УДК 517.9+513.8

Ф. С. РОФЕ-БЕКЕТОВ, А. М. ХОЛЬКИН

СВЯЗЬ СПЕКТРАЛЬНЫХ И ОСЦИЛЛЯЦИОННЫХ СВОЙСТВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА. II. ПРИМЕНЕНИЯ ФАКТОРИЗАЦИИ И ВОЗВЕДЕНИЯ В КВАДРАТ

Обозначения, определения, нумерация формул, теорем и т. п. продолжают принятые в [1]. Список литературы свой.

§ 4. Мультипликативное представление положительных дифференциальных операторов и его приложения. Факторизационная теорема Фробениуса [2, с. 214] допускает следующее обобщение на случай конечных и бесконечных систем дифференциальных уравнений.

Теорема 3. *Пусть* $\omega(x) \in B(H^n, H)$ — *какое-нибудь самосогласованное решение уравнения*

$$l[y] \equiv \sum_{j=0}^{n} (-1)^j D^j p_j(x) D^j y + \frac{i}{2} \sum_{j=0}^{r-n-1} (-1)^j D^j \{D q_j(x) + q_j^*(x) D\} D^j y = \lambda W(x) y, \quad D = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}, \tag{1}$$

при $\lambda = 0$, $r = 2n$ (*дефинитность* $p_n(x)$ *и полуограниченность операции* l *здесь не требуются*). *Тогда в каждой точке* $x \in (a, b)$, *где существует* $(\omega^\wedge)^{-1}(x) \in B(H^n)$, *операция* l (1) *допускает мультипликативное представление*

$$l[y] = \mu^+ p_n(x) \mu[y], \tag{23}$$

где

$$\mu[y] = y^{(n)} - \omega^{(n)}(x)(\omega^\wedge)^{-1}(x) y^\wedge, \tag{24}$$

μ^+ — *операция, формально сопряженная к* μ *в* $L_2\{H; (a, b); \mathrm{dx}\}$. *При этом*

$$\mu[\omega] = 0, \quad \mu^+[\{0_H; \ldots; 0_H; I_H\}(\omega^\wedge)^{*-1}] = 0. \tag{25}$$

Напомним, что при $r = 2n$

$$y^{\wedge}(x) = \mathrm{col}\,\{y^{(k)}(x)\}_{k=0}^{n-1}, \quad y^{\vee}(x) = \mathrm{col}\,\{y^{[2n-j]}(x)\}_{j=1}^{n}, \tag{5}$$

где $y^{[j]}$ — квазипроизводные (7) (см. [1]).

Доказательство. В силу (24) очевидно, что $\mu[\omega] = 0$. Поскольку операцию μ можно записать в виде

$$\mu[y] = y^{(n)} - \{0_H;\ \ldots;\ 0_H;\ I_H\}(d\omega^{\wedge} / \mathrm{dx})(\omega^{\wedge})^{-1} y^{\wedge} =$$

$$= \{0_H;\ \ldots;\ 0_H;\ I_H\}\left\{I_{H^n}D - \left(\frac{d}{\mathrm{dx}}\omega^{\wedge}\right)(\omega^{\wedge})^{-1}\right\}\begin{pmatrix} I \\ ID \\ \vdots \\ ID^{n-1}\end{pmatrix} y,$$

где $D = \frac{d}{\mathrm{dx}}$, то операция μ^{+}, формально сопряженная к μ в $L_2\{H; (a, b);\ \mathrm{dx}\}$, имеет вид $\mu^{+}[y] = -\{I;\ -ID;\ \ldots;\ (-I)^{n-1}D^{n-1}\} \times$

$$\times \left\{I_{H^n}D + (\omega^{\wedge})^{-1*}\frac{d}{\mathrm{dx}}(\omega^{\wedge})^{*}\right\}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I\end{pmatrix} y.$$ Поэтому $\mu^{+}[\{0;\ \ldots;\ 0; I\}(\omega^{\wedge})^{*-1}] =$

$$= \{-I; ID; \ldots; (-I)^{n} D^{n-1}\}\left\{I_{H^n}D + (\omega^{\wedge})^{*-1}\frac{d}{\mathrm{dx}}(\omega^{\wedge})^{*}\right\}\left[I_{H^n} - \begin{pmatrix} & I & & \\ & & I & \\ & & & \ddots \\ & & & & I \\ & & & & 0\end{pmatrix}\right] \times$$

$$\times (\omega^{\wedge})^{*-1} = \{-I; ID; \ldots; (-I)^{n}D^{n-1}\}\left\{\frac{d}{\mathrm{dx}}[(\omega^{\wedge})^{*-1}] + (\omega^{\wedge})^{*-1}\left(\frac{d}{\mathrm{dx}}(\omega^{\wedge})^{*}\right) \times\right.$$

$$\left.\times (\omega^{\wedge})^{*-1} - \begin{pmatrix} D & & & \\ I & D & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & D \\ & & & I & 0\end{pmatrix}(\omega^{\wedge})^{*-1}\right\} = 0.$$

Непосредственно проверяется, что

$$V(x, t) = \omega(x)(\omega^{\wedge})^{-1}(t)\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I\end{pmatrix} : H \to H \tag{6}$$

является операторно-значной функцией Коши для $\mu[y]$, а поэтому $-V^{*}(t, x)$ — функция Коши для $\mu^{+}[y]$. В частности, $\mu_x^{+}[V^{*}(t, x)] = 0$ в силу (25), а

$$\mu_x^{+}\left[\int_{\xi}^{x} V^{*}(t, x)\, l_t[y]\,\mathrm{dt}\right] = -l_x[y], \tag{26}$$

