II.

О НЕРАВЕНСТВАХЪ,

ОГРАНИЧИВАЮЩИХЪ ВЕЛИЧИНУ ОПРЕДѢЛЕННАГО ИНТЕГРАЛА ОТЪ ПРОИЗВЕДЕНІЯ ФУНКЦІЙ.

В. Г. Имшенецкаго.

Разысканіе алгебраически бóльшей и мѐньшей границъ, за которыя не можетъ переступить величина опредѣленнаго интеграла отъ произведенія функцій, представляетъ, очевидно, задачу неопредѣленную.

Дѣйствительно, можно показать, что эти границы получаютъ выраженія разнообразныя, по мѣрѣ ихъ сближенія между собою и съ интеграломъ, и вмѣстѣ съ различнымъ выборомъ законовъ измѣняемости, въ предѣлахъ интеграла, функцій входящихъ подъ знакомъ его множителями:

§ 1. Недавно *П. Л. Чебышевъ* далъ рѣшеніе такой задачи для интеграла

$$\int_0^1 \varphi(x)\psi(x)\,dx.$$

Онъ показалъ, что если отъ $x=0$ до $x=1$ обѣ функціи $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ постоянно увеличиваются или уменьшаются, то

$$\int_0^1 \varphi(x)\psi(x)\,dx > \text{ или } < \int_0^1 \varphi(x)\,dx.\int_0^1 \psi(x)\,dx,$$

смотря потому, измѣняются ли величины обѣихъ функцій $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ въ одну сторону, или одна изъ нихъ увеличивается, въ то время какъ другая уменьшается.

Это предложеніе получается какъ частный выводъ особой теоріи, которой посвящено сообщеніе П. Л. Чебышева харьковскому математическому обществу надъ названіемъ «О приближенныхъ выраженіяхъ однихъ интеграловъ черезъ другіе». Сдѣлавшись однако извѣстнымъ прежде общей теоріи, изъ которой оно вытекаетъ, предложеніе это дало случай появиться двумъ замѣчательнымъ его доказательствамъ, изъ которыхъ одно принадлежитъ г. Picard[1], а другое А. Н. Коркину[2].

Послѣднее основывается на легко провѣряемомъ алгебраическомъ равенствѣ

$$n\sum a_i b_i = \sum a_i \sum b_i + \sum_i \sum_k (a_i - a_k)(b_i - b_k),$$

гдѣ простыя суммы распространяются на всѣ значенія $i = 1, 2, 3, \ldots n$, а двойная сумма требуетъ для каждаго изъ этихъ значеній i брать, въ томъ же ряду чиселъ, всѣ значенія $k > i$.

А. Н. Коркинъ замѣтилъ, что достаточно въ его равенствѣ положить

$$a_i = \varphi\left(\frac{i-1}{n}\right),\ b_i = \psi\left(\frac{i-1}{n}\right)$$

и, раздѣливъ его на n^2, перейдти къ предѣлу для $n = \infty$, чтобы получить, какъ непосредственныя его слѣдствія, оба случая теоремы Чебышева.

Я привелъ вполнѣ эту краткую и изящную замѣтку, чтобы яснѣе показать связь съ нею нѣкоторыхъ новыхъ выводовъ того же рода, предлагаемыхъ далѣе.

§ 2. *Коши*[3] далъ слѣдующую теорему:

---

[1] Литографиров. курсъ лекцій г. Hermite, 1883.

[2] Comptes rendus. T. XCVI, 1883. № 5, p. 326

[3] *Analyse algébrique*, Note II, p. 445, Théorème 16.

