambda (B_\alpha^{(\nu)}) = \sum_{k=1}^\infty \frac{\alpha^{\lambda\nu k}}{k} \sum_{i=0}^\infty \frac{1}{(i+1)^{\lambda\nu k}}.$$

При $\lambda \leqslant \dfrac{1}{\nu}$

$$-\ln p_\lambda (B_\alpha^{(\nu)}) = \infty, \ p_\lambda (B_\alpha^{(\nu)}) = 0,$$

т. е.

$$p_\lambda (B^{(\nu)}) = \lim_{\alpha \to 0} p_\lambda (B_\alpha^{(\nu)}) = 0.$$

При $\lambda > \dfrac{1}{\nu}$

$$-\ln p_\lambda (B_\alpha^{(\nu)}) < \frac{\alpha^{\lambda\nu}}{1 - \alpha^{\lambda\nu}} \sum_{i=0}^\infty \frac{1}{(i+1)^{\lambda\nu}},$$

т. е.

$$-\ln p_\lambda (B^{(\nu)}) = 0, \ p_\lambda (B^{(\nu)}) = 1.$$

Таким образом, последовательность $\{B^{(\nu)}\}$ удовлетворяет (66). Следовательно, по доказанному выше $B^{(\nu)} \in J_p$.
Наконец,

$$\lim_{\nu \to \infty} p(B^{(\nu)}) = \lim_{\nu \to \infty} \int_0^\infty p_\lambda(B^{(\nu)})\, dF(\lambda) = \lim_{\nu \to \infty} \int_{\frac{1}{\nu}}^\infty dF(\lambda) = 1.$$

5.3. Зададим меру $p \in X_1 \cap B$ и докажем, что

$$p(B) = \int_0^\infty p_\lambda(B)\, dF(\lambda), \tag{61}$$

где функция $F(\lambda)$ определяется формулой (63), $B \in \Phi$.

Обозначим для $N > 0$, $n \geqslant 0$, $x_k \geqslant 0$

$$A(x_{\overline{0,n}}) = \{P : \xi_k > x_k;\ k = \overline{0, n}\} \in \Phi;$$

$$B_i^N = \left\{P : \frac{i-1}{N} < \frac{1}{E_p\{\xi_0/J_p\}} \leqslant \frac{i}{N}\right\} \in J_p.$$

В силу (60)

$$p_\lambda(A(x_{\overline{0,n}})) = e^{-\lambda x_{0,n}}.$$

Поэтому утверждение этого пункта будет доказано, если мы докажем, что для любого $A(x_{\overline{0,n}})$

$$p(A(x_{0,n})) = \lim_{N \to \infty} \sum_{i=1}^\infty e^{-\frac{i}{N} x_{0,n}} p(B_i^N). \tag{67}$$

Введем множества

$$A_i^N(x_{\overline{0,n}}) = A(x_{\overline{0,n}}) \cap UB_i^N,\ N > 0$$

и обозначим

$$p(A_i^N(x_{\overline{0,n}})) = p_i^N(x_{\overline{0,n}}),\ i > 0.$$

Нашей ближайшей целью является получение неравенства

$$e^{-\frac{i}{N} x_0} p_i^N(0, x_{\overline{1,n}}) \leqslant p_i^N(x_{\overline{0,n}}) \leqslant e^{-\frac{i-1}{N} x_0} p_i^N(0, x_{\overline{1,n}}). \tag{68}$$

Согласно (41), (46) и (12), для $B \in \Phi$

$$p(B) = \int_B E_p\{\xi_0/J_p\}\, d\varkappa,$$

где

$$\varkappa(B) = -p_r'(S_\alpha B)|_{\alpha=0}.$$

Поэтому

$$\frac{N}{i} \varkappa(A_i^N(x_{\overline{0,n}})) \leqslant p_i^N(x_{\overline{0,n}}) \leqslant \frac{N}{i-1} \varkappa(A_i^N(x_{\overline{0,n}})).$$

Здесь

$$-\varkappa(A_i^N(x_{\overline{0,n}})) = p_r'(S_\alpha A_i^N(x_{\overline{0,n}}))|_{\alpha=0} = \left[\frac{\partial}{\partial x_0} p_i^N(x_{\overline{0,n}})\right]_r,$$

откуда

$$-\frac{N}{i}\left[\frac{\partial}{\partial x_0} p_i^N(x_{\overline{0,n}})\right]_r \leqslant p_i^N(x_{\overline{0,n}}) \leqslant -\frac{N}{i-1}\left[\frac{\partial}{\partial x_0} p_i^N(x_{\overline{0,n}})\right]_r. \tag{69}$$

Далее, как следует из п. 2.5 и очевидного неравенства

$$p_i^N(x_{\overline{0,n}}) - p_i^N(x_0+\Delta,\ x_{\overline{1,n}}) \leqslant p\{P: x_0 < \xi_0 \leqslant x_0+\Delta\},$$

функция $p_i^N(x_{\overline{0,n}})$ абсолютно непрерывна по переменной x_0 на каждом интервале $[\varepsilon,\ \infty)$ и непрерывна справа в точке $x_0=0$.

Будем различать два случая: $p_i^N(0,\ x_{\overline{1,n}}) \neq 0$ и $p_i^N(0,\ x_{\overline{1,n}})=0$. В первом случае, по непрерывности, $p_i^N(x_{\overline{0,n}}) \neq 0$ на некотором интервале $[0,\ \alpha)$ оси x_0, Следовательно, для $x_0<\alpha$ в силу (69)

$$\frac{i-1}{N} \leqslant -\left[\frac{\partial}{\partial x_0}\ln p_i^N(x_{\overline{0,n}})\right]_r \leqslant \frac{i}{N}.$$

Отсюда, используя абсолютную непрерывность функции $\ln p_i^N(x_{\overline{0,n}})$ на каждом интервале $(\varepsilon,\ \alpha-\varepsilon)$, получаем для $x_0<\alpha$ неравенство (68). Как следует из этого результата и непрерывности функции $p_i^N(x_{\overline{0,n}})$ по переменной x_0, $p_i^N(x_{\overline{0,n}}) \neq 0$ при всех x_0, Поэтому можно положить $\alpha=\infty$, т. е. неравенство (68) справедливо при всех значениях x_0. Пусть теперь $p_i^N(0,\ x_{\overline{1,n}})=0$. Тогда, в силу невозрастания функции $p_i^N(x_{\overline{0,n}})$, $p_i^N(x_{\overline{0,n}}) \equiv 0$ при всех значениях x_0. Следовательно, (68) верно и в этом случае.

