УДК 517.5

И. В. КОВАЛИШИНА

ТЕОРИЯ КРАТНОЙ j-ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТРИЦЫ-ФУНКЦИИ С ПОЛЮСОМ НА ГРАНИЦЕ ЕДИНИЧНОГО КРУГА

Рассматривается объект J-теории аналитических матриц-функций В. П. Потапова — рациональная j-растягивающая $\left(j=\begin{bmatrix}-I & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}\right)$ в единичном круге $(\omega(\zeta)j\omega^*(\zeta)-j\geqslant 0,\ |\zeta|<1)$, j-унитарная на его границе $(\omega(\zeta)j\omega^*(\zeta)=j,\ |\zeta|=1)$ матрица-функция $\omega(\zeta)$, имеющая единственный полюс кратности n в граничной точке $\zeta_0(|\zeta_0|=1)$.

Теория такого объекта включает следующие вопросы: описание структуры $\omega(\zeta)$, отщепление $\omega(\zeta)$ от произвольной j-растягивающей матрицы-функции с полюсом соответствующей кратности в точке ζ_0, параметризация матрицы-функции $\omega(\zeta)$ полного ранга, разложение на двучленные j-элементарные множители.

Заметим, что кратные J-элементарные матрицы-функции с полюсом внутри области исследованы автором в работах [1, 2]. Рассматривался и граничный случай, а именно: изучалась теория кратной J_2-растягивающей $\left(J_2=\begin{bmatrix}0 & iI\\ -iI & 0\end{bmatrix}\right)$ в верхней полуплоскости $(\operatorname{Im} z>0)$, J_2-унитарной на вещественной оси $(\operatorname{Im} z=0)$ матрицы-функции $A(z)$ с полюсом в точке $z_0=\infty$ [2]. Рассмотрение такого специального случая было подсказано исследованием методами J-теории степенной проблемы моментов, с которой органически связана $A(z)$.

Конечно, все утверждения для матрицы-функции $\omega(\zeta)$ можно было бы получить из соответствующих фактов для $A(z)$, если перейти с помощью дробно-линейного преобразования из верхней полуплоскости $(\operatorname{Im} z>0)$ в единичный круг $(|\zeta|<1)$ и с помощью преобразования Кэли — от J_2-растягивающих матриц-функций $A(z)$ к j-растягивающим матрицам-функциям $\omega(\zeta)$. Однако такой переход обычно приводит к перегруппировке определяющих параметров и это затрудняет описание объекта с помощью этих параметров.

Поэтому целесообразно рассмотреть $\omega(\zeta)$ как самостоятельный объект j-теории, а затем связать с ним кратную граничную интерполяционную задачу типа граничной проблемы Шура.

§ 1. Неравенство отщепления. Сопутствующее тождество. Структура j-элементарной матрицы-функции $\omega(\zeta)$. Отщепление. 1.1°. Неравенство отщепления. Сопутствующее тождество.

Рассмотрим сначала ограничения, налагаемые на произвольную j-растягивающую матрицу-функцию $W(\zeta)$ поведением в окрестности данного полюса $\zeta_0(|\zeta_0|=1)$, а именно — коэффициентами ее разложения в ряд Лорана.

Теорема 1.1. *j-растягивающая в $|\zeta|<1$ матрица-функция $W(\zeta)$, разлагающаяся в окрестности точки $\zeta_0(|\zeta_0|=1)$ в ряд Лорана*

$$W(\zeta)=\frac{C_{-n}}{(\zeta-\zeta_0)^n}+\cdots+\frac{C_{-1}}{\zeta-\zeta_0}+C_0+C_1(\zeta-\zeta_0)+\\ +\cdots+C_{n-1}(\zeta-\zeta_0)^{n-1}+\cdots, \tag{1}$$

j-унитарная в окрестности полюса на единичной окружности $|\zeta_0| = 1$, удовлетворяет неравенству

$$\begin{pmatrix} A & -A_1\overline{b_n(\zeta)} \\ -\overline{b_n^*(\zeta)}\,A_1^* & \dfrac{W(\zeta)\,jW^*(\zeta)-j}{1-\zeta\bar{\zeta}} \end{pmatrix} \geqslant 0, \quad (O)$$

где $A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$;

$$A_1 = \begin{pmatrix} C_{-1}^* & C_{-2}^* & \cdots & C_{-n}^* \\ C_{-2}^* & C_{-3}^* & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ C_{-n}^* & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}; \tag{2}$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{vmatrix} -\zeta_0 j & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \zeta_0^2 j & \zeta_0^3 j & 0 & \cdots & 0 \\ -\zeta_0^3 j & -2\zeta_0^4 j & -\zeta_0^5 j & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (-1)^n\zeta_0^n j & (-1)^n C_{n-1}'\zeta_0^{n+1} j & (-1)^n C_{n-1}^2\zeta_0^{n+2} j & \cdots & (-1)^n\zeta_0^{2n-1} j \end{vmatrix}; \tag{3}$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} C_0 C_{-1} & \cdots & C_{-n+1} \\ C_1 C_0 & \cdots & C_{-n+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ C_{n-1} C_{n-2} & \cdots & C_0 \end{pmatrix} \ (4), \qquad b_n(\zeta) = \begin{pmatrix} \dfrac{I}{\zeta-\zeta_0} \\ \cdots \\ \dfrac{I}{(\zeta-\zeta_0)^n} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Доказательство. Для $n+1$ точек $z_1, z_2, \ldots, z_n, \zeta$ из окрестности точки ζ_0 запишем неравенство Шварца — Пика для матрицы-функции $W(\zeta)$:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{W^*(z_k)\,jW(z_e)-j}{1-\bar{z}_k z_e} & \dfrac{W^*(z_k)-W^*(\zeta)}{\bar{z}_k-\bar{\zeta}} \\ \dfrac{W(z_e)-W(\zeta)}{z_e-\zeta} & \dfrac{W(\zeta)\,jW^*(\zeta)-j}{1-\zeta\bar{\zeta}} \end{pmatrix} \geqslant O. \tag{6}$$