если в точке $\xi \in (a, b)$ оператор $\omega^{\wedge}(x)$ имеет ограниченный обратный на всем H^n и x принадлежит той окрестности ξ, где это свойство сохраняется в силу непрерывности $\omega^\wedge(x)$. Подсчитаем левую часть (26) непосредственно, интегрируя по частям:

$$\int_\xi^x V^*(t, x)\, l_t[y]\,\mathrm{dt} = \int_\xi^x (l_t[V(t, x)])^* y(t)\,\mathrm{dt} + [V^{\vee *}(t, x)\, y^\wedge(t) -$$
$$- V^{\wedge *}(t, x)\, y^\vee(t)]\Big|_{t=\xi}^x = \{0;\ \ldots;\ 0;\ I\}\{(\omega^\wedge)^{*-1}(x)(\omega^\vee)^*(x)\, y^\wedge(x) -$$
$$- y^\vee(x)\} - \{0;\ \ldots;\ 0;\ I\}(\omega^\wedge)^{*-1}(x)\{(\omega^\vee)^*(\xi)\, y^\wedge(\xi) -$$
$$- (\omega^\wedge)^*(\xi)\, y^\vee(\xi)\}. \qquad (27)$$

Так как решение $\omega(x)$ — самосогласованно, то $(\omega^\vee)^*\omega^\wedge - (\omega^\wedge)^*\omega^\vee = 0$, поэтому $(\omega^\wedge)^{*-1}(\omega^\vee)^* = \omega^\vee(\omega^\wedge)^{-1}$ и первая половина правой части (27), с учетом (5) и так как

$$y^{[n]} = p_n y^{(n)} - \frac{i}{2}\, q_{n-1} y^{(n-1)}, \qquad (7)$$

равна

$$\{0;\ \ldots;\ 0;\ I\}\,\omega^\vee(x)(\omega^\wedge)^{-1}(x)\, y^\wedge(x) - y^{[n]}(x) =$$
$$= \omega^{[n]}(\omega^\wedge)^{-1} y^\wedge - y^{[n]} =$$
$$= p_n\{\omega^{(n)}(\omega^\wedge)^{-1} y^\wedge - y^{(n)}\} - \frac{i}{2}\, q_{n-1}\{\omega^{(n-1)}(\omega^\wedge)^{-1} y^\wedge - y^{(n-1)}\} =$$
$$= -p_n\mu[y] - \frac{i}{2}\, q_{n-1}\{\{0;\ \ldots;\ 0;\ I\}\, y^\wedge - y^{(n-1)}\} = -p_n(x)\,\mu[y].$$

Поэтому из (26) и (27), в силу (25), получаем (23). Теорема 3 доказана *.

В качестве примера применения доказанной теоремы установим достаточный критерий осцилляторности уравнений четного порядка $2n$, который в случае уравнений второго порядка с операторно-значными коэффициентами обобщает относящуюся специально к этому случаю теорему Этджена и Павловски [3], так как допускает операторы, содержащие члены с первой производной.

Определение 3. *Уравнение* (1) *порядка* $2n$ *с позитивным старшим коэффициентом называем осцилляторным при* $\lambda = 0$ *в окрестности* $x = \infty$, *если оно не имеет самосогласованных решений* $Y(x, 0) \in B(H^n, H)$ *таких, что существует* $(Y^\wedge)^{-1}(x, 0) \in B(H^n)$ *при каждом достаточно большом* x.

При $\dim H < \infty$ определение эквивалентно общепринятому [2].

Пусть g — линейный позитивный функционал на C^*-алгебре $B(H)$. Широкий класс таких функционалов имеет вид $g(T) = \mathrm{sp}(AT)$, где $A = A^* \geqslant 0$ — ядерный оператор. При $\dim H < \infty$ такой вид, как известно (Уолтерс, 1980), имеют все позитивные функционалы на $B(H)$.

Полагаем $g(D^j p(x) D^k) = D^j g(p(x)) D^k$, где $p(x) \in B(H)$.

---

* Общая идея приведенного доказательства сходна с доказательством М. Г. Крейна 1937 г. теоремы Фробениуса [2, п. 44], однако последнее основано на использовании детерминантов, поэтому наша схема отличается и в скалярном случае от известных, включая и формулировку теоремы Фробениуса, которая заменяется эквивалентной.

Теорема 4. *Если скалярное уравнение $g(l)[u]=0$ осцилляторно, то и операторное уравнение* (1) *порядка $2n$ с позитивным старшим коэффициентом $p_n(x)\gg 0$ тоже осцилляторно при $\lambda=0$.*

Доказательство. Пусть $g(l)[u]=0$ — осцилляторно, тогда [2] $\forall N>0$ найдутся $\alpha>0$, $x_2>x_1>N$ такие, что существует нетривиальное решение $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{C}$ скалярной задачи $g(l)[f]=-\alpha f$, $f^\wedge(x_1)=f^\wedge(x_2)=0$. С другой стороны, если уравнение $l[u]=0$ неосцилляторно, то оно имеет решение $\omega(x)$, удовлетворяющее при всех $x>N>0$, N — достаточно большое число, условиям теоремы 3, а поэтому при $x>N$ операция l допускает мультипликативное представление (23). Поэтому, интегрируя по частям и применяя затем к обеим частям равенства функционал g, приходим к противоречию:

$$0\leqslant g\left(\int_{x_1}^{x_2}(\mu[f])^*p_n(x)\,\mu[f]\,dx\right)=$$

$$=\int_{x_1}^{x_2}\bar f(x)\,g(l)f(x)\,dx=-\alpha\int_{x_1}^{x_2}|f|^2\,dx<0.$$

Теорема доказана.