Остается из (68) получить (67). В силу (8)

$$p_i^N(0)=p\,[A\ (0) \cap UB_i^N]=p\ (UB_i^N)=p\ (B_i^N),$$

$$p_i^N(0,\ x_{\overline{1,n}})=p\,[A\ (0,\ x_{\overline{1,n}}) \cap UB_i^N]=p\,[A\ (x_{\overline{1,n}}) \cap B_i^N]= \\ =p_i^N(x_{\overline{1,n}}),\ n>0.$$

Отсюда в силу очевидного равенства

$$p\ (A\ (x_{\overline{0,n}}))=\sum_{i=1}^{\infty} p_i^N(x_{\overline{0,n}})$$

и (68) получаем:

$$\sum_{i=1}^{\infty} e^{-\frac{i}{N}x_{0,n}}\,p\,(B_i^N) \leqslant p(A(x_{\overline{0,n}})) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\frac{i-1}{N}x_{0,n}}\,p\,(B_i^N),$$

что при $N\to\infty$ приводит к (67).

§ 6. Параметр и интенсивность потока

Пусть $X_p(t)$ — стационарный поток; $\varkappa=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{p}$. Обозначим

$$v_k(\tau)=p\,\{x\,(t): x\,(\tau)=k\}; \tag{70}$$

$$\psi_k(\tau)=\sum_{i=k}^{\infty} v_i(\tau)\ p\,\{x\,(t):=x\,(\tau) \geqslant k\}=p\,\{P: \xi_{0,\,k-1} \leqslant \tau\}; \tag{71}$$

$$\lambda_k=\varlimsup_{\Delta\downarrow 0}\frac{\psi_k(\Delta)}{\Delta},\ k>0.$$

Очевидно, для любого $k>0$

$$\lambda_{k+1} \leqslant \lambda_k.$$

Число λ_1 называется параметром потока $X_p(t)$. Как доказал А. Я. Хинчин [1], для любого стационарного потока предел

$$\lim_{\Delta \downarrow 0} \frac{\psi_1(\Delta)}{\Delta} = \lambda_1$$

существует, причем не исключен случай $\lambda_1 = \infty$.

Интенсивностью потока $X_p(t)$ называется математическое ожидание числа „вызовов“ t_k (см. п. 1.3) в единицу времени:

$$\mu = \sum_{k=0}^{\infty} k v_k(1) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(1).$$

В силу аддитивности математического ожидания и стационарности потока $X_p(t)$ для любого Δ

$$\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_k(\Delta)}{\Delta}. \tag{72}$$

В этом параграфе будет доказана следующая

Теорема V. *Для любого стационарного потока* $X_p(t)$

$$\lambda_1 = \varkappa\{P: \xi_0 > 0\}, \tag{73}$$

$$\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k = \varkappa(R). \tag{74}$$

Для любого стационарного потока с конечным параметром

$$\lambda_k = \lim_{\Delta \downarrow 0} \frac{\psi_k(\Delta)}{\Delta} = \varkappa\{P: \xi_0 > 0;\ \xi_{\overline{1, k-1}} = 0\}, \quad k > 1. \tag{75}$$

При $\lambda_1 = \infty$ *предел* $\lim\limits_{\Delta \downarrow 0} \frac{\psi_k(\Delta)}{\Delta}$ *может не существовать или существовать, но не быть равным* $\varkappa\{P: \xi_0 > 0;\ \xi_{\overline{1, k-1}} = 0\}$.

В п. 6.1 мы получим равенство (73), в п. 6.2—(75), в п.—(74). В п. 6.4 будет доказано последнее утверждение теоремы.

Заметим, что в силу (74) всякий стационарный поток с конечной интенсивностью принадлежит классу $\boldsymbol{X}_2$. Действительно, если $\mu < \infty$ то мера $\varkappa$ вполне конечна на $J_\varkappa$, т. е. по лемме 8, $\varkappa \in \boldsymbol{K}_2$.

6.1. Согласно (13)

$$\frac{\psi_1(\Delta)}{\Delta} = \frac{1}{\Delta} \int_R \left[\int_0^{\xi_0} \chi_{\{P: \xi_0 \leqslant \Delta\}}\, d\xi_0 \right] d\varkappa.$$

При $\Delta \downarrow 0$

$$\frac{1}{\Delta} \int_0^{\xi_0} \chi_{\{P: \xi_0 \leqslant \Delta\}}\, d\xi_0 \uparrow \chi_{\{P: \xi_0 > 0\}}.$$

Следовательно,

$$\lambda_1 = \lim_{\Delta \downarrow 0} \frac{\psi_1(\Delta)}{\Delta} = \varkappa\{P: \xi_0 > 0\}.$$

6.2. Согласно (13)

$$\frac{\psi_k(\Delta)}{\Delta}=\frac{1}{\Delta}\iint\limits_R\left[\int\limits_0^{\xi_0}\chi_{\{P:\xi_{0,\,k-1}\leqslant\Delta\}}d\xi_0\right]dx,$$

причем, очевидно,

$$\frac{1}{\Delta}\int\limits_0^{\xi_0}\chi_{\{P:\xi_{0,\,k-1}\leqslant\Delta\}}\,d\xi_0\leqslant\chi_{\{P:\xi_0>0\}},$$

$$\lim_{\Delta\downarrow 0}\frac{1}{\Delta}\int\limits_0^{\xi_0}\chi_{\{P:\xi_{0,\,k-1}\leqslant\Delta\}}\,d\xi_0=\chi_{\{P:\xi_0>0;\ \xi_{\overline{1,\,k-1}}=0\}}\leqslant\chi_{\{P:\xi_0>0\}}.$$

Если параметр потока конечен, то в силу (73)

$$\int\limits_R\chi_{\{P:\xi_0>0\}}\,d\varkappa<\infty.$$

Отсюда по теореме об ограниченной сходимости следует (75).

