УДК 517.5

В. Н. ЛОГВИНЕНКО

# ТЕОРЕМА О СЕПАРАТНОЙ АНАЛИТИЧНОСТИ И ТЕОРЕМА ОБ «ОСТРИЕ КЛИНА»

*Введение.* С. Н. Бернштейну принадлежит замечательная теорема о сепаратно аналитических функциях, опубликованная им в 1911 г. [1, с. 96]. Чтобы сформулировать эту теорему, введем следующие обозначения: $I(h)$ есть интервал $(-h, h)$; $E(h, R)$, $R>1$,— это множество точек комплексной плоскости $\mathbf{C}$, лежащих внутри эллипса с фокусами $\pm h$ и полусуммой осей $hR$.

**Теорема С. Н. Бернштейна** *(для случая двух комплексных переменных). Пусть функция $f(x, y)$ определена на прямоугольнике $I(h)\times I(k)$ и пусть $x\mapsto f(x, y)$, $\forall y\in I(k)$, имеет голоморфное продолжение с $I(h)$ на $E(h, R)$, а $y\mapsto f(x, y)$, $\forall x\in I(h)$, имеет голоморфное продолжение с $I(k)$ на $E(k, S)$, $S>1$. Пусть эти сепаратные продолжения равномерно ограничены.*

*В таком случае при любом $\theta\in(0, 1)$: 1) $f$ имеет голоморфное продолжение с прямоугольника $I(h)\times I(k)$ на $E(h, R^\theta)\times E(k, S^{1-\theta})$; 2) это продолжение в области $E(h, \lambda R^\theta)\times E(k, \mu S^{1-\theta})$ ограничено константой $4M/\{(1-\lambda)(1-\mu)\}$, где $M$ — общая верхняя грань упомянутых сепаратных продолжений, а числа $\lambda$, $\mu$ удовлетворяют неравенствам: $R^{-\theta}<\lambda<1$, $S^{\theta-1}<\mu<1$.*

Эта теорема неоднократно обобщалась (Мальгранж — Цернер [2], Сичак [3], Н. И. Ахиезер — Л. И. Ронкин [4]) и усиливалась [3, 4]. В частности, оказалось, что первое из ее заключений справедливо и без предположения о равномерной ограниченности сепаратных прот должений. В настоящей работе получен несколько иной результа- о сепаратной аналитичности, восходящий к теореме Форелли [5] о голоморфности в некотором шаре пространства $\boldsymbol{C}^n$ функции, все срез-функции которой, отвечающие комплексным прямым, проходящим через центр шара, голоморфны в соответствующих сечениях. Несколько огрубляя, можно сказать, что наш результат о сепаратной аналитичности так относится к теореме Форелли, как теорема С. Н. Бернштейна — к классической теореме Гартогса.