Если въ двухъ рядахъ

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \qquad (a)$$

$$\text{и } b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n \qquad (b)$$

заключающихъ по n *членовъ въ каждомъ, не всѣ отношенія* $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b}, \frac{a_3}{b_3}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}$ *соотвѣтствующихъ членовъ равны между собою, то*

$$\sum a_i b_i < \sqrt{\sum a_i^2 \sum b_i^2}. \qquad (1)$$

Доказательство, подобно предыдущему, основывается на легко провѣряемомъ равенствѣ

$$(\sum a_i b_i)^2 + \sum_i \sum_k (a_i b_k - a_k b_i)^2 = \sum a_i^2 \sum b_i^2,$$

изъ котораго необходимо слѣдуетъ неравенство (1), если разность отношеній $\frac{a_i}{b_i}$ и $\frac{a_k}{b_k}$ не равна нулю для всѣхъ различныхъ сочетаній по два чиселъ i и k, взятыхъ въ рядѣ $1, 2, 3, \ldots, n$.

Пусть $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ представляютъ двѣ *какія нибудь* функціи отъ x, сохраняющія конечныя значенія отъ $x = x_0$ до $x = X > x_0$. Положимъ $\frac{X - x_0}{n} = h$, $a_i = \varphi[x_0 + (i-1)h]$, $b_i = \psi[x_0 + (i-1)h]$. Вслѣдствіе этого неравенство (1) раздѣленное на n получитъ видъ

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi[x_0 + (i-1)h]\psi[x_0 + (i-1)h]h$$

$$< \sqrt{\left\{\sum_{i=1}^{n} \varphi[x_0 + (i-1)h]^2 h . \sum_{i=1}^{n} \psi[x_0 + (i-1)h]^2 h\right\}}.$$

Если же перейдемъ къ предѣлу для $n = \infty$ и $h = 0$, то отсюда находимъ

$$\int_{x_0}^{X} \varphi(x)\psi(x)\,dx < \sqrt{\left\{\int_{x_0}^{X} \varphi(x)^2 dx . \int_{x_0}^{X} \psi(x)^2 dx\right\}} \qquad (I)$$

теорему, аналогичную теоремѣ Чебышева, но при совершенно общихъ предположеніяхъ относительно закона измѣняемости функцій $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ между границами интеграла.

§ 3. Подобнаго же рода слѣдствіе получается еще изъ другой теоремы *Коши*[1]:

Если не всѣ n количествъ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ *равны между собою, то численное значеніе суммы* $\sum a_i$ *меньше произведенія* $\sqrt{n}\,\sqrt{\sum a_i^2}$.

Замѣтимъ, что алгебраическое значеніе суммы $\sum a_i$ не болѣе ея численнаго значенія, слѣдовательно

$$\sum a_i < \sqrt{n}\,\sqrt{\sum a_i^2}. \qquad (2)$$

Доказательство опять основывается на очевидномъ равенствѣ

$$\left(\sum a_i\right)^2 + \sum_i \sum_k (a_i - a_k)^2 = n \sum a_i^2,$$

доставляющемъ неравенство (2), если количества $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ не всѣ равны между собою.

Замѣтимъ кстати, что это равенство есть частный случай равенства Коркина. Поэтому изъ неравенства (2) получится частный случай теоремы Чебышева. Для этого раздѣливъ неравенство (2) на n и принявъ такія же положенія, какъ въ § 2, въ предѣлѣ для $n = \infty$ находимъ

$$\int_{x_0}^{X} \varphi(x)\,dx < \sqrt{\left\{\int_{x_0}^{X} \varphi(x)^2\,dx\right\}}\,\sqrt{X - x_0} \qquad \text{(II)}$$

и въ частномъ случаѣ, для $x_0 = 0$ и $X = 1$, будемъ имѣть

$$\int_0^1 \varphi(x)\,dx < \sqrt{\int_0^1 \varphi(x)^2\,dx}.$$

[1] ib. Théorème 15.

§ 4. Перейдемъ къ изложенію еще болѣе простыхъ пріемовъ рѣшенія разсматриваемой задачи, доставляющихъ притомъ сразу бóльшую и мéньшую границы величины интеграла.

Сначала для простоты будемъ предполагать въ обоихъ рядахъ

$$a_1\,,\ a_2\,,\ a_3\,,\ldots,\ a_n \text{ и } b_1\,,\ b_2\,,\ b_3\,,\ldots,\ b_n$$

всѣ члены положительными.