6.3. Получим равенство (74).
Докажем сперва, что для любого стационарного потока

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k=\varkappa(R). \tag{76}$$

При $\lambda_1=\infty$ это следует из (73).
Пусть $\lambda_1<\infty$. Тогда

$$\varkappa\{P:\xi_0=0;\ \xi_1>0\}=\varkappa\{P:\xi_1>0\}-\varkappa\{P:\xi_0>0;\ \xi_1>0\}=$$
$$=\varkappa\{P:\xi_0>0\}-\varkappa\{P:\xi_0>0;\ \xi_1>0\}=\varkappa\{P:\xi_0>0;\ \xi_1=0\};$$

$$\varkappa\{P:\xi_{\overline{0,\,1}}=0;\ \xi_2>0\}=\varkappa\{P:\xi_1=0;\ \xi_2>0\}-\varkappa\{P:\xi_0>0;\ \xi_1=0;\ \xi_2>0\}=$$
$$=\varkappa\{P:\xi_0=0;\ \xi_1>0\}-\varkappa\{P:\xi_0>0;\ \xi_1=0;\xi_2>0\}=$$
$$=\varkappa\{P:\xi_0>0;\ \xi_1=0\}-\varkappa\{P:\xi_0>0;\ \xi_1=0;\ \xi_2>0\}=\varkappa\{P:\xi_0>0;\ \xi_{\overline{1,\,2}}=0\},$$

и вообще при любом $k>0$

$$\varkappa\{P:\xi_{\overline{0,\,k-1}}=0;\ \xi_k>0\}=\varkappa\{P:\xi_0>0;\ \xi_{\overline{1,\,k}}=0\}.$$

Но

$$R=\sum_{k=0}^{\infty}\{P:\xi_{\overline{0,\,k-1}}=0;\ \xi_k>0\}.$$

Поэтому в силу (75)

$$\varkappa(R)=\sum_{k=0}^{\infty}\varkappa\{P:\xi_{\overline{0,\,k-1}}=0;\ \xi_k>0\}=\sum_{k=0}^{\infty}\varkappa\{P:\xi_0>0;\ \xi_{\overline{1,\,k}}=0\}=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k.$$

Перейдем к доказательству равенства

$$\mu=\varkappa(R). \tag{77}$$

Как легко проверить [1, стр. 14],

$$\mu\geqslant\lambda_1.$$

Если $\lambda_1 = \infty$, то в силу (73) $\varkappa(R) = \infty$, т. е. $\mu = \varkappa(R)$. Поэтому можно ограничиться случаем $\lambda_1 < \infty$. По лемме Фату в силу (72), (75), (76)

$$\mu \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{\Delta \downarrow 0} \frac{\psi_k(\Delta)}{\Delta} = \varkappa(R).$$

При $\varkappa(R) = \infty$ отсюда следует (77).

Пусть теперь $\varkappa(R) < \infty$.

Согласно (13)

$$\frac{1}{\Delta} \psi_k(\Delta) = \frac{1}{\Delta} \int\limits_R \left[\int\limits_0^{\xi_0} \chi_{\{P: \xi_{0,\, k-1} \leqslant \Delta\}} \, d\xi_0 \right] d\varkappa = \int\limits_R \varphi_{\Delta;\, k} \, d\varkappa,$$

где

$$\varphi_{\Delta;\, k} = \frac{1}{\Delta} \int\limits_0^{\xi_0} \chi_{\{P: \xi_{0,\, k-1} \leqslant \Delta\}} \, d\xi_0.$$

Поэтому в силу (72)

$$\mu = \int\limits_R \left(\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{\Delta;\, k} \right) d\varkappa = \lim_{m \to \infty} \int\limits_R \left(\sum_{k=1}^{m} \varphi_{\Delta;\, k} \right) d\varkappa = \lim_{m \to \infty} \int\limits_R \left(\sum_{k=1}^{m} \varphi_{\Delta;\, k} U_{-1}^{m-k} \right) d\varkappa. \quad (78)$$

Подсчитаем сумму $\sum\limits_{k=1}^{m} \varphi_{\Delta;\, k} U_{-1}^{m-k}$.

Очевидно,

$$\varphi_{\Delta;\, k} = \begin{cases} 0; & \xi_{1,\, k-1} > \Delta, \\ 1 - \frac{1}{\Delta} \xi_{1,\, k-1}; & \xi_{1,\, k-1} \leqslant \Delta,\ \xi_{0,\, k-1} > \Delta, \\ \frac{1}{\Delta} \xi_0; & \xi_{0,\, k-1} \leqslant \Delta; \end{cases}$$

$$\varphi_{\Delta;\, 1} U_{-1} + \varphi_{\Delta;\, 2} = \begin{cases} 1; & \xi_{0,\, 1} > \Delta, \\ \frac{1}{\Delta} \xi_{0,\, 1}; & \xi_{0,\, 1} \leqslant \Delta. \end{cases}$$

Применив индукцию, получим

$$\sum_{k=1}^{m} \varphi_{\Delta;\, k} U_{-1}^{m-k} = \begin{cases} 1; & \xi_{0,\, m-1} > \Delta, \\ \frac{1}{\Delta} \xi_{0,\, m-1}; & \xi_{0,\, m-1} \leqslant \Delta. \end{cases}$$