В работе [4] Н. И. Ахиезера — Л. И. Ронкина указан некий путь, ведущий от теорем типа теоремы С. Н. Бернштейна к кругу идей, порожденных известной теоремой Н. Н. Боголюбова об острие клина [6]. Теоремами об острие клина называют следующие предложения. Пусть функции $f_1(z)$, $f_2(z)$ голоморфны в областях $G_1 \subset \boldsymbol{C}^n$, $G_2 \subset \boldsymbol{C}^n$, причем $G_1 \cap G_2 = \varnothing$. Если эти функции совпадают (в том или ином смысле) на $n$-мерном множестве $\Omega \subset \bar{G}_1 \cap \bar{G}_2 \subset \boldsymbol{R}^n$, то они являются сужениями на области $G_1$, $G_2$ некоторой функции $f(z)$, голоморфной в области $G \supset \Omega$. В этом смысле настоящая работа является продолжением работы Н. И. Ахиезера — Л. И. Ронкина: доказанная в § 1 теорема о сепаратной аналитичности и доказанная в § 2 теорема об острие клина получены единым методом, основанным на одном результате Б. Я. Левина, который он сообщил в докладе на Всесоюзной конференции по комплексному анализу (Харьков, 1971 г.) (Б. Я. Левин опубликовал свое доказательство лишь для случая $n = 1$ [7]; наиболее общая теорема, относящаяся к этому кругу вопросов, содержится в совместной работе Б. Я. Левина и автора [8]). Чтобы сформулировать этот результат, нам понадобятся следующие определения. Множество $E \subset \boldsymbol{R}^n$ называется относительно плотным, если оно измеримо, и существуют такие положительные постоянные $L$ и $\delta$, что лебегова мера пересечения $E$ с кубом $K(x, L) = \{y = (y_1, \ldots, y_n) \in \boldsymbol{R}^n : \max\{|x_j - y_j| : j = \overline{1, n}\} \leqslant L\}$ не меньше, чем $\delta$; $L$ и $\delta$ называются при этом характеристиками $E$. Целая в $\boldsymbol{C}^n$ функция $f(z)$ имеет экспоненциальный тип (конечную степень) не выше $\sigma$, если величина $\sup\{|f(z)| \times \exp\{-A(|z_1| + \cdots + |z_n|)\} : z = (z_1, \ldots, z_n) \in \boldsymbol{C}^n\}$ конечна при любом $A > \sigma$; класс таких функций обозначается через $[1, \sigma]_n$.

**Теорема Б. Я. Левина.** *Каждому натуральному $n$ отвечает конечная величина $C_n$ со следующим свойством. Для любого относительно плотного множества $E \subset \boldsymbol{R}^n$ с характеристиками $L$ и $\delta$, любого $\sigma \in (0, \infty)$ и любой функции $f \in [1, \sigma]_n$ справедливо неравенство*

$$\sup\{|f(x)| : x \in \boldsymbol{R}^n\} \leqslant \exp\{C_n \sigma L^{n+1}/\delta\} \sup\{|f(x)| : x \in E\} \quad (1)$$

**§ 1. Теорема о сепаратной аналитичности.** Обозначим через $\boldsymbol{B}$ прямое произведение шаров $B_j = \{x_j = (x_{j,1}, \ldots, x_{j,n_j}) \in \boldsymbol{R}^{n_j} : x_{j,1}^2 + \cdots + x_{j,n_j}^2 < 1\}$, $j = \overline{1, p}$, а через $\boldsymbol{S}$ — остов $\boldsymbol{B}$. Таким образом, $\boldsymbol{S} = S_1 \times \cdots \times S_p$, где $S_j = S^{n_j - 1} = \partial B_j$, $j = \overline{1, p}$. Пусть $\boldsymbol{O}$ обозначает прямое произведение начал координат пространств $\boldsymbol{R}^{n_j}$.

**Теорема 1.** *Пусть функция $f : \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{C}$ такова, что: а) $f \in C^\infty(\boldsymbol{O})$ (т. е. для любого $k \in \boldsymbol{N}$ найдется такая окрестность $U_k$ точки $\boldsymbol{O}$, что $f \in C^k(U_k)$; б) для любого вектора $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_p)$ функция $f(\lambda_1\omega_1, \ldots, \lambda_p\omega_p)$ голоморфно продолжается с куба $\{(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \boldsymbol{R}^p : -1 < \lambda_j < 1,\ j = \overline{1, p}\}$ на полидиск $\{(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \boldsymbol{C}^p : |\lambda_j| < 1.$*

*$j=\overline{1,p}\}$ Тогда $f$ голоморфно продолжается с $\boldsymbol{B}$ на область $\boldsymbol{D}\subset\subset\boldsymbol{C}^n$, $n=n_1+\dots+n_p$, являющуюся прямым произведением $p$ областей*

$$D_j=\{x_j+iy_j\in\boldsymbol{C}^{n_j}: \int_{R^{n_j}} P_j(x_j-t_j, (|y_{j,1}|, \dots, |y_{j,n_j}|)) \ln\|t_j\|\,dt_j<0\},$$

*где $P_j(x_j, y_j)$ — произведение $n_j$ ядер Пуассона для полуплоскостей $\boldsymbol{C}_{+,k}=\{x_{j,k}+iy_{j,k}\in\boldsymbol{C}: y_{j,k}>0\}$, $k=\overline{1,n_j}$, а $\|z_j\|^2=|z_{j,1}|^2+\dots+|z_{j,n_j}|^2$.*

Предваряя доказательство, заметим, что частный случай теоремы 1, когда $p=1$, был известен ранее. В менее точной форме (без указания вида области $\boldsymbol{D}$, куда гарантировано голоморфное продолжение всех функций, удовлетворяющих условиям теоремы) он был получен и докладывался автором в 1983 г. на конференции по комплексному анализу в Черноголовке и на семинарах по комплексному анализу и банаховым алгебрам при Московском университете. В точной форме этот частный случай был доказан Вигеринком и Кореваaром [9]; при $n=2$ ими указана область максимальной голоморфной продолжаемости.

Доказательство. Достаточно показать, что $f$ голоморфно продолжается на любую область $\boldsymbol{D}_\varepsilon$, $\varepsilon>0$, являющуюся прямым произведением $p$ областей:

$$D_{j,\varepsilon}=\Big\{x_j+iy_j\in\boldsymbol{C}^{n_j}: \int_{R^{n_j}} P_j(x_j-t_j, (|y_{j,1}|, \dots, |y_{j,n_j}|)) \ln\|t_j\|\,dt_j<-\varepsilon\Big\}.$$

Условие а) позволяет сопоставить функции $f(x)$, $x=(x_1, \dots, x_p)$, формальное разложение $\Sigma_{k\in(\boldsymbol{Z}_+)^p} A_k(x)$, где $\boldsymbol{Z}_+=\{0, 1, \dots\}$, а $A_k(x)=\Pi_{j=1}^p\left(x_{j,1}\dfrac{\partial}{\partial x_{j,1}}+\dots+x_{j,n_j}\dfrac{\partial}{\partial x_{j,n_j}}\right)^{k_j} f(\mathbf{0})/(k_1!\dots k_p!)$ — многочлены, степень однородности которых по каждой из групп переменных $x_j$ равна $k_j$. Из условия б) следует, что при любом $\omega\in\boldsymbol{S}$ в полидиске $\{(\lambda_1, \dots, \lambda_p)\in\boldsymbol{C}^p: |\lambda_j|<1, j=\overline{1,p}\}$ справедливо неформальное разложение $f(\lambda_1\omega_1, \dots, \lambda_p\omega_p)=\Sigma_{k\in(\boldsymbol{Z}_+)^p}A_k(\omega)\lambda_1^{k_1}\dots\lambda_p^{k_p}$. Так как теорему достаточно доказать для функций $f(\rho x)$, $0<\rho<1$, то можно считать, что при любом $\omega\in\boldsymbol{S}$ ряд $\Sigma_k|A_k(\omega)|$ сходится. Значит, для любого $\eta>0$ найдется такая конечная величина $M_\eta$ и такое измеримое множество $e_\eta\subset\boldsymbol{S}$, что лебегова мера $e_\eta$ меньше $\eta$, а при любом $\omega\in\boldsymbol{S}\setminus e_\eta$ выполняется оценка $\Sigma_k|A_k(\omega)|\leqslant M_\eta$.

Отображение $\tau=(\tau_1, \dots, \tau_p)$, где $\tau_j$, $j=\overline{1,p}$, — стандартная параметризация сферы $S_j$, продолженная на куб $\{(\theta_{j,1}, \dots, \theta_{j,n_j}^{-1}): -\pi\leqslant\theta_{j,k}<\pi, k=\overline{1,n_j-1}\}$, осуществляет конечнократное покрытие $\boldsymbol{S}$ и переводит $A_k(\omega)$, $k\in(\boldsymbol{Z}_+)^p$, в тригонометрические многочлены $Q_k(\exp\{i\theta_{1,1}\}, \exp\{-i\theta_{1,1}\}, \dots, \exp\{-i\theta_{p,n_p}^{-1}\})$ степени не выше $|k|=k_1+\dots+k_p$ по совокупности переменных. Для каждого мультииндекса $k$ функция

$\omega) = Q_k(\exp\{i\omega_{1,1}\}, \exp\{-i\omega_{1,1}\}, \ldots, \exp\{-i\omega_{p,n_p-1}\}) \in [1, |k||_{n-p}$ граничена по модулю величиной $M_\eta$ на относительно плотном жестве $E = \boldsymbol{R}^{n-p} \setminus (U_{k \in Z^{n-p}}(2\pi k + \tau^{-1}(e_\eta)))$. При этом для любого $>0$ можно подобрать настолько малое $\eta > 0$, что характеристики жества $E$ будут удовлетворять неравенствам $L < C_{n-p}^{-1}\varepsilon/4$, $\delta > \varepsilon^{n-p}/2$, где $C_{n-p}$ — коэффициент в показателе экспоненты, стоящей равой части (1), который зависит только от размерности. По теореме Левина, $\max\{|G_k(t)| : t \in \boldsymbol{R}^{n-p}\} \leqslant M_\eta \exp\{|k|\varepsilon/2\}$. Таким образом, любого мультииндекса $k$ и любого $\omega \in \boldsymbol{S}$ справедлива оценка $(\omega)| \leqslant M_\eta \exp\{|k|\varepsilon/2\}$. Пусть $z = (z_1, \ldots, z_p) \in \boldsymbol{D}_\varepsilon$. Используя льтиоднородность» $A_k(x)$ и эту оценку, получаем

$$\ln|A_k(z)| \leqslant \int\limits_{R^n} \{\Pi_{j=1}^p P_j(x_j - t_j, (|y_{j,1}|, \ldots, |y_{j,n_j}|))\} \ln|A_k(t)|\,dt =$$

$$= \int\limits_{R^n} \{\Pi_{j=1}^p P_j(x_j - t_j, (|y_{j,1}|, \ldots, |y_{j,n_j}|))\} \ln|A_k(t_1/\|t_1\|, \ldots$$

$$\ldots, t_p/\|t_p\|)\,dt + \Sigma_{j=1}^p k_j \int\limits_{R^{n_j}} P_j(x_j - t_j, (|y_{j,1}|, \ldots, |y_{j,n_j}|)) \times$$

$$\times \ln\|t_j\|\,dt_j \leqslant \ln M_\eta + |k|\varepsilon/2 - |k|\varepsilon.$$

ит, $\Sigma_k A_k(z)$ сходится на $\overline{\boldsymbol{D}}_\varepsilon$ абсолютно и равномерно. Его сумма голоморфна в $\boldsymbol{D}_\varepsilon$ при любом $\varepsilon > 0$. Следовательно, она голона в $\boldsymbol{D}$. Сужение $F$ на $\boldsymbol{B}$ совпадает с $f$. Теорема доказана.

*амечание 1.* Как показано в [10, с. 70], условие а) теоремы 1 ьзя ослабить, заменив его требованием конечной гладкости.

Представляется целесообразным выделить в отдельное утвержде следующий результат, полученный в ходе доказательства теоремы 1 представляющий, на наш взгляд, самостоятельный интерес.

**Теорема 2.** *Пусть ряд* $\Sigma_{k \in (Z_+)^p} A_k(x)$, *где* $x = (x_1, \ldots, x_p)$, $x_j \in \boldsymbol{R}^{n_j}$, $j = \overline{1, p}$, *а* $A_k(x)$ — *многочлены степени однородности* $k_j$ *по группе еменных* $x_j$, $j = \overline{1, p}$, *сходится абсолютно на остове* $\boldsymbol{S}$ *поли- ра* $\boldsymbol{B}$. *Тогда этот ряд сходится абсолютно и равномерно на мыкании любого внутреннего полишара* $\boldsymbol{B}_r = \{x \in \boldsymbol{B} : \|x_j\| < r_j < 1$ $j = \overline{1, p}\}$, *причем для любого вектора* $r' \in \boldsymbol{R}^p$, *у которого* $r'_j \in (r_j, 1)$, $j = \overline{1, p}$, *найдется такая конечная величина* $M = M(r, r')$, *что и каждом* $k = (k_1, \ldots, k_p) \in (\boldsymbol{Z}_+)^p$ *выполняется неравенство* $\max\{|A_k(x)| : x \in \boldsymbol{B}_r\} \leqslant M r_1'^{k_1} \ldots r_p'^{k_p}$.

Из теоремы 1 и многомерного аналога (который доказывается к же, как сама теорема) теоремы Принсгейма (см. [10]), связываюий аналитичность функции на отрезке с ростом sup-норм ее последовательных производных, вытекает такое

Следствие 1. *Пусть функция* $f$, *заданная на замкнутом единичном шаре* $\overline{\boldsymbol{B}}(0, 1) = \{x \in \boldsymbol{R}^n : \|x\| \leqslant 1\}$, *такова, что: а)* $f \in C^\infty(0)$; *б) для любой точки* $\omega \in S = \partial\overline{B}(0, 1)$ *функция* $f(\lambda\omega)$ *принадлежит к переменной* $\lambda$ *классу* $C^\infty[-1, 1]$, *причем*

$$\sup\left\{\sqrt[j]{\max\left\{\left|\frac{\partial^j f(\lambda\omega)}{\partial\lambda^j}\right| : -1 \leqslant \lambda \leqslant 1\right\}\Big/ j!} : j \in \boldsymbol{N}\right\} \leqslant C,$$

*где конечная величина $C$ не зависит от $\omega$. Тогда найдется такое число $r > 0$, что $f \in C^\infty(r\overline{B}(0, 1))$ и*

$$\sup\left\{\sqrt[k_1+\dots+k_n]{\max\left\{\left|\frac{\partial^{k_1+\dots+k_n}f}{\partial x_1^{k_1}\dots\partial x_n^{k_n}}\right| : x \in r\overline{B}(0, 1)\right\}\Big/(k_1!\dots k_n!)} : k \in (\boldsymbol{Z}_+)^n \setminus \{0\}\right\} < \infty.$$

**§ 2. Теорема об острие клина.**

Справедлив следующий результат, являющийся «гибридом» теоремы о сепаратной аналитичности и теоремы об острие клина.

Теорема 3. *Пусть $e$ — симметричное относительно* **0** *подмножество* $\boldsymbol{S}$ *положительной лебеговой меры, а функция $f$, заданная в объединении некоторой окрестности* **0** *и пересечения конической оболочки $e$ с* $\boldsymbol{B}$, *лежит в* $C^\infty(\mathbf{0})$. *Пусть, кроме того, при любом $\omega \in e$ функция $f(\lambda_1\omega_1, \dots, \lambda_p\omega_p)$ голоморфно продолжается с куба $\{(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \boldsymbol{R}^p : -1 < \lambda_j < 1,\ j = \overline{1, p}\}$ на полидиск $\{(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \in \boldsymbol{C}^p : |\lambda_j| < 1,\ j = \overline{1, p}\}$. Тогда найдутся такое число $\varepsilon = \varepsilon_e < \infty$ и такая голоморфная в $\boldsymbol{D}_\varepsilon$ функция $F(z)$, что сужение $F$ на пересечение конической оболочки $e$ с $\boldsymbol{D}_\varepsilon$ совпадает с $f$.*