Означивъ въ нихъ соотвѣтственно черезъ α и β самые малые, а черезъ A и B самые большіе члены, будемъ имѣть

$$\alpha \sum b_i < \sum a_i b_i < A \sum b_i\,,$$

$$\beta \sum a_i < \sum a_i b_i < B \sum a_i$$

неравенства, къ которымъ можно присоединить еще слѣдующія:

$$n\alpha < \sum a_i < nA\,,$$

$$n\beta < \sum b_i < nB.$$

Изъ этихъ двухъ группъ,—черезъ перемноженіе соотвѣтствующихъ частей двухъ неравенствъ и черезъ дѣленіе ихъ на одно и то-же положительное количество, — весьма просто получимъ слѣдующія неравенства:

$$\frac{\alpha}{A} \sum a \sum b_i < n \sum a_i b_i < \frac{A}{\alpha} \sum a_i \sum b_i\,, \qquad (3)$$

$$\frac{\beta}{B} \sum a_i \sum b_i < n \sum a_i b_i < \frac{B}{\beta} \sum a_i \sum b_i\,, \qquad (4)$$

$$\frac{\alpha}{B} (\sum b_i)^2 < n \sum a_i b_i < \frac{A}{\beta} (\sum b_i)^2, \qquad (5)$$

$$\frac{\beta}{A} (\sum a_i)^2 < n \sum a_i b_i < \frac{B}{\alpha} (\sum a_i)^2, \qquad (6)$$

$$\sqrt{\alpha\beta \sum a_i \sum b_i} < \sum a_i\, b_i < \sqrt{AB \sum a_i \sum b_i}\,. \qquad (7)$$

Каждую изъ группъ неравенствъ (3), (4),.. (7) легко можно преобразовать въ соотвѣтствующее предложеніе интегральнаго вычисленія, дающее меньшую и большую границы величины одного и того-же опредѣленнаго интеграла отъ произведенія двухъ функцій. Для этого возьмемъ двѣ какія-либо функціи $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, сохраняющія положительныя значенія отъ $x=x_0$ до $x=X>x_0$ и положимъ:

$$\frac{X-x_0}{n}=h \text{ или } \frac{1}{n}=\frac{h}{X-x_0},$$

$$a_i=\varphi[x_0+(i-1)h],\; b_i=\psi[x_0+(i-1)h],$$

$$\alpha=\varphi(g),\; A=\varphi(G),\; \beta=\psi(k),\; B=\psi(K).$$

За-тѣмъ раздѣливъ неравенства (3),..., (6) на n^2, а (7) на n и введя въ нихъ предыдущія положенія, при переходѣ къ предѣламъ для $n=\infty$ и $h=0$, получимъ:

$$\frac{\varphi(g)}{\varphi(G)}<\frac{(X-x_0)\int_{x_0}^{X}\varphi(x)\psi(x)\,dx}{\int_{x_0}^{X}\varphi(x)\,dx.\int_{x_0}^{X}\psi(x)\,dx}<\frac{\varphi(G)}{\varphi(g)},\qquad\text{(III)}$$

$$\frac{\psi(k)}{\psi(K)}<\frac{(X-x_0)\int_{x_0}^{X}\varphi(x)\psi(x)\,dx}{\int_{x_0}^{X}\varphi(x)\,dx.\int_{x_0}^{X}\psi(x)\,dx}<\frac{\psi(K)}{\psi(k)},\qquad\text{(IV)}$$

$$\frac{\varphi(g)}{\psi(K)}<\frac{(X-x_0)\int_{x_0}^{X}\varphi(x)\psi(x)\,dx}{\left(\int_{x_0}^{X}\psi(x)\,dx\right)^2}<\frac{\varphi(G)}{\psi(k)},\qquad\text{(V)}$$

$$\frac{\psi(k)}{\varphi(G)}<\frac{(X-x_0)\int_{x_0}^{X}\varphi(x)\psi(x)\,dx}{\left(\int_{x_0}^{X}\varphi(x)\,dx\right)^2}<\frac{\psi(K)}{\varphi(g)},\qquad\text{(VI)}$$

$$\sqrt{\varphi(g)\psi(k)} < \frac{\int_{x_0}^{X}\varphi(x)\psi(x)\,dx}{\left\{\int_{x_0}^{X}\varphi(x)\,dx\,.\int_{x_0}^{X}\psi(x)\,dx\right\}^{1/2}} < \sqrt{\varphi(G)\psi(K)}. \quad \text{(VII)}$$