Но согласно (6) при $m \to \infty$

$$\{P: P \in R;\ \xi_{0,\, m-1}(P) > \Delta\} \uparrow R.$$

Следовательно, в силу (78)

$$\mu = \varkappa(R).$$

6.4. Зададим на Φ вероятностную меру q:

$$q\{P: 0 < \xi_0 = \xi_k < \xi,\ k > 0\} = F(\xi), \quad (79)$$

где $F(\xi)$ — некоторая функция распределения на полуоси $(0, \infty)$, для которой

$$\int_0^\infty \xi dF(\xi) < \infty.$$

Как легко проверить,

$$q \in \boldsymbol{B}, \ J_q = \Phi.$$

В силу последнего равенства

$$E_q\{\xi_0/J_q\} = \xi_0[q],$$

т. е. согласно (42), (48) для $B \in \Phi$

$$\varkappa(B) = \boldsymbol{P}_2^{-1} q(B) = \int_B \frac{dq}{\xi_0}, \tag{80}$$

$$p(B) = \boldsymbol{P}^{-1} q(B) = \int_R \frac{1}{\xi_0}\left[\int_0^{\xi_0} \chi_B \, d\xi_0\right] dq.$$

Отсюда с помощью (71) получаем:

$$\frac{\psi_1(\Delta)}{\Delta} = \int_\Delta^\infty \frac{F(\xi)}{\xi^2} d\xi, \ \lambda_1 = \int_0^\infty \frac{F(\xi)}{\xi^2} d\xi; \ \frac{\psi_2(\Delta)}{\Delta} = \int_{\frac{\Delta}{2}}^{\Delta} \frac{F(\xi)}{\xi^2} d\xi. \tag{81}$$

Положим при малых ξ

$$F(\xi) = \xi.$$

Тогда в силу (81)

$$\lambda_2 = \lim_{\Delta \downarrow 0} \frac{\psi_2(\Delta)}{\Delta} = \ln 2,$$

в то время как согласно (79), (80)

$$\varkappa\{P : \xi_0 > 0; \ \xi_1 = 0\} = 0.$$

Если же при малых ξ

$$F(\xi) = \begin{cases} \xi; \ 2^{-(2n+1)} < \xi \leqslant 2^{-2n}, \\ 2^{-2n}; \ 2^{-2n} < \xi \leqslant 2^{-(2n-1)}, \end{cases}$$

то

$$\frac{\psi_2(2^{-(2n-1)})}{2^{-(2n-1)}} = 2^{-2n} \int_{2^{-2n}}^{2^{-(2n-1)}} \frac{d\xi}{\xi^2} = \frac{1}{2}, \ \frac{\psi_2(2^{-2n})}{2^{-2n}} = \int_{2^{-(2n+1)}}^{2^{-2n}} \frac{d\xi}{\xi} = \ln 2,$$

т. е.

$$\overline{\lim_{\Delta \downarrow 0}} \frac{\psi_2(\Delta)}{\Delta} \neq \underline{\lim_{\Delta \downarrow 0}} \frac{\psi_2(\Delta)}{\Delta}.$$

§ 7. Потоки вызывающих моментов. Метрически транзитивные потоки. Потоки типа P

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые виды стационарных потоков.

Обозначим через $\hat{R}$ совокупность точек $P \in R$, у которых хотя бы одна координата ξ_k равна нулю.

Пользуясь терминологией А. Я. Хинчина [1], условимся называть потоками вызывающих моментов (потоками в. м.) стационарные потоки $X_p(t)$, удовлетворяющие условию

$$p(\hat{R}) = 0, \tag{82}$$

т. е. стационарные потоки, у которых с вероятностью 1 все скачки реализаций равны 1.

Поток $X_p(t) \in \boldsymbol{X}_2$ будем называть метрически транзитивным (м. т. поток), если его порождающая последовательность метрически транзитивна, т. е. если σ-кольцо $J_{\boldsymbol{P}p}$ состоит из одного элемента $R[\boldsymbol{P}p]$.

Стационарные потоки, для которых

$$\lambda_2 = 0,$$

называются ординарными (см. (71) и [1, стр. 8]).

Потоками типа P (потоками Пальма) называются стационарные ординарные потоки $X_p(t)$ со взаимно независимыми случайными величинами $\xi^{(p)}_{\overline{0,\ \infty}}$ (см. п. 1.3 и [1, стр 43]).

Теорема VI. *Для того, чтобы поток $X_p(t) \in \boldsymbol{X}_1$ $(X_p(t) \in \boldsymbol{X}_2)$ являлся потоком в. м., необходимо и достаточно, чтобы*

$$\boldsymbol{P}_1 p(\hat{R}) = 0 \; (\boldsymbol{P}p(\hat{R}) = 0). \tag{83}$$

Теорема VII. *Класс потоков типа P совпадает с классом ординарных потоков из $\boldsymbol{X}_2$, для которых члены порождающей последовательности взаимно независимы.*

Как следует из последней теоремы, потоки типа P метрически транзитивны.

В п. п. 7.1, 7.2 доказана теорема VI.

В п. 7.3 рассмотрена связь потоков в. м. с ординарными потоками.

В п. 7.4 установлены некоторые свойства м. т. потоков.

В п. 7.5 доказана теорема VII.

7.1. Пусть $p \in \boldsymbol{X}_1$, $\varkappa = \boldsymbol{P}_1 p$.