Обобщением теоремы М. Г. Крейна—Хайнца—Реллиха [2, п.° 44] является

Теорема 5. *Пусть $p_n(x)\gg 0$, $r=2n$. Тогда неотрицательность минимального оператора L эквивалентна любому из двух следующих условий:*

1°. *Представимость дифференциальной операции l* (1) *в виде* (23), *где $\mu[y]=y^{(n)}+s_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\ldots+s_0(x)y$, $a<x<b$, $s_k(x)\in\in C^n(a,b)$, $k=0,1,\ldots,n-1$.*

2°. *Существование $\omega(x)$, удовлетворяющего условиям теоремы 3 при всех $x\in(a,b)$, включая обратимость $\omega^\wedge(x)$.*

Замечание 3. Если рассматриваемый дифференциальный оператор положительно определен $L\gg 0$, то он допускает факторизацию и в замыкании (a,b) и там же $(\omega^\wedge)^{-1}\in B(H^n)$. Если $-\infty<a<b<\infty$, то верно и обратное утверждение.

Доказательство. Если выполняется любое из условий 1°, 2° теоремы, то операция l допускает мультипликативное представление (23) и неотрицательность операции $l=\mu^+p_n\mu$, даже при $p_n(x)\geqslant\geqslant 0$, очевидна. Если же $-\infty<a<b<\infty$ и операция l допускает мультипликативное представление в $[a,b]$ и там же $(\omega^\wedge)^{-1}\in B(H^n)$, то минимальный оператор L положительно определен, поскольку в противном случае для самосопряженного расширения L_b^0, порожденного условиями $y^\wedge(b)=0$ и

$$\omega^{\wedge*}(a)\,y^\vee(a)-\omega^{\vee*}(a)\,y^\wedge(a)=0,\tag{28}$$

имели бы $\inf\sigma(L_b^0)\leqslant 0$ и поэтому, в силу непрерывной и строго монотонной зависимости $\inf\sigma(L_\xi^0)$ от ξ, где L_ξ^0 порожден выражением l (1) и условиями (28) и $y^\wedge(\xi)=0$, и так как при $\xi\searrow a$ $\inf\sigma(L_\xi^0)\nearrow+\infty$

(см. [4; 5, лемма 2], условие (28) полуограниченное*), нашлась бы точка $\xi \in (a, b)$ такая, что $0 \in \sigma(L_\xi^0)$. Но тогда в силу леммы 1 из [1] было бы $0 \in \sigma(\omega^\wedge(\xi))$, вопреки условию.

Пусть теперь $L \geqslant 0$. Если a (или b) конечно, то в качестве $\omega(x)$ возьмем фундаментальное решение (ф. р.) уравнения $l[y] = 0$ с начальными данными: $\omega^\wedge(a) = 0$, $\omega^\vee(a) = I$ (или соответственно $\omega^\wedge(b) = 0$, $\omega^\vee(b) = I$). Если бы при некотором $\xi \in (a, b)$ оказалось, что $0 \in \sigma(\omega^\wedge(\xi))$, то мы имели бы по лемме 1 из [1], что $0 \in \sigma(L_\xi^0)$, где L_ξ^0 — самосопряженный оператор, порожденный задачей (1), $y^\wedge(\xi) = 0$, $y^\wedge(a) = 0$ $(y^\wedge(b) = 0)$. Поэтому, в силу строгой монотонности по ξ нижней грани рассматриваемой задачи (см. [4] или [5, лемма 2]), оказалось бы, что $\inf \sigma(L^F) < 0$, вопреки неотрицательности минимального оператора L. Таким образом, $(\omega^\wedge)^{-1}(x) \in B(H^n)\, \forall x \in (a, b)$, поэтому по теореме 3 представление (23) справедливо всюду в (a, b) и $\mu[y]$ обладает указанными свойствами.

Если оператор L положительно определен и a (или b) конечно, то, выбирая на противоположном конце самосопряженное граничное условие $U_b^F[y] = 0$, отвечающее расширению по Фридрихсу, получим, что минимальный относительно точки $\xi \in [a, b)$ $(\xi \in (a, b])$ оператор $L_\xi \gg 0$ в $H(\xi, b)$ (соответственно в $H(a, \xi)$). Поэтому 0 оказывается точкой регулярного типа для L и существует ф. р. $\omega(x) = Y(x, 0)$ задачи $l[y] = 0$, $U_b^F[y] = 0$ (или $U_a^F[y] = 0$), причем по лемме 1 из [1] оператор $\omega^\wedge(x)$ имеет ограниченный обратный во всем H^n при всех $x \in [a, b)$ $(x \in (a, b])$. Если a и b конечны, то в силу непрерывной зависимости нижней грани спектра оператора L^F от a и b [4; 5, лемма 2] при некоторых $\varepsilon, \varepsilon' > 0$ минимальный оператор в $H(a - \varepsilon, b + \varepsilon')$ положительно определен. Поэтому существует решение $\omega(x)$, удовлетворяющее условиям теоремы 3 на $(a - \varepsilon, b + \varepsilon') \supset [a, b]$.

Таким образом, если хотя бы один из концов интервала (a, b) является конечным, то теорема 5 и замечание 3 доказаны.

Теперь пусть $a = -\infty$, $b = \infty$. Тогда, если $0 \in \inf \sigma_e(L)$, то ф. р. $Y(x, \lambda)$ задачи (1), с $U_a[y] = 0$, удовлетворяющего определению 1 из [1] (см. также [5]), может не существовать при $\lambda = 0$. Построим на нижней грани предельного спектра минимального оператора L самосогласованное операторное решение $\omega(x) \in B(H^n, H)$ уравнения (1) на оси, удовлетворяющее условиям теоремы 3. Этим будет завершено доказательство теоремы 5.

