УДК 517.53

Н. В. ЗАБОЛОЦКИЙ, С. Ю. ФАВОРОВ

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ В R^m ФУНКЦИЙ НУЛЕВОГО ПОРЯДКА

Пусть $u(x)$ — субгармоническая функция в $\boldsymbol{R}^m$, гармоническая в окрестности нуля и такая, что $u(0)=0$, $\rho(r)$ — ее уточненный порядок, $V(r)=r^{\rho(r)}$; $\mu_u(x)$ — ассоциированная мера, $B(\boldsymbol{r})=\{x\in\boldsymbol{R}^m:|x|<r\}$,

* α-мерой Карлесона множества E называется $\inf\sum r_j^\alpha$, где r_j — радиусы кругов C_j, образующих покрытие множества E и inf берется по всем счетным покрытиям $\{C_j\}$ множества E (см., например, [7]).

** C^0-множеством называется любое множество E, которое можно покрыть кружками C_j с радиусами r_j так, что $\lim\limits_{r\to\infty}\left\{\frac{1}{r}\sum{}^{r} r_j\right\}=0$, где символ Σ^r означает суммирование по всем кружкам, центры которых попали в круг $|z|<r$ (см., например, [1]).

$$n(r,\ u) = \mu_u(B(r)),\quad N(r,\ u) = \int\limits_0^r \frac{n(t,\ u)}{t^{m-1}}\,dt,$$

$$I(x,\ u) = \int\limits_{|y-x|<|x|} (|x-y|^{2-m} - |x|^{2-m})\,d\mu_u(y) \text{ при } m > 2,$$

$$I(x,\ u) = \int\limits_{|y-x|<|x|} \ln(|x|\,|x-y|^{-1})\,d\mu_u(y) \text{ при } m = 2.$$

Для функции $u(x)$, имеющей нулевой порядок, в случае $m = 2$ в [1] доказаны следующие асимптотические формулы при $|x| \to \infty$:

$$u(x) = -I(x,\ u) + N(|x|,\ u) + o(V(|x|)), \tag{1}$$

$I(x,\ u) = o(V(|x|))$ вне c_0-множества (определение см. [2, (2)].

В [1] показано, что соотношения (1), (2), вообще говоря, уже не верны для субгармонических в $\boldsymbol{R}^m$, $m \geqslant 3$, функций нулевого порядка. А. А. Гольдберг обратил наше внимание на то, что формулы (1), (2) могут быть верны для некоторых подклассов субгармонических в $\boldsymbol{R}^m$ функций. В настоящей заметке дается естественное описание таких подклассов, а также уточняется соотношение (2).

Класс L субгармонических функций в $\boldsymbol{R}^m$ назовем допустимым, если он замкнут относительно умножения на положительные константы, преобразований $x \to kx$ $(k > 0)$, предельного перехода в пространстве обобщенных функций $D'(\boldsymbol{R}^m)$, а также не содержит никаких ограничений сверху в $\boldsymbol{R}^m$ функций, кроме констант. Так, класс всех субгармонических функций в R^2, класс всех плюрисубгармонических функций в $\boldsymbol{C}^l$ $(\text{-}\boldsymbol{R}^{2l})$ являются допустимыми. Более общий пример приведен в теореме 2 настоящей заметки.

Субгармоническую функцию $u(x)$ в R^m, имеющую нулевой порядок роста, назовем допустимой, если она принадлежит какому-нибудь допустимому классу.

Теорема 1. *Для любой допустимой функции* $u(x)$ *при* $r \to \infty$

$$n(r,\ u) = o(V(r) \cdot r^{m-2}).$$

Доказательство. Рассмотрим предельное множество $\operatorname{Fr} u$ для функции $u(x)$ (см. [3]), т. е. множество функций, являющихся пределами в $D'(\boldsymbol{R}^m)$ последовательностей функций вида $V(t_n)^{-1}$ $u(t_n x)$, $t_n \to \infty$. Согласно [3] множество $\operatorname{Fr} u$ состоит из субгармонических функций $v(x)$, таких, что $v(x) \leqslant C|x|^\rho$ при $x \in \boldsymbol{R}^m$, где ρ — порядок роста функции $u(x)$, в нашем случае $\rho = 0$. Так как функции $v \in \operatorname{Fr} u$ лежат в допустимом классе, то множество $\operatorname{Fr} u$ содержит только константы. Далее, предельное множество $\operatorname{Fr} \mu_u$ (т. е. пределы в $D'(\boldsymbol{R}^m)$ мер вида $V(t_n)^{-1} t_n^{2-m} \mu_u(t_n x)$ при $t_n \to \infty$) состоит из мер, являющихся ассоциированными к функциям из $\operatorname{Fr} u$ (см. [3]), т. е. $\operatorname{Fr} \mu_u = \{0\}$. Отсюда следует утверждение теоремы.