Лемма 9. *Для любого $a > 0$*

$$\varkappa\{P: \xi_0 > 0;\ \xi_1 > a\} = \lim_{\Delta \downarrow 0} \frac{1}{\Delta} p(\{x(t): x(\Delta) > 0;\ x(a+\Delta) = x(\Delta)\} \cap C_1(\Delta)),$$

где $C_1(\tau)$ — *множество функций $x(t) \in \Omega$, имеющих на интервале* $(0, \tau]$ *хотя бы один скачок, причем первый из этих скачков, считая от точки $t = \tau$ налево, равен 1.*

Доказательство. Зададим $b > a > 0$. Обозначим

$$C_\Delta = \{P: 0 < \xi_0 \leqslant b - a;\ b < \xi_{0,1} \leqslant b + \Delta\}.$$

В силу (13)

$$p(C_\Delta) = \int_R \left[\int_0^{\xi_0} \chi_{C_\Delta} d\xi_0 \right] d\varkappa. \tag{84}$$

Используя (34) и очевидные соотношения

$$\frac{1}{\Delta}\int_0^{\xi_0}\chi_{C_\Delta}\,d\xi_0 \leq \chi_{\{P:\xi_0>0;\ \xi_1>a\}};\quad \lim_{\Delta\downarrow 0}\frac{1}{\Delta}\int_0^{\xi_0}\chi_{C_\Delta}\,d\xi_0=\chi_{\{P:a<\xi_1\leq b;\ \xi_{0,\,1}>b\}}\leq$$

$$\leq\chi_{\{P:\xi_0>0;\ \xi_1>a\}},$$

из (84) получаем

$$\varkappa\{P:a<\xi_1\leq b;\ \xi_{0,\,1}>b\}=\lim_{\Delta\downarrow 0}\frac{1}{\Delta}p(C_\Delta). \tag{85}$$

Докажем, что

$$\varkappa\{P:\xi_0>0;\ a<\xi_1\leq b\}=\lim_{\Delta\downarrow 0}\frac{1}{\Delta}p(A_\Delta), \tag{86}$$

где

$$A_\Delta=\{x(t):x(b-a)>0;\ x(b)=x(b-a);\ x(b+\Delta b)>$$
$$>x(b)\}\cap C_1\,(b-a).$$

Зададим натуральное m и разобьем интервал (а, в] на m равных частей точками $\alpha^{(m)}_{\overline{0,\,m}}$.

Обозначим

$$B^{(m)}_{j_s}=\{P:\alpha^{(m)}_{j-1}<\xi_1\leq\alpha^{(m)}_j;\ \xi_{0,\,1}>\alpha^{(m)}_j\};$$

$$A^{(m)}_j=\left\{P:0<\xi_0\leq\frac{b-a}{m};\ \alpha^{(m)}_j<\xi_{0,\,1}\leq\alpha^{(m)}_j+\Delta\right\},\ j=\overline{1,\ m}.$$

Очевидно,

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{j=1}^m B^{(n)}_j=\{P:\xi_0>0;\ a<\xi_1\leq b\};\ \sum_{j=1}^m Q_{b-\alpha^{(m)}_j}A^{(m)}_j\subset A_\Delta.$$

Поэтому в силу (85)

$$\varkappa\{P:\xi_0>0;\ a<\xi_1\leq b\}=\lim_{m\to\infty}\sum_{j=1}^m\varkappa(B^{(m)}_j)=\lim_{m\to\infty}\lim_{\Delta\downarrow 0}\frac{1}{\Delta}\sum_{j=1}^m p(A^{(m)}_j)=$$

$$=\lim_{m\to\infty}\lim_{\Delta\downarrow 0}\frac{1}{\Delta}\sum_{j=1}^m p(Q_{b-\alpha^{(m)}_j}A^{(m)}_j)\leq\lim_{\Delta\downarrow 0}\frac{1}{\Delta}p(A_\Delta).$$

Для получения (86) остается доказать, что

$$\varkappa\{P:\xi_0>0;\ a<\xi_1\leq b\}\geq\lim_{\Delta\downarrow 0}\frac{1}{\Delta}p(A_\Delta).$$

Пусть $C_2(\tau;\ \varepsilon)$ — множество функций $x(t)\in\Omega$, определяемое следующими условиями: функция $x(t)$ имеет в интервале $(0,\tau]$ хотя бы два скачка; расстояние между первыми двумя скачками в $(0,\tau]$, считая от точки $t=\tau$ налево, меньше ε; первый из этих скачков равен 1.

Рассмотрим функцию

$$f_\varepsilon(a)=\lim_{\tau\to\infty}p(\{x(t):x(a+\tau)=x(\tau)\}\cap C_2(\tau;\ \varepsilon)).$$

Этот предел существует, так как вероятность

$p(\{x(t):x(a+\tau)=x(\tau)\}\cap C_2(\tau;\ \varepsilon))$—неубывающая функция τ.

Для любых a, $\Delta > 0$

$$f_\varepsilon(a) - f_\varepsilon(a+\Delta) = \lim_{\tau\to\infty} p(\{x(t): x(a+\tau) = x(\tau);\ x(a+\tau+\Delta) > x(a+\tau)\} \cap C_2(\tau;\ \varepsilon)) \geqslant 0. \tag{87}$$

Далее, для любого $\delta > 0$

$$f_\varepsilon(a+\delta) - f_\varepsilon(a+\delta+\Delta) = \lim_{\tau\to\infty} [p(\{x(t): x(a+\tau) = x(\tau);$$

$$x(a+\tau+\Delta) > x(a+\tau)\} \cap C_2(\tau;\ \varepsilon)) - p(\{x(t): x(a+\tau) =$$
$$= x(\tau-\delta);\ x(a+\tau+\Delta) > x(a+\tau)\} \cap C_2(\tau-\delta;\ \varepsilon))] \leqslant f_\varepsilon(a) - f_\varepsilon(a+\Delta).$$

Следовательно, функция $f_\varepsilon(a)$ удовлетворяет на интервале $(0, \infty)$ условиям п. 2.3, и поэтому согласно (16) для любого $a > 0$

$$\lim_{\Delta\downarrow 0} \frac{f_\varepsilon(a) - f_\varepsilon(a+\Delta)}{\Delta} \leqslant \frac{f_\varepsilon(+0)}{a}.$$