Умножим (6) справа на матрицу **ST**:

$$S = \begin{pmatrix} (z_1-\zeta_0)^n I & & & \\ & (z_2-\zeta_0)^n I & & \\ & & \ddots & \\ & & & (z_n-\zeta_0)^n I & \\ & & & & I \end{pmatrix},$$

$$T = \left|\begin{array}{cccc|c} \dfrac{I}{\varphi_n'(z_1)} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \dfrac{I}{\varphi_n'(z_2)} & \dfrac{I}{\varphi_{n-1}'(z_2)} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot \\ \dfrac{I}{\varphi_n'(z_n)} & \dfrac{I}{\varphi_{n-1}'(z_n)} & \cdots & \dfrac{I}{\varphi_1'(z_n)} & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & I \end{array}\right| = \begin{pmatrix} T_1 & O \\ 0 & I \end{pmatrix}, \tag{7}$$

$\varphi_{n-k+1}(z) = (z - z_k) \ldots (z - z_n)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, слева — на T^*S^* и перейдем к пределу при $z_k \to \zeta_0$ (по некасательным траекториям).

Элементы предельной матрицы вычисляются по формулам [1]:

$$A_{kl} = \lim_{z_p, z_q \to \zeta_0} \sum_{p=k}^{n} \sum_{q=l}^{n} \frac{1}{\varphi'_{n-k+1}(z_p)} \frac{\tilde{W}^*(z_p) j \tilde{W}(z_q) - (\bar{z}_p - \bar{\zeta}_0)^n (z_q - \zeta_0)^n j}{1 - \bar{z}_p z_q} \times$$

$$\times \frac{1}{\varphi'_{n-l+1}(z_q)} = \frac{1}{(n-k)!\,(n-l)!} \frac{\partial^{2n-k-l}}{\partial \xi^{n-k} \partial \eta^{n-l}} \Phi(\xi, \eta) \Big|_{\substack{\xi = \bar{\zeta}_0 \\ \eta = \zeta_0}},$$

$$(l, k = 1, 2, \ldots, n),$$

где для сокращения записи через $\tilde{W}(\zeta)$ обозначена матрица-функция $\tilde{W}(\zeta) = (\zeta - \zeta_0)^n W(\zeta) = C_{-n} + C_{-n+1}(\zeta - \zeta_0) + \cdots + C_{n-1}(\zeta - \zeta_0)^{2n-1} + + \cdots$, а

$$\Phi(\xi, \eta) = \frac{\tilde{W}^*(\bar{\xi}) j \tilde{W}(\eta) - (\xi - \bar{\zeta}_0)^n (\eta - \zeta_0)^n j}{1 - \xi\eta}.$$

Выполнив вычисления, связанные с дифференцированием $\Phi(\xi, \eta)$ и, учитывая при преобразовании получаемых выражений соотношения, вытекающие из тождества $jW^*\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right) jW(\zeta) \equiv I$:

$$\left\| \begin{matrix} \zeta_0^n C_{-n}^* j & \zeta_0^{n-1} C_{-n+1}^* j & \cdots & \zeta_0 C_{-1}^* j \\ 0 & \zeta_0^n C_{-n}^* j & \cdots & \zeta_0^2 C_{-2}^* j \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & \zeta_0^{n-2} C_{-n+2}^* j \\ 0 & 0 & \cdots & \zeta_0^{n-1} C_{-n+1}^* j \\ 0 & 0 & \cdots & \zeta_0^n C_{-n}^* j \end{matrix} \right\| \times$$

$$\times \left\| \begin{matrix} (-1)^{n-1} \bar{\zeta}_0^{n-1} (C_{-n+1} + C'_{n-2} \zeta_0 C_{-n+2} + \cdots + \zeta_0^{n-2} C_{-1}), \\ (-1)^{n-2} \bar{\zeta}_0^{n-1} (C_{-n+1} + C'_{n-3} \zeta_0 C_{-n+2} + \cdots + \zeta_0^{n-3} C_{-2}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \bar{\zeta}_0^{n-1} (C_{-n+1} + \zeta_0 C_{-n+2}) \\ -\bar{\zeta}_0^{n-1} C_{-n+1} \\ \bar{\zeta}_0^n C_{-n} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\|, \tag{8}$$

придем к записи блока $\| A_{kl} \|_{k,\, l=1}^{n}$ в виде произведения матриц $A_1 \times \times A_2 \cdot A_3$, определенных формулами (2), (3), (4).

Для вычисления элементов $A_{k,\, n+1}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ пользуемся формулой

$$A_{k,\, n+1} = \lim_{z_p \to \zeta_0} \sum_{p=k}^{n} \frac{[W^*(z_p) - W^*(\zeta)] (\bar{z}_p - \bar{\zeta}_0)^n}{\bar{z}_p - \bar{\zeta}} =$$

$$= \frac{1}{(n-k)!} \left\{ \frac{\partial^{n-k}}{\partial \varepsilon^{n-k}} F_1(\xi, \bar{\zeta}) \Big|_{\xi = \bar{\zeta}_0} - W^*(\zeta) \frac{\partial^{n-k}}{\partial \xi^{n-k}} F_2(\xi, \bar{\zeta}) \Big|_{\xi = \bar{\zeta}_0} \right\},$$

где

$$F_1(\xi, \bar\zeta) = \frac{W^*(\bar\xi)(\xi - \bar\zeta_0)^n}{\xi - \bar\zeta}, \quad F_2(\xi, \bar\zeta) = \frac{(\xi - \bar\zeta_0)^n}{\xi - \bar\zeta}.$$

Подсчет производных $F_1(\xi, \bar\zeta)$ и $F_2(\xi, \bar\zeta)$ приводит к выражению

$$A_{k,\, n+1} = -\sum_{p=k}^{n} \frac{C^*_{-p}}{(\bar\zeta - \bar\zeta_0)^{p-k+1}}, \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

что и завершает доказательство теоремы 1.1.

Сопутствующее тождество для блока $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_1 \cdot \boldsymbol{A}_2 \cdot \boldsymbol{A}_3$ неравенства (0) может быть получено из неравенства

$$\left(\frac{W^*(z_k)\, jW(z_e) - j}{1 - \bar z_k z_e}\right) \geqslant 0$$

путем преобразования последнего с помощью матрицы $\boldsymbol{T}_1$ (7) и последующего перехода к пределу при $z_k \to \zeta_0$. Оно имеет вид

$$\begin{pmatrix} C^*_{-1} \\ C^*_{-2} \\ \cdots \\ C^*_{-n} \end{pmatrix} j\,(C_{-1} C_{-2}, \ \ldots, \ C_{-n}) = \boldsymbol{A} R_1 + R_1^* \boldsymbol{A} - R_1^* \boldsymbol{A} R_1, \tag{9}$$

где

$$R_1 = \begin{bmatrix} \frac{I}{(1-\zeta_0)} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{I}{(1-\zeta_0)^2} & \frac{I}{(1-\zeta_0)} & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{I}{(1-\zeta_0)^n} & \frac{I}{(1-\zeta_0)^{n-1}} & \cdots & \frac{I}{(1-\zeta_0)} \end{bmatrix} =$$

$$= \left(I_n - \begin{pmatrix} \zeta_0 I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ I & \zeta_0 I & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & I & \zeta_0 I \end{pmatrix} \right)^{-1}.$$

Соотношение (O) будем называть *основным матричным неравенством отщепления.* Оно играет существенную роль как в определении структуры j-элементарной матрицы-функции $\omega(\zeta)$, так и в отщеплении $\omega(\zeta)$ от $W(\zeta)$.

2.1°. Структура кратной j-элементарной матрицы-функции определяется следующей теоремой:

Теорема 2.1. *Матрица-функция*

$$\omega(\zeta) = B_0 + \frac{B_{-1}}{\zeta - \zeta_0} + \cdots + \frac{B_{-n}}{(\zeta - \zeta_0)^n} \left(\omega(1) = I; \sum_{k=0}^{n} \frac{B_{-k}}{(1-\zeta_0)^k} = I\right)$$

является j-элементарной в том и только в том случае, когда выполнены следующие два условия: **(A)** $A_\omega = A_1^{(\omega)} \cdot A_2 \cdot A_3^{(\omega)} \geqslant 0$,

$$A_1^{(\omega)} = \begin{pmatrix} B_{-1}^* & B_{-2}^* & \cdots & B_{-n}^* \\ B_{-2}^* & B_{-3}^* & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ B_{-n}^* & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3^{(\omega)} = \begin{pmatrix} B_0 & B_{-1} & \cdots & B_{-n+1} \\ 0 & B_0 & \cdots & B_{-n+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & B_0 \end{pmatrix},$$

а матрица A_2 *определяется формулой* (3),

$$\textbf{(B)}\ j \left[\frac{I}{1-\zeta_0}, \ldots, \frac{I}{(1-\zeta_0)^n}\right] A_1^{(\omega)*} = \left[\frac{I}{1-\bar{\zeta}_0}, \ldots, \frac{I}{(1-\bar{\zeta}_0)^n}\right] A_\omega.$$

При этом j-форма $\omega(\zeta)$ *представляется в виде*

$$\textbf{(C)}\ \frac{\omega^*(\zeta)\, j\omega(\zeta) - j}{1-\bar{\zeta}\zeta} = b_n^*(\zeta)\, A_\omega b_n(\zeta).$$

Необходимость условий **(A)** следует из неотрицательности левого углового блока неравенства отщепления (*O*), записанного для *j*-растягивающей матрицы-функции $\omega(\zeta)$.

Условия **(B)** вытекают из тождества $\omega^{-1}(\zeta)\,\omega(\zeta) \equiv I$, в котором $\omega^{-1}(\zeta)$ в силу *j*-унитарности $\omega(\zeta)$ на границе вычисляется по формуле $\omega^{-1}(\zeta) = j\omega^*\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right) j$.

Для доказательства достаточности условий **(A)** и **(B)** вычисляем *j*-форму $\omega^*(\zeta)\, j\omega(\zeta) - j$ и преобразуем ее с помощью условий **(B)** и сопутствующего тождества (8), переписанного для матрицы A_ω. Несложные выкладки приводят нас к равенству $\omega^*(\zeta)\, j\omega(\zeta) - j = (1-\bar{\zeta}\zeta)\, b_n^*(\zeta)\, A_\omega b_n(\zeta)$, из которого усматривается *j*-растягиваемость $\omega(\zeta)$ в единичном круге $\omega^*(\zeta)\, j\omega(\zeta) - j \geqslant 0$ $(1-\bar{\zeta}\zeta > 0)$ и *j*-унитарность $\omega(\zeta)$ на его границе $\omega^*(\zeta)\, j\omega(\zeta) - j = 0$, $(1-\bar{\zeta}\zeta = 0)$, т. е. *j*-элементарность $\omega(\zeta)$.

3.1°. Здесь мы сформулируем теорему об отщеплении $\omega(\zeta)$ от *j*-растягивающей матрицы-функции $\omega(\zeta)$.

Теорема 3.1. *Пусть j-растягивающая матрица-функция* $W(\zeta)$, *j-унитарная в окрестности точки* ζ_0 $(|\zeta_0| = 1)$ *на единичной окружности, имеет в точке* ζ_0 *полюс кратности n со следующим Лорановым разложением:*

$$W(\zeta) = \frac{C_{-n}}{(\zeta-\zeta_0)^n} + \cdots + \frac{C_{-1}}{\zeta-\zeta_0} + C_0 + C_1(\zeta-\zeta_0) + \\ + \cdots + C_{n-1}(\zeta-\zeta_0)^{n-1} + \cdots$$

и пусть Q — решение уравнения $AQ = -A_1$, *где* $A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$, A_1, A_2, A_3 *определены по формулам* (2) — (4), *а матрицы* B_{-1}, B_{-2}, $\ldots$, B_{-n} *определены по формулам*

$$\begin{bmatrix} B_{-1} & B_{-2} & \cdots & B_{-n} \\ B_{-2} & B_{-3} & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ B_{-n} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} b_n(1) = -A_1^* Q b_n(1)\, j. \tag{10}$$

Тогда

1) *матрица-функция* $w_0(\zeta) = B_0 + \frac{B_{-1}}{\zeta - \zeta_0} + \cdots + \frac{B_{-n}}{(\zeta-\zeta_0)^n}$ $(w_0(1) = I)$ *является j-элементарной;*

2) $w_0(\zeta)$ *отщепляется от* $W(\zeta)$ *слева:* $W(\zeta) = w_0(\zeta) W_1(\zeta)$;

3) *частное* $W_1(\zeta)$ *является голоморфной в точке* ζ_0 *матрицей-функцией;*

4) *порядок полюса у обратной матрицы* $W_1^{-1}(\zeta)$ *в точке* ζ_0 *не повышается.*

Доказательство теоремы 3.1 приведено в [3].

§ 2. *j*-элементарные матрицы-функции полного ранга и их параметризация. Среди j-элементарных матриц-функций $\omega(\zeta)$ особое место занимают матрицы-функции *полного ранга*. Именно такие j-элементарные матрицы-функции теснейшим образом связаны с общим решением усеченных задач типа проблем Неванлинны — Пика, моментов и др., исследуемых методами j-теории В. П. Потапова [2, 4, 5].

Определение матрицы-функции полного ранга вытекает из общего факта, известного для произвольной j-растягивающей матрицы-функции $W(\zeta)$: для любой j-растягивающей матрицы-функции $W(\zeta)$ $\left(j = \begin{bmatrix} -I_q & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix}\right)$ ранг старшего коэффициента лоранового разложения в окрестности некоторого полюса ζ_0:

$$W(\zeta) = \frac{C_{-n}}{(\zeta-\zeta_0)^n} + \cdots \quad (|\zeta_0| = 1)$$

не превосходит $\min(p, q)$: $\operatorname{rang} C_{-n} \leqslant \min(p, q)$.

Из него, в частности, следует, что ранг старшего коэффициента j-элементарной матрицы-функции $\omega(\zeta)$ при $j = \begin{pmatrix} -I_m & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix}$ не превосходит m: $\operatorname{rang} B_{-n} \leqslant m$.

Кратную j-элементарную матрицу-функцию

$$\omega(\zeta) = B_0 + \frac{B_{-1}}{\zeta-\zeta_0} + \cdots + \frac{B_{-n}}{(\zeta-\zeta_0)^n} \quad (\omega(1) = I, \ |\zeta_0| = 1)$$

будем называть *матрицей-функцией полного ранга*, если ее старший коэффициент B_{-n} имеет максимально возможный ранг m:

$$\operatorname{rang} B_{-n} = m.$$

Для таких объектов j-теории справедлива следующая

Теорема 1.2. *(о параметризации). Для каждой j-элементарной матрицы-функции*

$$\omega(\zeta) = \sum_{k=0}^{n} \frac{B_{-k}}{(\zeta-\zeta_0)^k}, \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{B_{-k}}{(1-\zeta_0)^k} = I, \ |\zeta_0| = 1$$

полного ранга однозначно определяются «параметры» — квадратные матрицы m-го порядка $s_0, s_1, \ldots, s_{2n-1}$, удовлетворяющие условиям $I - s_0 s_0^* = 0$,

$$\boldsymbol{S} = \widehat{\boldsymbol{S}} \cdot \boldsymbol{S}_0 \cdot \widehat{\widehat{\boldsymbol{S}}} > 0,$$

гд

$$\widehat{\boldsymbol{S}} = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & \cdots & s_n \\ s_2 & s_3 & \cdots & s_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n-1} \end{bmatrix}; \quad \widehat{\widehat{\boldsymbol{S}}} = \begin{bmatrix} s_0^* & s_1^* & \cdots & s_{n-1}^* \\ 0 & s_0^* & \cdots & s_{n-2}^* \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & s_0^* \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{S}_0 = \begin{bmatrix} \zeta_0 I & -\zeta_0^2 I & \zeta_0^3 I & \cdots & (-1)^{n-1}\zeta_0^n I \\ 0 & -\zeta_0^3 I & 2\zeta_0^4 I & \cdots & (-1)^{n-1} C'_{n-1}\zeta_0^{n+1} I \\ 0 & 0 & \zeta_0^5 I & \cdots & (-1)^{n-1} C^2_{n-1}\zeta_0^{n+2} I \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (-1)^{n+1}\zeta_0^{2n-1} I \end{bmatrix},$$

такие, что $\omega(\zeta)$ допускает представление

$$\omega(\zeta) = I + \frac{1-\zeta}{\zeta} j \begin{bmatrix} b^*(\tilde{\zeta}) \\ -c^*(\tilde{\zeta}) \end{bmatrix} \boldsymbol{S}^{-1} [b(1), \ -c(1)], \ \tilde{\zeta} = \frac{1}{\bar{\zeta}}, \qquad (11)$$

где, как и раньше,

$$b(\zeta) = \begin{bmatrix} \dfrac{I}{\zeta - \zeta_0} \\ \dfrac{I}{(\zeta - \zeta_0)^n} \end{bmatrix}, \quad c(\zeta) = \begin{bmatrix} s_0 & 0 & \ldots & 0 \\ s_1 & s_0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{n-1} & s_{n-2} & \ldots & s_0 \end{bmatrix} b(\zeta) = \widehat{\widehat{\boldsymbol{S}}}^* \cdot b(\zeta).$$

Наоборот, любая матрица-функция указанного вида (11) является кратной j-элементарной функцией полного ранга.

Доказательство. 1. Пусть

$$\omega(\zeta) = \sum_{k=0}^{n} \frac{B_{-k}}{(\zeta - \zeta_0)^k} = I + (1-\zeta)\, \overline{b^*(\zeta)}\, \boldsymbol{A}_1^{(\omega)*} b(1) -$$

произвольная кратная j-элементарная матрица-функция. Для нее справедливо неравенство отщепления

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_\omega & -\boldsymbol{A}_1^{(\omega)} \overline{b(\zeta)} \\ -\overline{b^*(\zeta)}\, \boldsymbol{A}_1^{(\omega)*} & \dfrac{\omega(\zeta)\, j\omega^*(\zeta) - j}{1 - \zeta\bar{\zeta}} \end{pmatrix} \geqslant 0. \ (O_\omega)$$

По лемме о неотрицательной блок-матрице уравнение $\boldsymbol{A}_\omega X = -\boldsymbol{A}_1^{(\omega)} \overline{b(\zeta)}$ имеет решение, и если $X = Q\overline{b(\zeta)}$, то Q будет решением матричного уравнения $\boldsymbol{A}_\omega Q = -\boldsymbol{A}_1^{(\omega)}$ **(12).**

Покажем сначала, что $\omega(\zeta)$ представима в виде $\omega(\zeta) = I + (1 - \zeta)\overline{b^*(\zeta)}\, Q^* \boldsymbol{A}_\omega Q \overline{b(1)}\, j$ **(13),** где Q — любое решение (12).

В самом деле, опираясь на условие **(*B*)** элементарности $\omega(\zeta)$ и (12), вычислим

$$Q^* \boldsymbol{A}_\omega Q \overline{b(1)}\, j = -Q^* \boldsymbol{A}_1^{(\omega)} \overline{b(1)}\, j = -Q^* \boldsymbol{A}_\omega b(1) = \boldsymbol{A}_1^{(\omega)*} b(1), \tag{14}$$

что и доказывает (13).

2. Будем теперь считать, что $\omega(\zeta)$ имеет полный ранг: $\operatorname{rang} B_{-n} = m$. Подберем неособенную матрицу $\boldsymbol{T}_0$ так, чтобы имело место равенство

$$\boldsymbol{T}_0 \boldsymbol{A}_1^{(\omega)} = \begin{bmatrix} I & s_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & s_1 & I & s_0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & s_{n-1} & 0 & s_{n-2} & \cdots & I & s_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} J \boldsymbol{A}_2, \quad J = \begin{pmatrix} j & & & \\ & j & & \\ & & \ddots & \\ & & & j \end{pmatrix},$$

где $\boldsymbol{A}_2$ определена формулой (3).

Такая матрица $\boldsymbol{T}_0$ существует и имеет вид

$$\boldsymbol{T}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & t_0 \\ 0 & 0 & \cdots & t_0 & t_1 \\ 0 & 0 & \cdots & t_1 & t_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & t_0 & \cdots & t_{n-3} & t_{n-2} \\ t_0 & t_1 & \cdots & t_{n-2} & t_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (-1)^{n-1}\bar{\zeta}_0^{n} I & & & & \\ & (-1)^{n-2}\bar{\zeta}_0^{n-1} I & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -\bar{\zeta}_0^{2} I & \\ & & & & I \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \bar{\zeta}_0^{n-2} I & C_{n-2}^{n-3}\bar{\zeta}_0^{n-3} I & \cdots & C_{n-2}^{1}\bar{\zeta}_0 I & I & 0 \\ 0 & \bar{\zeta}_0^{n-3} I & \cdots & C_{n-3}^{1}\bar{\zeta}_0 I & I & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & C_{n-4}^{1}\bar{\zeta}_0 I & I & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & I \end{bmatrix}.$$

