ЗАПИСКИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА ХАРЬКОВСКОГО ГОСУНИВЕРСИТЕТА имени А. М. ГОРЬКОГО И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXVI. Серия 4 1960

НЕСКОЛЬКО ТЕОРЕМ ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ИНВАРИАНТАХ

Г. И. Дринфельд

(Харьков)

§ 1. Предполагая, что интеграл

$$\int A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p} dx^{\alpha_1} dx^{\alpha_2} \ldots dx^{\alpha_p} \tag{1}$$

(мы рассматриваем везде внешние дифференциальные формы) является интегральным инвариантом группы преобразований G_1, определяемой инфинитезимальным оператором

$$X(f) = \xi_i \frac{\partial f}{\partial x^i}, \tag{2}$$

рассмотрим интеграл

$$\int \Big(\sum_i A_{\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}i}\eta_i\Big) dx^{\alpha_1}\ldots dx^{\alpha_{p-1}}. \tag{3}$$

Докажем теорему:

Теорема 1. Для того, чтобы интеграл (3) был интегральным инвариантом группы G_1, необходимо и достаточно, чтобы удовлетворялись условия

$$\sum_i A_{\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}i}\zeta_i = 0, \tag{4}$$

где

$$\zeta_i = X(\eta_i) - Y(\xi_i),\ i = 1,2,\ldots n,$$
$$Y(f) = \eta_i \frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

Доказательство. Если ввести обозначения

$$B_{\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}} = \sum_i A_{\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}i}\eta_i,$$

то дело сводится к доказательству эквивалентности условий (4) и условий

$$K_{\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}} = X(B_{\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}}) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{p-1} B_{\alpha_1\ldots\alpha_{r-1}j\alpha_{r+1}\ldots\alpha_{p-1}} \frac{\partial \xi_j}{\partial x^{\alpha_r}} = 0, \tag{5}$$

являющихся необходимыми и достаточными условиями инвариантности интеграла (3) *.

---

* См., например, E. Goursat — Leçons sur le probléme de Pfaff, 1922. Там же и об инвариантах, отнесенных к траекториям.

Имеем

$$K_{\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}} = \sum_{i=1}^{n} A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{p-1}i} X(\eta_i) + \sum_{i=1}^{n} \eta_i \Big\{ X(A_{\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}i}) +$$

$$+ \sum_{j} \Big[A_{j\alpha_2\ldots\alpha_{p-1}i} \frac{\partial \xi_i}{\partial x^{\alpha_1}} + A_{\alpha_1 j\ldots\alpha_{p-1}i} \frac{\partial \xi_i}{\partial x^{\alpha_2}} + \ldots + A_{\alpha_1\ldots\alpha_{p-2}ji} \frac{\partial \xi_j}{\partial x^{\alpha_{p-1}}} \Big] \Big\}. \quad (6)$$

Из инвариантности интеграла (1) следуют тождества

$$X(A_{\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}i}) + \sum_{j=1}^{n} \Big[A_{j\alpha_2\ldots\alpha_{p-1}i} \frac{\partial \xi_j}{\partial x^{\alpha_1}} + \ldots + A_{\alpha_1\ldots\alpha_{p-2}ji} \frac{\partial \xi_j}{\partial x^{\alpha_{p-1}}} +$$

$$+ A_{\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}j} \frac{\partial \xi_j}{\partial x^i} \Big] = 0,$$

на основании которых из (6) следует

$$K_{\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}} = \sum_i A_{\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}i} \xi_i .$$

Теорема доказана.

Из доказанной теоремы следуют утверждения.

Теорема 2 (Пуанкаре). Если интеграл (1) является интегральным инвариантом группы G_1, не отнесенным к траекториям, то интеграл

$$\int \Big(\sum_i A_{\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}i} \xi_i \Big) dx^{\alpha_1} \ldots dx^{\alpha_{p-1}}$$

является интегральным инвариантом (нетривиальным) той же группы и при том отнесенным к траекториям.