Это неравенство в силу (87) дает

$$\lim_{\Delta\downarrow 0} \frac{1}{\Delta} p(A_\Delta \cap C_2(b-a;\ \varepsilon)) \leqslant \lim_{\Delta\downarrow 0} \frac{f_\varepsilon(a) - f_\varepsilon(a+\Delta)}{\Delta} \leqslant \frac{1}{a} \lim_{\tau\to\infty} p(C_2(\tau;\ \varepsilon)).$$

Но

$$A_\Delta \subset A_\Delta \cap C_2\left(b-a,\ \frac{b-a}{m}\right) + \sum_{j=1}^{m} Q_{b-\alpha_j^{(m)}} A_j^{(m)}.$$

Поэтому

$$\varkappa\{P: \xi_0 > 0;\ a < \xi_1 \leqslant b\} = \lim_{m\to\infty} \lim_{\Delta\downarrow 0} \frac{1}{\Delta} \sum_{j=1}^{m} p(A_j^{(m)}) \geqslant$$

$$\geqslant \lim_{\Delta\downarrow 0} \frac{1}{\Delta} p(A_\Delta) - \frac{1}{a} \lim_{m\to\infty} \cdot \lim_{\tau\to\infty} p\left(C_2\left(\tau;\ \frac{b-a}{m}\right)\right).$$

Для получения (86) остается доказать, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{\tau\to\infty} p(C_2(\tau;\ \varepsilon)) = 0. \tag{88}$$

Зададим произвольное $\tau_0 > 0$. Для любого $\tau > \tau_0$

$$C_2(\tau;\ \varepsilon) = C_2(\tau_0;\ \varepsilon) + \{P: \xi_{0,1} > \tau_0\} \cap Q_{\tau_0} C_2(\tau-\tau_0;\ \varepsilon).$$

Поэтому

$$\lim_{\tau\to\infty} p(C_2(\tau;\ \varepsilon)) = p(C_2(\tau_0;\ \varepsilon)) + \lim_{\tau\to\infty} p(\{P: \xi_{0,1} > \tau_0\} \cap Q_{\tau_0} C_2(\tau-\tau_0;\ \varepsilon)) \leqslant$$
$$\leqslant p(C_2(\tau_0;\ \varepsilon)) + p\{P: \xi_{0,1} > \tau_0\}.$$

Следовательно,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{\tau\to\infty} p(C_2(\tau;\ \varepsilon)) \leqslant p\{P: \xi_{0,1} > \tau_0\},$$

так как $C_2(\tau_0;\ \varepsilon) \downarrow 0$ при $\varepsilon \to 0$. Отсюда при $\tau_0 \to \infty$ получаем (88).

Равенство (86) получено. Зададим теперь произвольное $\tau > 0$. Утверждение леммы непосредственно следует из (86) и легко проверяемых соотношений:

$$Q_\tau A_\Delta = \{x(t): x(b+\tau) = x(b+\tau-a);\ x(b+\tau+\Delta) >$$
$$> x(b+\tau)\} \cap C_1(b+\tau-a) \ominus \{x(t): x(b+\tau) = x(\tau);$$
$$x(b+\tau+\Delta) > x(b+\tau)\} \cap C_1(\tau);$$

$$p(\{x(t):x(b+\tau)=x(b+\tau-a);\ x(b+\tau+\Delta)>x(b+\tau)\}\cap C_1(b+\tau-a))=$$
$$=p(\{x(t):x(\Delta)>0;\ x(a+\Delta)=x(\Delta)\}\cap C_1(\Delta));$$

$$\lim_{b\to\infty}\lim_{\Delta\downarrow 0}\frac{1}{\Delta}p(\{x(t):x(b+\tau)=x(\tau);\ x(b+\tau+\Delta)>$$

$$>x(b+\tau)\}\cap C_1(\tau))\leqslant\lim_{b\to\infty}\lim_{\Delta\downarrow 0}\frac{1}{\Delta}p\{x(t):x(\Delta)>0;\ x(b+\Delta)=x(\Delta)\}=$$
$$=\lim_{b\to\infty}\varkappa\{P:\xi_0\geqslant b\}=0.$$

7.2. Перейдем к доказательству теоремы VI. Пусть $X_p(t)$ — поток в. м., $\varkappa=\boldsymbol{P}_1 p$. Согласно (12), (82)

$$\varkappa\{P:\xi_0>0;\ \xi_1=0\}=0. \qquad (89)$$

На основании леммы 9 и (82) для любого $a>0$

$$\varkappa\{P:\xi_0=0;\ \xi_1>a\}=\varkappa\{P:\xi_1>a\}-\varkappa\{P:\xi_0>0;\ \xi_1>a\}=$$

$$=\varkappa\{P:\xi_0>a\}-\varkappa\{P:\xi_0>0;\ \xi_1>a\}=\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}[p\{x(t):x(\Delta)>0;$$
$$x(a+\Delta)=x(\Delta)\}-p(\{x(t):x(\Delta)>0;\ x(a+\Delta)=x(\Delta)\}\cap C_1(\Delta))]=0$$

и, следовательно,

$$\varkappa\{P:\xi_0=0;\ \xi_1>0\}=0.$$

Отсюда в силу (89)

$$\varkappa\{P:\xi_{\overline{0,1}}=0;\ \xi_2>0\}=\varkappa\{P:\xi_1=0,\ \xi_2>0\}-\varkappa\{P:\ {}_0>0;\xi_1=0;\ \xi_2>0\}=$$
$$=\varkappa\{P:\xi_0=0;\ \xi_1>0\}-\varkappa\{P:\xi_0>0;\ \xi_1=0;\ \xi_2>0\}=0,$$