Теорема 2. *Пусть* $m_i \in N$, $i = 1, \ldots, k$, $0 = m_0 < m_1 < \ldots < m_{k-1} < m_k = m$, $m_i \leqslant m_{i-1} + 2$. *Класс* L, *состоящий из субгармонических в* $\boldsymbol{R}^m$ *функций, для каждого* $i = 1, 2, \ldots, k$*-субгармонических по переменным* $x_{m_i}, x_{m_i+1}, \ldots, x_m$ *при любых фиксированных остальных переменных, является допустимым.*

Доказательство. Докажем вначале, что субгармоническая в $\boldsymbol{R}^m$ функция $u(x)$, удовлетворяющая при $s < m$ соотношению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_{s+1}^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2} \geqslant 0$$

в смысле $D'(\boldsymbol{R}^m)$, является субгармонической по переменным $x_{s+1}, \ldots, x_m$ при любых фиксированных $x_1, \ldots, x_s$. Для этого достаточно выбрать последовательность финитных бесконечно дифференцируемых функций $\alpha_n(t)$, такую, чтобы последовательность сверток $(u * \alpha_n)(x)$ монотонно убывала к субгармонической в R^m функции $u(x)$. Осталось заметить, что $(u*\alpha_n)(x)$-субгармонические функции по переменным $x_{s+1}, \ldots, x_m$. Отсюда следует, что класс L замкнут относительно предельного перехода в $D'(\boldsymbol{R}^m)$. Далее, если функция $u(x) \in L$ не зависит от переменных

$$x_{m_{i+1}}, \ldots, x_m,$$

то она удовлетворяет соотношению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_{m_i}^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_{m_i+1}^2} \geqslant 0$$

при $m_{i+1} = m_{i+2}$ или соотношению $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_{m_i}^2} \geqslant 0$ при $m_{i+1} = m_i + 1$ в смысле обобщенных функций. Поэтому из ограниченности сверху в $\boldsymbol{R}^m$ функции $u(x)$ следует, что она не зависит от переменной x_{m_i}, x_{m_i+1} (или, соответственно, от переменной x_{m_i}). Индукция по i показывает, что $u(x) \equiv \text{const}$. Теорема доказана.

Следствие. *Класс полисубгармонических функций в* $\boldsymbol{R}^{2l}$ *является допустимым.*

Теорема 3. *Для допустимой функции* $u(x)$ *при* $|x| \to \infty$

$$u(x) = -I(x, u) + N(|x|, u) + o(V(|x|)).$$

При $m = 2$ эта теорема была доказана в [1], при $m \geqslant 3$ используется тот же метод (см. также [4]).

Следуя работе [5], относительной емкостью множества $E \subset \boldsymbol{R}^m$ назовем величину

$$\varlimsup_{t \to \infty} \operatorname{cap}(E \cap B(t)) [\operatorname{cap} B(t)]^{-1},$$

где cap обозначает ньютонову (при $m \geqslant 3$) или логарифмическую (при $m = 2$) емкость.

Теорема 4 (см. [4]). *Для допустимой функции $u(x)$ вне множества нулевой относительной емкости при $|x| \to \infty$*

$$I(x, u) = o(V(|x|)).$$

Доказательство. Пусть L_k — компакт положительной емкости, $L_k \subset B(2^k) \setminus B(2^{k-1})$, ν_k — его равновесная мера. Тогда

$$\int_{L_k} I(x, u)\, d\nu_k(x) \leqslant \int_{L_k} d\nu_k(x) \int_{|x-y|<|x|} |x-y|^{2-m} d\mu(y) \leqslant$$

$$\leqslant \int_{B(2^{k+1})} d\mu(y) \int_{L_k} |x-y|^{2-m} d\nu_k(x) \leqslant (\operatorname{cap} L_k)^{-1} n(2^{k+1}, u),$$

если $m \geqslant 3$. Аналогично, при $m = 2$

$$\int_{L_k} I(x, u)\, d\nu_k(x) \leqslant \int_{B(2^{k+1})} d\mu(y) \int_{L_k} \ln \frac{2^{k+2}}{|x-y|} d\nu_k(x) \leqslant$$

$$\leqslant \ln(\operatorname{cap} B(2^{k+2})(\operatorname{cap} L_k)^{-1})\, n(2^{k+1}, u).$$

Полученные оценки позволяют применить к функции $-I(x, u)$ метод доказательства теоремы 2 работы [5] и получить утверждение теоремы.

Из теорем 3, 4 вытекает

Теорема 5. *Для допустимой функции $u(x)$ вне множества относительной емкости нуль при $|x| \to \infty$*

$$u(x) = N(|x|, u) + o(V(|x|)).$$

Следствие 1. *Для допустимой функции $u(x)$ при $r \to \infty$*

$$T(r, u) = N(r, u) + o(V(r)),$$

где $T(r)$ — неванлинновская характеристика функции $u(x)$.

Следствие 2. *Для допустимой функции $u(x)$ найдется множество A нулевой относительной емкости, такое, что для $x, x' \notin A$, $\beta|x| \leqslant |x'| \leqslant \beta^{-1}|x|$, где $\beta > 0$, при $|x| \to \infty$*

$$u(x) - u(x') = o(V(|x|)).$$

Список литературы: 1. *Гольдберг А. А., Заболоцкий Н. В.* Индекс концентрации субгармонических функций нулевого порядка. — Мат. зам. 1983, **34**, № 2, с. 227—236. 2. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. — М.: Гостехиздат, 1956.—632 с. 3. *Азарин В. С.* Об асимптотическом поведении субгармонических функций конечного порядка. — Мат. сб., 1979, **108**, № 2, с. 147—167. 4. *Заболоцкий Н. В.* Асимптотические свойства мероморфных и δ-субгармонических функций. — Дис. . . . канд. физ.-мат. наук. — Х., 1982.—250 с. 5. *Фаворов С. Ю.* О множествах понижения для субгармонических функций вполне регулярного роста. — Сиб. мат. журн., 1979, **20**, № 6, с. 1294—1302.

Поступила в редколлегию 12. 12. 84.