Эти формулы представляютъ значительное разнообразіе для выбора, въ каждомъ частномъ случаѣ, самыхъ тѣсныхъ границъ, въ которыхъ заключается величина опредѣленнаго интеграла.

Такъ, напримѣръ, если сравнивая неравенства (III) и (IV) найдемъ, что

$$\frac{\psi(k)}{\psi(K)} < \frac{\varphi(g)}{\varphi(G)}, \text{ то слѣдовательно } \frac{\varphi(G)}{\varphi(g)} < \frac{\psi(K)}{\psi(k)}$$

и отсюда видно, что неравенства (III) заключаютъ величину интеграла въ границахъ болѣе тѣсныхъ чѣмъ неравенства (IV).

§ 5. Неравенства (7) и (VII) легко обобщаются на какое угодно число множителей подъ знаками суммы и интеграла. Дѣйствительно, пусть будутъ

$$\begin{array}{c} a_{11},\ a_{12},\ldots,\ a_{1n} \\ a_{21},\ a_{22},\ldots,\ a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1},\ a_{m2},\ldots,\ a_{mn} \end{array}$$

m рядовъ съ n положительными членами въ каждомъ.

Означивъ самые малые и самые большіе члены въ этихъ рядахъ соотвѣтственно черезъ

$$\alpha_1 \text{ и } A_1,\ \alpha_2 \text{ и } A_2,\ldots\ \alpha_m \text{ и } A_m,$$

мы будемъ имѣть очевидныя неравенства;

$$\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_m\sum_i a_{1i} < \sum_i a_{1i}a_{2i}a_{3i}\ldots a_{mi} < A_2A_3\ldots A_m\sum_i a_{1i}$$

$$\alpha_1\alpha_3\ldots\alpha_m\sum_i a_{2i} < \sum_i a_{1i}a_{2i}\ldots a_{mi} < A_1A_3\ldots A_m\sum_i a_{2i}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{m-1}\sum_i a_{mi} < \sum_i a_{1i}a_{2i}\ldots a_{mi} < A_1A_2\ldots A_{m-1}\sum_i a_{mi}$$

Перемножая эти неравенства, извлекая изъ результатовъ корень степени m и раздѣливъ на

$$\sqrt[m]{(\sum_i a_{1i} \sum_i a_{2i} \ldots \sum_i a_{mi})},$$

получимъ неравенство

$$(\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m)^{\frac{m-1}{m}} < \frac{\sum_i a_{1i} a_{2i} \ldots a_{mi}}{\left[\sum_i a_{1i} \sum_i a_{2i} \ldots \sum_i a_{mi}\right]^{\frac{1}{m}}} <$$

$$< (A_1 A_2 \ldots A_m)^{\frac{m-1}{m}} \qquad (8)$$

Подобно тому какъ выше изъ (8) получатся легко слѣдующія неравенства

$$\left[\varphi_1(g_1)\varphi_2(g_2)\ldots\varphi_m(g_m)\right]^{\frac{m-1}{m}}$$

$$< \frac{\int_{x_0}^{X} \varphi_1(x)\varphi_2(x)\ldots\varphi_m(x)dx}{\left\{\int_{x_0}^{X}\varphi_1(x)\,dx \int_{x_0}^{X}\varphi_2(x)\,dx \ldots \int_{x_0}^{X}\varphi_m(x)\,dx\right\}^{\frac{1}{m}}} < \qquad \text{(VIII)}$$

$$\left[\varphi_1(G_1)\varphi_2(G_2)\ldots\varphi_m(G_m)\right]^{\frac{m-1}{m}},$$

гдѣ между предѣлами $x = x_0$ и $x = X$ функціи $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)\ldots$ $\varphi_m(x)$ должны сохранять конечныя положительныя значенія, изъ которыхъ самыя малыя и самыя большія мы обозначили черезъ: $\varphi_1(g_1)$ и $\varphi_1(G_1)$, $\varphi_2(g_2)$ и $\varphi_2(G_2)$ $\ldots \varphi_m(g_m)$ и $\varphi_m(G_m)$.

