Communications de la Société mathématique de Kharkow.
2-e série. Tome VI. № 1.

СООБЩЕНІЯ
ХАРЬКОВСКАГО
МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА.

ВТОРАЯ СЕРІЯ
Томъ VI.
№ 1. 1897-1899

Съ портретомъ К. Вейерштрасса.

ХАРЬКОВЪ.
Типографія и Литографія Зильбербергъ.
(Рыбная улица, домъ № 30-й).
1897. 99

Communications de la Société mathématique de Kharkow.
2-e série. Tome VI.

СООБЩЕНІЯ
ХАРЬКОВСКАГО
МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА.

ВТОРАЯ СЕРІЯ

Томъ VI.

ХАРЬКОВЪ.
Типографія и Литографія Зильберберга. Рыбная ул., 30.
1899.

На основанiи § 9 Устава Харьковскаго Математическаго Общества печатать и выпустить въ свѣтъ разрѣшаю. Харьковъ, 20-го мая 1899 года.

За Предсѣдателя Математическаго Общества Профессоръ *А. Ляпуновъ*.

СОДЕРЖАНІЕ

VI-го тома.

Составъ Харьковскаго Математическаго Общества

къ 1-му Января 1899 года.

A. Распорядительный комитетъ.

1. Предсѣдатель: К. А. Андреевъ
2. Товарищи предсѣдателя: А. М. Ляпуновъ и М. А. Тихомандрицкій.
3. Секретарь: В. А. Стекловъ.

B. Почетные члены.

1. Бобылевъ Дмитрій Константиновичъ, проф. СПБ. университета.
2. Бредихинъ Ѳедоръ Александровичъ, академикъ.
3. Бугаевъ Николай Васильевичъ, проф. Московскаго университета.
4. Жуковскій Николай Егоровичъ, проф. Московскаго университета.
5. Коркинъ Александръ Николаевичъ, проф. СПБ. университета.

C. Дѣйствительные члены.

1. Алексѣевскій Владиміръ Петровичъ, приватъ-доцентъ Харьк. унив.
2. Альбицкій Василий Ивановичъ, проф. Харьковскаго технол. инст.
3. Андреевъ Константинъ Алексѣевичъ, проф. Московскаго унив.
4. Бейеръ Евгеній Ильичъ, почетн. членъ Харьковскаго университета.
5. Веребрюсовъ Александръ Степановичъ, бывш. препод. Староб. гимн.
6. Виноградовъ Иванъ Алексѣевичъ, директ. Харьк. коммерч. учил.
7. Влезковъ Сергѣй Ѳедоровичъ, бывш. стипендіатъ Харьк. унив.
8. Головинъ Харлампій Сергѣевичъ, директоръ СПБ. технол. инст.
9. Гречаниновъ Алексѣй Васильевичъ, проф. Харьк. технол. инст.
10. Грицай Алексѣй Сергѣевичъ, директоръ Сумского реальн. учил.

11. Грузинцевъ Алексѣй Петровичъ, приватъ-доцентъ Харк. унив.
12. Деларю Даніилъ Михайловичъ, бывш. проф. Харьковскаго унив.
13. Евдокимовъ Николай Николаевичъ, приватъ-доцентъ Харьк. унив.
14. Зворыкинъ Константинъ Алексѣевичъ, проф. Харьк. технол. инст.
15. Кирпичевъ Викторъ Львовичъ, директ. Кіевскаго политехникума.
16. Киселевъ Андрей Петровичъ, препод. Воронежскаго кадетск. корп.
17. Клюшниковъ Александръ Андреевичъ, препод. 1-ой Харьк. гимн.
18. Кнабе Владиміръ Сергѣевичъ, бывш. проф. Харьк. технол. инст.
19. Ковальскій Матвѣй Ѳедоровичъ, проф. Харьковскаго университета.
20. Косенко Михаилъ Семеновичъ, бывш. препод. Харьк. прогимназіи.
21. Котляровъ Михаилъ Григорьевичъ, инспект. народн. уч. Курск. губ.
22. Латышевъ Григорій Алексѣевичъ, проф. Харьк. технол. инст.
23. Левицкій Григорій Васильевичъ, проф. Юрьевскаго университета.
24. Линицкій Иванъ Дмитріевичъ, препод. инст. благ. дѣв. въ Харьк.
25. Ляпуновъ Александръ Михайловичъ, проф. Харьковскаго унив.
26. Маевскій Андрей Васильевичъ, препод. 3-ей Харьковской гимн.
27. Михайловскій Болеславъ Григорьев., бывш. препод. Харьк. реальн. уч.
28. Морозовъ Юрій Ивановичъ, проф. Харьковскаго университета.
29. Мухачевъ Петръ Матвѣевичъ, проф. Харьковскаго технол. инст.
30. Пильчиковъ Николай Дмитріевичъ, проф. Новороссійскаго унив.
31. Погорѣлко Александръ Константиновичъ, проф. Харьк. технол. инст.
32. Предтеченскій Алексѣй Ивановичъ, проф. Харьк. технол. инст.
33. Проскурниковъ Николай Васильевичъ, препод. Харьк. реальн. уч.
34. Пшеборскій Антонъ Павловичъ, приватъ-доцентъ Харьк. унив.
35. Радцигъ Александръ Александровичъ, инженеръ-технологъ.
36. Раевскій Сергѣй Алексадровичъ, инспект. Харьк. учебн. округа.
37. Рейнботъ Александръ Евгеньевичъ, бывш. стипенд. Харьк. унив.
38. Рудневъ Петръ Матвѣевичъ, препод. Урюпинскаго реальн. уч.
39. Салтыковъ Николай Николаевичъ, бывш. стипенд. Харьк. унив.
40. Самецкій Рафаилъ Николаевичъ, препод. Изюмскаго реальн. уч.
41. Сикора Іосифъ Іосифовичъ, астрономъ Пулковской обсерваторіи.
42. Синяковъ Германъ Аѳанасьевичъ, препод. 2-ой Харьк. гимназіи.
43. Стекловъ Владиміръ Андреевичъ, проф. Харьковскаго университ.
44. Струве Людвигъ Оттовичъ, проф. Харьковскаго университета.
45. Тихомандрицкій Матвѣй Александровичъ, проф. Харьк. унив.
46. Флавицкій Николай Михайловичъ, бывш. лаборантъ Харьк. унив.
47. Флоровъ Петръ Степановичъ, препод. Харьковскаго реальн. уч.
48. Шейдтъ Ипполитъ Константиновичъ, препод. 1-й Харьк. гимн.
49. Шимковъ Андрей Петровичъ, проф. Харьковскаго университета.
50. Шиховъ Василій Васильевичъ, директ. Харьковскаго реальн. уч.
51. Штукаревъ Иванъ Дмитріевичъ, препод. 2-ой Харьковской гимн.
52. Чернай Николай Александровичъ, препод. Харьк. технол. инст.

D. Члены-корреспонденты.

1. Васильевъ Александръ Васильевичъ, проф. Казанскаго унив.
2. Вороной Георгій Өеодосьевичъ, проф. Варшавскаго университета.
3. Ермаковъ Василій Петровичъ, проф. университета св. Владиміра.
4. Марковъ Андрей Андреевичъ, проф. СПБ. унив., академикъ.
5. Некрасовъ Павелъ Алексѣевичъ, попеч. Московскаго учебн. окр.
6. Поссе Константинъ Александровичъ, проф. СПБ. университета.
7. Пташицкій Иванъ Львовичъ, проф. СПБ. университета.
8. Сомовъ Павелъ Осиповичъ, проф. Варшавскаго университета.
9. Тороповъ Константинъ Александровичъ, препод. Пермской гимн.

Къ геометріи распространенія и поглощенія электромагнитной энергіи.

А. Грузинцева.

Хотя вопросъ, рѣшеніемъ котораго мы будемъ здѣсь заниматься, разрѣшенъ, но при помощи различныхъ частныхъ соображеній, безъ указанія на общія источники этихъ соображеній; по этому при сопоставленіи съ дѣйствительностью трудно и иногда невозможно сказать: на счетъ какого частнаго предположенія должно отнести то или другое отступленіе отъ фактовъ опыта. Кромѣ того, большинство ученыхъ, занимавшихся рѣшеніемъ поставленнаго вопроса, главнымъ образомъ имѣли въ виду получить окончательныя рѣшенія по возможности проще и скорѣе, незаботясь особенно объ отдѣленіи требованій болѣе строгой теоріи отъ необходимости прибѣгать къ предположеніямъ, оправдываемымъ лишь окончательнымъ результатомъ. Наконецъ, и это мнѣ кажется не маловажнымъ, трудно сравнивать выводы различныхъ ученыхъ, не имѣя общаго источника ихъ полученія. И сравнительныя достоинства тѣхъ или другихъ пріемовъ яснѣе выступаютъ на фонѣ общихъ соображеній.

Разумѣется, такіе первокласные физики, какъ напримѣръ Кирхгоффъ, рѣшали задачу съ общей точки зрѣнія, но, къ сожалѣнію, ихъ рѣшеніе составлено во время господства механическихъ теорій свѣта и проникнуто духомъ этихъ теорій, а потому въ настоящее время кажется уже недостаточнымъ. Послѣдователи Кирхгоффа, каковы Фойгтъ, Друде и др., придерживались его метода, но ихъ работы имѣютъ цѣну и въ настоящее время, особенно изслѣдованія Фойгта. Французская школа физиковъ въ этомъ отношеніи далеко отстала отъ нѣмецкой, хотя въ силу историческихъ традицій и даетъ рѣшеніе занимающаго насъ вопроса по возможности въ простой и изящной формѣ.

Въ настоящей статьѣ мы постараемся по возможности соединить простоту формы съ полной общностью основаній.

§ 1. Задача, которую мы ставимъ себѣ, слѣдующая:

Даны двѣ поглощающія средины, т. е. двѣ проводящія электромагнитную энергію средины. Найти общіе законы ея распространенія въ одной изъ нихъ, зная ее въ другой.

Средины отдѣлены одна отъ другой плоскостью и обѣ изотропны.

Законы распространенія энергіи *двухъ родовъ*: первые касаются *направленія*, вдоль котораго распространяется энергія; вторые *напряженности* тѣхъ векторовъ, которыми мы представляемъ энергію.

Явленія, отвѣчающія этимъ законамъ, носятъ общее названіе явленій *оптической поляризаціи* или *поляризаціи свѣта*.

По самому смыслу задачи ясно, что оба рода этихъ законовъ органически связаны между собой и должны вытекать *изъ однихъ и тѣхъ-же источниковъ*. Однако, не смотря на очевидность такого соображенія, существуютъ рѣшенія нашего вопроса (въ механическихъ теоріяхъ), раздѣляющія задачу на двѣ части, независимыя одна отъ другой *).

Дадимъ нашей задачѣ точную математическую формулировку.

Пусть электромагнитная энергія распространяется въ поглощающей рединѣ, т. е., напр., въ проводникѣ, и доходитъ до другой средины, отдѣленной отъ первой плоскостью:

$$A_1x + B_1y + C_1z = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Дойдя до этой плоскости, она раздѣляется на двѣ части: одну—распространяющуюся въ той-же срединѣ.—это *отраженная энергія* и другую—во второй срединѣ—это *преломленная энергія*.

Условимся обозначать количества, относящіяся къ *падающей энергіи* буквами безъ значковъ,—къ отраженной тѣми-же буквами со значкомъ (′) вверху, а къ преломленной—со значкомъ ($_1$) внизу.

Въ такомъ случаѣ составляющіе падающаго свѣтоваго вектора, за который мы принимаемъ здѣсь такъ-называемую электрическую пертурбацію, будутъ:

$$Me^{Q}, \quad Ne^{Q}, \quad Pe^{Q},$$

отраженнаго:

$$M'e^{Q'}, \quad N'e^{Q'}, \quad P'e^{Q'},$$

и преломленнаго:

$$M_1e^{Q_1}, \quad N_1e^{Q_1}, \quad P_1e^{Q_1},$$

*) См. напр. *Ketteler*, Optik, 447; положеніе 25. Къ величайшему нашему удовольствію мы встрѣтили въ недавно появившейся книгѣ проф. Фойгта (Compendium d. th. Ph., Bd. II, S. 607) тѣ-же взгляды, которыхъ придерживаемся и мы.

причемъ

$$Q = \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta t,$$

$$Q' = \alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta' t,$$

$$Q_1 = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + \delta_1 t,$$

и количества $\alpha, \ldots \gamma_1$ вообще комплексны, а δ, δ' и δ_1 чисто-мнимыя числа.

Задача наша будетъ состоять въ слѣдующемъ:

Найти $M', \ldots M_1, \ldots, \alpha', \ldots \alpha_1, \ldots, \delta'$ *и* δ_1, *зная* M, N, P, α, β, γ, δ *и физическія постоянныя, характеризующія средины, т. е. ихъ діэлектрическія постоянныя, коэффиціенты электропроводности, магнитныя проницаемости и періодъ измѣненія кинетическаго состоянія первой средины.*

Опредѣленіе упомянутыхъ сейчасъ количествъ и дастъ намъ *законы поляризаціи* свѣтового вектора.

§ 2. Сначала займемся опредѣленіемъ $\alpha', \ldots, \alpha_1, \ldots, \delta_1$.

Какова-бы ни была система поверхностныхъ условій, *всегда* будемъ имѣть равенства вида:

$$a e^{Q} + a' e^{Q'} = a_1 e^{Q_1},$$

въ которыхъ a, a' и a_1 будутъ количества, независящія отъ x, y, z и t. *Это равенство должно существовать для всѣхъ значеній времени* t *и для всѣхъ значеній координатъ* x, y, z, *удовлетворяющихъ уравненію* (1).

Отсюда мы *заключаемъ*, что это возможно лишь при условіи:

$$Q = Q' = Q_1 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (2)$$

такъ-какъ количества a, a', a_1 *не могутъ быть одновременно нулями.*

Равенства (2) и послужатъ намъ основаніемъ для опредѣленія $\alpha', \ldots \delta_1$.

Мы подробно разсмотримъ только преломленную энергію, такъ-какъ отъ нея легко перейти къ отраженной.

Подставляя въ уравненіе

$$Q_1 = Q$$

значеніе этихъ Q и Q_1, получимъ равенство

$$(\alpha_1 - \alpha)\, x + (\beta_1 - \beta)\, y + (\gamma_1 - \gamma)\, z + (\delta_1 - \delta)\, t = 0.$$

Это равенство должно существовать при всѣхъ значеніяхъ координатъ x, y, z, удовлетворяющихъ уравненію разграничивающей плоскости (1), но чтобы избавиться отъ этого стѣсняющаго обстоятельства прибѣгнемъ къ методу, данному еще Лягранжемъ, а именно: помножимъ уравненіе (1) на неопредѣленный *пока* коэффиціентъ H и приложимъ результатъ къ предыдущему равенству; найдемъ:

$$\left.\begin{array}{c}(\alpha_1-\alpha+A_1H)\,x+(\beta_1-\beta+B_1H)\,y+(\gamma_1-\gamma+C_1H)\,z+\\ +(\delta_1-\delta)\,t=0.\end{array}\right\}. \quad (3)$$

Здѣсь количество H тоже комплексное.

Теперь, такъ какъ равенство (3) должно существовать *уже для всѣхъ значеній* x, y и z и, какъ раньше, для всѣхъ значеній t, получаемъ слѣдующую систему уравненій:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_1-\alpha+A_1H=0\\ \beta_1-\beta+B_1H=0\\ \gamma_1-\gamma+C_1H=0\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots (a)$$

и

$$\delta_1=\delta\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (b)$$

Послѣднее равенство даетъ

$$\frac{\omega_1}{\lambda_1}=\frac{\omega}{\lambda}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

ибо

$$\delta_1=-\frac{2\pi\omega_1}{\lambda_1}\sqrt{-1},\quad \delta=-\frac{2\pi\omega}{\lambda}\sqrt{-1}.$$

Въ равенствѣ (4) ω_1 и λ_1 вообще комплексны, но такого вида, что отношенія между дѣйствительными частями и коэффиціентами при $\sqrt{-1}$ соотвѣтственно равны между собой, т. е. если

$$\omega_1=\omega_1'+\omega_1''\sqrt{-1},\qquad \lambda_1=\lambda_1'+\lambda_1''\sqrt{-1},$$

то

$$\frac{\omega_1'}{\lambda_1'}=\frac{\omega_1''}{\lambda_1''}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

такъ что ихъ отношеніе $\dfrac{\omega_1}{\lambda_1}$ дѣйствительно, ибо $\dfrac{\omega}{\lambda}$ есть дѣйствительное число.

Теперь обратимся къ равенствамъ (a), но предварительно замѣтимъ, что, хотя выборомъ координатной системы мы можемъ упростить ихъ, но это упрощеніе будетъ эквивалентно частному предположенію, что такъ называемый „нормалъ поглощенія“ лежитъ въ плоскости паденія, противъ чего можно представить серьезныя возраженія; поэтому мы къ этому упрощенію не будемъ прибѣгать *).

Равенства (a) показываютъ, что α_1, β_1, γ_1 будутъ тотчасъ-же опредѣлены, коль скоро мы знаемъ H.

Съ этой цѣлью возьмемъ уравненія, которымъ должны удовлетворять принятыя нами выраженія для электрической пертурбаціи. Эти уравненія имѣютъ видъ *для періодическихъ измѣненій* въ срединѣ:

$$K\mu\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}+4\pi C\mu\frac{\partial f}{\partial t}=\Delta f \quad \text{и такъ же для } g \text{ и } h,$$

если f, g, h будутъ составляющія падающей пертурбаціи въ первой срединѣ.

Подставляя сюда значенія f, g и h (стр. 2), найдемъ:

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=K\mu\delta^2+4\pi C\mu\delta \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (c)$$

Точно также уравненія для преломленной пертурбаціи даютъ:

$$\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2=K_1\mu_1\delta_1^2+4\pi C_1\mu_1\delta_1 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (d)$$

Здѣсь K, K_1 діэлектрическія постоянныя срединъ; C, C_1 коэффиціенты электропроводности и μ, μ_1 коэффиціенты магнитной проницаемости ихъ.

Вмѣсто обычныхъ уравненій для f, g, h, которыми мы пользуемся здѣсь, возможно взять другія, болѣе общія, а именно:

$$K\mu\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}+4\pi C\mu\frac{\partial f}{\partial t}+\Gamma f=(1+A)\,\Delta f+B\frac{\partial\Delta f}{\partial t} \quad \text{и т. п.}$$

Ихъ возможно получить, принимая *во первыхъ* въ разсчетъ воздѣйствія матеріальныхъ частицъ на эфиръ и *во вторыхъ*, вводя долю участія магнитной энергіи въ происхожденіи пертурбаціонныхъ токовъ; но мы этотъ вопросъ оставляемъ до другой статьи; замѣтимъ лишь, что все послѣдующее остается въ силѣ, стоитъ только вмѣсто

$$K\mu\delta^2+4\pi C\mu\delta$$

*) Замѣтимъ еще, что, прибѣгая къ такому упрощенію, мы лишаемся практической выгоды: всѣ наши формулы настолько симметричны, что легко выводятся и повѣряются.

въ равенствахъ (c) и (d) ввести:

$$\frac{K\mu\delta^2 + 4\pi C\mu\delta + \Gamma}{(1+A)+B\delta}$$

для каждой средины.

Равенства (a) намъ дадутъ значенія α_1, β_1, γ_1 въ функціи α, β, γ и H, именно:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha - A_1 H \\ \beta_1 &= \beta - B_1 H \\ \gamma_1 &= \gamma - C_1 H. \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (I)$$

Сложивъ квадраты этихъ равенствъ и принявъ въ разсчетъ равенства (c) и (d), получимъ:

$$K_1\mu_1\delta_1^2 + 4\pi C_1\mu_1\delta_1 = K\mu\delta^2 + 4\pi C\mu\delta + H^2 - 2H(A_1\alpha + B_1\beta + C_1\gamma).$$

Опредѣляя отсюда H, найдемъ при помощи (b):

$$H = A_1\alpha + B_1\beta + C_1\gamma \pm$$
$$\pm\sqrt{(A_1\alpha + B_1\beta + C_1\gamma)^2 - (K\mu - K_1\mu_1)\,\delta^2 - 4\pi(C\mu - C_1\mu_1)\delta}.$$

Изъ двухъ знаковъ мы возьмемъ для преломленныхъ волнъ знакъ —, другой-же знакъ дастъ значеніе H, соотвѣтствующее отраженному вектору.

Итакъ имѣемъ

$$\left.\begin{aligned} H = A_1\alpha + B_1\beta + C_1\gamma - \\ -\sqrt{(A_1\alpha + B_1\beta + C_1\gamma)^2 + (K_1\mu_1 - K\mu)\delta^2 + 4\pi(C_1\mu_1 - C\mu)\delta} \end{aligned}\right\} (II)$$

Чтобы получить рѣшеніе для отраженнаго вектора стоитъ только указатель ($_1$) при количествахъ, относящихся къ второй срединѣ, замѣнить указателемъ ($'$), относящимся къ отраженному вектору; кромѣ того, такъ какъ первая средина изотропна, то ясно, что:

$$K' = K, \qquad \mu' = \mu, \qquad C' = C;$$

поэтому получимъ:

$$H' = 2(A_1\alpha + B_1\beta + C_1\gamma) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (III)$$

и по равенствамъ (I) имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} \alpha' &= \alpha - A_1 H' \\ \beta' &= \beta - B_1 H' \\ \gamma' &= \gamma - C_1 H' \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (IV)$$

Такимъ образомъ наша задача относительно α', β', γ' и α_1, β_1, γ_1 разрѣшена: всѣ эти количества найдены при помощи данныхъ.

§ 3. Извлечемъ теперь общія соотношенія между этими количествами, т. е., говоря другими словами, найдемъ законы, относящіеся до *направленія* передачи электромагнитной энергіи, т. е. законы ея отраженія и преломленія.

Обозначимъ комплексные углы паденія и преломленія буквами i_1 и σ_1; для ихъ опредѣленія можно написать слѣдующія равенства:

$$\left.\begin{aligned} \varrho \cos i_1 &= A_1\alpha + B_1\beta + C_1\gamma \\ \varrho_1 \cos\sigma_1 &= A_1\alpha_1 + B_1\beta_1 + C_1\gamma_1 \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ (e)$$

причемъ ϱ и ϱ_1 опредѣляются изъ равенствъ (c) и (d), такъ какъ:

$$\varrho^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2, \qquad \varrho_1^2 = \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2.$$

Изъ этихъ равенствъ находимъ:

$$\begin{aligned} \varrho^2 \sin^2 i_1 &= (B_1\gamma - C_1\beta)^2 + (C_1\alpha - A_1\gamma)^2 + (A_1\beta - B_1\alpha)^2, \\ \varrho_1^2 \sin^2\sigma_1 &= (B_1\gamma_1 - C_1\beta_1)^2 + (C_1\alpha_1 - A_1\gamma_1)^2 + (A_1\beta_1 - B_1\alpha_1)^2. \end{aligned}$$

Подставивъ во второе изъ этихъ равенствъ значенія α_1, β_1, γ_1 изъ системы (I), найдемъ, сопоставляя съ первымъ:

$$\varrho^2 \sin^2 i_1 = \varrho_1^2 \sin^2\sigma_1$$

или:

$$\frac{\sin i_1}{\sin\sigma_1} = \frac{\varrho_1}{\varrho} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (V)$$

Но изъ равенствъ (c) и (d) находимъ:

$$\frac{\varrho_1}{\varrho} = \frac{\sqrt{K_1\mu_1 + \dfrac{4\pi C_1\mu_1}{\delta_1}}}{\sqrt{K\mu + \dfrac{4\pi C\mu}{\delta}}},$$

слѣдовательно:

$$\frac{\sin i_1}{\sin\sigma_1} = \frac{\sqrt{K_1\mu_1 + \dfrac{4\pi C_1\mu_1}{\delta_1}}}{\sqrt{K\mu + \dfrac{4\pi C\mu}{\delta}}} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (V\,bis)$$

По уравненіямъ движенія можно заключить, что дроби:

$$\frac{1}{\sqrt{K\mu + \frac{4\pi C\mu}{\delta}}} \quad \text{и} \quad \frac{1}{\sqrt{K_1\mu_1 + \frac{4\pi C_1\mu_1}{\delta_1}}}$$

суть комплексныя скорости распространенія энергіи въ обѣихъ срединахъ; поэтому формула (V *bis*) представляетъ *законъ преломленія*, соотвѣтствующій закону Декарта для прозрачныхъ срединъ (діэлектриковъ).

Если обозначимъ черезъ

$$A_{11}, \quad B_{11}, \quad C_{11}$$

косинусы направленія перпендикуляра къ плоскости паденія, т. е., если положимъ, что

$$A_{11}A_1 + B_{11}B_1 + C_{11}C_1 = 0$$

и

$$A_{11}A + B_{11}B + C_{11}C = 0,$$

причемъ

$$A, \quad B, \quad C$$

будутъ косинусы направленія *дѣйствительнаго* луча, идущаго въ первой рединѣ,—то изъ равенствъ (I) можемъ получить слѣдующее:

$$A_{11}\alpha_1 + B_{11}\beta_1 + C_{11}\gamma_1 = A_{11}\alpha + B_{11}\beta + C_{11}\gamma \quad . \quad . \quad . \quad (VII)$$

т. е. дѣйствительный преломленный лучъ лежитъ въ плоскости паденія.

Подобный-же законъ найдемъ и для дѣйствительнаго отраженнаго луча, а именно:

$$A_{11}\alpha' + B_{11}\beta' + C_{11}\gamma' = A_{11}\alpha + B_{11}\beta + C_{11}\gamma \cdot \quad . \quad . \quad . \quad (VIII)$$

Что-же касается до „нормаловъ поглощенія", то ихъ положеніе относительно плоскости паденія зависитъ отъ количествъ M, N, P и т. п., а потому этотъ вопросъ мы отложимъ до второй части нашей задачи. Хотя нѣкоторые авторы склонны думать, что и „нормалъ поглощенія" лежитъ въ плоскости паденія, но къ такому заключенію нѣтъ ни указаній опыта, ни достаточныхъ теоретическихъ основаній. Положеніе „нормала поглощенія" обусловлено, какъ увидимъ ниже, положеніемъ плоскости поляризаціи свѣтоваго вектора.

§ 4. Пользуясь этимъ соотношеніемъ (V), мы можемъ дать для H и H' другія выраженія, совершенно аналогичныя тѣмъ, которыя можно получить для прозрачныхъ срединъ.

Умножая равенства (I) по порядку на A_1, B_1, C_1 и складывая результаты, получимъ при помощи равенствъ (e):

$$\varrho_1 \cos\sigma_1 = \varrho \cos i_1 - H;$$

подставляя-же сюда значенiе ϱ_1 изъ уравненiя (V), находимъ:

$$H = -\varrho \frac{\sin(i_1 - \sigma_1)}{\sin\sigma_1} \ldots\ldots\ldots (II\ bis)$$

Зная уголъ σ_1 изъ равенства (V bis), мы отсюда найдемъ H.

Точно также найдемъ изъ формулы (III):

$$H' = 2\varrho \cos i_1 \ldots\ldots\ldots\ldots (III\ bis)$$

Тоже количество H' должны найти изъ равенства (II bis), если подставимъ вмѣсто σ_1 уголъ отраженiя σ'; черезъ сопоставленiе результатовъ получаемъ для угла отраженiя законъ, выражающiйся равенствомъ *)

$$\sigma' = 180^0 - i_1 \ldots\ldots\ldots\ldots (VI)$$

Зная выраженiе для H и H' въ видѣ выраженiй (II bis) и (III bis), мы можемъ дать для опредѣленiя α', β', γ' и α_1, β_1, γ_1 слѣдующiя формулы:

$$\left.\begin{aligned} \alpha' &= \alpha - 2A_1\varrho\cos i_1 \\ \beta' &= \beta - 2B_1\varrho\cos i_1 \\ \gamma' &= \gamma - 2C_1\varrho\cos i_1 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (I\ bis)$$

и

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha + \varrho\frac{\sin(i_1 - \sigma_1)}{\sin\sigma_1} A_1 \\ \beta_1 &= \beta + \varrho\frac{\sin(i_1 - \sigma_1)}{\sin\sigma_1} B_1 \\ \gamma_1 &= \gamma + \varrho\frac{\sin(i_1 - \sigma_1)}{\sin\sigma_1} C_1 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (IV\ bis)$$

Такимъ образомъ имѣемъ для этой половины нашей задачи другую форму рѣшенiя.

*) Нѣкоторые авторы вмѣсто этого равенства пишутъ:

$$\sigma' = -i_1;$$

но это въ примѣненiи къ прозрачнымъ срединамъ приводитъ къ физической нелѣпости:

$$\omega' = -\omega.$$

Полученныя формулы въ примѣненіи къ прозрачнымъ срединамъ, т. е. когда коэффиціенты электропроводности C и C_1 суть нули, даютъ тѣ-же результаты, какіе получаются для нихъ непосредственно.

§ 5. Прежде чѣмъ перейти къ рѣшенію второй части нашей задачи, т. е. къ опредѣленію M', N', P' и M_1, N_1, P_1, замѣтимъ, что направленіе *комплекснаго вектора* (α, β, γ) какъ разъ совпадаетъ съ направленіемъ такъ называемаго *радіана* (*vecteur-radiant* по терминологіи Пуанкаре). Дѣйствительно, по теоремѣ Пойнтинга радіанъ перпендикуляренъ къ плоскости электрической и магнитной силъ; но, косинусы направленія первой для изотропныхъ срединъ пропорціональны количествамъ

$$M, N, P;$$

для второй пропорціональны количествамъ

$$N\gamma - P\beta, \qquad P\alpha - M\gamma, \qquad M\beta - N\alpha,$$

а слѣдовательно косинусы направленія радіана будутъ пропорціональны

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma,$$

такъ какъ вслѣдствіе *условія періодичности*, т. е. вслѣдствіе условія

$$\frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz} = 0,$$

имѣемъ

$$M\alpha + N\beta + P\gamma = 0.$$

§ 6. Перейдемъ теперь къ опредѣленію M', N', P'; M_1, N_1 и P_1.

Съ этой цѣлью воспользуемся условіями на границахъ, принявъ за нихъ равенство электрическихъ и магнитныхъ силъ вдоль плоскости раздѣла.

Если свѣтовой векторъ совпадаетъ съ электрической пертурбаціей, то составляющія магнитной силы для падающаго вектора будутъ:

$$\frac{4\pi}{K\mu\delta}(N\gamma - P\beta)e^{\varrho}, \qquad \frac{4\pi}{K\mu\delta}(P\alpha - M\gamma)e^{\varrho}, \qquad \frac{4\pi}{K\mu\delta}(M\beta - N\alpha)e^{\varrho}$$

и подобныя выраженія для отраженнаго и преломленнаго вектора.

Возьмемъ теперь за координатныя оси x и y двѣ взаимно-перпендикулярныя прямыя въ плоскости границы, а за ось z нормалъ къ границѣ.

Пусть эти оси будутъ OP, OQ и ON и косинусы ихъ угловъ съ прежними осями соотвѣтственно будутъ

$$A'', B'', C''; \qquad A_{11}, B_{11}, C_{11} \quad \text{и} \quad A_1, B_1, C_1.$$

Проектируя электрическія и магнитныя силы на оси OP и OQ и сравнивая эти проекціи, получимъ слѣдующія четыре уравненія:

$$SMA'' + SM'A'' = \frac{K}{K_1} SM_1A'' \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

$$SMA_{11} + SM'A_{11} = \frac{K}{K_1} SM_1A_{11} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

— для электрическихъ силъ,—и

$$S(N\gamma - P\beta)A'' + S(N'\gamma' - P'\beta')A'' = \frac{K}{K_1} S(N_1\gamma_1 - P_1\beta_1)A'' \quad . \; (3)$$

$$S(N\gamma - P\beta)A_{11} + S(N'\gamma' - P'\beta')A_{11} = \frac{K}{K_1} S(N_1\gamma_1 - P_1\beta_1)A_{11} \quad . \; (4)$$

— для магнитныхъ силъ,—причемъ знакомъ S представлена сумма трехъ членовъ, соотвѣтствующихъ написанному за этимъ знакомъ.

Кромѣ этихъ уравненій имѣемъ еще два, выражающихъ „условіе существованія“ періодическихъ измѣненій состоянія срединъ, а именно:

$$M'\alpha' + N'\beta' + P'\gamma' = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (5)$$

$$M_1\alpha_1 + N_1\beta_1 + P_1\gamma_1 = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (6)$$

Что касается до условія

$$M\alpha + N\beta + P\beta = 0 , \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\alpha)$$

относящагося до падающаго вектора, то оно должно считаться тождественно выполненнымъ и будетъ намъ служить лишь для упрощенія формулъ.

Такъ какъ мы уже опредѣлили всѣ $\alpha', \dots \gamma_1$, то въ написанныхъ *шести* уравненіяхъ будутъ заключаться *шесть* неизвѣстныхъ M', N', P'; M_1, N_1, P_1, входящихъ въ нихъ линейно, слѣдовательно имѣемъ вполнѣ опредѣленную задачу съ однимъ опредѣленнымъ рѣшеніемъ, какъ это и можно было предвидѣть *à priori*.

Эти неизвѣстныя впослѣдствіи могутъ быть выражены при помощи четырехъ амплитудъ и двухъ азимутовъ плоскостей поляризаціи.

Изъ уравненій (3) и (4) мы можемъ исключить величины α', β', γ'; α_1, β_1, γ_1, уже опредѣленныя нами ранѣе. Подставляя значенія α_1, β_1, γ_1 изъ равенствъ (I), мы находимъ для преломленнаго вектора:

$$S(N_1\gamma_1 - P_1\beta_1)A'' = SM_1(C''\beta_1 - B''\gamma_1) = SM_1(C''\beta - B''\gamma) - HSM_1A_{11} ,$$

$$S(N_1\gamma_1 - P_1\beta_1)A_{11} = SM_1(C_{11}\beta_1 - B_{11}\gamma_1) = SM_1(C_{11}\beta - B_{11}\gamma) + HSM_1A''$$

и подобныя-же выраженія для отраженнаго вектора.

Подставляя все это въ уравненія (3) и (4), получимъ:

$$\left.\begin{aligned} SM(C''\beta - B''\gamma) + SM'(C''\beta - B''\gamma) - H'SM'A_{11} = \\ = \frac{K}{K_1}[SM_1(C''\beta - B''\gamma) - HSM_1A_{11}] \end{aligned}\right\} \ldots (3\ bis)$$

$$\left.\begin{aligned} SM(C_{11}\beta - B_{11}\gamma) + SM'(C_{11}\beta - B_{11}\gamma) + H'SM'A'' = \\ = \frac{K}{K_1}[SM_1(C_{11}\beta - B_{11}\gamma) + HSM_1A'' \end{aligned}\right\} \ldots (4bis)$$

Подобнымъ образомъ равенства (5) и (6) можно написать въ слѣдующемъ видѣ:

$$SM'\alpha - H'SM'A_1 = 0 \ldots \ldots \ldots (5\ bis)$$

$$SM_1\alpha - H\,SM_1A_1 = 0 \ldots \ldots \ldots (6\ bis)$$

§ 7. Теперь, слѣдовательно, намъ предстоитъ разрѣшить систему уравненій (1), (2), (3 *bis*—6 *bis*) относительно $M', \ldots P_1$.

Для рѣшенія этой системы мы ее предварительно упростимъ. Для этой цѣли примемъ за прежнюю систему координатъ какъ разъ систему прямыхъ: OP, OQ, ON; въ такомъ случаѣ будемъ имѣть:

$$A'' = 1, \quad B'' = 0, \quad C'' = 0$$
$$A_{11} = 0, \quad B_{11} = 1, \quad C_{11} = 0$$
$$A_1 = 0, \quad B_1 = 0, \quad C_1 = 1.$$

Внося эти упрощенія въ уравненія (3 *bis*) и (4 *bis*), получимъ:

$$(N + N')\gamma - (P + P')\beta - H'N' = \frac{K}{K_1}(N_1\gamma - P_1\beta - HN_1)$$

$$(M + M')\gamma - (P + P')\alpha - H'M' = \frac{K}{K_1}(M_1\gamma - P_1\alpha - HM_1),$$

умноживъ-же уравненія (1) и (2), которыя теперь будутъ имѣть видъ:

$$M + M' = \frac{K}{K_1}M_1 \ldots \ldots \ldots (1\ bis)$$

$$N + N' = \frac{K}{K_1}N_1 \ldots \ldots \ldots (2\ bis)$$

на γ и вычтя результаты соотвѣтственно изъ полученныхъ сейчасъ, найдемъ:

$$(P+P')\beta+H'N'=\frac{K}{K_1}(P_1\beta+HN_1)\;.\quad . \; . \; . \; (3\,ter)$$

$$(P+P')\alpha+H'M'=\frac{K}{K_1}(P_1\alpha+HM_1)\;.\quad . \; . \; . \; . \; (4\,ter)$$

Уравненія (5 *bis*) и (6 *bis*) теперь напишутся въ слѣдующемъ упрощенномъ видѣ:

$$M'\alpha+N'\beta+P'\gamma-H'P'=0\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(5\,ter)$$

$$M_1\alpha+N_1\beta+P_1\gamma-HP_1=0\;.\quad .\;.\;.\;.\;.\;(6\,ter)$$

Такимъ образомъ намъ надо рѣшить систему уравненій (1 *bis*), (2 *bis*), (3 *ter*—6 *ter*).

Разсматривая эти уравненія, не трудно замѣтить, что количества P' и P_1 входятъ въ нихъ иначе, чѣмъ M', N'; M_1 и N_1; поэтому мы ихъ исключимъ, пользуясь равенствами (5 *ter*) и (6 *ter*); находимъ изъ этихъ послѣднихъ:

$$P'=\frac{M'\alpha+N'\beta}{H'-\gamma},\qquad P_1=\frac{M_1\alpha+N_1\beta}{H-\gamma}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(a)$$

Подставляя эти значенія P' и P_1 въ (3 *ter*) и (4 *ter*), получаемъ послѣ простого упрощенія:

$$\left.\begin{aligned} &M'\alpha\beta+[\beta^2+(H'-\gamma)^2]N'-A_1\{M_1\alpha\beta+N_1[\beta^2+(H-\gamma)^2]\}=\\ &\qquad\qquad=(N\gamma-P\beta)(H'-\gamma)\\ &M'[\alpha^2+(H'-\gamma)^2]+N'\alpha\beta-A_1\{M_1[\alpha^2+(H-\gamma)^2]+N_1\alpha\beta\}=\\ &\qquad\qquad=(M\gamma-P\alpha)(H'-\gamma), \end{aligned}\right\}\;.\;.\;(b)$$

гдѣ положено

$$A_1=\frac{K}{K_1}\cdot\frac{H'-\gamma}{H-\gamma}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(c)$$

Разсматривая эти уравненія (b), замѣчаемъ, что если въ коэффиціентахъ при M' замѣнимъ количества α и β черезъ β и α, то получимъ коэффиціенты при N'; тоже можно замѣтить относительно коэффиціентовъ при M_1 и N_1; кромѣ того тѣже равенства показываютъ, что, если замѣнимъ въ первомъ уравненіи (b) систему количествъ M', N'; α, β; M_1, N_1; M, N черезъ систему N', M'; β, α; N_1, M_1; N, M, то получимъ второе уравненіе (b). Кромѣ того коэффиціенты при M_1, N_1 отличаются отъ коэффиціентовъ при M' и N', за исключеніемъ множителя A_1, тѣмъ, что вмѣсто H входитъ H'. Этими замѣчаніями мы воспользуемся съ большой выгодой.

Подставимъ теперь въ уравненія (b) значенія M_1 и N_1 изъ равенствъ (1 *bis*) и (2 *bis*); по упрощеніи получаемъ:

$$\left.\begin{aligned} M'\alpha\beta + N'[\beta^2 - (H-\gamma)(H'-\gamma)] &= \frac{H'-\gamma}{H'-H}\,U, \\ M'[\alpha^2 - (H-\gamma)(H'-\gamma)] + N'\alpha\beta &= \frac{H'-\gamma}{H'-H}\,V, \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (d)$$

гдѣ положено для краткости:

$$U = -M\alpha\beta - N[\beta^2 + H(H-\gamma)] + P\beta(H-\gamma)$$
$$V = -M[\alpha^2 + H(H-\gamma)] - N\alpha\beta + P\alpha(H-\gamma).$$

Но эти выраженія U и V сейчасъ-же упрощаются.

Отдѣляя въ U при M, N члены съ β, а въ V члены съ α, видимъ, что коэффиціентомъ будетъ служить двучленъ $M\alpha + N\beta$, который по условію

$$M\alpha + N\beta + P\gamma = 0$$

равенъ $-P\gamma$; значитъ, находимъ:

$$U = -H(H-\gamma)\,N + HP\beta\,; \qquad V = -H(H-\gamma)\,M + HP\alpha.$$

Полагая въ равенствахъ (d) для краткости письма:

$$(H-\gamma)(H'-\gamma) = \Gamma,$$

рѣшимъ ихъ относительно M'; находимъ:

$$M' = \frac{H[M(\alpha^2+\beta^2-\Gamma) + PH'\alpha]}{(H'-H)(\alpha^2+\beta^2-\Gamma)}.$$

Пользуясь сдѣланнымъ выше замѣчаніемъ, т. е. замѣняя M, α, β черезъ N, β, α, найдемъ N', а именно:

$$N' = \frac{H[N(\alpha^2+\beta^2-\Gamma) + PH'\beta]}{(H'-H)(\alpha^2+\beta^2-\Gamma)}.$$

Теперь, чтобы получить M_1 и N_1 соотвѣтственно изъ M' и N', стоитъ только замѣнить въ этихъ послѣднихъ H и H' черезъ H' и H и ввести коэффиціентъ $-\dfrac{K_1}{K}$. Получимъ:

$$M_1 = \frac{K_1}{K} \cdot \frac{H'[M(\alpha^2+\beta^2-\Gamma) + PH\alpha]}{(H'-H)(\alpha^2+\beta^2-\Gamma)}$$

и

$$N_1 = \frac{K_1}{K} \cdot \frac{H'[N(\alpha^2 + \beta^2 - \Gamma) + PH\beta]}{(H' - H)(\alpha^2 + \beta^2 - \Gamma)}.$$

Остается теперь найти P' и P_1.

Подставляя значенія M', N' и M_1, N_1 въ формулы (a), получимъ послѣ простыхъ преобразованій:

$$P' = \frac{H(\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 + H\gamma)P}{(H' - H)(\alpha^2 + \beta^2 - \Gamma)},$$

и

$$P_1 = -\frac{K_1}{K} \cdot \frac{H'(\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 + H'\gamma)P}{(H' - H)(\alpha^2 + \beta^2 - \Gamma)}$$

Полагая для простоты письма:

$$\alpha^2 + \beta^2 - \Gamma = \Delta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (e)$$

найденныя рѣшенія мы соберемъ въ видѣ системы:

$$M' = \frac{H}{H' - H}\left(M + \frac{PH'\alpha}{\Delta}\right), \quad N' = \frac{H}{H' - H}\left(N + \frac{PH'\beta}{\Delta}\right),$$

$$P' = \frac{H}{H' - H}\left(1 + \frac{H'(H - \gamma)}{\Delta}\right)P$$

для отраженнаго вектора,—и

$$M_1 = \frac{K_1}{K} \cdot \frac{H'}{H' - H}\left(M + \frac{PH\alpha}{\Delta}\right), \quad N_1 = \frac{K_1}{K} \cdot \frac{H'}{H' - H}\left(N + \frac{PH\beta}{\Delta}\right),$$

$$P_1 = \frac{K_1}{K}\,\frac{H'}{H' - H}\left(1 + \frac{H(H' - \gamma)}{\Delta}\right)P.$$

для преломленнаго.

Такимъ образомъ разрѣшена и вторая часть задачи въ общемъ видѣ.

§ 8. Такимъ образомъ мы получили слѣдующія системы рѣшеній: *для отраженныхъ волнъ*

$$\left.\begin{aligned} M' &= \frac{H}{H' - H}\left[M + \frac{H'\alpha}{\Delta}P\right], \quad N' = \frac{H}{H' - H}\left[N + \frac{H'\beta}{\Delta}P\right], \\ P' &= \frac{H}{H' - H}\left[1 + \frac{H'(H - \gamma)}{\Delta}\right]P \end{aligned}\right\} . \quad (I)$$

и *для преломленныхъ волнъ*

$$\left.\begin{aligned}
M_1 &= \frac{K_1}{K}\cdot\frac{H'}{H'-H}\left[M+\frac{H\alpha}{\varDelta}P\right],\\
N_1 &= \frac{K_1}{K}\cdot\frac{H'}{H'-H}\left[N+\frac{H\beta}{\varDelta}P\right],\\
P_1 &= \frac{K_1}{K}\cdot\frac{H'}{H'-H}\left[1+\frac{H(H'-\gamma)}{\varDelta}\right]P.
\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots(II)$$

Если введемъ комплексные углы паденія и преломленія, то эти формулы примутъ другой видъ, представляющій ту выгоду, что отъ него легко перейти къ формуламъ отраженія и преломленія для прозрачныхъ срединъ (діэлектриковъ и очень слабыхъ проводниковъ).

Дѣйствительно, мы знаемъ, что

$$H = -\varrho\frac{\sin(i_1-\sigma_1)}{\sin\sigma_1},\qquad H' = 2\varrho\cos i_1$$

и, слѣдовательно:

$$H'-H = \varrho\frac{\sin(i_1+\sigma_1)}{\sin\sigma_1},$$

а потому получимъ вмѣсто системъ (I) и (II) слѣдующія:

$$\left.\begin{aligned}
M' &= -\frac{\sin(i_1-\sigma_1)}{\sin(i_1+\sigma_1)}\left[M+\frac{2\varrho\cos i_1\,\alpha}{\varDelta}P\right],\\
N' &= -\frac{\sin(i_1-\sigma_1)}{\sin(i_1+\sigma_1)}\left[N+\frac{2\varrho\cos i_1\,\beta}{\varDelta}P\right],\\
P' &= -\frac{\sin(i_1-\sigma_1)}{\sin(i_1+\sigma_1)}\left[1+\frac{2\varrho\cos i_1\,(H-\gamma)}{\varDelta}\right]P
\end{aligned}\right\}\ldots(I\,bis)$$

для отраженныхъ лучей, и

$$\left.\begin{aligned}
M_1 &= \frac{K_1}{K}\cdot\frac{2\sin\sigma_1\cos i_1}{\sin(i_1+\sigma_1)}\left[M-\frac{\varrho\sin(i_1-\sigma_1)\,\alpha}{\varDelta\sin\sigma_1}P\right],\\
N_1 &= \frac{K_1}{K}\cdot\frac{2\sin\sigma_1\cos i_1}{\sin(i_1+\sigma_1)}\left[N-\frac{\varrho\sin(i_1-\sigma_1)\,\beta}{\varDelta\sin\sigma_1}P\right],\\
P_1 &= \frac{K_1}{K}\cdot\frac{2\sin\sigma_1\cos i_1}{\sin(i_1+\sigma_1)}\left[1-\frac{\varrho\sin(i_1-\sigma_1)\,(H'-\gamma)}{\varDelta\sin\sigma_1}\right]P.
\end{aligned}\right\}\cdot(II\,bis)$$

для преломленныхъ.

Послѣднимъ формуламъ можно дать иной окончательный видъ въ тригонометрическихъ функціяхъ.

Мы можемъ найти, что

$$\Delta = \varrho^2 \frac{\sin i_1}{\sin\sigma_1}\cos(i_1 - \sigma_1)\,, \quad H' - \gamma = \varrho\cos i_1\,, \quad H - \gamma = -\varrho\frac{\sin i_1}{\sin\sigma_1}\cos\sigma_1\,,$$

поэтому формулы (I bis) обратятся въ слѣдующія:

$$M' = -\frac{\operatorname{tg}(i_1 - \sigma_1)}{\operatorname{tg}(i_1 + \sigma_1)}M - \frac{2\sin\sigma_1 \operatorname{tg}(i_1 - \sigma_1)}{\varrho^2 \sin i_1 \sin(i_1 + \sigma_1)}(M\xi - N\eta)\,;$$

$$N' = \frac{\sin(i_1 - \sigma_1)}{\sin(i_1 + \sigma_1)}N + \frac{2\sin\sigma_1 \operatorname{tg}(i_1 - \sigma_1)}{\varrho^2 \sin i_1 \sin(i_1 + \sigma_1)}(M\eta + N\xi)\,;$$

$$P' = +\frac{\operatorname{tg}(i_1 - \sigma_1)}{\operatorname{tg}(i_1 + \sigma_1)}P\,.$$

Здѣсь положено:

$$\beta^2 = \xi\,, \quad \eta = \sqrt{\xi\,\varrho^2\sin^2 i_1 - \xi^2}$$

и затѣмъ члены съ $P\alpha$ и $P\beta$ въ формулахъ для M' и N' исключались при помощи равенства

$$P\gamma = -M\alpha - N\beta\,,$$

величина же α исключалась при помощи уравненія

$$\alpha^2 + \beta^2 = \varrho^2\sin^2 i_1\,.$$

Для преломленнаго вектора находимъ подобнымъ же образомъ слѣдующія формулы:

$$M_1 = \frac{K_1}{K}\cdot\frac{2\sin\sigma_1\cos\sigma_1}{\sin(i_1 + \sigma_1)\cos(i_1 - \sigma_1)}M - \frac{K_1}{K}\cdot\frac{2\sin\sigma_1 \operatorname{tg}(i_1 - \sigma_1)}{\varrho^2\sin i_1 \sin(i_1 + \sigma_1)}(M\xi - N\eta)$$

$$N_1 = \frac{K_1}{K}\cdot\frac{2\sin\sigma_1\cos i_1}{\sin(i_1 + \sigma_1)}N + \frac{K_1}{K}\cdot\frac{2\sin\sigma_1 \operatorname{tg}(i_1 - \sigma_1)}{\varrho^2\sin i_1 \sin(i_1 + \sigma_1)}(M\eta + N\xi)\,.$$

$$P_1 = \frac{K_1}{K}\cdot\frac{2\sin^2\sigma_1\cos i_1}{\sin i_1\,\cos(i_1 - \sigma_1)\sin(i_1 + \sigma_1)}P\,.$$

Если-бы пожелали ввести комплексные азимуты, то должны были-бы положить:

$$M = \quad J\sin\Phi\cos i_1\,, \quad N = J\cos\Phi\,, \quad P = J\sin\Phi\sin i_1$$

$$M' = -J'\sin\Phi'\cos i_1\,, \quad N' = J'\cos\Phi'\,, \quad P' = J'\sin\Phi'\sin i_1$$

$$M_1 = \quad J_1\sin\Phi_1\cos\sigma_1\,, \quad N_1 = J_1\cos\Phi_1\,, \quad P_1 = J_1\sin\Phi_1\sin\sigma_1\,.$$

Полученныя формулы для $\beta = 0$ обращаются въ обычныя формулы, тождественныя по виду съ формулами Фрэнэля.

Изъ этихъ формулъ вытекаетъ любопытное слѣдствіе, что нормальныя составляющія колебаній въ отраженныхъ и преломленныхъ волнахъ зависятъ лишь отъ нормальныхъ составляющихъ колебаній падающихъ волнъ, между тѣмъ какъ тангенціальныя составляющія зависятъ не только отъ тангенціальныхъ составляющихъ падающихъ волнъ, но и отъ нормальныхъ.

Эта зависимость изчезаетъ для составляющихъ, перпендикулярныхъ къ плоскости паденія, въ трехъ случаяхъ:

1) Если допустимъ, что „нормалъ поглощенія" падающихъ волнъ лежитъ въ плоскости паденія, т. е., что

$$\beta = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (a)$$

2) Если падающій свѣтъ поляризованъ въ первомъ азимутѣ, т. е., когда

$$M = P = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (b)$$

3) Когда лучъ падаетъ нормально, ибо тогда

$$P = 0.$$

Въ этомъ послѣднемъ случаѣ изчезаетъ и нормальная составляющая.

При общепринятомъ взглядѣ на поглощеніе всегда имѣемъ, что

$$\beta = 0;$$

но, какъ не трудно убѣдиться, „нормалъ поглощенія" долженъ лежать всегда въ плоскости колебанія и нормала къ плоской волнѣ, а потому условіе (a) имѣетъ мѣсто лишь въ случаѣ, когда падающій свѣтъ поляризованъ во второмъ азимутѣ, т. е. когда падающія колебанія лежатъ въ плоскости паденія.

Однако, не смотря на такую разницу во взглядахъ на законы поглощенія, результаты получаются одни и тѣже. Дѣйствительно, мы всегда можемъ разложить падающій свѣтъ на двѣ части: одну поляризованную въ 1-мъ азимутѣ, а другую во 2-мъ и для перваго случая будетъ имѣть мѣсто условіе (b), а для втораго—(a).

§ 9. Чтобы получить окончательныя рѣшенія уравненій (I) и (II) нужно въ нихъ раздѣлить дѣйствительныя и мнимыя части. Съ этой цѣлью положимъ:

$$H' = -\frac{4\pi}{\lambda} P' e^{\Theta'\sqrt{-1}}, \quad H_0 + H_1\sqrt{-1} = P e^{\Theta\sqrt{-1}}$$

и между этими количествами P, P', Θ и Θ' будутъ существовать соотношенія, получаемыя изъ равенствъ (c) и (d) и равенства (II) § 2:

$$P^2\cos 2\Theta = P'^2\cos 2\Theta' + \Lambda^2\cos 2T,\quad P^2\sin 2\Theta = P'^2\sin 2\Theta' + \Lambda^2\sin 2T \quad (1)$$

гдѣ положено для симметріи формулъ:

$$\omega^2(K-K_1) = \Lambda^2\cos 2T,\quad 2(C-C_1)\omega\lambda = \Lambda^2\sin 2T. \quad . \; . \; . \; (2)$$

Такъ какъ количество h_0 и уголъ паденія i будемъ считать данными, то P и Θ опредѣлятся изъ соотношеній (1), если предварительно будутъ найдены вспомогательныя величины Λ и T изъ условій (2).

Далѣе найдемъ:

$$H = -\frac{2\pi}{\lambda}\left(P'e^{\Theta'\sqrt{-1}} + Pe^{\Theta\sqrt{-1}}\right), \;*)$$

$$H' - H = -\frac{2\pi}{\lambda}\left(P'e^{\Theta'\sqrt{-1}} - Pe^{\Theta\sqrt{-1}}\right).$$

Положимъ затѣмъ:

$$\alpha = -\frac{2\pi}{\lambda}Fe^{-\Phi\sqrt{-1}},\quad \beta = -\frac{2\pi}{\lambda}g_0,\quad \gamma = -\frac{2\pi}{\lambda}P'e^{\Theta'\sqrt{-1}},$$

причемъ F, Φ, P' и Θ' удовлетворяютъ соотношенію:

$$F^2\sin^2\Phi + P'^2\sin^2\Theta' = 1. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

Далѣе находимъ

$$\Delta = \frac{4\pi^2}{\lambda^2}\left[F^2e^{-2\Phi\sqrt{-1}} - PP'e^{(\Theta'+\Theta)\sqrt{-1}} + g_0^2\right]$$

и положимъ, что

$$\Delta = \frac{4\pi^2}{\lambda^2}Ve^{-v\sqrt{-1}},$$

причемъ эти вспомогательныя количества V и v опредѣлятся изъ соотношеній:

$$\left.\begin{aligned} V\cos v &= F^2\cos 2\Phi - PP'\cos(\Theta'+\Theta) + g_0^2 \\ V\sin v &= F^2\sin 2\Phi + PP'\sin(\Theta'+\Theta). \end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

Такъ какъ **):

$$F\cos\Phi = f_0,\quad F\sin\Phi = \sin i,$$

то F и Φ тоже извѣстны.

---

*) Можно положить:

$$H = -\frac{2\pi}{\lambda}pe^{\theta\sqrt{-1}},$$

что представляетъ извѣстную выгоду, которой мы впослѣдствіи воспользуемся.

**) Количества f_0, g_0, h_0 пропорціональны дѣйствительнымъ частямъ α, β, γ.

Затѣмъ опредѣляемъ:

$$\frac{H'\alpha}{\Delta} = V'e^{v'\sqrt{-1}}, \quad \frac{H'\beta}{\Delta} = \frac{2g_0P'}{V}e^{(\Theta'+v)\sqrt{-1}}, \quad \frac{H'(H-\gamma)}{\Delta} = V''e^{v''\sqrt{-1}},$$

гдѣ положено:

$$V' = \frac{2P'F}{V}, \quad V'' = \frac{2P'P}{V}, \quad v' = \Theta' - \Phi + v, \quad v'' = \Theta' + \Theta + v \quad . (5)$$

Потомъ положимъ, что

$$\frac{H}{H'-H} = Ue^{u\sqrt{-1}},$$

причемъ вспомогательныя величины U и u опредѣляются изъ соотношеній:

$$\left.\begin{aligned} P'U\cos(\Theta'+u) - PU\cos(\Theta+u) &= P'\cos\Theta' + P\cos\Theta \\ P'U\sin(\Theta'+u) - PU\sin(\Theta+u) &= P'\sin\Theta' + P\sin\Theta \end{aligned}\right\} \quad . \quad . (6)$$

такъ какъ

$$\frac{H}{H'-H} = \frac{P'e^{\Theta'\sqrt{-1}} + Pe^{\Theta\sqrt{-1}}}{P'e^{\Theta'\sqrt{-1}} - Pe^{\Theta\sqrt{-1}}}.$$

Затѣмъ полагаемъ:

$$\frac{H}{H'-H} = U_1e^{u_1\sqrt{-1}},$$

причемъ вспомогательныя величины U_1 и u_1 опредѣляются изъ соотношеній:

$$\left.\begin{aligned} P'U_1\cos(\Theta'+u_1) - PU_1\cos(\Theta+u_1) &= 2P'\cos\Theta' \\ P'U_1\sin(\Theta'+u_1) - PU_1\sin(\Theta+u_1) &= 2P'\sin\Theta' \end{aligned}\right\} \quad . \quad . (7)$$

такъ какъ

$$\frac{H'}{H'-H} = \frac{2P'e^{\Theta'\sqrt{-1}}}{P'e^{\Theta'\sqrt{-1}} - Pe^{\Theta\sqrt{-1}}}.$$

Далѣе находимъ:

$$\frac{H\alpha}{\Delta} = U'e^{u'\sqrt{-1}} + U''e^{u''\sqrt{-1}}, \quad \frac{H\beta}{\Delta} = \left[\frac{P'}{V}e^{(\Theta'+v)\sqrt{-1}} + \frac{P}{V}e^{(\Theta+v)\sqrt{-1}}\right]g_0,$$

$$\frac{H(H'-\gamma)}{\Delta} = V_1e^{v_1\sqrt{-1}} + V_{11}e^{v_{11}\sqrt{-1}},$$

гдѣ положено:

$$\left.\begin{array}{c} U' = \dfrac{P'F}{V}, \quad U'' = \dfrac{PF}{V}, \quad V_1 = \dfrac{P'^2}{V}, \quad V_{11} = \dfrac{PP'}{V}, \\ u' = \Theta' - \Phi + v, \quad u'' = \Theta - \Phi + v; \\ v_1 = 2\Theta' + v, \quad v_{11} = \Theta' + \Theta + v, \end{array}\right\} \ldots (8)$$

значитъ:

$$u' = v'; \quad v_{11} = v'', \quad V' = 2U', \quad V'' = 2V_{11} \ldots\ldots (9)$$

§ 10. Теперь надо опредѣлить U, u, U_1 и u_1; мы ограничимся приведеніемъ уравненій (6) и (7) къ виду уравненій (4).

Опредѣлимъ сначала $U\cos u$ и $U\sin u$. Съ этой цѣлью умножимъ уравненія (6) сначала на $\sin x$ и $\cos x$, а затѣмъ на $\cos x$ и $-\sin x$ и результаты сложимъ; найдемъ:

$$[P'\sin(\Theta'+x) - P\sin(\Theta+x)]\, U\cos u +$$
$$+ [P'\cos(\Theta'+x) - P\cos(\Theta+x)]\, U\sin u = P'\sin(\Theta'+x) + P\sin(\Theta+x);$$
$$[P'\cos(\Theta'+x) - P\cos(\Theta+x)]\, U\cos u -$$
$$- [P'\sin(\Theta'+x) - P\sin(\Theta+x)]\, U\sin u = P'\cos(\Theta'+x) + P\cos(\Theta+x).$$

Если сдѣлаемъ здѣсь x равнымъ $-\Theta'$ или $-\Theta$, то получимъ очень удобную для опредѣленія $U\cos u$ и $U\sin u$ систему. Пусть

$$x = -\Theta',$$

тогда получимъ:

$$\left.\begin{array}{l} P\sin(\Theta'-\Theta)\, U\cos u + [P' - P\cos(\Theta'-\Theta)]\, U\sin u = -P\sin(\Theta'-\Theta) \\ [P' - P\cos(\Theta'-\Theta)]\, U\cos u - P\sin(\Theta'-\Theta)\, U\sin u = P' + P\cos(\Theta'-\Theta). \end{array}\right\} . (a)$$

Эту систему можно рѣшить двояко. Положимъ, *во первыхъ*, что опредѣлили двѣ вспомогательныя величины μ и ν изъ равенствъ:

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{P\sin(\Theta'-\Theta)}{P' + P\cos(\Theta'-\Theta)}, \quad \operatorname{tg}\nu = \frac{P\sin(\Theta'-\Theta)}{P' - P\cos(\Theta'-\Theta)} . . (10)$$

Тогда изъ системы (a) найдемъ:

$$U\cos u = \frac{\sin\nu\cos(\mu+\nu)}{\sin\mu}, \quad U\sin u = -\frac{\sin\nu\sin(\mu+\nu)}{\sin\mu} . . (11)$$

Отсюда:

$$U = \pm \frac{\sin v}{\sin \mu}, \quad u = n\pi - (\mu + v). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Верхнему знаку при U соотвѣтствуетъ $n = 0$, а нижнему $n = 1$, такъ-какъ U всегда положительно.

Во вторыхъ изъ системы (a) прямо находимъ:

$$\left.\begin{aligned} U\cos u &= \frac{P'^2 - P^2}{P'^2 + P^2 - 2PP'\cos(\Theta' - \Theta)} \\ U\sin u &= -\frac{2PP'\sin(\Theta' - \Theta)}{P'^2 + P^2 - 2PP'\cos(\Theta' - \Theta)}. \end{aligned}\right\} \ . \ . \ . \ . \ (bis)$$

Съ другой стороны мы могли-бы взять:

$$x = -\Theta$$

и получили-бы систему, аналогичную (a), а именно:

$$P'\sin(\Theta' - \Theta)\, U\cos u - [P - P'\cos(\Theta' - \Theta)]\, U\sin u = P'\sin(\Theta' - \Theta),$$
$$[P - P'\cos(\Theta' - \Theta)]\, U\cos u + P'\sin(\Theta' - \Theta)\, U\sin u = -[P + P'\cos(\Theta' - \Theta)].$$

Отсюда, если положимъ:

$$\operatorname{tg}\mu' = \frac{P'\sin(\Theta' - \Theta)}{P + P'\cos(\Theta' - \Theta)}, \quad \operatorname{tg}v' = \frac{P'\sin(\Theta' - \Theta)}{P + P'\cos(\Theta' - \Theta)}. \ (10\, bis)$$

то найдемъ:

$$U\cos u = -\frac{\sin v'\cos(\mu' + v')}{\sin \mu'}, \quad U\sin u = -\frac{\sin v'\sin(\mu' + v')}{\sin \mu'}. \ (11\, bis)$$

$$U = \mp \frac{\sin v'}{\sin \mu'}, \quad u = n\pi + (\mu' + v') \ . \ . \ . \ . \ . \ (12\, bis)$$

Верхнему знаку при U соотвѣтствуетъ $n = 0$, а нижнему $n = 1$.
Итакъ U и u опредѣлены

§ 11. Теперь надо опредѣлить U_1 и u_1.

Система (7) подобно тому, какъ система (6), даетъ:

$$[P'\sin(\Theta' + x) - P\sin(\Theta + x)]\, U_1\cos u_1 +$$
$$+ [P'\cos(\Theta' + x) - P\cos(\Theta + x)]\, U_1\sin u_1 = 2P'\sin(\Theta' + x)$$

$$[P'\cos(\Theta' + x) - P\cos(\Theta + x)]\, U_1\cos u_1 -$$
$$- [P'\sin(\Theta' + x) - P\sin(\Theta + x)]\, U_1\sin u_1 = 2P'\cos(\Theta' + x).$$

Положивъ здѣсь

$$x = -\Theta,$$

получимъ:

$$\left.\begin{array}{r} P'\sin(\Theta'-\Theta)\,U_1\cos u_1 - \\ -[P-P'\cos(\Theta'-\Theta)]\,U_1\sin u_1 = 2P'\sin(\Theta'-\Theta) \\ -[P-P'\cos(\Theta'-\Theta)]\,U_1\cos u_1 - \\ -P'\sin(\Theta'-\Theta)\,U_1\sin u_1 = 2P'\cos(\Theta'-\Theta). \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (b)$$

Положивъ же:

$$\operatorname{tg}\mu_1 = \operatorname{tg}(\Theta'-\Theta), \quad \operatorname{tg}v_1 = \frac{P'\sin(\Theta'-\Theta)}{P-P'\cos(\Theta'-\Theta)}, \quad \ldots \quad (13)$$

найдемъ:

$$U_1\cos u_1 = -\frac{2\sin v_1\cos(\mu_1+v_1)}{\sin\mu_1}, \quad U_1\sin u_1 = -\frac{2\sin v_1\sin(\mu_1+v_1)}{\sin\mu_1}. \quad (14)$$

Отсюда:

$$U_1 = \mp\frac{2\sin v_1}{\sin\mu_1}, \quad u_1 = n\pi + (\mu_1+v_1) \quad \ldots \quad (15)$$

причемъ верхнему знаку при U_1 соотвѣтствуетъ $n=0$, а нижнему $n=1$.

Если-бы мы взяли

$$x = -\Theta',$$

то получили-бы для опредѣленія U_1 и u_1 уравненія:

$$[P'-P\cos(\Theta'-\Theta)]\,U_1\cos u_1 - P\sin(\Theta'-\Theta)\,U_1\sin u_1 = 2P',$$

$$P\sin(\Theta'-\Theta)\,U_1\cos u_1 + [P'-P\cos(\Theta'-\Theta)]\,U_1\sin u_1 = 0.$$

Полагая здѣсь:

$$\operatorname{tg}\mu_0 = \frac{P'}{P'-P\cos(\Theta'-\Theta)} = \frac{P'\operatorname{tg}v}{P\sin(\Theta'-\Theta)}$$

и пользуясь значеніемъ $\operatorname{tg}v$, получимъ:

$$U_1\cos u_1 = 2\operatorname{tg}\mu_0\cos^2 v, \quad U_1\sin u_1 = -2\operatorname{tg}\mu_0\cos v\sin v \quad . \ . \ (14\ bis)$$

Отсюда:

$$U_1 = \pm 2\operatorname{tg}\mu_0\cos v, \quad u_1 = n\pi - v. \quad \ldots \quad (15\ bis)$$

Мы предпочитаемъ рѣшеніе (15).

Опредѣляя непосредственно, найдемъ:

$$\left.\begin{aligned} U_1\cos u_1 &= \frac{2P'[P' - P\cos(\Theta' - \Theta)]}{P'^2 + P^2 - 2PP'\cos(\Theta' - \Theta)} \\ U_1\sin u_1 &= -\frac{2P'P\sin(\Theta' - \Theta)}{P'^2 + P^2 - 2PP'\cos(\Theta' - \Theta)}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (16)$$

Сравнивая съ (11 *bis*), усматриваемъ, что

$$U\sin u = U_1\sin u_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (17)$$

Это соотношеніе значительно облегчаетъ вычисленія. Пользуясь имъ и выраженіемъ $\mathrm{tg}\mu_0$ въ функціи v, найдемъ изъ (17)

$$\frac{2P'\sin v}{P\sin(\Theta' - \Theta)} = \frac{\sin(\mu + v)}{\sin\mu},$$

а затѣмъ —

$$U_1\cos u_1 = \frac{\cos v\sin(\mu + v)}{\sin\mu}.$$

Если положимъ

$$\frac{P\sin(\Theta' - \Theta)}{2P'} = \mathrm{tg}z,$$

то получимъ:

$$\mathrm{tg}\mu = \frac{\sin v\cos z}{2P'\sin(v - z)}.$$

§ 12. Перейдемъ теперь къ рѣшенію первоначальной системы и для удобства разсмотримъ отдѣльно случаи, когда падающій свѣтъ поляризованъ въ первомъ и во второмъ азимутѣ.

Первый случай. Пусть падающій свѣтъ поляризованъ въ первомъ азимутѣ; тогда

$$M = 0, \qquad P = 0,$$

а потому уравненія (I) и (I) § 8 показываютъ, что

$$M' = 0, \qquad P' = 0,$$

$$M_1 = 0, \qquad P_1 = 0,$$

т. е. въ этомъ случаѣ и отраженный, и преломленный свѣтъ поляризованы въ томъ-же первомъ азимутѣ. Это заключеніе не зависитъ отъ частной формы закона поглощенія.

Итакъ остаются уравненія:

$$N' = \frac{H}{H' - H} N \quad \text{и} \quad N_1 = \frac{H'}{H' - H} \cdot \frac{K_1}{K} N.$$

Пусть падающій свѣтъ поляризованъ прямолинейно, тогда N количество дѣйствительное, но коэффиціенты при N комплексны, слѣдовательно

$$N' = R_1 + S_1 \sqrt{-1}, \quad N_1 = P_1 + Q_1 \sqrt{-1}$$

а амплитуды будутъ:

$$\sqrt{R_1^2 + S_1^2}, \qquad \sqrt{P_1^2 + Q_1^2}$$

и разности фазъ будутъ:

$$\operatorname{tg} \frac{2\pi \Delta'}{\lambda} = \frac{S_1}{R_1}, \quad \operatorname{tg} \frac{2\pi \Delta_1}{\lambda_1} = \frac{Q_1}{P_1}.$$

Подставляя значенія

$$\frac{H}{H' - H} \quad \text{и} \quad \frac{H'}{H' - H}$$

изъ § 9, находимъ по сравненіи дѣйствительныхъ и мнимыхъ частей слѣдующія выраженія:

$$R_1 = NU \cos u, \quad S_1 = NU \sin u, \quad \operatorname{tg} \frac{2\pi \Delta'}{\lambda} = \operatorname{tg} u,$$

а потому:

$$\sqrt{R_1^2 + S_1^2} = \pm \frac{\sin \nu}{\sin \mu} N, \quad \frac{2\pi \Delta'}{\lambda} = n\pi - (\mu + \nu). \quad . \; . \; . \; (1)$$

Затѣмъ найдемъ:

$$P_1 = \frac{K_1}{K} N U_1 \cos u_1, \quad Q_1 = \frac{K_1}{K} N U_1 \sin u_1, \quad \operatorname{tg} \frac{2\pi \Delta_1}{\lambda_1} = \operatorname{tg} u_1,$$

откуда:

$$\sqrt{P_1^2 + Q_1^2} = \mp \frac{K_1}{K} \cdot \frac{2 \sin \nu_1}{\sin \mu_1} N, \quad \frac{2\pi \Delta_1}{\lambda_1} = n\pi + (\mu_1 + \nu_1). \; . \; . \; (2)$$

Если-бы падающій свѣтъ былъ поляризованъ эллиптически, то должно было-бы взять:

$$N = A + \Gamma \sqrt{-1} = S e^{\tau \sqrt{-1}}$$

и амплитуда его была-бы S, а разность фазъ его составляющихъ равнялась-бы $\frac{\lambda\tau}{2\pi}$.

Въ этомъ случаѣ въ уравненіяхъ для N' и N_1 вмѣсто U, U_1, u, u_1 надо взять:

$$US, \quad U_1S, \quad u+\tau \quad \text{и} \quad u_1+\tau_1;$$

слѣдовательно амплитуды увеличились-бы въ S разъ, а фазы на τ, и окончательныя рѣшенія были-бы:

$$\sqrt{R_1^2+S_1^2} = \pm\frac{\sin\nu}{\sin\mu}S, \qquad \frac{2\pi\Delta'}{\lambda} = n\pi-(\mu+\nu)+\tau.$$

$$\sqrt{P_1^2+Q_1^2} = \mp\frac{2\sin\nu_1}{\sin\mu_1}\cdot\frac{K_1}{K}S, \qquad \frac{2\pi\Delta_1}{\lambda_1} = n\pi+(\mu_1+\nu_1)+\tau.$$

Если-бы мы подобрали падающій лучъ такъ, чтобы удовлетворялось или равенство

$$\tau = \mu+\nu,$$

или равенство

$$-\tau = \mu_1+\nu_1,$$

то въ такомъ случаѣ или отраженный лучъ, или преломленный, были-бы поляризованы прямолинейно.

§ 12. *Второй случай.* Пусть падающій свѣтъ поляризованъ во второмъ азимутѣ; тогда

$$N=0 \quad \text{и} \quad \beta=0.$$

Разсмотримъ сначала отраженный лучъ. Въ этомъ случаѣ уравненія будутъ:

$$M' = \frac{H}{H'-H}\left(M+\frac{H'\alpha}{\Delta}P\right), \quad P' = \frac{H}{H'-H}\left(1+\frac{H'(H-\gamma)}{\Delta}\right)P.$$

Такъ какъ $\beta=0$, то, слѣдовательно, (§ 9) и $g_0=0$; значитъ, предыдущія уравненія можно будетъ написать при помощи равенствъ того-же § 9 въ слѣдующей формѣ:

$$\left.\begin{aligned} M' &= Ue^{u\sqrt{-1}}[M+V'e^{v'\sqrt{-1}}P] \\ P' &= Ue^{u\sqrt{-1}}[1+V''u^{v''\sqrt{-1}}]P, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (a)$$

причемъ, какъ положено раньше:

$$V' = \frac{2P'F}{V}, \quad V'' = \frac{2P'P}{V}, \quad v' = \Theta'-\Phi+v, \quad v'' = \Theta'+\Theta+v.$$

Такъ-какъ отраженный свѣтъ эллиптически поляризованный, то положимъ:

$$M' = M_1' + M_2'\sqrt{-1}\,, \quad P' = P_1' + P_2'\sqrt{-1}\;.\;.\;.\;.\;.\;(b)$$

и искомыя амплитуды будутъ:

$$M_0' = \sqrt{M_1'^2 + M_2'^2}\,, \quad P_0' = \sqrt{P_1'^2 + P_2'^2}\,,$$

разности-же фазъ опредѣлятся изъ уравненій:

$$\operatorname{tg}\frac{2\pi\varDelta'}{\lambda} = \frac{M_2'}{M_1'}, \quad \operatorname{tg}\frac{2\pi\varDelta''}{\lambda} = \frac{P_2'}{P_1'}$$

и разность фазъ обѣихъ составляющихъ отраженнаго луча будетъ опредѣляться разностью

$$\frac{2\pi}{\lambda}(\varDelta' - \varDelta'').$$

Подставляя значенія M' и P' изъ (b) въ (a) и сравнивая дѣйствительныя и мнимыя части, получимъ для опредѣленія M_1', M_2', P_1' и P_2' слѣдующія уравненія:

$$\left.\begin{aligned}
M_1' &= [M\cos u + PV'\cos(u+v')]U;\\
P_1' &= PU[\cos u + V''\cos(u+v'')],\\
M_2' &= [M\sin u + PV'\sin(u+v')]U;\\
P_2' &= PU[\sin u + V''\sin(u+v'')].
\end{aligned}\right\}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(c)$$

Отсюда:

$$\begin{cases}
M_0'^2 = U^2[M^2 + P^2V'^2 + 2MPV'\cos v'];\\
P_0'^2 = P^2U^2[1 + V''^2 + 2V''\cos v''].
\end{cases}$$

$$\operatorname{tg}\frac{2\pi\varDelta'}{\lambda} = \frac{M\sin u + PV'\sin(u+v')}{M\cos u + PV'\cos(u+v')}\,, \quad \operatorname{tg}\frac{2\pi\varDelta''}{\lambda} = \frac{\sin u + V''\sin(u+v'')}{\cos u + V''\cos(u+v'')}\,.$$

Но эти формулы можно преобразовать.

Положимъ, что мы опредѣлили два вспомогательныя количества μ_{11} и v_{11} по равенствамъ:

$$\operatorname{tg}\mu_{11} = \frac{PV'\sin u'}{M + PV'\cos v'}\,, \quad \operatorname{tg}v_{11} = \frac{V''\sin v''}{1 + V''\cos v''}\;.\;.\;.\;.\;.\;(d)$$

Въ такомъ случаѣ, найдемъ:

$$\frac{2\pi\Delta'}{\lambda} = u + \mu_{11}, \quad \frac{2\pi\Delta''}{\lambda} = u + \nu_{11},$$

откуда разность фазъ будетъ

$$\frac{2\pi(\Delta' - \Delta'')}{\lambda} = \mu_{11} - \nu_{11} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Слѣдовательно, она независитъ непосредственно отъ u.

Затѣмъ изъ (c) находимъ, вводя μ_{11} и ν_{11}:

$$\left.\begin{aligned} M_1' &= PUV'\sin v' \frac{\cos(u+\mu_{11})}{\sin\mu_{11}}, \quad P_1' = PUV''\sin v'' \frac{\cos(u+\nu_{11})}{\sin\nu_{11}} \\ M_2' &= PUV'\sin v' \frac{\sin(u+\mu_{11})}{\sin\mu_{11}}, \quad P_2' = PUV''\sin v'' \frac{\sin(u+\nu_{11})}{\sin\nu_{11}} \end{aligned}\right\} . \quad (4)$$

и слѣдовательно:

$$M_0' = PUV' \frac{\sin v'}{\sin\mu_{11}}, \quad P_0' = PUV'' \frac{\sin v''}{\sin\nu_{11}} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Теперь надо опредѣлить v' и v''.

Изъ уравненій:

$$\left.\begin{aligned} V\cos v &= F^2\cos 2\Phi - PP'\cos(\Theta' + \Theta) \\ V\sin v &= F^2\sin 2\Phi + PP'\sin(\Theta' + \Theta). \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (f)$$

находимъ:

$$\left.\begin{aligned} V\cos v' &= F^2\cos(\Theta' + \Phi) - PP'\cos(\Theta + \Phi) \\ V\sin v' &= F^2\sin(\Theta' + \Phi) + PP'\sin(\Theta + \Phi) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (h)$$

и затѣмъ:

$$\left.\begin{aligned} V\cos v'' &= F^2\cos(2\Phi + \Theta' + \Theta) - P'P \\ V\sin v'' &= F^2\sin(2\Phi + \Theta' + \Theta). \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (i)$$

Замѣтимъ, что хотя въ формулу для опредѣленія μ_{11} входятъ M и P, но ихъ отношеніе исключится, ибо мы имѣемъ:

$$\frac{P}{M} = \mathrm{tg}\, i. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

§ 14. Опредѣлимъ теперь преломленныя колебанія, т. е. M_1 и P_1. Формулы (II) § 8 даютъ:

$$M_1 = \frac{K_1}{K} U_1 [M e^{u_1 \sqrt{-1}} + P(U' e^{(u_1+u')\sqrt{-1}} + U'' e^{(u_1+u'')\sqrt{-1}})],$$

$$P_1 = \frac{K_1}{K} U_1 [e^{u_1 \sqrt{-1}} + V_1 e^{(v_1+u_1)\sqrt{-1}} + V_{11} e^{(v_{11}+u_1)\sqrt{-1}}] P.$$

Положимъ:

$$M_1 = M_{11} + M_{12}\sqrt{-1}, \quad P_1 = P_{11} + P_{12}\sqrt{-1};$$

тогда получимъ:

$$\left.\begin{aligned} M_{11} &= \frac{K_1}{K} U_1 [M \cos u_1 + PU' \cos(u_1+u') + PU'' \cos(u_1+u'')] \\ M_{12} &= \frac{K_1}{K} U_1 [M \sin u_1 + PU' \sin(u_1+u') + PU'' \sin(u_1+u'')] \end{aligned}\right\} \ldots (7)$$

и

$$\left.\begin{aligned} P_{11} &= \frac{K_1}{K} U_1 [\cos u_1 + V_1 \cos(u_1+v_1) + V_{11} \cos(u_1+v_{11})] P \\ P_{12} &= \frac{K_1}{K} U_1 [\sin u_1 + V_1 \sin(u_1+v_1) + V_{11} \sin(u_1+v_{11})] P. \end{aligned}\right\} \ldots (8)$$

Положимъ:

$$\operatorname{tg}\mu_2 = \frac{P(U' \sin u' + U'' \sin u'')}{M + PU'' \cos u' + PU'' \cos u''};$$

тогда:

$$M_{11} = \frac{K_1}{K} U_1 [\cos u_1 \operatorname{ctg}\mu_2 - \sin u_1] P(U' \sin u' + U'' \sin u''),$$

$$M_{12} = \frac{K_1}{K} U_1 [\sin u_1 \operatorname{ctg}\mu_2 + \cos u_1] P(U' \sin u' + U'' \sin u'');$$

а отсюда находимъ:

$$M_{11} = \frac{K_1 U_1 P}{K} \cdot \frac{\sin(u_1+\mu_2)}{\sin\mu_2} (U' \sin u' + U'' \sin u'')$$

$$M_{12} = \frac{K_1 U_1 P}{K} \cdot \frac{\sin(u_1+\mu_2)}{\sin\mu_2} (U' \sin u' + U'' \sin u'').$$

Отсюда наконецъ найдемъ:

$$M_{01} = \pm \frac{K_1 U_1}{K} P \cdot \frac{U' \sin u' + U'' \sin u''}{\sin \mu_2} \ldots \ldots \quad (9)$$

$$\operatorname{tg} \frac{2\pi \Delta_1}{\lambda_1} = \operatorname{tg}(u_1 + \mu_2),$$

т. е.

$$\frac{2\pi \Delta_1'}{\lambda_1} = u_1 + \mu_2 \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

Формулы (8) даютъ, если положимъ:

$$\operatorname{tg} v_2 = \frac{V_1 \sin v_1 + V_{11} \sin v_{11}}{1 + V_1 \cos v_1 + V_{11} \cos v_{11}},$$

слѣдующія:

$$P_{11} = \frac{K_1}{K} P U_1 (V_1 \sin u_1 + V_{11} \sin v_{11}) \frac{\cos(u_1 + v_2)}{\sin v_2}$$

$$P_{12} = \frac{K_1}{K} P U_1 (V_1 \sin v_1 + V_{11} \sin v_{11}) \frac{\sin(u_1 + v_2)}{\sin v_2}.$$

Отсюда наконецъ:

$$P_{01} = \pm \frac{K_1}{K} P U_1 \frac{V_1 \sin v_1 + V_{11} \sin v_{11}}{\sin v_2} \ldots \ldots \quad (11)$$

и

$$\frac{2\pi \Delta_1''}{\lambda_1} = u_1 + v_2 \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (12)$$

и слѣдовательно, разность фазъ опредѣлится равенствомъ

$$\frac{2\pi(\Delta_1' - \Delta_1'')}{\lambda_1} = \mu_2 - v_2 \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

Теперь остается дать формулы для u', u'', v_1 и v_{11}, но такъ какъ по § 13, $u' = v'$ и $v_{11} = v''$, то для нихъ формулы даны въ предыдущемъ § [равенства (h) и (i)]. Слѣдовательно, надо составить равенства только для опредѣленія u'' и v_1.

Изъ равенствъ (f) § 13 имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} V \cos u'' &= F^2 \cos(\Theta + \Phi) - PP' \cos(\Theta' + \Phi) \\ V \sin u'' &= F^2 \sin(\Theta + \Phi) + PP' \sin(\Theta' + \Phi) \end{aligned}\right\} \ldots \ldots \quad (k)$$

и

$$\left.\begin{aligned} V\cos v_1 &= F^2\cos 2(\Theta' + \Phi) - PP'\cos(\Theta' - \Theta) \\ V\sin v_1 &= F^2\sin 2(\Theta' + \Phi) - PP'\sin(\Theta' - \Theta). \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (l)$$

Итакъ все найдено.

§ 15. Формулы §§ 13—14 можно упростить и привести всѣ опредѣляемыя количества къ другимъ, которыя въ частныхъ случаяхъ, напримѣръ, когда верхняя средина прозрачна, принимаютъ простыя значенія, значительно упрощающія формулы.

Введемъ положеніе (§ 9)

$$H = pe^{\theta\sqrt{-1}},$$

т. е. примемъ, что:

$$P'\cos\Theta' + P\cos\Theta = p\cos\theta, \quad P'\sin\Theta' + P\sin\Theta = p\sin\theta \ldots (1)$$

Отсюда находимъ:

$$p^2 = P^2 + P'^2 + 2PP'\cos(\Theta' - \Theta) \ldots\ldots\ldots (2)$$

и

$$\operatorname{tg}(\Theta' - \theta) = \frac{P\sin(\Theta' - \Theta)}{P' + P\cos(\Theta' - \Theta)}, \quad \operatorname{tg}(\Theta - \theta) = -\frac{P'\sin(\Theta' - \Theta)}{P + P'\cos(\Theta' - \Theta)},$$

и сравнивая съ формулами (10) и (10 *bis*) § 10, находимъ:

$$\Theta' - \theta = \mu, \quad \Theta - \theta = -\mu'.$$

Отсюда получаемъ:

$$\theta = \Theta' - \mu, \quad \Theta' - \Theta = \mu + \mu' \ldots\ldots\ldots (3)$$

Введемъ затѣмъ еще количества p_1 и θ_1, аналогичныя p и θ, а именно положимъ:

$$P\cos\Theta' + P'\cos\Theta = p_1\cos\theta_1, \quad P\sin\Theta' + P'\sin\Theta = p_1\sin\theta_1 \ldots (4)$$

Отсюда находимъ *во первыхъ*

$$p_1 = p \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

и *во вторыхъ*:

$$\operatorname{tg}(\Theta' - \theta_1) = \operatorname{tg}\mu', \quad \operatorname{tg}(\Theta - \theta_1) = -\operatorname{tg}\mu,$$

т. е.

$$\theta_1 = \Theta' - \mu' \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Мы выражаемъ θ и θ_1 при помощи Θ', ибо эта величина для случая, когда верхняя средина прозрачна, равна $\frac{\pi}{2}$.

Изъ формулъ (3) и (6) находимъ еще:

$$\theta_1 - \theta = \mu - \mu' \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (7)$$

Замѣтимъ здѣсь еще одно любопытное соотношеніе для p. Выраженіе для $\operatorname{ctg}\mu + \operatorname{ctg}\mu'$ легко даетъ слѣдующее

$$p^2 = \frac{PP'\sin^2(\Theta' - \Theta)}{\sin\mu \sin\mu'} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (8)$$

Это соотношеніе даетъ простую возможность опредѣлить четверти окружности, въ которыхъ лежатъ μ и μ'.

При помощи p, θ и θ_1 мы просто выразимъ $\operatorname{tg}\mu_2$ и $\operatorname{tg}\nu_2$, а также $\operatorname{tg}\mu_{11}$ и $\operatorname{tg}\nu_{11}$.

Съ этой цѣлью положимъ:

$$\left.\begin{aligned} U'\sin u' + U''\sin u'' &= \frac{F}{V^2}\,\Omega\sin(\Phi + \tau) \\ U'\cos u' + U''\cos u'' &= \frac{F}{V^2}\,\Omega_1\cos(\Phi + \tau_1), \end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (9)$$

причемъ Ω и τ, Ω_1 и τ_1 опредѣляются соотношеніями:

$$\Omega\cos\tau = p[F^2\cos\theta + PP'\cos\theta_1], \quad \Omega\sin\tau = p[F^2\sin\theta + PP'\sin\theta_1], \; (10)$$

какъ не трудно убѣдиться при помощи равенствъ (h) § 13 и (k) § 14, и соотношеніями:

$$\Omega_1\cos\tau_1 = p[F^2\cos\theta - PP'\cos\theta_1], \quad \Omega_1\sin\tau_1 = p[F^2\sin\theta - PP'\sin\theta_1] \; (11)$$

вытекающими изъ формулъ (i) § 13 и (l) § 14.

Изъ (10) и (11) обычнымъ путемъ находимъ:

$$\left.\begin{aligned} \Omega^2 &= p^2[F^4 + P^2P'^2 + 2F^2PP'\cos(\mu' - \mu)] \\ \Omega_1^2 &= p^2[F^4 + P^2P'^2 - 2F^2PP'\cos(\mu' - \mu)]. \end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \; . \; (12)$$

Значитъ, вычисливъ одно изъ количествъ Ω или Ω_1, другое найдемъ изъ соотношенія, вытекающаго изъ равенствъ (12), а именно:

$$\Omega^2 + \Omega_1^2 = 2p^2(F^4 + P^2P'^2) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (13)$$

Для опредѣленія τ и τ_1 (11) составляемъ формулы:

или:

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{tg}(\tau-\theta) &= -\frac{PP'\sin(\mu'-\mu)}{F^2+PP'\cos(\mu'-\mu)}, \\
\operatorname{tg}(\tau_1-\theta) &= \frac{PP'\sin(\mu'-\mu)}{F^2-PP'\cos(\mu'-\mu)}, \\
\operatorname{tg}(\tau-\theta_1) &= \frac{F^2\sin(\mu'-\mu)}{PP'+F^2\cos(\mu'-\mu)}, \\
\operatorname{tg}(\tau_1-\theta_1) &= -\frac{F^2\sin(\mu'-\mu)}{PP'-F^2\cos(\mu'-\mu)}.
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (14)$$

Зная эти вспомогательныя величины, получимъ:

$$\operatorname{tg}\mu_2 = \frac{PF\Omega\sin(\Phi+\tau)}{MV^2+PF\Omega_1\cos(\Phi+\tau_1)} \quad \ldots\ldots\ldots (15)$$

Для опредѣленія v_2 сначала полагаемъ, что:

$$P'\sin 2\Theta' + P\sin(\Theta'+\Theta) = M\sin m\,,\quad P'\cos 2\Theta' + P\cos(\Theta'+\Theta) = M\cos m\,,$$

а затѣмъ, при помощи формулъ (1), находимъ отсюда:

$$M\cos(\Theta'-m) = p\cos\theta\,,\quad M\sin(\Theta'-m) = -p\sin\theta\,,$$

т. е.

$$M = p\,,\quad m = \Theta' + \theta = 2\Theta' - \mu. \quad \ldots\ldots (16)$$

Теперь безъ труда находимъ:

$$\operatorname{tg}v_2 = \frac{F^2P'p\sin(2\Phi+2\Theta'-\mu) - PP'^3\sin(\Theta'-\Theta)}{V^2-P^2P'^2+F^2P'p\cos(2\Phi+2\Theta'-\mu)-PP'^3\cos(\Theta'-\Theta)}. (17)$$

Подобнымъ образомъ найдемъ $\operatorname{tg}\mu_{11}$ и $\operatorname{tg}v_{11}$, если предварительно опредѣлимъ вспомогательныя величины q, q_1, t и t_1 по формуламъ:

$$\left.\begin{aligned}
F^2\cos\Theta' + PP'\cos\Theta &= q\cos t\,, & F^2\cos\Theta' - PP'\cos\Theta &= q_1\cos t_1\,, \\
F^2\sin\Theta' + PP'\sin\Theta &= q\sin t\,, & F^2\sin\Theta' - PP'\sin\Theta &= q_1\sin t_1\,,
\end{aligned}\right\} . (81)$$

а именно:

$$\left.\begin{aligned}
q^2 &= F^4 + P^2P'^2 + 2F^2PP\cos(\Theta'-\Theta)\,, \\
q_1^2 &= F^4 + P^2P'^2 - 2F^2PP'\cos(\Theta'-\Theta)\,,
\end{aligned}\right\} \quad \ldots . (19)$$

и

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tg}(t-\Theta)&=\frac{F^2\sin(\Theta'-\Theta)}{PP'+F^2\cos(\Theta'-\Theta)}\,,\\ \operatorname{tg}(t-\Theta')&=\frac{PP'\sin(\Theta'-\Theta)}{F^2+PP'\cos(\Theta'-\Theta)}\,,\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(20)$$

или:

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tg}(t_1-\Theta')&=\frac{PP'\sin(\Theta'-\Theta)}{F^2-PP'\cos(\Theta'-\Theta)}\,,\\ \operatorname{tg}(t_1-\Theta)&=\frac{F^2\sin(\Theta'-\Theta)}{PP'-F^2\cos(\Theta'-\Theta)}.\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(21)$$

Теперь можемъ найти

$$\operatorname{tg}\mu_{11}=\frac{2PP'Fq\sin(\Phi+t)}{MV^2+2PP'Fq_1\cos(\Phi+t_1)}\,;\ \ldots\ldots(22)$$

и наконецъ найдемъ:

$$\operatorname{tg}v_{11}=\frac{2PP'F^2\sin(2\Phi+\Theta'+\Theta)}{V^2-2P^2P'^2+2PF^2\cos(2\Phi+\Theta'+\Theta)}\ldots(23)$$

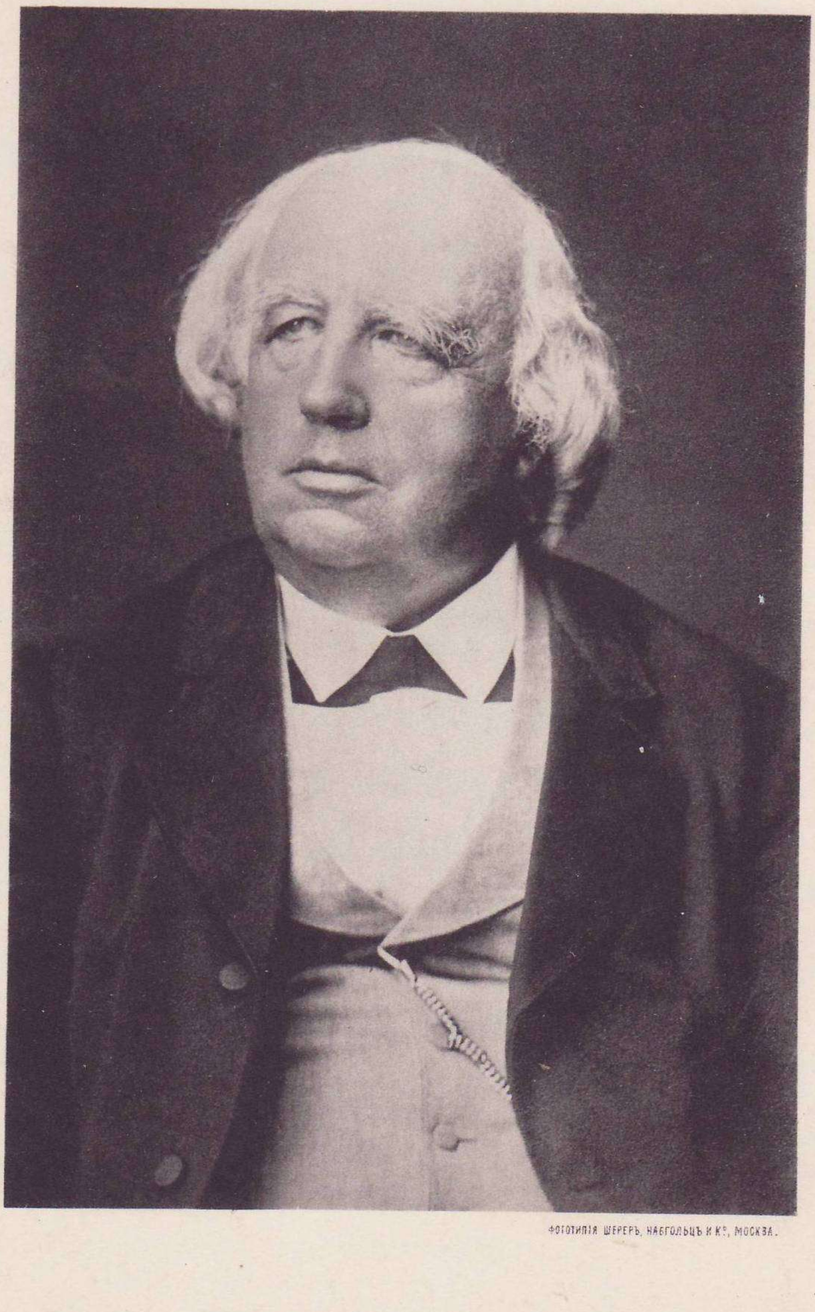
Количество V^2, входящее въ эти формулы, опредѣляется изъ равенства

$$V^2=F^4+P^2P'^2-2PP'F^2\cos(2\Phi+\Theta'+\Theta)\ldots(24)$$

которое вытекаетъ изъ (f) или (h) или (i) § 13.

При помощи этого значенія V^2 выраженіе (23) превращается въ слѣдующее:

$$\operatorname{tg}v_{11}=\frac{2PP'F^2\sin(2\Phi+\Theta'+\Theta)}{F^4-P^2P'^2}\ldots(23\,bis)$$



Фототипія Шереръ, Набгольцъ и К°, Москва.

K. Weierstrass.

Карлъ Вейерштрассъ.

Мм. гг.

Первые два мѣсяца текущаго года ознаменовались чувствительными утратами для математической науки: 18 января скончался въ Финляндіи молодой, но много обѣщавшій математикъ, магистрантъ С.-Петербургскаго Университета, *Владимiръ Андреевичъ Марковъ*, одинъ трудъ котораго напечатанъ въ сообщеніяхъ нашего Математическаго Общества, скончался въ самомъ началѣ своей ученой карьеры; 7-го февраля скончался въ Берлинѣ, на склонѣ лѣтъ, знаменитый германскій ученый *Карлъ Вейерштрассъ*, какъ разъ въ то время, когда подводилъ итоги своей, болѣе чѣмъ 57-ми лѣтней плодотворной ученой дѣятельности, приступивъ къ изданію своихъ трудовъ....

Къ крайнему сожалѣнію, ему не довелось самому окончить это дѣло: вышло только два тома, содержащіе его мемуары, помѣщавшіеся въ разныхъ періодическихъ изданіяхъ, главнымъ образомъ въ ежемѣсячныхъ отчетахъ Берлинской Академіи Наукъ, которой онъ состоялъ сорокъ лѣтъ членомъ, да печатаются теперь III-й томъ мемуаровъ и лекціи по Абелевымъ интеграламъ. Предвидя возможность не довести до конца, по преклонности лѣтъ, предпринятое изданіе и будучи озабоченъ, чтобы оно не прекратилось въ случаѣ его смерти, онъ обратился за содѣйствіемъ къ Берлинской Академіи Наукъ, которая, отнесясь сочувственно къ этому, выбрала изъ свой среды коммиссію изъ 4-хъ членовъ [1]), въ составъ которой вошелъ и самъ авторъ издаваемыхъ сочиненій, и поручила ей наблюденіе за этимъ изданіемъ. Но все-же приходится очень сожалѣть, что не придется уже самому автору довести дѣло до конца, тѣмъ болѣе, что теперь очередь за тѣми томами, которые будутъ посвящены его лекціямъ; послѣднія же записывались и составлялись его многочислеными слушателями, а не были изложены письменно имъ самимъ. Нѣкоторыя, впрочемъ, были уже отлитографированы и слѣдовательно, если не вполнѣ, то уже до нѣкоторой степени

[1]) Auwers, Frobenius, Schwarz, Weierstrass.

обработаны. Будемъ надѣяться, что давно ожидаемое математическимъ міромъ изданіе его лекцій не заставитъ себя долго ждать, что остальные члены коммиссіи и ученики покойнаго удвоятъ теперь свою энергію для ускоренія этого изданія, чтобы выразить тѣмъ свое глубокое почтеніе къ памяти знаменитаго ученаго, столько лѣтъ трудившагося на пользу науки и во славу своего отечества, и всегда привлекавшаго въ Берлинскій Университетъ столькихъ молодыхъ людей, стремившихся къ точному знанію изъ разныхъ странъ свѣта, въ томъ числѣ и изъ Россіи. Послѣднее обстоятельство налагаетъ и на насъ нравственную обязанность помянуть славнаго учителя столькихъ поколѣній, который своими глубокими излѣдованіями дѣлился прежде всего со своими учениками, изъ коихъ многіе, сдѣлавшись извѣстными учеными, въ томъ числѣ и наша соотечественница, покойная С. В. Ковалевская, распространяли въ ученомъ мірѣ какъ результаты его изысканій, такъ и его научные взгляды. Желаніе исполнить этотъ долгъ по отношенію къ глубоко почитаемому нами ученому, недавно сошедшему въ могилу, но который еще долго будетъ жить въ своихъ твореніяхъ, было побудительною причиною къ составленію предлагаемаго вниманію нашего Математическаго Общества краткаго очерка его жизни и дѣятельности, хотя принимаясь за это, я хорошо сознавалъ, что взятая мною на себя задача не совсѣмъ соразмѣрна съ моими силами, ни съ тѣмъ количествомъ времени, которымъ я теперь располагаю; откладывать же исполненіе этого долга до болѣе благопріятнаго времени не хотѣлось изъ опасенія отложить на всегда.

Карлъ Вейерштрассъ родился 31-го октября 1815 года въ Остенфельдѣ, въ округѣ города Мюнстера въ Вестфаліи (въ Прирейнской Пруссіи). Среднее образованіе получилъ въ приготовительной школѣ при Мюнстерской гимназіи и затѣмъ въ гимназіи въ Падерборнѣ, откуда былъ выпущенъ съ атестатомъ зрѣлости осенью 1834 года и тогда же поступилъ въ Боннскій Университетъ. Въ университетѣ онъ пробылъ до Пасхи 1838 года, изучая государственныя, естественныя и математическія науки. Пробывъ, по кончаніи курса, полгода у своихъ, онъ еще долгое время потомъ посѣщалъ Академію въ Мюнстерѣ, чтобы усовершенствоваться въ высшей математикѣ, работая подъ руководствомъ извѣстнаго профессора *Гудермана*, много занимавшагося тогда молодой еще теоріей эллиптическихъ функцій, но получившей не задолго передъ тѣмъ вдругъ такое громадное развитіе въ совершенно новомъ направленіи, благодаря блестящимъ изслѣдованіямъ геніальныхъ Абеля и Якоби [1]). Неудивительно, что молодой, съ солиднымъ интересомъ къ

[1]) Обозначенія котораго, какъ извѣстно, были упрощены Гудерманомъ, и это Гудермановское обозначеніе Якобіевскихъ эллиптическихъ функцій, которыя онъ называлъ модулярными, весьма распространено теперь.

наукѣ, Вейерштрассъ увлекся именно этой теоріей, занятія которой опредѣлили на всю жизнь его научное направленіе, (что онъ и самъ сознавалъ, какъ то видно изъ его рѣчи, произнесенной при вступленіи въ Академію). Какъ ни много было сдѣлано Абелемъ и Якоби для теоріи эллиптическихъ функцій, все же молодому, но глубоко вникавшему въ науку ученому, удалось замѣтить только затронутые, но еще не рѣшенные вопросы. Во введеніи къ своему „Précis d'une théorie des fonctions élliptiques" [1]) Абель высказалъ то положеніе, что модулярная функція $\mathrm{sn}(u)$, обозначаемая имъ чрезъ $\lambda(u)$, можетъ быть представлена въ видѣ частнаго двухъ рядовъ, расположенныхъ по цѣлымъ положительнымъ степенямъ независимой перемѣнной u, сходящихся для всякихъ ея значеній, коэффиціенты которыхъ суть цѣлыя функціи модуля,—но доказательства котораго онъ не успѣлъ дать. Вейерштрассъ поставилъ себѣ первою задачей найти эти разложенія, а также показать какъ изъ нихъ могутъ быть получены другія извѣстныя разложенія эллиптическихъ функцій. Это ему удалось сдѣлать лѣтомъ 1840 г., и осенью того же года онъ защищалъ свою работу подъ заглавіемъ: „Ueber die Entwickelung der Modular-Functionen" въ испытательной коммиссіи въ Мюнстерѣ для полученія права преподаванія (Facultas docendi). Гудерманъ далъ очень лестный отзывъ о ней, и она должна была быть напечатана, что однако не состоялось по неизвѣстнымъ причинамъ. Часть этой работы вошла позже въ мемуаръ объ Абелевыхъ функціяхъ, напечатанный въ 52 томѣ журнала Крелля [2]), а цѣликомъ она напечатана лишь теперь въ первомъ томѣ полнаго собранія его сочиненій, по желанію лицъ интересующихся исторіей теоріи эллиптическихъ функцій, какъ объясняетъ самъ авторъ въ примѣчаніи, слѣдующемъ за этимъ первымъ мемуаромъ I-го тома. Работа эта занимаетъ 49 стр. in 4^0 и содержитъ изложеніе теоріи тѣхъ функцій, которыя онъ обозначалъ впослѣдствіи черезъ $Al(u)$, и которыми занимались потомъ также Эрмитъ и Кэли. Самъ Вейерштрассъ впослѣдствіи замѣнилъ ихъ функціей $\sigma(u)$, (всѣ эти функціи представляютъ разные частные виды общей Θ-функціи) и за этой своей работой признаетъ лишь историческое значеніе; тѣмъ не менѣе это столь солидный самостоятельный трудъ, что могъ бы въ свое время доставить автору докторскую степень не только въ Германіи, но даже и у насъ, въ Россіи, гдѣ, какъ извѣстно, требованія отъ докторскихъ диссертацій бóльше германскихъ. Для Вейерштрасса защита этой работы имѣла то практическое значеніе, что онъ былъ допущенъ къ пробнымъ урокамъ въ мѣстной гимназіи втеченіе

---

[1]) Crelle Journal. Bd. 4. S. 244; Bd. 6. S. 76; см. также „Oeuvres complettes, T. I. p. 527 § 10.

[2]) Послѣдній мемуаръ I-го тома его Mathematische Werke.

1841—42 учебнаго года, а въ началѣ слѣдующаго учебнаго года былъ приглашенъ учителемъ математики и физики въ прогимназію въ Deutsch-Krone, въ Пруссіи, въ Маріенвердерскомъ округѣ, и черезъ годъ былъ утвержденъ штатнымъ преподавателемъ этой прогимназіи.

Какъ въ этой работѣ уже обозначились та научная область, которою онъ не переставалъ интересоваться всю свою долгую жизнь—именно теорія функцій, и расположеніе къ методу рядовъ, а также строгость и точность его научныхъ изслѣдованій, такъ тоже самое замѣтно и въ слѣдующихъ его произведеніяхъ Мюнстеровскаго періода. Второй мемуаръ I-го тома его Math. Werke, озаглавленный: „Darstellung einer analytischen Function einer complexen Veränderlichen, deren absolute Betrag zwischen zwei gegebenen Grenzen liegt“, имѣетъ предметомъ рядъ Лорана, по нынѣшней терминологіи, и содержитъ нѣкоторыя предложенія теоріи функцій комплекснаго перемѣннаго, тогда еще несуществовавшей, доказанныя съ помощію особаго пріема, не столь легкаго, какъ нынѣшніе, но свидѣтельствующаго о высокихъ математическихъ способностяхъ тогда еще молодаго автора. Въ этой статьѣ онъ даетъ комплексной величинѣ $a + bi$ не приведенную форму Коши, но представляетъ ее въ такомъ видѣ:

$$a + bi = r\,\frac{1 + \lambda i}{1 - \lambda i},$$

гдѣ r обозначаетъ модуль (absolute Betrag), а λ есть вещественная величина, измѣняющаяся отъ $-\infty$ до $+\infty$; она связана съ аргументомъ θ равенствомъ

$$\lambda = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2},$$

какъ нетрудно видѣть.

Слѣдующій мемуаръ „Zur Theorie der Potenzreihen“ имѣетъ задачей дать высшій предѣлъ для абсолютныхъ значеній коэффиціентовъ рядовъ, расположенныхъ по степенямъ одной или нѣсколькихъ независимыхъ перемѣнныхъ того-же вида, какъ въ предыдущемъ мемуарѣ. Здѣсь уже встрѣчаются термины „безусловно и равномѣрно-сходящіеся ряды“.

Къ этому же періоду относится и только теперь опубликованный 4-й мемуаръ I-го тома его сочиненій, содержащій доказательство теоремы Коши для системы дифференціальныхъ уравненій, найденное въ эпоху, когда доказательство самого Коши еще не было извѣстно Вейерштрассу; доказательство послѣдняго въ сущности одинаково съ доказательствомъ перваго, но полнѣе его въ томъ отношеніи, что Вейерштрассъ доказываетъ, что ряды представляющіе интегралы не только безусловно, но и *равномѣрно*-сходящіеся, и потому представляютъ аналитическія функнія, (на что обращено вниманіе уже въ предыдущемъ мемуарѣ). Тутъ говорится впервые и объ *аналитическомъ продолженіи функцій*, причемъ усматривается возможность существованія такихъ особенныхъ точекъ, при приближеніи къ которымъ радіусъ круга сходимости уменьшается до нуля.

Этотъ мемуаръ написанъ въ 1842 г., откуда видно, что Вейерштрассъ къ этому понятію подошелъ независимо отъ Puiseux, знаменитый мемуаръ котораго объ алгебраическихъ функціяхъ былъ опубликованъ въ 1850—51 годахъ.

Какъ видимъ, уже Мюнстерскій періодъ ученой дѣятельности Вейерштрасса отмѣченъ солидными изслѣдованіями, и въ этотъ же періодъ выработалось то представленіе объ аналитической функціи, которое проходитъ чрезъ весь рядъ послѣдующихъ работъ Вейерштрасса и его учениковъ и дѣлается въ настоящее время господствующимъ; уже въ этотъ періодъ обращено вниманіе на необходимость равномѣрной сходимости рядовъ, тогда какъ другими было обращено вниманіе только на безусловную сходимость.

Къ эпохѣ пребыванія его въ Deutsch-Krone относятся три сочиненія: 1) Bemerkungen über die analytischen Facultäten (1843); 2) маленькая замѣтка „Reduction eines bestimmten dreifachen Integrals", а также, не вошедшее въ изданные томы его Werke, сочиненіе: 3) „Ueber die Sokratische Lehrmethode" (1845).

Первое изъ этихъ сочиненій возникло по желанію Крелля, котораго „Theorie der analytischen Facultäten", 1824 г., подверглась строгой критикѣ Ома, утверждавшаго, что самыя основанія Креллевской теоріи ложны. Хотя это обвиненіе Вейерштрассу и удалось снять, однако онъ самъ замѣтилъ много не несущественныхъ недостатковъ этой теоріи, что и сообщилъ лично Креллю, который и просилъ его изложить свои изслѣдованія. Впослѣдствіи, въ 1854 г., онъ еще разъ вернулся къ этому предмету по настоятельной просьбѣ того же Крелля, и напечаталъ въ 51-мъ томѣ его журнала систематическій трактатъ по этой теоріи. Онъ былъ перепечатанъ въ 1886 г. въ сборникѣ Вейерштрасса—Abhandlungen aus der Functionenlehre, причемъ въ подстрочномъ примѣчаніи авторъ говоритъ, что по его мнѣнію эта теорія не имѣетъ такого значенія какое ей придавалось прежде, и онъ печатаетъ ее опять лишь потому, что въ этой работѣ найдется кое-что полезное для начинающихъ математиковъ, причемъ онъ измѣнилъ только введеніе, войдя въ бóльшія подробности относительно критикуемаго сочиненія, въ виду того, что теперь его не всякій можетъ достать.

Въ Deutsch-Krone Вейерштрассъ оставался до 1848 года, когда перешелъ преподавателемъ математики и физики въ католическую гимназію города Braunsberg'а въ восточной Пруссіи (не далеко отъ Кенигсберга), и въ первый-же годъ своей преподавательской дѣятельности въ этой гимназіи, напечаталъ въ ея отчетѣ за 1848—49 годъ, (Braunsberger-Programm) замѣчательную статью подъ заглавіемъ: „Beitrag zur Theorie der Abelschen Integrale", содержащую нѣкоторые результаты его изслѣдованій. Изъ этой статьи видно, что онъ уже давно занимался этими интегралами и, главнымъ образомъ, задачей Якоби—найти на самомъ дѣлѣ аналитическія выраженія для функцій, обратныхъ Абелевымъ интеграламъ, и это удалось ему сдѣлать путемъ отличнымъ отъ того, которому слѣдовали Göpel и др. Онъ заявляетъ тамъ кромѣ того еще, что онъ въ своихъ упоминаемыхъ изысканіяхъ выходитъ изъ самыхъ интегральныхъ уравненій, которыми эти функціи опредѣляются, и показываетъ затѣмъ съ помощію теоремы Абеля, что всѣ они суть корни уравненія, котораго коэффиціенты выражаются чрезъ нѣкоторое число вспомогательныхъ функцій, вполнѣ аналогичныхъ Θ-функціямъ Якоби въ теоріи эллиптическихъ функцій, и которыя подобно этимъ разлагаются въ постоянно-сходящіеся ряды, составленные по одному весьма простому закону, причемъ эти сходящіеся ряды онъ получаетъ съ помощію нѣсколькихъ характеристическихъ свойствъ этихъ функцій, которыми онѣ вполнѣ опредѣляются. Но для этого нужно знать нѣкоторыя соотношенія между періодами интеграловъ 1-го и 2-го рода, аналогичныя извѣстному Лежандровскому въ теоріи эллиптическихъ функцій, которыя получаются сами собою (in ungesuchter Weise) по пути, которому онъ слѣдовалъ, однако нѣсколько обстоятельно; почему онъ былъ очень обрадованъ, найдя въ одномъ мемуарѣ Абеля: „Sur une propriété remarquable d'une classe très étendue de fonctions transcendantes" [1]) одно тождество—истинный источникъ, изъ котораго получаются очень просто какъ эти, такъ и многія другія соотношенія, болѣе общія. Выводу упомянутыхъ соотношеній изъ этого тождества, (выведеннаго Абелемъ для болѣе общаго случая) и посвящается статья Вейерштрасса, о которой идетъ рѣчь, причемъ онъ попутно знакомитъ читателя съ гиперэллиптическими функціями многихъ перемѣнныхъ, аналогичными модулярнымъ.

Болѣе подробное изложеніе изслѣдованій Вейерштрасса въ этой области, о которыхъ онъ только упоминалъ въ названной статьѣ, но еще безъ доказательствъ, мы находимъ въ его статьѣ: „Zur Theorie der Abelschen Functionen", написанной имъ въ 1853 г. въ Saline-Westerkoten въ Вестфаліи и напечатанной въ 47 т. журнала Крелля. Здѣсь, кромѣ изложенія нѣкоторыхъ свойствъ Абелевыхъ функцій и интеграловъ, мы встрѣчаемся впервые съ тѣмъ натуральнымъ переходомъ отъ интеграловъ къ функціямъ многихъ перемѣнныхъ: $Al(u_1, u_2, \dots u_\rho)$ (представляющихъ частные случаи общей Θ-функціи), который, по нашему мнѣнію, есть одно изъ важнѣйшихъ открытій Вейерштрасса.

---

[1]) Т. II, стр. 54 прежняго и 43 новаго изданія „Oeuvres complétes" Абеля.

Послѣ этого мемуара былъ напечатанъ имъ въ 51 томѣ того-же журнала вышеупомянутый мемуаръ „Ueber die Theorie der analytischen Facultäten“, а въ слѣдующемъ, 52-мъ, мемуаръ подъ заглавіемъ: „Theorie der Abelschen Functionen“, писанный при стѣсненныхъ обстоятельствахъ и, къ сожалѣнію, оставшійся неоконченнымъ, вслѣдствіе потери рукописи, какъ то я лично слышалъ отъ Вейерштрасса. Онъ прервался вначалѣ II-й главы, надписанной такъ: „Einige allgemeine Betrachtungen über die Darstellung eindeutiger analytischen Functionen durch Reihen“, содержавшей, въ видѣ отступленія, изслѣдованія изъ области эллиптическихъ функцій, составлявшія предметъ его перваго мемуара и теперь выброшенныя. Это послѣдній мемуаръ I-го тома его Math. Werke. Первая глава съ надписью: „Erklärung der Abelschen Functionen; Bestimmung der Form derselben“, содержитъ доказательство возможности представить Абелевы функціи въ видѣ частного двухъ постоянно-сходящихся рядовъ ϱ аргументовъ, основанное на теоремѣ Абеля и представляющее обобщеніе аналогичнаго положенія въ теоріи эллиптическихъ функцій, высказаннаго въ его самой первой работѣ (Мюнстерской), доказательство, которому онъ самъ придавалъ очень большое значеніе, какъ то я слышалъ лично отъ него. Этотъ мемуаръ содержитъ доказательства и выводы многихъ формулъ, сообщенныхъ въ „программѣ“ и въ 47 т. журнала Крелля, но не всѣхъ.

Эти изслѣдованія, новизною и солидностью результатовъ обратили на Вейерштрасса вниманіе ученыхъ Германіи, и въ 1856 г. онъ былъ приглашенъ въ Берлинскій университетъ экстраординарнымъ профессоромъ по каѳедрѣ чистой математики, а въ слѣдующемъ, 1857-мъ былъ избранъ въ члены Берлинской Академіи Наукъ, въ періодическомъ изданіи которой: Monatsberichte der Berliner Akademie der Wissenschaften, онъ съ той поры сталъ помѣщать свои труды за немногими исключеніями. Многіе изъ его мемуаровъ и замѣтокъ переводились на французскій языкъ и печатались во французскихъ изданіяхъ, главнымъ образомъ въ Bulletin Darboux. Для насъ, русскихъ, небезъинтересно, что первая помѣщенная имъ въ томъ же году замѣтка была вызвана извѣстнымъ мемуаромъ нашего знаменитаго ученаго, покойнаго П. Л. Чебышева, объ интегрированіи алгебраическихъ дифференціаловъ въ логариѳмахъ, помѣщеннымъ въ журналѣ Ліувиля 2-я серія, т. II. По поводу этой работы Вейерштрассъ показалъ, что условія интегрируемости эллиптическаго интеграла въ логариѳмахъ могутъ быть легко выведены, если интегралъ разложить на интегралы трехъ родовъ и выразить эти послѣдніе въ функціи отъ инграла перваго рода, означаемаго имъ чрезъ u, а затѣмъ ввести вмѣсто интеграловъ третьяго рода ихъ линейныя функціи съ цѣлыми коэффиціентами; эти послѣднія приводятся въ случаѣ интегрируемости въ логариѳмахъ на основаніи теоремы о перемѣнѣ параметра съ аргументомъ въ нормальныхъ интегралахъ третьяго рода и теоремы Абеля каждая къ суммѣ логариѳма отъ нѣкоторой раціональной функціи x и $\sqrt{R(x)}$, раздѣленнаго на нѣкоторое четное число, и интеграла перваго рода u, умноженнаго на нѣкоторую постоянную; этотъ послѣдній, равно какъ и интегралъ второго рода должны уйти изъ результата подстановки этихъ выраженій вмѣсто введенныхъ линейныхъ функцій интеграловъ третьяго рода въ разложеніе даннаго интеграла, въ случаѣ интегрируемости его въ логариѳмахъ, что доставитъ еще два условія. Всѣ эти условія, какъ первыя, вытекающія изъ теоремы Абеля, такъ и сейчасъ упомянутыя, получаются сперва въ трансцендентной формѣ, но на основаніи фундаментальныхъ предложеній теоріи эллиптическихъ функцій легко приводятся къ алгебраическимъ соотношеніямъ между постоянными, входящими въ данный интегралъ; оставляетъ желать лучшаго имѣющійся способъ приведенія даннаго интеграла къ сказанному виду, но и его возможно сдѣлать болѣе удобнымъ при помощи упомянутаго свойства интеграла третьяго рода. Легкость полученія такимъ способомъ условій интегрируемости въ логариѳмахъ побудила его, говоритъ далѣе Вейерштрассъ, поставить эту задачу шире, примѣнительно къ Абелевымъ интеграламъ, и его розысканія по этому вопросу, какъ онъ заявляетъ, были не безуспѣшны, такъ какъ главныя трудности имъ уже преодолѣны, и сравнительно немного остается сдѣлать, чтобы рѣшить эту задачу окончательно. При этомъ изслѣдованіи главными вспомогательными средствами его были соотношенія между періодами интеграловъ и теорема Абеля, которыя составляютъ по его мнѣнію фундаментъ всего интегральнаго исчисленія, причемъ онъ обѣщаетъ показать, въ другой статьѣ, что сама теорема Абеля есть слѣдствіе нѣкотораго другого предложенія. Вопросъ объ интегрируемости въ логариѳмахъ онъ считаетъ неустранимымъ изъ интегральнаго исчисленія, такъ какъ логариѳмы первыя трансцендентныя, съ которыми мы знакомимся, и онъ очень сожалѣетъ, что эти вопросы едва затрогиваются въ учебникахъ, авторамъ которыхъ угодно давать гордое названіе системы интегральнаго исчисленія (den stolzen Namen eines Systems der Integral-Rechnung) собранію отдѣльныхъ результатовъ, добытыхъ усиліями Эйлера, Лагранжа и др. Онъ заявляетъ въ заключеніе, что для интеграла вида $\int F(x, \sqrt[m]{R(x)})\, dx$ изслѣдованіе этого вопроса доведено имъ до конца, и онъ надѣется въ скоромъ времени сообщить Академіи о результатахъ своихъ изысканій. Однако это обѣщаніе, какъ и предыдущее, осталось неисполненнымъ по неизвѣстной причинѣ.

Въ Monats-Berichte мы находимъ еще только одну замѣтку, касающуюся Абелевыхъ интеграловъ, именно замѣтку объ интегрированіи системы гиперэллиптическихъ дифференціальныхъ уравненій

$$\sum_{i=0}^{i=\varrho} \frac{x_i^\lambda \, dx_i}{\sqrt{R(x_i)}} = 0\,, \quad [\lambda = 0, 1, 2, \ldots \varrho - 1]$$

вызванной замѣткой по тому-же предмету Якоби, помѣщенной въ 32-мъ томѣ журнала Крелля [1]), въ которой онъ выводитъ алгебраическіе интегралы этой системы изъ теоремы Абеля, а затѣмъ на самомъ дѣлѣ выводитъ квадратное соотношеніе между двумя симметрическими функціями и линейное между тремя таковыми функціями отъ $x_0, x_1, x_2, \ldots x_\varrho$, существованіе которыхъ было предусмотрѣно Якоби въ упомянутой сейчасъ замѣткѣ.

Другія изслѣдованія, помѣщенныя въ Berliner Berichte, и вошедшія въ составъ первыхъ томовъ его Mathematische Werke, относятся къ другимъ вопросамъ; свои-же изслѣдованія изъ области Абелевыхъ интеграловъ и функцій онъ сообщалъ большею частію на лекціяхъ, иногда въ письмахъ къ другимъ ученымъ. Изъ одного мемуара С. В. Ковалевской видно, что онъ занимался также резсмотрѣніемъ случаевъ, когда Абелевы интегралы какого-либо ранга сводятся къ таковымъ нисшаго ранга, въ частности къ эллиптическимъ; методою Вейерштрасса она и пользовалась при рѣшеніи подобнаго вопроса.

Гиперэллиптическіе интегралы тотчасъ слѣдуютъ за эллиптическими въ системѣ интегральнаго исчисленія; поэтому предшественники Вейерштрасса въ этой области, Якоби, Ришело и Эрмитъ, на нихъ исключительно и обратили свое вниманіе; съ нихъ совершенно естественно началъ свои изысканія и Вейерштрассъ тѣмъ болѣе, что въ этомъ конкретномъ случаѣ всѣ вычисленія могутъ быть не только указаны, но и выполнены на самомъ дѣлѣ [2]). Вейерштрассъ нѣсколько разъ излагалъ полную теорію ихъ на лекціяхъ въ Берлинскомъ Университетѣ, которыя записывались и составлялись его слушателями. Одинъ такой рукописный курсъ я видѣлъ лѣтомъ 1884 г. въ Лейпцигскомъ математическомъ семинарѣ, пріобрѣтенный стараніями профес. Клейна. Лучше всего по этому предмету, какъ я слышалъ отъ самого Вейерштрасса осенью того-же года, курсъ записанный и составленный по его лекціямъ Гурвицемъ [3]), къ которому онъ и совѣтовалъ мнѣ обратиться для разъясненія занимавшаго меня тогда вопроса; однако, такъ какъ для меня было достаточно того указанія, которое я получилъ лично отъ самого Вейерштрасса по этому вопросу, то я не рѣшился просить Гурвица выслать мнѣ этотъ курсъ на просмотръ, и потому не могу его здѣсь описать.

[1]) Jacobi, Gesammelte Werke, Bd. II, мемуаръ № 13.

[2]) См. наше „Обращеніе гиперэллиптическихъ интеграловъ". Харьковъ 1885 г.

[3]) Hurwitz, въ 1884 г. профессоръ Кенигсбергскаго Университета, теперь Цюрихскаго Политехникума.

Вейерштрассъ однако не ограничился изученіемъ теоріи гиперэллиптическихъ интеграловъ, но также обстоятельно изслѣдовалъ и общіе Абелевы интегралы, зависящіе отъ ирраціональности, опредѣляемой какимъ угодно неприводимымъ алгебраическимъ уравненіемъ $f(x,y)=0$, но ничего по этому предмету не напечаталъ. Единственное, что мы встрѣтили въ печати, гдѣ сообщались основныя формулы изъ его теоріи Абелевыхъ интеграловъ, хотя безъ доказательствъ, это замѣтка Берлинскаго профессора Геттнера (Hettner) въ Gött. Nachrichten, 1884 г., подъ заглавіемъ: Ueber diejenigen algebraischen Gleichungen zwischen zwei veränderlichen Grössen, welche eine Schaar rationaler eindentig-umkehrbarer Transformationen in sich selbst zulassen", написанной по поводу статьи Шварца въ 87-мъ томѣ журнала Борхардта (Крелля), и только теперь напечатанные во II-мъ т. Math. Werke Вейерштрасса отрывки изъ его письма къ Шварцу по поводу той-же статьи этого послѣдняго, въ которой доказывается такое предложеніе: „Если неприводимое алгебраическое уравненіе между двумя перемѣнными допускаетъ безконечный рядъ (eine Schaar) раціонально и однозначно-обратимыхъ преобразованій въ самое себя, то рангъ алгебраическаго образа есть нуль или единица". Геттнеръ даетъ алгебраическое доказательство этого предложенія на основаніи формулъ Вейерштрасса, которыя онъ поэтому предварительно и приводитъ. Сущность его доказательства заключается въ томъ, что допущеніе существованія преобразованія уравненія въ самое себя при помощи раціонально-обратимой подстановки, содержащей одинъ произвольный параметръ, ведетъ къ противорѣчію съ той истиной, легко доказываемой имъ при помощи формулъ Вейерштрасса, что число мѣстъ алгебраическаго образа опредѣляемаго даннымъ неприводимымъ алгебраическимъ уравненіемъ $f(x,y)=0$ ранга ϱ, для которыхъ можно найти функцію, которая только въ одномъ этомъ мѣстѣ обращалась бы въ нуль порядка $\leqq \varrho$, есть конечное. Вейерштрассъ въ своемъ письмѣ къ Шварцу показываетъ, что между двумя функціями z_1 и z_r обращающимися въ одномъ только мѣстѣ (a,b) въ ∞^{v_1} и ∞^{v_r} соотвѣтственно, причемъ $v_1 \leqq \varrho$, а v_r число простое съ v_1 и ближайшее къ нему, для котораго существуетъ такая функція, имѣетъ мѣсто неприводимое алгебраическое уравненіе $F(\overset{v_r}{z_1}, \overset{v_1}{z_r})=0$, которое точно также будетъ преобразовываться само въ себя въ одно время съ уравненіемъ $f(x,y)=0$; опираясь на это, а также на то, какъ и Геттнеръ, что такихъ мѣстъ (a,b) для которыхъ существуетъ функція какъ z_1 имѣется конечное число, онъ заключаетъ, что „если какое либо уравненіе $f(x,y)=0$ допускаетъ раціональныя преобразованія въ самое себя, то во всякомъ случаѣ, если рангъ его $\varrho > 1$, число такихъ преобразованій будетъ всегда конечное". Въ этомъ письмѣ онъ замѣчаетъ также, что если r, имѣетъ наименьшее значеніе, то уравненіе между z_1 и z_r будетъ содержать наименьшее число постоянныхъ. Вообще, если v_1 не меньше ϱ, то число ихъ будетъ, согласно съ предложеніемъ Римана равно $3\varrho-3$; но v_1 можетъ спуститься до 2, (какъ для эллиптическихъ и гиперэллиптическихъ интеграловъ), и число произвольныхъ коэффиціентовъ спускается тогда до $2\varrho-1$. Имѣется и способъ для приведенія даннаго уравненія къ такому „каноническому виду", хотя мало практичный. Тѣмъ не менѣе г-жа Ковалевская нашла для него эти уравненія на самомъ дѣлѣ для $\varrho=1, 2, 3, 4, 5$.—Въ заключеніе онъ въ первый разъ въ этомъ письмѣ сообщаетъ выраженіе раціональной функціи отъ x, y, связанныхъ уравненіемъ $f(x,y)=0$, и общаго Абелева интеграла, зависящаго отъ этой ирраціональности, чрезъ примъ-функціи обоихъ родовъ.

Замѣтка Геттнера, какъ сказано выше, напечатана въ 1884 г., тогда какъ это письмо Вейерштрасса было написано лѣтомъ 1875; къ тому-же времени, именно 1875—76, относится и тотъ рукописный курсъ теоріи Абелевыхъ интеграловъ, читанный въ Берлинскомъ университетѣ, съ которымъ я имѣлъ случай познакомиться въ 1884 г. въ библіотекѣ Лейпцигскаго семинара. Изъ этого курса видно, что у Вейерштрасса все выводится изъ одного тождества, о которомъ уже было выше упомянуто. Отсюда онъ получаетъ формы нормальныхъ интеграловъ второго и третьяго рода, соотношенія аналогичныя Лежандровскому въ теоріи эллиптическихъ функцій между періодами интеграловъ перваго и второго рода, примъ-функціи и выраженіе чрезъ нихъ интеграловъ всѣхъ трехъ родовъ, а также алгебраической функціи, зависящей отъ той-же ирраціональности; отсюда, какъ простое слѣдствіе теорему Абеля. Частный случай послѣдней приводитъ къ рѣшенію задачи Якоби, именно: онъ выражаетъ чрезъ новыя перемѣнныя—значенія суммъ ϱ интеграловъ перваго рода,—суммы интеграловъ второго и третьяго рода и разсматриваетъ частныя производныя по нимъ суммъ интеграловъ второго рода; оказывается, что эти послѣднія суть частныя производныя нѣкоторой вспомогательной функціи, чрезъ которую все можетъ быть выражено. Если эту функцію взять показателемъ степени числа e, то получается однозначная, конечная и непрерывная функція ϱ новыхъ перемѣнныхъ, обладающая свойствами, аналогичными свойствамъ Якобіевой Θ-функціи. Вейерштрассъ въ заключеніе выводитъ ея разложеніе въ рядъ. Такимъ образомъ теорія Абелевыхъ трансцендентныхъ сводится къ теоріи Θ-функцій многихъ перемѣнныхъ самымъ натуральнымъ, а не искусственнымъ образомъ, какъ у другихъ изслѣдователей. Разъ такой результатъ получился, натурально является желаніе обратно отъ Θ-функціи вернуться къ Абелевымъ интеграламъ. Вейерштрассъ думалъ и объ этомъ, но едвали самъ приступалъ къ подробному рѣшенію этого вопроса, а далъ указанія своему ученику Шоттки (Schottky), изслѣдованія котораго изложены въ его извѣстномъ сочиненіи „Abriss einer Theorie der Abelschen Function von drei Variablen". Leipzig 1880 [1]).

Какъ ни замѣчательна по своей простотѣ, натуральности и изяществу теорія Абелевыхъ интеграловъ Вейерштрасса, но это не она принесла ему его обширную извѣстность. Признававшаяся до сихъ поръ, и не безъ основанія, очень трудною и въ тоже время имѣющая пока мало приложеній (но которая, несомнѣнно, будетъ ихъ имѣть), теорія Абелевыхъ интеграловъ интересовала до недавняго времени сравнительно очень не многихъ. Въ Германіи ею стали больше интересоваться въ семидесятыхъ годахъ, когда появились лекціи Неймана о Римановой теоріи Абелевыхъ интеграловъ и теорія Абелевыхъ функцій Клебша и Гордана; во Франціи-же стали ею заниматься лишь въ слѣдующее десятилѣтіе послѣ Бріо и Букэ, если не считать работы Галуа и Пюизе; въ другихъ-же государствахъ Европы и Америки, куда ее перенесъ Кэли, стали ею интересоваться тоже лишь въ восьмидесятыхъ годахъ. Но это были именно теоріи Римана и Клебша, съ которыми начали знакомиться, тогда какъ другія двѣ: Гöпеля и Розенгайна, и Вейерштрасса, и въ Германіи находили мало послѣдователей,—Вейерштрассовская конечно потому, что распространялась лишь при помощи его лекцій, того-же, что было имъ напечатано, было не совсѣмъ достаточно для составленія полнаго понятія и о его теоріи гиперэллиптическихъ интеграловъ, но достаточно все-таки, чтобы заинтересовать ею. Должно полагать, что Вейерштрассъ медлилъ изданіемъ своего курса сперва изъ желанія еще болѣе усовершенствовать разныя доказательства, а можетъ быть и рѣшить какіе либо частные вопросы и тѣмъ пополнить свой курсъ, а потомъ уже не хватало быть можетъ по преклонности лѣтъ и энергіи приняться за обработку начисто своихъ лекцій, тѣмъ болѣе, что такая работа, въ нѣкоторомъ смыслѣ техническая, не много и скучновата для человѣка особенно склоннаго преимущественно къ созерцательной дѣятельности, къ размышленію, къ углубленію въ науку, какимъ уже давно сталъ Вейерштрассъ, хотя въ молодости былъ отличнымъ вычислителемъ, какъ о томъ свидѣтельствуетъ первая его работа.

---

[1]) О сущности Вейерштрассовской теоріи какъ гиперэллиптическихъ интеграловъ, такъ и Абелевыхъ, можно составить полное понятіе по моимъ сочиненіямъ: „Отчетъ о занятіяхъ моихъ въ Лейпцигѣ. Харьковъ 1885 г."; „Обращеніе гиперэллиптическихъ интеграловъ. Харьковъ 1885 г.", „Основанія теоріи Абелевыхъ интеграловъ. Харьковъ, 1895 г.", къ которымъ поэтому я и могу совѣтовать обратиться интересующихся этой теоріей; но долженъ замѣтить, что мои доказательства и выводы часто очень отличаются отъ Вейерштрассовскихъ, ибо послѣдніе основаны исключительно на формѣ разложенія разсматриваемыхъ функцій въ степенные ряды (Potenzreihen) вблизи той или другой особенной точки, тогда какъ я предпочелъ чисто алгебраическіе выводы и доказательства. Вышеупомянутая замѣтка Геттнера можетъ дать понятіе о способахъ доказательства Вейерштрасса, обратиться къ которой поэтому я также могу совѣтовать желающимъ.

И дѣйствительно, въ настоящее время появляется много прекрасныхъ курсовъ, обработываемыхъ учениками свѣтилъ первой величины современнаго математическаго міра, которымъ самимъ и некогда и скучно заниматься отшлифовкой своихъ лекцій. Остается пожелать, чтобы и ученики Вейерштрасса, подобно ученикамъ Клейна, Ли, Пуанкарэ, Гурса,—поскорѣе издали замѣчательныя его лекціи по теоріи гиперэллипточескихъ и Абелевыхъ интеграловъ, а также и по другимъ предметамъ. Хотя теперь многія изъ его доказательствъ и методовъ могутъ быть замѣнены уже другими, какъ то можно видѣть изъ работъ Нётера и изъ моихъ „Основаній теоріи Абелевыхъ интеграловъ", тѣмъ не менѣе эти лекціи долго будутъ еще представлять огромный интересъ и будутъ признаны всѣми однимъ изъ лучшихъ твореній Вейерштрасса, и его теорія—одной изъ лучшихъ теорій науки.

А пока, нужно признаться, ученой славѣ Вейерштрасса способствовали, какъ это впрочемъ чаще всего бываетъ, его труды изъ области знанія, получившей уже раньше права гражданства у математиковъ обоихъ полушарій, именно его изслѣдованія по теоріи эллиптическихъ функцій и по теоріи аналитическихъ функцій вообще.

Послѣ первой работы Вейерштрасса, посвященной теоріи функцій $Al(u)$, имъ самимъ были опубликованы только два мемуара по теоріи эллиптическихъ функцій: одинъ изъ нихъ, написанный въ 1882 году, посвященъ выводу частнаго дифференціальнаго уравненія по u, ω, ω', которому удовлетворяютъ функціи $\sigma(u, \omega, \omega')$ и $\sigma_\lambda(u, \omega, \omega')$ [1], и примѣненію этого уравненія къ разложенію этихъ функцій въ рядъ — онъ является такимъ образомъ замѣстителемъ самаго перваго мемуара, преслѣдовавшаго подобную цѣль относительно прежнихъ функцій $Al(u)$, замѣненныхъ теперь функціей $\sigma(u)$; второй читанный въ Академіи въ 1883 году, написанъ съ цѣлію восполнить усмотрѣнный Вейерштрассомъ пробѣлъ въ Якобіевой „Theorie der elliptischen Functionen aus den Eigenschaften der Thetareihen abgeleitet" [2]), въ которомъ Якоби рѣшилъ свою задачу только для случая, когда модуль k заключается въ предѣлахъ 0 и 1, Вейерштрассъ-же выражаетъ q въ функціи k рядомъ быстро-сходящимся и для комплекснаго k.

Первымъ, познакомившимъ ученый міръ съ функціями $\wp(u)$ и $\sigma(u)$ Вейерштрасса, былъ, сколько намъ извѣстно, его ученикъ Kiepert, помѣстившій въ 1882 г. въ одномъ изъ томовъ журнала Крелля мемуаръ, посвященный умноженію аргумента эллиптическихъ функцій, и затѣмъ H. Schwartz, издавшій въ 1883 г. 10 листовъ „Formeln und Lehrsätze

---

[1]) Онъ былъ въ слѣдующемъ году отлитографированъ въ Геттингенѣ съ прибавленіемъ Шварца; этимъ изданіемъ я пользовался при составленіи послѣдней главы моей „Теоріи эллиптическихъ интеграловъ и эллиптическихъ функцій". Харьковъ, 1895 г.

[2]) Gesammelte Werke, Bd. I. S. 497 ff.

zum Gebrauche der elliptischen Functionen. Nach Vorlesungen und Aufzeichungen des Herrn K. Weierstrass bearbeitet und herausgegeben von H. A. Schwartz". Послѣднее изданіе очень способствовало распространенію Вейерштрассовской теоріи эллиптическихъ функцій, дотолѣ извѣстной лишь его ученикамъ изъ его лекцій, а также и извѣстное сочиненіе Halphen'а: „Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications", первый томъ котораго вышелъ уже чрезъ три года послѣ таблицъ Schwartz'а, именно въ 1886 г., а второй въ 1888 г. Не мало способствовали тому также и лекціи, отчасти и книга: „Modulfunctionen" Клейна, который не только ввелъ Вейерштрассовскія функціи $\wp(u)$ и $\sigma(u)$ въ свои лекціи, но построилъ и для гиперэллиптическихъ интеграловъ функцію аналогичную $\sigma(u)$, обладающей свойствомъ быть „формой" отъ u и ω, ω', т. е. однородной функціей этихъ величинъ, и въ этомъ направленіи сталъ вмѣстѣ съ Burchardt'омъ разрабатывать теоріи этихъ интеграловъ. Что касается до книги Halphen'а, то въ ней Вейерштрассовскія функціи вводятся еще не самостоятельно, но выводятся изъ Якобіевскихъ, что не натурально; какъ можно видѣть изъ статьи Миттагъ-Леффлера: „О введеніи въ анализъ эллиптическихъ функцій", написанной по шведски и напечатанной въ 1876 г. въ Гельсингфорсѣ, а также изъ нашей „Теоріи эллиптическихъ интеграловъ и эллиптическихъ функцій", они появляются сами собою, равно какъ и Эрмитовская каноническая форма подрадикальной функціи въ эллиптическомъ интегралѣ, принятая Вейерштрассомъ, при извