

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О КРУЧЕНИИ ТОНКОСТЕННЫХ ЦИЛИНДРОВ

И. В. Сухаревский, В. А. Ткаченко

Цель настоящей статьи состоит в получении асимптотических формул для решения задачи о кручении бесконечных тонкостенных цилиндров. Известное приближенное решение Бредта выражает напряжения через усредненные характеристики области, представляющей поперечное сечение цилиндра, и не содержит указаний на пределы применимости полученных формул.

В данной работе получены простые расчетные формулы, описывающие характер зависимости напряжений от локальных характеристик границы области и позволяющие, в частности, оценить пределы применимости теории Бредта. Решение задачи построено в виде формального разложения функции напряжений по степеням малого параметра, связанного с толщиной цилиндра. Затем установлено, что этот ряд представляет собой асимптотическое разложение (в среднем квадратичном) функции напряжений. Рассмотрены некоторые примеры.

1. Постановка задачи и получение формальных разложений

Пусть поперечное сечение D цилиндра ограничено извне контуром L_0 , а изнутри — контуром L_1 . Эти контуры мы предполагаем замкнутыми и при этом достаточно гладкими (рис. 1).

Выберем декартовы прямоугольные координаты x_1 и x_2 в поперечном сечении D и направим ось x_3 параллельно образующим цилиндра. Как известно, компоненты тензора напряжений p_{13} и p_{23} можно представить по формулам

$$\begin{aligned} p_{13} &= 2G\theta \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}, \\ p_{23} &= -2G\theta \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь G — модуль сдвига,

θ — единичный угол закручивания,

а Φ — функция напряжений, которую можно получить как решение следующей краевой задачи: в области D функция Φ удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\nabla^2 \Phi = -1. \quad (2)$$

а на границе области — краевым условиям

$$\Phi|_{L_0} = 0 \quad (3)$$

$$\Phi|_{L_1} = c = \text{const} \quad (4)$$

$$\oint_{L_1} \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds = -\Omega_1 \quad (5)$$

(s — дуговая координата точки на L_1 , $\vec{n}$ — орт внешней нормали к L_1 , и Ω_1 — площадь области, заключенной внутри L_1). Равенство (5) выражает условие однозначности смещений (см. [1]).

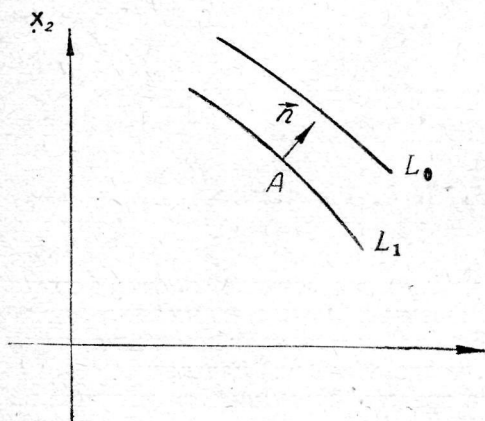


Рис. 1.

Пусть A — какая-либо точка контура L_1 с дуговой координатой s . Будем определять положение точек, расположенных на внешней к контуру L_1 нормали в точке A координатой n , равной их расстоянию до A . Примем s и n в качестве криволинейных координат, определяющих положение точек в области D . В этих координатах уравнение контура L_0 имеет вид

$$n = t(s), \quad (0 \leq s \leq l_1)$$

где l_1 — длина контура L_1 .

Положим $\varepsilon = \max_{0 \leq s \leq l_1} t(s)$ и $\frac{t(s)}{\varepsilon} = h(s, \varepsilon)$, так что

$$t(s) = \varepsilon h(s', \varepsilon). \quad (0 < h(s, \varepsilon) \leq 1)$$

Нетрудно показать, что уравнение (2) в криволинейных координатах s и n можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{1}{1 + \kappa(s)n} \frac{\partial \Phi}{\partial s} \right] + \frac{\partial}{\partial n} \left[(1 + \kappa(s)n) \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right] = -(1 + \kappa n), \quad (6)$$

где $\kappa(s)$ — кривизна контура L_1 . Здесь и везде в дальнейшем предполагается, что $|\kappa(s)t(s)| < 1$.

Введем в уравнение (6) малый параметр ε подстановкой

$$n = \varepsilon h(s, \varepsilon) \nu. \quad (0 \leq \nu \leq 1)$$

Тогда уравнение (6) примет вид

$$A^{(\varepsilon)} \Phi = \varepsilon^2 h^2(s, \varepsilon) \left(\frac{\partial}{\partial s} - \nu g \frac{\partial}{\partial \nu} \right) \left[\frac{1}{1 + \varepsilon \kappa(s) \nu h(s, \varepsilon)} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial s} - \nu g \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \nu} \left\{ [1 + \varepsilon \kappa(s) \nu h(s, \varepsilon)] \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} \right\} = -\varepsilon^2 h^2(s, \varepsilon) (1 + \varepsilon \kappa \nu h), \quad (7)$$

причем $g = \frac{\partial}{\partial s} (\ln h)$.

Представим дифференциальную операцию $A^{(\varepsilon)}$ формальным разложением по степеням ε :

$$A^{(\varepsilon)} = A_0 + \varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \dots, \quad (8)$$

$$A_0 = \frac{\partial^2}{\partial \nu^2},$$

$$A_1 = \frac{\partial}{\partial \nu} \left[\kappa(s) \nu h(s, 0) \frac{\partial}{\partial \nu} \right] \text{ и т. д.}$$

Далее, пусть

$$h^2(s, \varepsilon) [1 + \kappa(s) \varepsilon \nu h(s, \varepsilon)] = \sum_{j=0}^{\infty} p_j(s) \varepsilon^j \quad (9)$$

Будем искать решение нашей краевой задачи в виде ряда

$$\Phi(s, \nu, \varepsilon) = \sum_{j=1}^{\infty} \Phi_j(s, \nu) \varepsilon^j. \quad (10)$$

Подставим разложения (8), (9) и (10) в уравнение (7); сравнив после этого коэффициенты при одинаковых степенях ε , приходим к системе рекуррентных дифференциальных уравнений

$$A_0 \Phi_1 = 0 \quad (11)$$

$$A_0 \Phi_2 + A_1 \Phi_1 = -p_0 \quad (12)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$A_0 \Phi_j + A_1 \Phi_{j-1} + \dots + A_{j-1} \Phi_1 = -p_{j-2}. \quad (13)$$

Из соотношений (3), (4) и (5) получаем условия для функций Φ_j на границе области

$$\Phi_j(s, 1) = 0 \quad (j = 1, 2, 3, \dots) \quad (14)$$

$$\Phi_j(s, 0) = C_j \quad (j = 1, 2, 3, \dots) \quad (15)$$

$$\int_0^{l_1} g_0(s) \frac{\partial \Phi_1(s, 0)}{\partial \nu} ds = -\Omega_1$$

$$\sum_{i=0}^{j-1} \int_0^{l_1} g_i(s) \frac{\partial \Phi_{j-i}}{\partial \nu} ds = 0. \quad (j = 2, 3, \dots) \quad (16)$$

Здесь C_j — подлежащие определению константы, а функции $g_j(s)$ определяются разложением

$$\frac{1}{h(s, \varepsilon)} = \sum_{j=0}^{\infty} g_j(s) \varepsilon^j.$$

Интегрируя уравнение (11) при краевых условиях (14), (15) и (16), находим

$$\Phi_1 = C_1 (1 - \nu),$$

причем

$$C_1 = \frac{\Omega_1}{\int_0^{l_1} \frac{ds}{h(s, 0)}}.$$

Далее, из уравнения (12) при соответствующих краевых условиях получаем

$$\Phi_2 = [C_1 \kappa(s) - h(s, 0)] (\nu^2 - \nu) \frac{h(s, 0)}{2} + C_2 (1 - \nu),$$

где

$$C_2 = \frac{\frac{1}{2} \left[\int_0^{l_1} h(s, 0) ds - C_1 \int_0^{l_1} \kappa(s) ds \right] - C_1 \oint_{L_1} g_1(s) ds}{\int_0^{l_1} \frac{ds}{h(s, 0)}}.$$

Процесс нахождения последовательности функций Φ ; можно продолжить как угодно далеко, причем каждый этап требует лишь простых квадратур.

Ограничиваясь в представлении функции Φ лишь величинами первого порядка малости по ε , имеем

$$\Phi(s, \nu, \varepsilon) = \varepsilon C_1 (1 - \nu).$$

Исключив θ из формул

$$T = -2G\theta \frac{\partial \Phi}{\partial n}$$

и

$$M = 4G\theta [C_1 \Omega_1 + \iint_D \Phi d\Omega],$$

представляющих напряжение кручения T и крутящий момент M , приходим к известной формуле Бредта:

$$T = \frac{M}{2\Omega_1 \varepsilon h(s, 0)}, \quad (17)$$

где Ω_1' — площадь области, заключенной внутри средней линии поперечного сечения.

Таким образом, решение Бредта может быть получено как первое приближение рассматриваемым методом.

Если представить функцию напряжений в виде

$$\Phi = \varepsilon \Phi_1 + \varepsilon^2 \Phi_2,$$

то после очевидных вычислений получим

$$T = \frac{M}{2\varepsilon h(s, 0) \Omega_1} \cdot \frac{1 + \varepsilon \frac{C_2}{C_1} - \frac{2\nu - 1}{2C_1} \varepsilon h(s, 0) [C_1 x(s) - h(s, 0)]}{\left(1 + \varepsilon \frac{C_2}{C_1} + \frac{1}{2} \varepsilon \frac{\alpha}{\Omega_1}\right) \left(1 - \frac{g_1}{g_0} \varepsilon\right)}, \quad (18)$$

где

$$\alpha = \int_0^{l_1} h(s, 0) ds.$$

Эта формула уже учитывает зависимость напряжений от кривизны контура L_1 .

Для случая эквидистантных контуров ($t(s) = \text{const}$) формуле (18) можно придать более простой вид

$$T = \frac{M}{2t\Omega_1} \left[1 + \frac{1}{2} t x(s) - \frac{2l_1}{\Omega_1} \right].$$

Обозначим через T_1 напряжения, получаемые по формуле Бредта (17), а через T_2 — напряжения, получаемые во втором приближении (по формуле (18)). Тогда поправочный член

$$T_2 - T_1 = \frac{M}{2\varepsilon h(s, 0) \Omega_1} \left\{ -\varepsilon \frac{2\nu - 1}{2} h(s, 0) \left[x(s) - \frac{h(s, 0)}{C_1} \right] + \frac{g_1}{g_0} \varepsilon \right\}.$$

Следовательно, величина относительной погрешности формулы Бредта может быть выражена с точностью до величин высшего порядка малости формулой

$$\Delta = \frac{T_2 - T_1}{M} 2\varepsilon h(s, 0) \Omega_1 = -\varepsilon \frac{2\nu - 1}{2} h(s, 0) \left[x - \frac{h}{C_1} \right] + \frac{g_1}{g_0} \varepsilon. \quad (19)$$

В частности, в случае эквидистантных контуров

$$\Delta = -t \frac{2\nu - 1}{2} \left[x(s) - \frac{l_1}{\Omega_1} \right].$$

Эта погрешность обращается в нуль на средней линии $\nu = \frac{1}{2}$, а на граничных контурах

$$|\Delta| = \frac{1}{2} t \left| z(s) - \frac{l_1}{\Omega_1} \right|. \quad (20)$$

В связи с формулой (20) можно сделать следующее замечание, представляющее, как нам кажется, некоторый интерес. Обозначим через $\bar{\Delta}$ и $\bar{z}$ средние квадратичные значения функций Δ и z на контуре L_1 :

$$\bar{\Delta}^2 = \frac{1}{l_1} \int_0^{l_1} \Delta^2 ds, \quad \bar{z}^2 = \frac{1}{l_1} \int_0^{l_1} z^2 ds.$$

Тогда, как нетрудно вывести из формулы (20),

$$\bar{\Delta}^2 = \frac{t^2}{4} \left[\bar{z}^2 + \frac{l_1^2 - 4\pi\Omega_1}{\Omega_1^2} \right].$$

Из решения известной изопериметрической задачи следует (см., например, [2]), что для любой замкнутой кривой длины l_1 $l_1^2 \geq 4\pi\Omega_1$, причем равенство достигается лишь в случае окружности. Поэтому из всех эквидистантных кольцевых сечений с одной и той же средней кривизной $\bar{z}$ и с фиксированной толщиной t круговое кольцо дает наименьшее среднее значение относительной погрешности $\bar{\Delta}$ при применении формулы Бредта.

Полученные результаты позволяют также оценить влияние кривизны на распределение тангенциальных напряжений. Так, в простейшем случае эквидистантных контуров

$$\frac{2t\Omega_1}{M} [T_2^{(\max)} - T_2^{(\min)}] = \frac{t}{2} (z_{\max} - z_{\min}) \quad (21)$$

В общем случае неэквидистантных контуров существенное влияние на T оказывает характер функции $h(s, 0)$. Если $h(s, 0)$ заметно отличается от константы, то изменение этой функции может оказаться основным фактором, определяющим изменение T на контуре L_1 (именно это обстоятельство имеет место в приведенном ниже первом примере).

II. Примеры.

1. В качестве первого примера рассмотрим цилиндр с сечением, ограниченным двумя концентрическими подобными эллипсами. Пусть контур L_1 задан параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x_1 = a \cos \tau \\ x_2 = b \sin \tau \end{cases}, \quad (a > b)$$

а контур L_0 — уравнениями

$$\begin{cases} x_1 = a k \cos \tau \\ x_2 = b k \sin \tau \end{cases}, \quad (k > 1)$$

Выберем в качестве малого параметра величину $\varepsilon = a(k - 1)$. Вычисление по формуле (18) дает следующий результат:

$$T = T_2 = \frac{M}{\pi a^2 b^2 (k - 1)} \sqrt{a^2 \sin^2 \tau + b^2 \cos^2 \tau}.$$

$$\frac{1 + \frac{1}{2}(2\nu - 1)k \left[1 + \frac{a^4 \sin^2 \tau + b^4 \cos^2 \tau}{(a^2 \sin^2 \tau + b^2 \cos^2 \tau)^2} \right]}{3k - 1} \left[1 + \frac{g_1}{g_0} a(k - 1) \right],$$

причем

$$g_0 = \frac{b}{\sqrt{a^2 \sin^2 \tau + b^2 \cos^2 \tau}},$$

$$g_1 = -\frac{b}{2a} (a^2 - b^2)^2 \frac{\cos^2 \tau \sin^2 \tau}{(\sqrt{a^2 \sin^2 \tau + b^2 \cos^2 \tau})^5}.$$

В частности, на осях симметрии

$$T \Big|_{\tau=0} = \frac{M}{\pi a^2 b} \frac{1 + (2\nu - 1)(k - 1)}{(3k - 1)(k - 1)},$$

$$T \Big|_{\tau=\frac{\pi}{2}} = \frac{M}{\pi a b^2} \frac{1 + (2\nu - 1)(k - 1)}{(3k - 1)(k - 1)}.$$

2. Рассмотрим численный пример с эквидистантными контурами L_0 и L_1 , причем L_1 — эллипс, с полуосями $a = 2$, $b = 1$, а толщина $t = 0,2$. В этом случае относительное изменение касательных напряжений на L_1 при переходе от точки минимальной кривизны $\tau = \frac{\pi}{2}$ к точке максимальной кривизны $\tau = 0$ (по формуле (21))

$$\frac{2t\Omega_1}{M} (T_2^{(\max)} - T_2^{(\min)}) =$$

$$= \frac{t}{2} \left(\frac{a}{b^2} - \frac{b}{a^2} \right) = 0,18, \quad (18\%).$$

Погрешность формулы Бредта при $\tau = \frac{\pi}{2}$

$$|\Delta| = \frac{t}{2} \left| z - \frac{l_1}{\Omega_1} \right| = 0,13, \quad (13\%).$$

Рис. 2.

Этот пример показывает, что расчет по формулам Бредта может приводить к существенным ошибкам даже в случае сравнительно тонких цилиндров с весьма гладкими границами.

3. Пусть поперечное сечение цилиндра ограничено эквидистантными контурами, представляющими собой квадраты со скругленными углами (рис. 2).

В этой задаче легко получить следующее выражение поправочного члена

$$\Delta = \frac{t}{2} \left[\frac{1}{R} - \frac{4a - (8 - 2\pi)R}{a^2 - (4 - \pi)R^2} \right].$$

Если радиус скругления R мал, то величина Δ может быть весьма заметной. Например, при $a = 10$, $t = 0,5$ и $R = 1$, имеем $\Delta = 0,22$.

III. Обоснование метода

Введем оператор

$$T_{n,\varepsilon} = \varepsilon^{-n} \left[A^{(z)} - \sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon^j A_j \right]$$

и функции

$$W_{n,\varepsilon} = \varepsilon^{-n-1} \left[\Phi - \sum_{k=1}^n \varepsilon^k \Phi_k \right],$$

$$P_{n, \varepsilon} = -\varepsilon^{-n+1} \left\{ h^2(s, \varepsilon) [1 + \kappa(s) \varepsilon \nu h(s, \varepsilon)] - \sum_{j=0}^{n-2} p_j(s) \varepsilon^j \right\},$$

$$G_{n, \varepsilon} = \varepsilon^{-n} \left[\frac{1}{h(s, \varepsilon)} - \sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon^j g_j(s) \right].$$

Наша цель состоит в доказательстве ограниченности относительно ε средней квадратичной величины функции $W_{n, \varepsilon}$. Отсюда немедленно будет вытекать, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \Phi_k$ является асимптотическим представлением функции Φ в среднем квадратичном. Применив оператор $A^{(\varepsilon)}$ к функции $W_{n, \varepsilon}$ и воспользовавшись соотношениями (13), после соответствующих преобразований получаем уравнение

$$A^{(\varepsilon)} W_{n, \varepsilon} = F_n(s, \nu, \varepsilon), \quad (0 \leq s \leq l_1, 0 \leq \nu \leq 1), \quad (22)$$

где

$$F_n(s, \nu, \varepsilon) = P_{n, \varepsilon} - \sum_{m=0}^{n-2} \varepsilon^m \left(\sum_{j=m+1}^{n-1} A_j \Phi_{m+n-j+1} \right) - \sum_{m=0}^{n-1} \varepsilon^m T_{n, \varepsilon} \Phi_{m+1}.$$

Далее, из краевых условий (14), (15) и (16) можно вывести следующее условие для функции $W_{n, \varepsilon}$ на границе рассматриваемой области:

$$W_{n, \varepsilon}(s, 1, \varepsilon) = 0, \quad (23)$$

$$W_{n, \varepsilon}(s, 0, \varepsilon) = C(\varepsilon), \quad (24)$$

$$\int_0^{l_1} \frac{1}{h(s, \varepsilon)} \cdot \frac{\partial W_{n, \varepsilon}(s, 0, \varepsilon)}{\partial \nu} ds = \Gamma_\varepsilon, \quad (25)$$

где постоянная $C(\varepsilon)$ подлежит определению, а

$$\begin{aligned} \Gamma_\varepsilon = & - \sum_{m=0}^{n-2} \varepsilon^m \sum_{j=m+1}^{n-1} \int_0^{l_1} g_j \frac{\partial \Phi_{m+n-j+1}}{\partial \nu} ds - \\ & - \sum_{m=0}^{n-1} \varepsilon^m \int_0^{l_1} G_{n, \varepsilon} \frac{\partial \Phi_{m+1}(s, 0)}{\partial \nu} ds. \end{aligned} \quad (26)$$

Введем вспомогательную функцию

$$w_0 = \frac{\Gamma_\varepsilon h(s, \varepsilon)}{l_1} \nu (1 - \nu)$$

и положим

$$w = W_{n, \varepsilon} - w_0.$$

Очевидно,

$$\int_0^{l_1} \frac{1}{h(s, \varepsilon)} \frac{\partial w(s, 0, \varepsilon)}{\partial \nu} ds = 0,$$

$$w(s, 1, \varepsilon) = 0,$$

$$w(s, 0, \varepsilon) = C_1(\varepsilon)$$

и

$$A^{(\varepsilon)} w = F_n - A^{(\varepsilon)} w_0 = f_n(s, \nu, \varepsilon).$$