§ 6. До сихъ поръ мы предполагали функціи, входящія множителями подъ знакомъ опредѣленнаго интеграла, сохраняющими положительныя значенія между его предѣлами. Въ задачѣ, которую мы разсматриваемъ, къ этому простѣйшему можно привести общій случай, когда упомянутыя функціи между предѣлами интеграла имѣютъ какъ положительныя, такъ и отрицательныя значенія. Такое приведеніе достаточно объяснить на простѣйшемъ случаѣ двухъ множителей.

Если въ двухъ рядахъ

$$a_1, a_2, \ldots a_n \text{ и } b_1, b_2, \ldots b_n$$

находятся положительные и отрицательные члены, то всегда можно выбрать два такія положительныя количества a_0 и b_0, что, придавъ a_0 ко всѣмъ членамъ перваго ряда и b_0 ко всѣмъ членамъ втораго, мы получимъ два ряда

$$a_1 + a_0, a_2 + a_0, \ldots, a_n + a_0 \text{ и } b_1 + b_0, b_2 + b_0, \ldots, b_n + b_0$$

со всѣми положительными членами.

Такъ-какъ къ двумъ послѣднимъ рядамъ прилагаются предыдущіе выводы, то, означая черезъ $\alpha + a_0$ и $A + a_0$ самой меньшій и самый большій члены въ первомъ изъ нихъ, на основаніи, напр., неравенствъ (3), будемъ имѣть

$$\frac{\alpha + a_0}{A + a_0} \sum (a_i + a_0) \sum (b_i + b_0)$$
$$< n \sum (a_i + a_0)\ (b_i + b_0) <$$
$$\frac{A + a_0}{\alpha + a_0} \sum (a_i + a_0) \sum (b_i + b_0).$$

Но такъ-какъ

$$\sum (a_i + a_0) \sum (b_i + b_0) = \sum a_i \sum b_i + n a_0 \sum b_i + n b_0 \sum a_i + n^2 a_0 b_0,$$

$$\sum (a_i + a_0)\ (b_i + b_0) = \sum a_i b_i + a_0 \sum b_i + b_0 \sum a_i + n a_0 b_0$$

то, вычитая изъ каждой части предыдущихъ неравенствъ по

$$n a_0 \sum b_i + n b_0 \sum a_i + n^2 a_0 b_0,$$

мы получимъ

$$\frac{\alpha+a_0}{A+a_0}\sum a_i\sum b_i-\frac{A-\alpha}{A+a_0}[na_0\sum b_i+nb_0\sum a_i+n^2a_0b_0]$$
$$<n\sum a_ib_i<$$
$$\frac{A+a_0}{\alpha+a_0}\sum a_i\sum b_i+\frac{A-\alpha}{\alpha+a_0}[na_0\sum b_i+nb_0\sum a_i+n^2a_0b_0] \quad (9)$$

Раздѣлимъ неравенства (9) на n^2 и положимъ:

$$X>x_0,\quad \frac{X-x_0}{n}=h,$$

$$a_i=\varphi[x_0+(i-1)h],\ b_i=\psi[x_0+(i-1)h],$$

предполагая, что отъ $x=x_0$ до $x=X$ функціи $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ могутъ имѣть положительныя или отрицательныя значенія, лишь бы $\varphi(x)+a_0$ и $\psi(x)+b_0$ оставались положительными; притомъ пусть $\varphi(g)+a_0$ и $\varphi(G)+a_0$ будутъ самое меньшее и самое большее значеніе $\varphi(x)+a_0$.