Пусть $Y_0(x)$, $Y_1(x) \in B(H^n, H)$ — решения уравнения (1) при $\lambda = 0$ и при начальных условиях

$$Y_0^\wedge(0) = I_n, \quad Y_0^\vee(0) = 0_n, \quad Y_1^\wedge(0) = 0_n, \quad Y_1^\vee(0) = I_n.$$

Положим $\omega_\alpha(x) = Y_0(x) + Y_1(x) C_\alpha$, $0 \neq \alpha \in \boldsymbol{R}$, где

$$C_\alpha = -(Y_1^\wedge)^{-1}(\alpha) \cdot Y_0^\wedge(\alpha) \in B(H^n) \tag{29}$$

выбрано так, что $\omega_\alpha^\wedge(\alpha) = 0$. (Существование $(Y_1^\wedge)^{-1}(\alpha) \in B(H^n)$ обеспечено при $\alpha \neq 0$, так как $L \geqslant 0$ на оси).

* Так как $[\omega^{\wedge *}(a)]^{-1} \in B(H^n)$.

Покажем, что $\omega_\alpha(x)$ является самосогласованным ф. р. задачи $l[y]=0$, $y^\wedge(\alpha)=0$, $\alpha\neq 0$, $x\in R$ (30). Прежде всего заметим, что $C_\alpha^* = C_\alpha$, так как $0 = W_\alpha\{\omega_\alpha, \omega_\alpha\} = W_0\{\omega_\alpha, \omega_\alpha\} = C_\alpha^* - C_\alpha$, поэтому $\omega_\alpha(x)$ удовлетворяет самосопряженному краевому условию при $x=0$: $y^\vee(0) - C_\alpha y^\wedge(0) = 0$ (31). Так как $\omega_\alpha(0) = I_n$, $\omega_\alpha^\wedge(0) = C_\alpha$, то любое решение $l[y]=0$, удовлетворяющее (31), представимо в виде $y = \omega_\alpha(x)h$, $h\in H^n$ и

$$M_{\omega_\alpha}(x) \equiv \sum_{k=0}^{2n-1} \omega_\alpha^{(k)*}(x)\,\omega_\alpha^{(k)}(x) \gg 0, \tag{32}$$

так как $M_{\omega_\alpha}(0) \geqslant I_n \gg 0$ (ср. (11) из [1]). Следовательно, $\omega_\alpha(x)$ является самосогласованным ф. р. задачи $l[y]=0$ и (31), а поэтому в силу [6, лемма 2] существует $[\omega_\alpha^\vee(x) + i\omega_\alpha^\wedge(x)]^{-1}\in B(H^n)$, откуда при $x=\alpha$ следует существование $[\omega_\alpha^\vee(\alpha)]^{-1}\in B(H^n)$. Это означает, что любое решение задачи (30) представимо в виде $\omega_\alpha(x)h$, $h\in H^n$, и потому, учитывая (32), видим, что $\omega_\alpha(x)$ есть самосогласованное ф. р. задачи (30). Поэтому при всех $x\neq\alpha$ оператор $\omega_\alpha^\wedge(x)$ имеет ограниченный обратный во всем H^n, так как, если при некотором $\xi\neq\alpha$ $0\in\sigma(\omega_\alpha^\wedge(\xi))$, то в силу леммы 1 $0\in\sigma(\overset{0}{L}_{\alpha,\xi})$, где $\overset{0}{L}_{\alpha,\xi}$ — самосопряженный оператор, порожденный задачей (1) с $y^\wedge(\alpha) = y^\wedge(\xi) = 0$ на отрезке $[\alpha,\xi]$ ($[\xi,\alpha]$), вопреки тому, что $L\geqslant 0$ на $(-\infty,\infty)$ и что нижняя грань $\sigma(\overset{0}{L}_{\alpha,\xi})$ строго убывает при расширении конечного интервала [4, 5].

Из (29) имеем

$$\frac{dC_\alpha}{d\alpha} = (Y_1^\wedge)^{-1}\left(\frac{d}{d\alpha}Y_1^\wedge\right)(Y_1^\wedge)^{-1}Y_0^\wedge - (Y_1^\wedge)^{-1}\frac{d}{d\alpha}Y_0^\wedge. \tag{33}$$

Как известно, при $r=2n$ уравнение (1) сводится к симметричной системе вида

$$J\frac{dz}{dx} = (\lambda A(x) + B(x))z, \tag{34}$$

где $z(x,\lambda) = y^\wedge(x,\lambda)\oplus y^\vee(x,\lambda)\in H^{2n}$,

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix},\quad A(x) = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad B(x) = B^*(x) = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

— операторы в H^{2n}, причем

$$B_{22}(x) = \underbrace{0\oplus\ldots\oplus 0\oplus}_{n-1} p_n^{-1}(x). \tag{35}$$

Используя систему (34) при $\lambda=0$, из (33) получим

$$\frac{dC_\alpha}{d\alpha} = (Y_1^\wedge)^{-1}\{(B_{21}Y_1^\wedge + B_{22}Y_1^\vee)(Y_1^\wedge)^{-1}Y_0^\wedge - (B_{21}Y_0^\wedge + B_{22}Y_0^\vee)\} =$$
$$= (Y_1^\wedge)^{-1}B_{22}\{Y_1^\vee(Y_1^\wedge)^{-1}Y_0^\wedge - Y_0^\vee\}.$$

Поскольку $0=W_0\{Y_1, Y_1\}=W_\alpha\{Y_1, Y_1\}$, то

$$Y_1^\vee(\alpha)(Y_1^\wedge)^{-1}(\alpha)=(Y_1^\wedge)^{*-1}(\alpha)\cdot(Y_1^\vee)^*(\alpha),$$

поэтому

$$\frac{dC_\alpha}{d\alpha}=(Y_1^\wedge)^{-1}B_{22}\{(Y_1^\wedge)^{*-1}(Y_1^\vee)^*Y_0^\wedge-(Y_1^\wedge)^{*-1}(Y_1^\wedge)^*Y_0^\vee\}=$$
$$=(Y_1^\wedge)^{-1}B_{22}(Y_1^\wedge)^{*-1}W_\alpha\{Y_1, Y_0\}=(Y_1^\wedge)^{-1}B_{22}(Y_1^\wedge)^{*-1}W_0(Y_1, Y_0)=$$
$$=(Y_1^\wedge)^{-1}B_{22}(Y_1^\wedge)^{-1*}\geqslant 0 \tag{36}$$

(последнее в силу (35) и так как $p_n(x)\gg 0$).

Покажем, что $|C_\alpha|<\text{const}$ при $\alpha\to\pm\infty$ (и, вообще, при $\alpha\in R\setminus(-\varepsilon, \varepsilon)$, $\varepsilon>0$).

В силу (36) верхняя грань оператора $C_\alpha=C_\alpha^*$ остается при $\alpha\to-\infty$ ограниченной сверху. Нижняя грань C_α, т. е. $\inf\sigma(C_\alpha)$, ограничена снизу при $\alpha\to-\infty$, так как, если бы для некоторой последовательности $\alpha_k\to-\infty$ было бы $\inf\sigma(C_{\alpha_k})\to-\infty$, то самосопряженная краевая задача в $H(0, 1)=L_2\{H;\ (0, 1);\ W(x)\,dx\}$:

$$l_W[y]=W^{-1}l[y]=\lambda y,\quad y^\vee(0)-C_{\alpha_k}y^\wedge(0)=0,\quad y^\wedge(1)=0,$$

имела бы при достаточно больших k отрицательную нижнюю грань, что видно из рассмотрения квадратичной формы типа Дирихле с внеинтегральным членом $(C_{\alpha_k}y^\wedge(0),\ y^\wedge(0))$, отвечающей в $H(0, 1)$ этой задаче. Но тогда при таких k нашлось бы $x_k\in(0, 1)$ такое, что $0\in\sigma(\omega_{\alpha_k}^\wedge(x_k))$, вопреки установленному свойству $[\omega_\alpha^\wedge(x)]^{-1}\in B(H^n)$ при $x\neq\alpha$.

В силу ограниченности и монотонности C_α при $\alpha\to-\infty$ существует самосопряженный сильный предел $C=s-\lim\limits_{\alpha\to-\infty}C_\alpha$.

Положим $\omega(x)=Y_0(x)+Y_1(x)C$. Поскольку C_α не убывает при $\alpha\neq 0$, то при любом $\xi<0$ нижняя грань оператора в $H(\xi, 0)$, порожденного $l_W[y]$ и самосопряженными граничными условиями $y^\wedge(\xi)=0$, $y^\vee(0)-C_\alpha y^\wedge(0)=0$, не понижается при $\alpha\searrow-\infty$, поэтому дифференциальный оператор, порожденный (1), $y^\wedge(\xi)=0$, $y^\vee(0)-Cy^\wedge(0)=0$, имеет положительную нижнюю грань и в силу теоремы 1 из [1] оператор $\omega^\wedge(x)$ ограниченно обратим на всем H^n при всех $x\leqslant 0$. На правой полуоси рассмотрим семейство операторов L_α, являющихся расширением по Фридрихсу минимального относительно $x=\infty$ оператора L'_α, порожденного в $H(0, \infty)$ выражением $l_W[y]$ и краевым условием в нуле (31). Оператор $L_\alpha\geqslant 0$ и не возрастает по α в силу (36). Поэтому в пределе при $\alpha\to-\infty$ имеем $L_{(-\infty)}\geqslant 0$ и оператор $\omega^\wedge(x)$ ограниченно обратим в H^n на всей оси. Теорема доказана.

Следствие 3. *Если для некоторой нетривиальной вектор-функции* $h(x)\in C^{2n}(\alpha, \beta)$, $h^{(k)}(\alpha)=h^{(k)}(\beta)=0$, $k=0, 1, \ldots, n-1$, $a\leqslant\alpha<\beta\leqslant b$: $\int\limits_\alpha^\beta(l[h], h)\,dx\leqslant 0$, *(в частности, если* α *и* β *— сопря-*

женные точки), то для любого самосогласованного решения ω, $l[\omega]=0$, *найдется точка* $x\in[\alpha,\beta]$, *где* $\omega^{\wedge}(x)$ *не имеет ограниченного обратного во всем* H^n. *Если неравенство строгое, то такая точка найдется в* (α,β).

(При $\dim H<\infty$ и $r=4$ отсюда следует результат Л. М. Кукса (1974) и к тому же при меньших ограничениях).

Действительно, если бы существовало самосогласованное решение $\omega(x)$ уравнения $l[\omega]=0$ такое, что $\omega^{\wedge}(x)$ имеет ограниченный обратный во всем H^n при всех $x\in[\alpha,\beta]$, то в силу замечания 3 минимальный в $H(\alpha,\beta)$ оператор, а с ним и его расширение по Фридрихсу были бы положительно определены, вопреки тому, что $h\in D(L^F)$ и $\langle L^Fh, h\rangle\leqslant 0$. Если неравенство строгое, то, используя теорему 5 и рассуждая аналогично, получаем второе утверждение следствия.

§ 5. Уровни в лакуне предельного спектра. Не требуя ни полуограниченности минимального оператора $L\subseteq\tilde L$, где $\tilde L$ — некоторое его самосопряженное расширение, порожденное распадающимися краевыми условиями $U_a[y]=0$, $U_b[y]=0$, ни четности порядка r дифференциального уравнения (1) (допускается $r=2n$ и $r=2n+1$), предположим C^{2r} — гладкость коэффициентов операции $l_W[y]=W^{-1}l[y]$ и обозначим M замкнутый минимальный дифференциальный оператор, порожденный в $H(a,b)$ операцией $l_W^2[y]=l_W[l_W[y]]$ **(37).**

Поскольку операторы M и $(\tilde L)^2$ совпадают на C_0^∞, то $M\subseteq(\tilde L)^2$, т. е. $(\tilde L)^2$ является некоторым самосопряженным расширением $\tilde M$ положительного симметрического оператора M.

Обозначим M_b — сужение оператора $\tilde M$ требованием минимальности относительно b, $p=\operatorname{Def}\{\tilde M\mid D(\tilde M)\cap D(M_b^F)\}$, $N(\lambda,\mu)$ — количество собственных значений $\lambda_k\in(\lambda,\mu)$ оператора $\tilde L$ с учетом их кратностей $\varkappa(\lambda_k)$.

Пусть $Y(x,\lambda)$ — ф. р. задачи (1) с $U_a[y]=0$. Положим

$$Y(x,\lambda,\mu)=\{Y(x,\lambda);\ Y(x,\mu)\}:H^2\to \mathrm{H} \tag{38}$$

$$Y^{\triangle}(x,\lambda,\mu)=\operatorname{col}\{Y^{(k)}(x,\lambda,\mu)\}_{k=0}^{r-1}. \tag{39}$$

Теорема 6*. *Пусть* (α,β) — *лакуна в предельном спектре* $\tilde L$, $\alpha<\lambda<\mu<\beta$. *Тогда*

$$N(\lambda,\mu)-p\leqslant\sum_{x\in(a,b)}\operatorname{nul}Y^{\triangle}(x,\lambda,\mu)\leqslant N(\lambda,\mu), \tag{40}$$

причем

$$\operatorname{nul}Y^{\triangle}(x,\lambda,\mu)=\operatorname{nul}Y^{\triangle *}(x,\lambda,\mu). \tag{41}$$

Если $\varkappa_{L_b}(\lambda)=\varkappa_{L_b}(\mu)=0$, где $L_b\subseteq\tilde L$ — минимальный относительно конца b оператор, то в (40) вместо p можно взять $\min\{p, \operatorname{Def}M_b-\varkappa(\lambda)-\varkappa(\mu)\}$. Если $a>-\infty$, то теорема верна и при $\lambda=\alpha$, $\mu=\beta$.

---

* Случай $r=1$, $\dim H<\infty$, $-\infty<x<\infty$ содержится в [7]. Другой подход к исследованию дискретных уровней в спектральных лакунах, основанный на методе фазовых функций, развит в [8, теорема 4] для скалярного оператора Шредингера.

Замечание 4. Если $b<\infty$, то $0<p=\frac{r}{2}\dim H$, $\operatorname{Def} M_b = r\dim H$. (Из неравенства $p>0$ видно, что при $b<\infty$ расширение по Фридрихсу M_b^F не может быть получено как квадрат самосопряженного дифференциального оператора $\tilde{L}$, т. е. оператор $(M_b^F)^{\frac{1}{2}}$ не является дифференциальным, хотя $M_b^F \geqslant 0$).

Доказательство. Самосопряженное расширение минимального (замкнутого) оператора M, приводящее к самосопряженному оператору $(\tilde{L})^2$, порождается граничными условиями

$$U_a[y]=0,\quad U_a[l_W[y]]=0 \quad \textbf{(42)},\qquad U_b[y]=0,\quad U_b[l_W[y]]=0 \quad \textbf{(43)},$$
$$l_W[y]\in H(a, b) \quad \textbf{(44)}.$$

Последнее условие (44) может полностью или частично оказаться следствием первых двух и требования $y\in D(M^*)$. Условия (42), (43) вместе порождают самосопряженное расширение минимального оператора M в том и только в том случае, когда для каждой функции $y\in D(M^*)$ они влекут, что $l_W[y]\in H(a, b)$.

Поскольку $\operatorname{Def} M \geqslant \operatorname{Def}(L^2)$, то на основании теоремы о квадрате замкнутого симметрического оператора с конечным индексом дефекта (см. [2, с. 48]) имеем при конечных индексах дефекта оператора L $\operatorname{Def}(L^2) = 2\operatorname{Def} L$ и $\operatorname{Def} M \geqslant 2\operatorname{Def} L$ **(45)**. Примеры, в которых реализуется строгое неравенство, известны уже в скалярном случае при $r=2$ (Чаудхури, Эверит, 1969). Если неравенство строгое, то условие (44) полностью не является следствием (42), (43) и требования $y\in D\ (M^*)$. Условия (42) — (44) являются обобщением неравенства (45) и условий, когда оно переходит в равенство, на случай $\operatorname{Def} L=\infty$. (Для скалярного уравнения эквивалентные условия, но в другой форме получил Цеттл в 1975 г.).