Тщательная проверка убеждает в том, что матрица $\boldsymbol{T}_0$ «уплотняет» одновременно с $\boldsymbol{A}_1^{(\omega)}$ и матрицу $\boldsymbol{A}_\omega$:

$$\boldsymbol{T}_0 \boldsymbol{A}_\omega \boldsymbol{T}_0^* = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & a_{12} & 0 & \cdots & a_{1n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{22} & 0 & \cdots & a_{2n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & 0 & a_{2n} & 0 & \cdots & a_{nn} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

где

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \boldsymbol{S} = \widehat{\boldsymbol{S}} \cdot \boldsymbol{S}_0 \cdot \widehat{\widehat{\boldsymbol{S}}}.$$

Так как сейчас равенство $A_\omega Q = -A_1^{(\omega)}$ можно переписать в виде

$$\boldsymbol{T}_0 \boldsymbol{A}_\omega \boldsymbol{T}_0^* \cdot \boldsymbol{T}_0^{*-1} Q = -\boldsymbol{T}_0 \boldsymbol{A}_1^{(\omega)}, \tag{15}$$

то среди решений $\boldsymbol{T}_0^{*-1}Q$ уравнения (15) найдется и решение вида

$$(\boldsymbol{T}_0^{*-1}Q)_0 = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1,2n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q_{2n-1,1} & q_{2n-1,2} & \cdots & q_{2n-1,2n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Структура матриц $\boldsymbol{T}_0 \boldsymbol{A}_\omega \boldsymbol{T}_0^*$, $(\boldsymbol{T}_0^{*-1}Q)_0$, $\boldsymbol{T}_0 \boldsymbol{A}_1^{(\omega)}$ позволяет уменьшить размерность элементов равенства $\boldsymbol{T}_0 \boldsymbol{A}_\omega \boldsymbol{T}_0^* \cdot (\boldsymbol{T}_0^{*-1}Q)_0 = -\boldsymbol{T}_0 \boldsymbol{A}_1^{(\omega)}$:

$$\boldsymbol{S} \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1,2n} \\ q_{31} & q_{32} & \cdots & q_{3,2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q_{2n-1,1} & q_{2n-1,2} & \cdots & q_{2n-1,2n} \end{bmatrix} =$$

$$= -\begin{bmatrix} I & s_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & s_1 & I & s_0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & s_{n-1} & 0 & s_{n-2} & \cdots & I & s_0 \end{bmatrix} \cdot J \cdot \overline{A}_2. \tag{16}$$

Из последнего соотношения видно, что матрица $\boldsymbol{S}$ неособенная, и поэтому

$$\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1,2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q_{2n-1,1} & q_{2n-1,2} & \cdots & q_{2n-1,2n} \end{bmatrix} =$$

$$= -\boldsymbol{S}^{-1} \begin{bmatrix} I & s_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & s_1 & I & s_0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & s_{n-1} & 0 & s_{n-2} & \cdots & I & s_0 \end{bmatrix} \cdot J \cdot \overline{A}_2. \tag{17}$$

Но тогда

$$Q^* A_\omega Q = Q^* \boldsymbol{T}_0^{-1} \cdot \boldsymbol{T}_0 \boldsymbol{A}_\omega \boldsymbol{T}_0^* \cdot \boldsymbol{T}_0^{*-1} Q =$$

$$= \begin{bmatrix} q_{11}^* & \cdots & q_{2n-1,1}^* \\ q_{12}^* & \cdots & q_{2n-1,2}^* \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ q_{1,2n}^* & \cdots & q_{2n-1,2n}^* \end{bmatrix} \boldsymbol{S} \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1,2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q_{2n-1,1}, & q_{2n-1,1} & \cdots & q_{2n-1,2n} \end{bmatrix},$$

т. е.

$$Q^*A_\omega Q = (J\bar{A}_2)^* \begin{bmatrix} I & 0 & \cdots & 0 \\ s_0^* & s_1^* & \cdots & s_{n-1}^* \\ 0 & I & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & I \\ 0 & 0 & \cdots & s_0^* \end{bmatrix} \times$$

$$\times S^{-1} \begin{bmatrix} I & s_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & s_1 & I & s_0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & s_{n-1} & 0 & s_{n-2} & \cdots & I & s_0 \end{bmatrix} (J\bar{A}_2). \qquad (18)$$

Наконец, учитывая легко проверяемые соотношения $\overline{b^*(\zeta)}\,(J\bar{A}_2)^* = \frac{1}{\tilde{\zeta}}\, b^*(\tilde{\zeta}),\ \tilde{\zeta} = \frac{1}{\bar{\zeta}}$ **(19)**, $(J\bar{A}_2)\,\overline{b(1)} = b(1)$ **(20)**, перепишем $\omega(\zeta)$ (13) в виде

$$\omega(\zeta) = I + \frac{1-\zeta}{\zeta} jb^*(\tilde{\zeta}) \begin{bmatrix} I & 0 & \cdots & 0 \\ -s_0^* & -s_1^* & \cdots & -s_{n-1}^* \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & I \\ 0 & 0 & \cdots & -s_0^* \end{bmatrix} \times$$

$$\times S^{-1} \begin{bmatrix} I & s_0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -s_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & -s_{n-1} & \cdots & I & -s_0 \end{bmatrix} b(1).$$

Тем самым показано, что $\omega(\zeta)$ представляется в виде

$$\omega(\zeta) = I + \frac{1-\zeta}{\zeta} j \begin{bmatrix} b^*(\tilde{\zeta}) \\ -c^*(\tilde{\zeta}) \end{bmatrix} S^{-1} [b(1),\ -c(1)]. \qquad (21)$$

3. Пусть теперь матрицы $s_0, s_1, \ldots, s_{2n-1}$ удовлетворяют соотношениям $I - s_0 s_0^* = 0$, $S = \hat{S} \cdot S_0 \cdot \hat{\hat{S}} > 0$ и пусть $\omega(\zeta)$ имеет вид (20).