Отсюда следует, что функция ω представляет собой решение следующей краевой задачи:

$$-\nabla^2 \omega = \frac{\omega_n(s, \nu, \varepsilon)}{\varepsilon^2} \text{ в } D \quad (27)$$

$$\omega|_{L_0} = 0; \quad \omega|_{L_1} = \text{const}; \quad \oint_{L_1} \frac{\partial \omega}{\partial n} ds = 0, \quad (28)$$

где

$$\omega_n(s, \nu, \varepsilon) = - \frac{f_n(s, \nu, \varepsilon)}{h^2(s, \varepsilon) [1 + \varepsilon \kappa(s) \chi h(s, \varepsilon)]}.$$

Пусть B — оператор, определяемый дифференциальной операцией $-\nabla^2$ на множестве M функций φ , дважды непрерывно дифференцируемых в области D , непрерывных и имеющих непрерывные частные производные первого порядка в замкнутой области $\bar{D}$ и удовлетворяющих краевым условиям (28).

Дальнейшее рассмотрение проводится в пространстве $L_2(D)$ функций с интегрируемым квадратом в области D , в котором вводится скалярное произведение

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \iint_D \varphi_1 \varphi_2 d\Omega$$

и норма функции

$$\|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)}.$$

Введенное выше множество функций M образует плотное в пространстве $L_2(D)$ линейное многообразие.

Легко видеть, что при наших предположениях о гладкости границы области D норма функции $\omega_n(s, \nu, \varepsilon)$ ограничена константой, не зависящей от ε :

$$\|\omega_n\| < K_n. \quad (29)$$

Далее, пусть φ_1 и φ_2 — любые две функции из M . Тогда

$$\begin{aligned} (B\varphi_1, \varphi_2) &= (-\nabla^2 \varphi_1, \varphi_2) = - \int_{L_0} \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \varphi_2 ds - \int_{L_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \varphi_2 ds + \\ &+ \iint_D \vec{\nabla} \varphi_1 \cdot \vec{\nabla} \varphi_2 d\Omega_1 = \iint_D \vec{\nabla} \varphi_1 \cdot \vec{\nabla} \varphi_2 d\Omega. \end{aligned}$$

(Контурные интегралы обращаются в 0 в силу краевых условий). Таким образом, B — есть симметрический положительный оператор, и его наименьшее собственное значение λ_1 , можно получить решением вариационной задачи

$$\lambda_1 = \min_{\varphi \in M} \frac{(B\varphi, \varphi)^*}{(\varphi, \varphi)}.$$

Для дальнейшего нам потребуется оценка величины λ_1 снизу. Пусть φ — собственная функция, соответствующая собственному значению λ_1 , причем $\|\varphi\| = 1$. Имеем:

$$\begin{aligned} \lambda_1 = (B\varphi, \varphi) &= \iint_D (\vec{\nabla} \varphi)^2 d\Omega = \int_0^{l_1} ds \int_0^{\varepsilon h} \left\{ (1 + \kappa n) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)^2 + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{1 + \kappa n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s} \right)^2 \right\} dn \geq \int_0^{l_1} ds \int_0^{\varepsilon h} \left\{ \alpha^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)^2 + \beta^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s} \right)^2 \right\} dn. \\ &\left(\alpha^2 \leq 1 + \kappa n \leq \frac{1}{\beta^2} \right). \end{aligned}$$

* См., например [3].

Положим $n = \alpha y$, $s = \beta x$ и введем функцию

$$\psi(x, y) = \begin{cases} \varphi(x, y) & \text{при } 0 \leq y \leq \frac{\varepsilon h(\beta x, \varepsilon)}{\alpha} \\ 0 & \text{при } \frac{\varepsilon h(\beta x, \varepsilon)}{\alpha} \leq y \leq \frac{\varepsilon}{\alpha}. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned} (B\varphi, \varphi) &\geq \alpha\beta \int_0^{l_1/\beta} dx \int_0^{\varepsilon h/\alpha} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] dy = \\ &= \alpha\beta \int_0^{l_1/\beta} dx \int_0^{\varepsilon/\alpha} \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \right] dy = \alpha\beta I(\psi). \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned} 1 = \|\varphi\|^2 &= \int_0^{l_1} ds \int_0^{\varepsilon h} \varphi^2 (1 + \alpha n) dn \leq \frac{1}{\beta^2} \int_0^{l_1} ds \int_0^{\varepsilon h} \varphi^2 dn = \\ &= \frac{\alpha}{\beta} \int_0^{l_1/\beta} dx \int_0^{\varepsilon h/\alpha} \varphi^2 dy = \frac{\alpha}{\beta} \int_0^{l_1/\beta} dx \int_0^{\varepsilon/\alpha} \psi^2 dy, \end{aligned}$$