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 1, сопоставим функции $f$ формальное разложение по «мультиоднородным» многочленам $A_k(x)$: $f(x) \sim \Sigma_{k\in(Z_+)^p} A_k(x)$. При $\omega \in e$ это разложение перестает быть формальным: для любого вектора $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ из куба $\{(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \boldsymbol{R}^p : -1 < \lambda_j < 1,\ j = \overline{1, p}\}$ имеет место равенство $f(\lambda_1\omega_1, \dots, \lambda_p\omega_p) = \Sigma_{k\in(Z_+)^p} A_k(\omega)\lambda_1^{k_1} \dots \lambda_p^{k_p}$, причем ряд в правой части сходится для всех $\lambda$ из полидиска $\{(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \boldsymbol{C}^p : |\lambda_j| < 1,\ j = \overline{1, p}\}$. Не ограничивая общности, можно считать, что при любом $\omega \in e$ ряд $\Sigma_k |A_k(\omega)|$ сходится. Значит, найдутся такая конечная величина $M$ и такое измеримое множество $\tilde{e} \subset e$, что, во-первых, лебегова мера множества $\tilde{e}$ больше половины меры $e$, а, во-вторых, при любом $\omega \in \tilde{e}$ справедлива оценка $\Sigma_{k\in(Z_+)^p} |A_k(\omega)| \leqslant M$. Переходя, как при доказательстве теоремы 1, от многочленов $A_k(x)$ к целым функциям $G_k(w)$ и используя теорему Б. Я. Левина, получаем, что при любом $k \in (\boldsymbol{Z}_+)^p$ справедлива оценка $\max\{|A_k(\omega)| : \omega \in \boldsymbol{S}\} \leqslant M \exp\{\gamma|k|\}$, где конечная величина $\gamma = \gamma_{\tilde{e}}$ не зависит от $k$. Отсюда вытекает, что при $\varepsilon > \gamma$ ряд $\Sigma_k A_k(z)$ сходится в области $\boldsymbol{D}_\varepsilon$ равномерно и абсолютно. Его сумма $F(z)$ — голоморфная в $\boldsymbol{D}_\varepsilon$ функция, которая совпадает с $f$ на пересечении конической оболочки $e$ с $\boldsymbol{D}_\varepsilon$.

**Список литературы:** 1. *Бернштейн С. Н.* Собрание сочинений: в 4-х т. М., 1952. 582 с. 2. *Zerner M.* Mimeographed notes of a seminar given in Marseilles. Marseilles, 1961. 136 p. 3. *Siciak J.* Separately analytic functions and envelopes of holomorphy of some lower-dimensional subsets in $C^n$//Seminar Avanissian. 1967—1968. P. 92—116. 4. *Ахиезер Н. И., Ронкин Л. И.* О сепаратно аналитиских функциях многих переменных и теоремах об «острие клина»//Успехи мат. наук. 1973. 28, № 3(171). С. 27—42. 5. *Forelli F.* Pluriharmonicity in terms of harmonic slices//Math. Scand. 1977. 41. P. 358—364. 6. *Боголюбов Н. Н., Медведев Б. В., Поливанов М. К.* Вопросы теории дисперсионных соотношений. М., 1958. 203 с. 7. *Левин Б. Я.* Мажоранты в классах субгармонических функций и их приложения. 1. ФТИНТ АН УССР. Х., 1984. 52 с. Препринт № 18—84. 8. *Левин Б. Я., Логвиненко В. Н.* О классах субгармонических функций, ограниченных на некоторых подмножествах $R^n$//Зап. науч. сем. ЛОМИ. 1989. 170. С. 157—175. 9. *Wiegerink J.* A lemma on mixed derivatives and a theorem of holomorphic extention/J. Wiegerink. Entire functions of Paley-Wiener type in $C^n$, Radon transform and problems of holomorphic extention. Amsterdam, 1985. P. 71—87. 10. *Мандельбройт С.* К азианалитические классы функций. М.; Л, 1937. 107 с.

*Поступила в редколлегию 28.11.90*