Условие (44) является линейным и распадающимся, ибо иначе его можно записать так:

$$\int_a \left| W^{\frac{1}{2}}\, l_W[y]\right|^2 dx<\infty,\qquad \int^b \left| W^{\frac{1}{2}}\, l_W[y]\right|^2 dx<\infty. \quad \textbf{(46 a, b)}$$

Без ограничения общности будем считать, что $\lambda=-\mu<0$. Так как $\mu^2<\inf\sigma_l(M_b)\leqslant\min\{\alpha^2, \beta^2\}$, то уравнение $l_W^2[y]=\mu^2 y$ **(47)** с условиями (42), (46 а) имеет фундаментальное операторное решение $\boldsymbol{Z}(x, \mu^2)\colon \boldsymbol{H}^2\to H$. С другой стороны, оператор-функция $Y(x-\mu, \mu)\colon$ $\colon \boldsymbol{H}^2\to H$ (38) также является решением уравнения (47) и при любом $h\in\boldsymbol{H}^2$ вектор-функция $y_h(x, \mu)=Y(x, -\mu, \mu)h$ **(48)** удовлетворяет условиям (42), (46 а). Оператор $Y(x, -\mu, \mu)$ (38) при $\mu\neq 0$ невырожден, то есть, если $Y(x, -\mu, \mu)h\equiv 0$, $h\in\boldsymbol{H}^2$, то $h=0$. Действительно, пусть $h=h_-\oplus h_+$, где $h_\pm\in\boldsymbol{H}$, и пусть

$$Y(x, -\mu, \mu)h=Y(x, -\mu)h_-+Y(x, \mu)h_+=0. \qquad (49)$$

Тогда

$$0\equiv l_W[Y(x, -\mu)h_-+Y(x, \mu)h_+]=-\mu Y(x, -\mu)h_-+\mu Y(x, \mu)h_+. \qquad \textbf{(50)}$$

Сравнивая (49), (50) при $\mu \neq 0$, получаем $Y(x, -\mu) h_- = Y(x, \mu) \cdot h_+ \equiv \equiv 0$, следовательно, $h_- = h_+ = 0$.

Так как $Z(x, \mu^2)$ есть ф. р. задачи (47), (42), (46 а), то при любом $h \in \boldsymbol{H}^2$ для функции (48) найдется такой $g \in \boldsymbol{H}^2$, что $y_h(x, \mu) = z_g(x, \mu)$, где $z_g(x, \mu) = Z(x, \mu^2) g$ **(51)**. Покажем, что и для любого $g \in \boldsymbol{H}^2$, если $y(x, \mu) = z_g(x, \mu)$ определить формулой (51), найдется такой $h \in \boldsymbol{H}^2$, что будет выполняться (48), т. е. $Y(\cdot, -\mu, \mu) h = Z(\cdot, \mu^2) g$ **(52)**, где любой из векторов h, $g \in \boldsymbol{H}^2$ можно выбирать произвольно, а второй определяется по нему.

Вектор-функция $u(x, \mu) = z_g(x, \mu) - Y(x, \mu) h_+ - Y(x, -\mu) h_-$, $h_\pm \in \boldsymbol{H}$ **(53)** является решением задачи (47), (42), (46). Покажем, что можно подобрать $h_\pm \in \boldsymbol{H}$ так, чтобы

$$(l_W[u])^\wedge(c) = i\mu u^\vee(c, \mu), \quad (l_W[u])^\vee(c) = -i\mu u^\wedge(c, \mu), \tag{54}$$

где $c \in (a, b)$. Тогда, интегрируя по частям, получим $0 = \langle l_W^2[u], u\rangle - \langle u, l_W^2[u]\rangle = ((l_W[u])^\wedge(c), u^\vee(c)) - ((l_W[u])^\vee, u^\wedge(c)) + (u^\wedge(c), (l_W[u])^\vee(c)) - (u^\vee(c), (l_W[u])^\wedge(c)) = 2i\mu[(u^\vee(c), u^\vee(c)) + (u^\wedge(c), u^\wedge(c))]$. Если $\mu \neq 0$, то $u^\wedge(c) = u^\vee(c) = 0$, поэтому в силу (54) $(l_W[u])^\wedge(c) = (l_W[u])^\vee(c) = 0$ и, следовательно, $u(x, \mu) \equiv 0$, откуда вытекает (52).

Для доказательства (54) заметим, что, поскольку $l_W[u] = l_W[z_g] - \mu Y(x, \mu) h_+ + \mu Y(x, -\mu) h_-$, то условия (54) принимают вид $(l_W[z_g])^\wedge(c) - i\mu z_g^\vee(c) = -i\mu V_+(c, \mu) h_+ - i\mu V_-(c, -\mu) h_-$, $(l_W[z_g])^\vee(c) + i\mu z_g^\wedge(c) = \mu V_+(c, \mu) h_+ - \mu V_-(c, -\mu) h_-$, где операторы $V_\pm(x, \mu) := Y^\vee(x, \mu) \pm iY^\wedge(x, \mu) : \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}^\sim$ при всех $x \in (a, b)$ имеют ограниченные обратные, определенные во всем $\boldsymbol{H}^\sim$ (по лемме 2 из [6]). Эта система однозначно разрешима относительно $h_\pm$ и поэтому, взяв в (53) в качестве $h_\pm$ решение этой системы, получим, что $u(x, \mu)$ удовлетворяет (54), и, следовательно, представление (52) доказано.