то, обозначив

$$\|\psi\|_1 = \sqrt{\int_0^{l_1/\beta} dx \int_0^{\varepsilon/\alpha} \psi^2 dy},$$

получаем

$$\|\psi\|_1^2 \geq \frac{\beta}{\alpha}$$

и, следовательно,

$$\lambda_1 = (B\varphi, \varphi) \geq \alpha\beta I(\psi) \geq \beta^2 \frac{I(\psi)}{\|\psi\|_1^2} \geq \beta^2 \mu_1, \quad (30)$$

где μ_1 — наименьшее собственное значение оператора, определяемого дифференциальной операцией Лапласа $-\nabla^2 = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ в прямоугольной области $(0 < x < \frac{l_1}{\beta}, 0 < y < \frac{\varepsilon}{\alpha})$ при краевых условиях

$$\begin{aligned} \psi\left(x, \frac{\varepsilon}{\alpha}\right) &= 0, \\ \psi(x, 0) &= \text{const}, \\ \int_0^{l_1/\beta} \frac{\partial \psi(x, 0)}{\partial y} dx &= 0, \end{aligned}$$

и, кроме того, при условиях периодичности

$$\begin{aligned} \psi(0, y) &= \psi(l_1/\beta, y) \\ \psi'_x(0, y) &= \psi'_x(l_1/\beta, y) *). \end{aligned}$$

Но величина μ_1 может быть найдена непосредственно обычным методом разделения переменных в рассматриваемой прямоугольной области. После соответствующих вычислений находим

$$\mu_1 = \frac{\pi^2 \alpha^2}{\varepsilon^2} + \frac{4\pi^2 \beta^2}{l_1^2} > \frac{\pi^2 \alpha^2}{\varepsilon^2}.$$

* Функции ψ при этом предполагаются дважды непрерывно дифференцируемыми в D и непрерывными вместе с частными производными первого порядка в замкнутой области $\bar{D}$. Неравенство (30) вытекает из того, что функцию ψ (с разрывными производными 1-го порядка) можно как угодно хорошо аппроксимировать функциями φ из указанного класса M .

Отсюда

$$\lambda_1 \geq \beta^2 \mu_1 > \frac{\pi^2 \alpha^2 \beta^2}{\varepsilon^2}. \quad (31)$$

Перейдем к оценке нормы функции w , являющейся решением краевой задачи (27), (28). Так как $Bw = \frac{\omega_n}{\varepsilon^2}$, то воспользовавшись оценками (29) и (31), получаем

$$\|w\| \leq \|B^{-1}\| \left\| \frac{\omega_n}{\varepsilon^2} \right\| \leq \frac{1}{\varepsilon^2 \lambda_1} \|\omega_n\| \leq \frac{K_n}{\pi^2 \alpha^2 \beta^2}.$$

Поэтому

$$\|W_{n, \varepsilon}\| = \|w + w_0\| \leq \|w\| + \|w_0\| \leq \frac{K_n}{\pi^2 \alpha^2 \beta^2} + C_1 = C_2(n),$$

(C_1 не зависит от ε) и, таким образом,

$$\left\| \Phi - \sum_{j=1}^n \varepsilon^j \Phi_j \right\| = \|\varepsilon^{n+1} W_{n, \varepsilon}\| \leq \varepsilon^{n+1} C_2(n).$$

Отсюда следует наше утверждение:

$$\Phi \sim \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j \Phi_j$$

в метрике $L_2(D)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. С. Лейбензон. Курс теории упругости, Гостехиздат, М., 1947.
2. Н. И. Ахиезер. Лекции по вариационному исчислению, ГИТТЛ, М., 1953.
3. Г. М. Михлин. Прямые методы в математической физике, ГИТТЛ, М.—Л., 1950.