Мы покажем, что $\omega(\zeta)$ является j-элементарной матрицей полного ранга. С этой целью вычислим ее j-форму, используя для ее преобразования сопутствующее тождество* для блока S:

$$-[b(1),\ -c(1)]\, j \begin{bmatrix} b^*(1) \\ -c^*(1) \end{bmatrix} = R_1 S + S R_1^* - S \qquad (22)$$

и равенства

$$R_1 b(\tilde{\zeta}) = -\frac{b(\tilde{\zeta}) - b(1)}{\tilde{\zeta} - 1},\ R_1 c(\tilde{\zeta}) = -\frac{c(\tilde{\zeta}) - c(1)}{\tilde{\zeta} - 1}.$$

* Оно легко получается из сопутствующего тождества (9) для блока A неравенства отщепления (O).

В результате j-форма приобретает вид

$$\omega(\zeta) j\omega^*(\zeta) - j = \frac{1-\zeta\bar{\zeta}}{\zeta\bar{\zeta}} j \begin{bmatrix} b^*(\tilde{\zeta}) \\ -c^*(\tilde{\zeta}) \end{bmatrix} S^{-1} [b(\tilde{\zeta}), \ -c(\tilde{\zeta})] j, \tag{23}$$

откуда и следует j-элементарность $\omega(\zeta)$.

4. Убедимся теперь в том, что $\omega(\zeta)$ имеет полный ранг.

В самом деле, учитывая (14), (18), (19), (22), имеем

$$A_1^{(\omega)*} b(1) jb^*(1) A_1^{(\omega)} = Q^* A_\omega Q \overline{b(1)} j \overline{b^*(1)} Q^* A_\omega Q =$$

$$=(J\bar{A}_2)^* \begin{bmatrix} I & 0 & \cdots & 0 \\ s_0^* & s_1^* & \cdots & s_{n-1}^* \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & I \\ 0 & 0 & \cdots & s_0^* \end{bmatrix} S^{-1} \underbrace{[b(1), \ -c(1)] j \begin{pmatrix} b^*(1) \\ -c^*(1) \end{pmatrix}}_{\{-R_1 S - S R_1^* + S\}} \times$$

$$\times S^{-1} \begin{bmatrix} I & s_0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & s_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & s_{n-1} & \cdots & I & s_0 \end{bmatrix} (J\bar{A}_2),$$

из которого вытекает соотношение

$$\frac{1}{1-\zeta_0} \frac{1}{1-\bar{\zeta}_0} B_{-n} j B_{-n+1}^* = \frac{\zeta_0^2}{(1-\zeta_0)^2} \begin{bmatrix} I \\ s_0^* \end{bmatrix} \alpha_{nn} [I, \ s_0],$$

где

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} = S^{-1}.$$

Но тогда $\operatorname{rang} B_{-n} j B_{-n+1}^* = m$, а значит и $\operatorname{rang} B_{-n} = m$.

5. В заключение покажем, что параметры $s_0, s_1, \ldots, s_{2n-1}$ в представлении (21) определяются однозначно. Действительно, предположение о существовании двух различных представлений

$$\omega(\zeta) = I + \frac{1-\zeta}{\zeta} j \begin{bmatrix} b^*(\tilde{\zeta}) \\ -d^*(\tilde{\zeta}) \end{bmatrix} P^{-1} [b(1), \ -d(1)] =$$

$$= I + \frac{1-\zeta}{\zeta} j \begin{bmatrix} b^*(\tilde{\zeta}) \\ -c^*(\tilde{\zeta}) \end{bmatrix} S^{-1} [b(1), \ -c(1)]$$

приводит к равенству j-форм

$$\frac{\omega(\zeta) j\omega^*(\zeta) - j}{1-\zeta\bar{\zeta}} = \frac{1}{\zeta\bar{\zeta}} j \begin{bmatrix} b^*(\tilde{\zeta}) \\ -d^*(\tilde{\zeta}) \end{bmatrix} P^{-1} [b(\tilde{\zeta}), \ -d(\tilde{\zeta})] j =$$

$$= \frac{1}{\zeta\bar{\zeta}} j \begin{bmatrix} b^*(\tilde{\zeta}) \\ -c^*(\tilde{\zeta}) \end{bmatrix} S^{-1} [b(\tilde{\zeta}), \ -c(\tilde{\zeta})] j,$$

а значит, и к равенству блоков

$$b^*(\tilde{\zeta})\,\boldsymbol{P}^{-1}b(\tilde{\zeta}) = b^*(\tilde{\zeta})\,\boldsymbol{S}^{-1}b(\tilde{\zeta}),\ \ b^*(\tilde{\zeta})\,\boldsymbol{P}^{-1}d(\tilde{\zeta}) = b^*(\tilde{\zeta})\,\boldsymbol{S}^{-1}c(\tilde{\zeta}).$$

Но тогда $\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{S}^{-1}$, $d(\tilde{\zeta}) = c(\tilde{\zeta})$. Следовательно, $s_k = s_k^{(1)}$ для $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, т. е. $\widehat{\widehat{\boldsymbol{P}}} = \widehat{\widehat{\boldsymbol{S}}}$. Кроме того,

$$\widehat{\boldsymbol{P}} \cdot \boldsymbol{S}_0 \cdot \widehat{\widehat{\boldsymbol{P}}} = \boldsymbol{P} = \boldsymbol{S} = \widehat{\boldsymbol{S}} \cdot \boldsymbol{S}_0 \cdot \widehat{\widehat{\boldsymbol{S}}}.$$

Из последнего равенства в силу неособенности треугольных матриц $\boldsymbol{S}_0$, $\widehat{\widehat{\boldsymbol{S}}}$ и вытекает $\widehat{\boldsymbol{P}} = \widehat{\boldsymbol{S}}$, т. е. равенство матриц $s_k = s_k^{(1)}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1, n, \ldots, 2n-1$.