При сдѣланныхъ предположеніяхъ перейдя къ предѣлу неравенствъ (9), раздѣленныхъ на n^2, при $n=\infty$, получимъ

$$\frac{\varphi(g)+a_0}{\varphi(G)+a_0}\int_{x_0}^{X}\varphi(x)dx\int_{x_0}^{X}\psi(x)dx-$$
$$-\frac{\varphi(G)-\varphi(g)}{\varphi(G)+a_0}\left[a\int_{x_0}^{X}\psi(x)dx+b_0\int_{x_0}^{X}\varphi(x)dx+a_0b_0\right](X-x_0)$$
$$<(X-x_0)\int_{x_0}^{X}\varphi(x)\psi(x)dx< \quad (\mathrm{IX})$$
$$\frac{\varphi(G)+a_0}{\varphi(g)+a_0}\int_{x_0}^{X}\varphi(x)dx\int_{x_0}^{X}\psi(x)dx+$$
$$+\frac{\varphi(G)-\varphi(g)}{\varphi(g)+a_0}\left[a_0\int_{x_0}^{X}\psi(x)dx+b_0\int_{x_0}^{X}\varphi(x)dx+a_0b_0\right](X-x_0).$$

Подобнымъ-же образомъ можно поступить при выводѣ другихъ выраженій для высшей и низшей границы величины опредѣленнаго интеграла отъ произведенія функцій, когда эти послѣднія въ предѣлахъ его могутъ имѣть отрицательныя значенія.

§ 7. Въ заключеніе можно, не выходя изъ области общихъ формулъ и не удаляясь отъ предмета, который мы разсматривали, дать одно приложеніе, состоящее въ слѣдующемъ видоизмѣненіи неравенствъ (III).

Полагая въ нихъ

$$\varphi(x)=\frac{d\omega(x)}{dx}=\omega'(x),\ \psi(x)=f[\omega(x)],$$

будемъ имѣть:

$$\int_{x_0}^{X}\varphi(x)\,dx=\omega(X)-\omega(x_0),$$

$$\int_{x_0}^{X}\psi(x)\,dx=\int_{x_0}^{X}f[\omega(x)]\,dx,$$

$$\int_{x_0}^{X}f[\omega(x)]\,\omega'(x)\,dx=\int_{\omega(x_0)}^{\omega(X)}f(y)\,dy;$$

слѣдовательно неравенства (III) доставятъ слѣдующія:

$$\frac{\omega'(g)}{\omega'(G)}[\omega(X)-\omega(x_0)]\int_{x_0}^{X}f[\omega(x)]\,dx<(X-x_0)\int_{\omega(x_0)}^{\omega(X)}f(y)\,dy,$$

$$\frac{\omega'(G)}{\omega'(g)}[\omega(X)-\omega(x_0)]\int_{x_0}^{X}f[\omega(x)]\,dx>(X-x_0)\int_{\omega(x_0)}^{\omega(X)}f(y)\,dy.$$

Какъ при выводѣ неравенствъ (III) предполагаемъ $X>x_0$, $\varphi(x)=\omega'(x)>0$, отъ $x=x_0$ до $x=X$, и, слѣдовательно, $\omega(X)>\omega(x_0)$, $\omega'(g)>0$, $\omega'(G)>0$.

Поэтому послѣднимъ неравенствамъ можно дать такой видъ

$$\frac{X-x_0}{\omega(X)-\omega(x_0)}\,\frac{\omega'(g)}{\omega'(G)}\int_{\omega(x_0)}^{\omega(X)}f(y)\,dy$$

$$<\int_{x_0}^{X}f[\omega(x)]\,dx<$$

$$\frac{X-x_0}{\omega(X)-\omega(x_0)}\,\frac{\omega'(G)}{\omega'(g)}\int_{\omega(x_0)}^{\omega(X)}f(y)\,dy, \qquad \text{(X)}$$

который даетъ меньшую и большую границу величины опредѣленнаго интеграла функціи отъ функціи.