и вообще для любого $k>0$

$$\varkappa\{P:\xi_{\overline{0,k-1}}=0;\ \xi_k>0\}=0.$$

Поэтому

$$\varkappa\{P:\xi_0=0\}=\sum_{k=1}^{\infty}\varkappa\{P:\xi_{\overline{0,k-1}}=0;\ \xi_k>0\}=0,$$

т. е., в силу инвариантности меры $\varkappa$ на Φ относительно U

$$\varkappa(\hat{R})=0.$$

Пусть теперь $p\in\boldsymbol{X}_1$, $\varkappa(\hat{R})=0$. Тогда для любого $k>0$ согласно (13)

$$p\{P:\xi_k=0\}=\int\limits_{\{P:\xi_k=0\}}\xi_0\,d\varkappa=0,$$

т. е.

$$p(\hat{R})\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}p\{P:\xi_k=0\}=0.$$

Наконец, для потоков $X_p(t)\in\boldsymbol{X}_2$ утверждение теоремы следует из эквивалентности мер $\varkappa$ и $q=\boldsymbol{P}_2\varkappa$.

7.3. Остановимся на связи потоков в. м. с ординарными потоками. Как легко доказать, всякий ординарный поток является потоком в. м.

Действительно, зададим k, $T>0$ и разобьем интервал $(0, T]$ на k равных частей. Обозначим через $A(T, k)$ совокупность функций $x(t) \in \Omega$, для которых приращение хотя бы на одном из интервалов $\left(\frac{i-1}{k}T, \frac{i}{k}T\right]$, $i = \overline{1, k}$, больше 1; через $B(T)$ — совокупность функций $x(t) \in \Omega$, имеющих в интервале $(0, T]$ хотя бы один скачок больше 1.

В силу ординарности потока

$$p(B(T)) \leq \lim_{k\to\infty} p(A(T, k)) \leq \lim_{k\to\infty} k\psi_2\left(\frac{T}{k}\right) = T \lim_{k\to\infty} \frac{\psi_2\left(\frac{T}{k}\right)}{\frac{T}{k}} = 0,$$

откуда при $T \to \infty$ и следует наше утверждение.

Обратное утверждение, вообще говоря, не верно. Именно, при $\lambda_1 = \infty$ поток в. м. может быть как ординарным, так и неординарным. Для доказательства можно воспользоваться конструкцией п. 6.4, положив при малых ξ $F(\xi) = \xi$ и $F(\xi) = \int\limits_0^{\xi} \frac{d\xi}{\ln\frac{1}{\xi}}$.

Однако, всякий поток в. м. с конечным параметром ординарен. Действительно, для такого потока согласно (75), (89)

$$\lambda_2 = \varkappa\{P : \xi_0 > 0;\ \xi_1 = 0\} = 0.$$

7.4. В этом пункте мы установим некоторые свойства м. т. потоков.

1) Всякий м. т. поток имеет конечную интенсивность.

Действительно, в силу включения $X_p(t) \in \boldsymbol{X}_2$ мера $\varkappa$ вполне σ-конечна на $J_\varkappa$ (§ 3, лемма 8), причем σ-кольцо $J_\varkappa$ состоит из единственного элемента R. Поэтому

$$\mu = \varkappa(R) < \infty.$$

2. Пусть $X_p(t)$ — м. т. поток, $\varkappa = \boldsymbol{P}_1 p$, $q = \boldsymbol{P} p$. Тогда в силу (42), (46), (48)

$$\int\limits_R \xi_0\, dq = E_q\{\xi_0/J_q\} = E_\varkappa\{\xi_0/J_\varkappa\} = \frac{1}{\mu}; \tag{90}$$

для $B \in \Phi$

$$\varkappa(B) = \mu q(B),\ p(B) = \mu \int\limits_R \left[\int\limits_0^{\xi_0} \chi_B\, d\xi_0\right] dq. \tag{91}$$

3) Как следует из (55), (59), для почти всех $P \in R$ по мере q

$$p(B) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_{E_p} d\Delta,$$

где $B \in \tilde{\Phi}_x$, E_P — множество значений $\Delta \in [0, T)$, для которых $P \in Q_\Delta B$.

Таким образом, для м. т. потока $X_p(t)$ мера p может быть восстановлена по одной реализации последовательности $\{\xi^{(q)}_{\overline{0, \infty}}\}$, порождающей этот поток (за исключением множества реализаций меры 0).

4) Если м. т. поток $X_p(t) \in \boldsymbol{X}_3$, то это простейший поток.

Действительно, согласно (90), (62)

$$E_p\{\xi_0/J_p\}=\frac{1}{\mu},$$

и, следовательно, в обозначениях (61),

$$F(\lambda)=\begin{cases}0; & \lambda<\mu,\\ 1; & \lambda\geqslant\mu.\end{cases}$$

7.5. Перейдем к доказательству теоремы VII.

Пусть $\boldsymbol{P}_1 p=\varkappa$, $\boldsymbol{P}p=q$. Докажем сначала, что для любого стационарного потока $X_p(t)$ из взаимной независимости случайных величин $\xi^{(p)}_{\overline{0,\infty}}$ следует конечность параметра λ_1.