Теорема доказана полностью.

Следствие *(частная теорема о параметризации). Для каждой двучленной j-элементарной матрицы-функции*

$$\beta(\zeta) = I - \frac{1-\zeta}{(1-\bar{\zeta}_0)(\zeta-\zeta_0)}\,\varepsilon,\ \ \varepsilon j \geqslant 0,\ \ \varepsilon^2 = 0$$

полного ранга однозначно определяются матрицы s_0, s_1, удовлетворяющие условиям $I - s_0 s_0^* = 0$, $\zeta_0 s_1 s_0^* > 0$ такие, что $\beta(\zeta)$ допускает представление

$$\beta(\zeta) = I + \frac{1-\zeta}{(1-\bar{\zeta}_0)(\zeta-\zeta_0)}\, j \begin{bmatrix} I \\ -s_0^* \end{bmatrix} (\zeta_0 s_1 s_0^*)^{-1}\,[I,\ -s_0], \tag{24}$$

Наоборот, любая матрица-функция указанного вида является j-элементарной функцией полного ранга.

2.2°. В заключение остановимся на разложении кратной j-элементарной матрицы-функции полного ранга на параметризованные двучленные j-элементарные множители.

С этой целью рассмотрим две параметризованные кратные j-элементарные матрицы-функции с полюсами в точке ζ_0 ($|\zeta_0| = 1$) кратности n и $n-1$ соответственно:

$$\omega_n(\zeta) = I + \frac{1-\zeta}{\zeta}\, j \begin{bmatrix} b_n^*(\tilde{\zeta}) \\ -c_n^*(\tilde{\zeta}) \end{bmatrix} \boldsymbol{S}_n^{-1}\,[b_n(1),\ -c_n(1)],$$

$$\omega_{n-1}(\zeta) = I + \frac{1-\zeta}{\zeta}\, j \begin{bmatrix} b_{n-1}^*(\tilde{\zeta}) \\ -c_{n-1}^*(\tilde{\zeta}) \end{bmatrix} \boldsymbol{S}_{n-1}^{-1}\,[b_{n-1}(1),\ -c_{n-1}(1)]$$

и выполним деление $\omega_n(\zeta)$ на $\omega_{n-1}(\zeta)$ слева: $\beta_n(\zeta) = \omega_{n-1}^{-1}(\zeta)\,\omega_n(\zeta)$.

После преобразования частное удается записать в виде

$$\beta_n(\zeta) = I + \frac{(1-\zeta)(1-\bar{\zeta}_0)}{\zeta-\zeta_0}\, j \left\{ \begin{bmatrix} b_n^*(1) \\ -c_n^*(1) \end{bmatrix} \boldsymbol{S}_n^{-1}\,[b_n(1),\ -c_n(1)] - \right.$$

$$\left. - \begin{bmatrix} b_{n-1}^*(1) \\ -c_{n-1}^*(1) \end{bmatrix} \boldsymbol{S}_{n-1}^{-1}\,[b_{n-1}(1) - c_{n-1}(1)] \right\}.$$

Осуществляя далее деление $\omega_{n-1}(\zeta)$ на $\omega_{n-2}(\zeta)$ слева и т. д., приходим к следующему разложению:

$$\omega_n(\zeta) = \beta_1(\zeta)\,\beta_2(\zeta)\,\ldots\,\beta_n(\zeta),$$

$$\beta_k(\zeta) = I + \frac{(1-\zeta)(1-\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}\, j \left\{ \begin{bmatrix} b_k^*(1) \\ -c_k^*(1) \end{bmatrix} S_k^{-1}\,[b_k(1),\ -c_k(1)] - \right.$$

$$\left. - \begin{bmatrix} b_{k-1}^*(1) \\ -c_{k-1}^*(1) \end{bmatrix} S_{k-1}^{-1}\,[b_{k-1}(1),\ -c_{k-1}(1)] \right\} \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Список литературы: 1. *Ковалишина И. В.* Аддитивное разложение произвольной реактивной матрицы-функции // Изв. АН АрмССР. — 1971.— **6**, № 1. — С. 43—60. 2. *Ковалишина И. В.* Матричные аналоги некоторых дискретных интерполяционных задач анализа. — М., 1982. — С.16 — 27. Деп. в ВИНИТИ 21. 01.82, № 249. 3. *Ковалишина И. В.* Краткая граничная интерполяционная проблема Неванлинны — Пика для сжимающих в единичном круге матриц-функций. — М., 1986. — С. 20—27. Деп. в ВИНИТИ 03.01.86, № 95—В86. 4. *Ковалишина И. В., Потапова В. П.* Индефинитная метрика в проблеме Неванлинны — Пика // ДАН Арм. ССР. — 1974. — **59**, № 1. — С. 17—22. 5. *Ковалишина И. В.* Аналитическая теория одного класса интерполяционных задач// Изв. АН СССР. — 1983. — **47**, № 3. — С. 455—497.

Поступила в редколлегию 29.04.85