Теорема 3. Если интеграл (1) является интегральным инвариантом группы G_1 и оператор $Y(f)$ удовлетворяет условию

$$(X, Y) f \equiv 0,$$

то интеграл (3) является интегральным инвариантом той же группы.

Теорема 4. Если интеграл (1) — интегральный инвариант группы G_1, отнесенный к траекториям, и оператор $Y(f)$ обладает свойством

$$(X, Y) f = \lambda X(f),$$

то интеграл (3) тоже интегральный инвариант группы G_1.

Теорема 5. Если интеграл (1) — интегральный инвариант группы G_1 и оператор

$$U(f) = U_i \frac{\partial f}{\partial x^i}$$

удовлетворяет условию

$$(X, U) f = \lambda X(f),$$

то интеграл (3), если его построить с помощью оператора

$$Y(f) = U(f) - rX(f),$$

где r — любое решение уравнения

$$X(r) = \lambda,$$

тоже интегральный инвариант группы G_1.

Теорема 6. Если интегралы (1) и (3) являются интегральными инвариантами группы G_1 и первый из них отнесен к траекториям, то второй тоже отнесен к траекториям.

Действительно,

$$\sum_i B_{\alpha_1\ldots\alpha_{p-2}i}\xi_i = \sum_i \sum_j A_{\alpha_1\ldots\alpha_{p-2}ij}\xi_i\eta_j = -\sum_j \eta_j \sum_i A_{\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}ji}\xi_i = 0.$$

Следующая теорема обнаруживает, что рассмотрение всех случаев, когда удовлетворяется условие (4), по-видимому затруднительно.

Теорема 7. Если интеграл

$$\int A_i dx^i$$

является интегральным инвариантом группы G_1, то всегда можно найти интегральный инвариант второго порядка

$$\int A_{ik} dx^i dx^k$$

той же группы G_1 и систему функций

$$\{\eta_i\}_{i=1}^n,$$

из которых $n-2$ можно взять произвольно, так, чтобы имели место зависимости

$$A_i = \sum_k A_{ik}\eta_k.$$

Доказательство теоремы будет приведено ниже.

§ 2. Имеет место следующая

Теорема 8. Пусть операторы

$$Y_k(f) = \eta_{ki}\frac{\partial f}{\partial x^i}, \quad k = 1,2,\ldots n \tag{7}$$

линейно несвязаны и удовлетворяют условиям*

$$(X,Y_k)f \equiv 0, \quad k = 1,2,\ldots n.$$

Группа G_1, определяемая инфинитезимальным оператором $X(f)$, имеет C_n^p интегральных инвариантов p-го порядка

$$\int \Omega_p^{\beta_1\ldots\beta_{n-p}},$$

где

$$\Omega_p^{\beta_1\ldots\beta_{n-p}} = \frac{(-1)^{r_{\alpha_1\ldots\alpha_p}}}{\Delta}\begin{vmatrix} \eta_{\beta_1\alpha_{p+1}} & \ldots & \eta_{\beta_1\alpha_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \eta_{\beta_{n-p}\alpha_{p+1}} & \cdot & \eta_{\beta_{n-p}\alpha_n}\end{vmatrix} dx^{\alpha_1}\ldots dx^{\alpha_p}, \tag{8}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \eta_{11} & \ldots & \eta_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \eta_{n1} & \ldots & \eta_{nn}\end{vmatrix},$$

$\beta_1,\ldots\beta_{n-p} = 1, 2\ldots n$; $\beta_j \neq \beta_a$; индексы $\alpha_{p+1},\ldots,\alpha_n$ написаны в порядке возрастания, $r_{\alpha_1\ldots\alpha_p}$ число инверсий в размещении $\alpha_1\ldots\alpha_n$; формы (8) линейно несвязаны. Наиболее общий интегральный инвариант p-го порядка группы G_1 имеет вид

$$\int \pi_{\beta_1\ldots\beta_{n-p}}\Omega_p^{\beta_1\ldots\beta_{n-p}},$$

где $\pi_{\beta_1\ldots\beta_{n-p}}$ — произвольные функции решений уравнения

$$X(f) = 0. \tag{9}$$

---

* Такие операторы всегда существуют.