Так как $Z(x, \mu^2)$ есть ф. р. задачи (47), (42), (46 а) порядка $2r$, то $Z^\wedge(x, \mu^2) = \operatorname{col}\{Z^{(k)}(x, \mu^2)\}_{k=0}^{r-1} : \boldsymbol{H}^2 \to H^r$. В силу (32) и (52) $Z^\wedge(x, \mu^2) g = Y^\triangle(x, -\mu, \mu) h$ **(55)**. Покажем, что при $\mu \neq 0$ $\operatorname{nul} Z^\wedge(x, \mu^2) = \operatorname{nul} Y^\triangle(x, -\mu, \mu)$ **(56)**. Если при некотором $x \in (a, b)$ существуют линейно независимые векторы $h_1, h_2, \ldots, h_k \in \boldsymbol{H}^2$ такие, что $Y^\triangle(x, -\mu, \mu) h_i = 0$, $i = 1, \ldots, k$, то соответствующие им в силу (52) векторы $g_1, g_2, \ldots, g_k \in \boldsymbol{H}^2$ также линейно независимы, ибо иначе существовала бы нетривиальная линейная комбинация $c_1 h_1 + c_2 h_2 + \ldots + c_k h_k$, такая, что $Y(\cdot, -\mu, \mu)(c_1 h_1 + c_2 h_2 + \ldots + c_k h_k) \equiv 0$, вопреки невырожденности $Y(\cdot, -\mu, \mu)$. Следовательно, $\operatorname{nul} Y^\triangle(x, -\mu, \mu) \leqslant \operatorname{nul} Z^\wedge(x, \mu^2)$. Аналогично доказывается обратное неравенство, и мы получаем (56).

Если при некотором $x \in (a, b)$ $h_0 \in \operatorname{Coker} Y^\triangle(x, -\mu, \mu)$, то для всех $h \in \boldsymbol{H}^2$ $(Y^\triangle(x, -\mu, \mu) h, h_0) = 0$ и в силу (52) $(z^\wedge(x, \mu^2) g, h_0) = 0$ для всех $g \in \boldsymbol{H}^2$, следовательно, $\operatorname{Coker} Y^\triangle(x, -\mu, \mu) \subseteq \operatorname{Coker} Z^\wedge(x, \mu^2)$. Аналогично доказывается обратное включение, откуда

$$\operatorname{Coker} Y^\triangle(x, -\mu, \mu) = \operatorname{Coker} Z^\wedge(x, \mu^2). \tag{57}$$

Сравнивая (56) и (57) и учитывая фредгольмовость (т. е. нетеровость с нулевым индексом) ф. р. $Z(x, \mu^2)$ (см. [1, § 1] или [6, теорема 2]), получим (41).

Обозначим $N_1(\mu^2)$ количество собственных значений $\mu_k^2 < \mu^2$ оператора $\tilde{M}$ с учетом их кратностей $\varkappa_1(\mu_k^2)$. Заметим, что $N_1(\mu^2) = N(-\mu, \mu)$, причем $\varkappa_1(0) = \varkappa(0)$ и $\varkappa(-\mu_k) + \varkappa(\mu_k) = \varkappa_1(\mu_k^2)$. Поэтому в силу (56) и осцилляционной теоремы 1 из [1] для оператора $\tilde{M} = (\tilde{L})^2$ имеем (40).

Если $b < \infty$, то самосопряженное расширение $\hat{L}$ минимального относительно точки $x = b$ оператора L_b порождается граничным условием вида (8) из [1]: $\cos B \cdot y^{\vee}(b) + \sin B \cdot y^{\wedge}(b) = 0$ (8), а самосопряженное расширение $\bar{M} = \bar{L}^2$ оператора M_b порождается граничными условиями (8) и

$$\cos B \cdot (l_W[y])^{\vee}(b) + \sin B \cdot (l_W[y])^{\wedge}(b) = 0. \tag{58}$$

Операторы $\tilde{M}$ и $\tilde{M}_b^F$ являются самосопряженными расширениями их максимальной общей части Λ, определенной на вектор-функциях $y \in D(M^*)$, удовлетворяющих условиям (42), (46), $y^{\wedge}(b) = y^{\vee}(b) = 0$ и (58). Индексы дефекта оператора Λ есть

$$(\mathrm{rnk}\{\cos B;\ \sin B\},\ \mathrm{rnk}\{\cos B;\ \sin B\}), \text{ т. е.}$$
$$\mathrm{Def}\{\tilde{M} \mid D(\tilde{M}) \cap D(M_b^F)\} = \frac{r}{2} \dim H.$$

Теорема 6 и замечание 4 доказаны.

Список литературы: 1. *Рофе-Бекетов Ф. С., Холькин А. М.* Связь спектральных и осцилляционных свойств дифференциально-операторных уравнений произвольного порядка. 1. Теоремы типа Штурма // Теория функций, функцион. анализ и их прил.— 1987.— Вып. 48. С. 49—60. 2. *Глазман И. М.* Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов.— М., 1963.— 340 с. 3. *Etgen G., Pawlowski J.* A comparison theorem and oscillation criteria for second order differential systems // Pacif. J. Math.— 1977.— **72**, № 1.— P. 59—69. 4. *Рофе-Бекетов Ф. С., Холькин А. М.* Зависимость спектра операторной краевой задачи от изменения интервала // Теория функций, функцион. анализ и их прил.— 1985.— Вып. 43.— С. 107—119. 5. *Рофе-Бекетов Ф. С., Холькин А. М.* Связь спектральных и осцилляционных свойств дифференциальных систем произвольного порядка // Докл. АН СССР.— 1981.— **261**, № 3.— С. 551—555. 6. *Рофе-Бекетов Ф. С., Холькин А. М.* Фундаментальная система решений операторного дифференциального уравнения с краевым условием на бесконечности // Мат. заметки.— 1984.— **36**, № 5.— С. 697—709. 7. *Холькин А. М.* Осцилляционные теоремы для систем Штурма—Лиувилля и Дирака на оси.// Исследования по теории операторов и их приложениям: Сб. науч. тр.— К., 1979.— С. 147—161. 8. *Рофе-Бекетов Ф. С.* Константы типа Кнезера и эффективные массы для зонных потенциалов // Докл. АН СССР.— 1984.— **276**, № 2.— С. 356—359.

Поступила в редколлегию 25.12.85