В силу очевидных неравенств

$$\sum_{k=1}^{\infty}\varkappa\{P:\xi_0>0;\ \xi_k>0\}\geqslant\varkappa\{P:\xi_0>0\}>0$$

существуют такие k, Δ, что

$$\varkappa\{P:\xi_0>0;\ \xi_k>\Delta\}>0.$$

При этом согласно (13)

$$p\{P:\xi_k>\Delta\}=\int\limits_{\{P:\xi_k>\Delta\}}\xi_0\,d\varkappa>0.$$

Отсюда, используя (12) и взаимную независимость $\xi^{(p)}_{\overline{0,\infty}}$, получаем:

$$\varkappa\{P:\xi_0>0;\ \xi_k>\Delta\}=\lim_{\delta\downarrow 0}\varkappa\{P:\xi_0>\delta;\ \xi_k>\Delta\}=$$

$$=-\lim_{\delta\uparrow 0}p'_r\{P:\xi_0>\delta\}\,p\{P:\xi_k>\Delta\}=\varkappa\{P:\xi_0>0\}\,p\{P:\xi_k>\Delta\}=$$

$$=\lambda_1 p\{P:\xi_k>\Delta\}, \tag{92}$$

т. е. в силу (31)

$$\lambda_1=\frac{\varkappa\{P:\xi_0>0;\ \xi_k>\Delta\}}{p\{P:\xi_k>\Delta\}}\leqslant\frac{\varkappa\{P:\xi_k>\Delta\}}{p\{P:\xi_k>\Delta\}}=\frac{\varkappa\{P:\xi_0>\Delta\}}{p\{P:\xi_k>\Delta\}}<\infty. \tag{93}$$

Пусть теперь $X_p(t)$ — поток типа P.

По теореме В. С. Королюка [1, стр. 39]

$$\mu=\lambda_1.$$

Следовательно, в силу (74) и леммы 8 (§ 3)

$$X_p(t)\in\boldsymbol{X}_2.$$

Докажем, что случайные величины $\xi^{(q)}_{\overline{0,\infty}}$ взаимно независимы. Введем на Φ вероятностную меру

$$\hat{q}=\frac{1}{\lambda_1}\varkappa=\frac{1}{\mu}\varkappa.$$

Зададим n, $a_i\geqslant 0$, $i=\overline{0,n}$ и обозначим

$$A=\{P:\xi_0>a_0;\ \xi_i\geqslant a_i,\ i=\overline{1,n}\}. \tag{94}$$

Согласно (12)

$$q(A) = -\frac{1}{\lambda_1} p_r'(S_\alpha A)\big|_{\alpha=0} = -\frac{1}{\lambda_1} p_r'(S_\alpha\{P:\xi_0 > a_0\})\big|_{\alpha=0} \prod_{i=1}^{n} p\{P:\xi_i \geqslant a_i\};$$

$$\hat{q}\{P:\xi_0 > a_0\} = -\frac{1}{\lambda_1} p_r'(S_\alpha\{P:\xi_0 > a_0\})\big|_{\alpha=0}.$$

Но в силу п. 7.3 и (83)

$$\hat{q}\{P:\xi_i \geqslant a_i\} = \hat{q}\{P:\xi_0 > 0;\ \xi_i \geqslant a_i\} = p\{P:\xi_i \geqslant a_i\}.$$

Поэтому

$$\hat{q}(A) = \hat{q}\{P:\xi_0 > a_0\} \prod_{i=1}^{n} \hat{q}\{P:\xi_i \geqslant a_i\},$$

что означает взаимную независимость случайных величин $\xi^{(\hat{q})}_{\overline{0,\infty}}$.

В силу инвариантности меры $\hat{q}$ на Ф относительно U это влечет за собой метрическую транзитивность последовательности $\{\xi^{(\hat{q})}_{\overline{0,\infty}}\}$, а значит, в силу соотношения

$$\hat{q} \sim \varkappa \sim q,$$

и последовательности $\{\xi^{(q)}_{\overline{0,\infty}}\}$.

Таким образом, $X_p(t)$ — м. т. поток, т. е. согласно (91) $q = \hat{q}$, откуда и следует взаимная независимость величин $\xi^{(q)}_{\overline{0,\infty}}$. Для окончания доказательства теоремы VII достаточно доказать, что для всякого потока $X_p(t) \in \boldsymbol{X}_2$ из взаимной независимости случайных величин $\xi^{(q)}_{\overline{0,\infty}}$ следует взаимная независимость $\xi^{(p)}_{\overline{0,\infty}}$.

Как указывалось выше, если случайные величины $\xi^{(q)}_{\overline{0,\infty}}$ взаимно независимы, то в силу инвариантности меры q относительно U на Ф последовательность $\{\xi^{(q)}_{\overline{0,\infty}}\}$ метрически транзитивна.

Поэтому согласно (91) в обозначениях (94)

$$p(A) = \mu \int_R \left[\int_0^{\xi_0} \chi_A \, d\xi_0\right] dq = \mu \int_{\{P:\xi_0 > a_0\}} (\xi_0 - a_0)\, dq \prod_{i=1}^{n} q\{P:\xi_i \geqslant a_i\},$$

$$p\}P:\xi_0 > a_0\} = \mu \int_{\{P:\xi_0 > a_0\}} (\xi_0 - a_0)\, dq.$$

Но в силу (90)

$$p\{P:\xi_i \geqslant a_i\} = \left(\mu \int_R \xi_0 \, dq\right) q\{P:\xi_i \geqslant a_i\} = q\{P:\xi_i \geqslant a_i\}.$$

Следовательно,

$$p(A) = p\{P:\xi_0 > a_0\} \prod_{i=1}^{n} p\{P:\xi_i \geqslant a_i\},$$

откуда и следует взаимная независимость случайных величин $\xi^{(p)}_{\overline{0,\infty}}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Я. Хинчин. Математические методы теории массового обслуживания. Труды Матем. института им. В. А. Стеклова, вып. XLIX, 1955.
2. И. М. Сливняк. Некоторые свойства стационарных потоков однородных случайных событий. «Теория вероятностей и ее применения», VII, 3 (1962), 347—352; IX, 1 (1964), 190.
3. П. Халмош. Теория меры. ИЛ, 1953.
4. А. Н. Колмогоров. Основные понятия теории вероятностей, ОНТИ, 1936.
5. Э. Хопф. Эргодическая теория. «Усп. матем. наук», IV, вып. 1 (1949), 113—182.
6. Г. Г. Харди, Д. Е. Литтльвуд, Г. Полиа. Неравенства, ГИИЛ, 1948.