Доказательство. Пусть интеграл

$$\int Mdx^1dx^2 \ldots dx^n \tag{10}$$

является интегральным инвариантом n-го порядка группы G_1. Такой инвариант всегда существует, M — множитель Якоби уравнения (9).

Последовательно применяя теорему (3), приходим к заключению, что интегралы

$$\int \Omega_{n-q}^{\beta_1 \ldots \beta_q} = \int M(-1)^{r_{\alpha_1 \ldots \alpha_{n-q}}} \begin{vmatrix} \eta_{\beta_1 \alpha_{n-q+1}} \ldots \eta_{\beta_1 \alpha_n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \eta_{\beta_q \alpha_{n-q+1}} \ldots \eta_{\beta_q \alpha_n} \end{vmatrix} dx^{\alpha_1} \ldots dx^{\alpha_{n-q}}, \tag{11}$$

где индексы $\alpha_{n-q+1}, \ldots, \alpha_n$ написаны в порядке возрастания и $r_{\alpha_1 \ldots \alpha_{n-q}}$ — число инверсий в размещении $\alpha_1 \ldots \alpha_{n-q}$, являются интегральными инвариантами группы G_1.

На основании известной теоремы из теории определителей можно утверждать, что формы $\Omega_{n-q}^{\beta_1 \ldots \beta_q}$ линейно несвязаны.

Положив в (11)

$$q = n - 1; \quad \beta_i = i \quad (i = 1, 2, \ldots n - 1)$$

и воспользовавшись оператором $y_n(f)$, найдем, что

$$\varphi = M \begin{vmatrix} \eta_{11} \ldots \eta_{1n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \eta_{n1} \ldots \eta_{nn} \end{vmatrix}$$

является интегралом уравнения $x(f) = 0$. В силу свойств множителя Якоби можно положить $\varphi = 1$.

Так как формы $\Omega_{n-q}^{\beta_1 \ldots \beta_q}$ линейно несвязаны и число их равно C_n^{n-q}, то, для завершения доказательства теоремы, остается показать, что линейная комбинация

$$\int \lambda_j \Omega_{ip}$$

линейно несвязанных интегральных инвариантов является интегральным инвариантом тогда и только тогда, когда

$$X(\lambda_i) = 0.$$

Последнее немедленно следует из условий инвариантности.

Возвратимся к теореме 7. Доказать ее можно так: помимо указанного в теореме интегрального инварианта первого порядка, группа G_1, как это следует из теоремы 8, имеет еще $n - 1$ интегральных инвариантов первого порядка, подынтегральные формы которых линейно несвязаны между собой и с формой $A_i dx^i$.

Пусть

$$\int B_i dx^i$$

будет одним из таких инвариантов. Интеграл

$$\int A_{ik} dx^i dx^k = \int (A_i dx^i)(B_k dx^k) = \int (A_i B_k - A_k B_i)\, dx^i dx^k$$

является интегральным инвариантом второго порядка группы G_1. Покажем, что система уравнений

$$A_i = \sum_k A_{ik}\eta_k, \quad i = 1, \ldots n$$

имеет решение и что в этом решении $n-2$ функций η_k можно взять произвольно. Для этого достаточно проверить, что ранги матриц

$$\begin{pmatrix} A_{11} \ldots A_{1n} \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ A_{n1} \ldots A_{nn} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A_{11} \ldots A_{1n} & A_1 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . & . \\ A_{n1} \ldots A_{nn} & A_n \end{pmatrix} \tag{12}$$

равны двум. Равенство рангов матриц следует из соотношений

$$A_r A_{ks} - A_s A_{kr} = A_k A_{rs}.$$

Из тех же соотношений следует, что эти ранги не больше двух. Они и не меньше двух, так как формы $A_i dx^i$, $B_i dx^i$ линейно несвязаны и поэтому, хотя бы для одного k,

$$\begin{vmatrix} A_{kk} & A_{k,k+1} \\ A_{k+1,k} & A_{k+1,k+1} \end{vmatrix} = A_{k,k+1}^2 \neq 0.$$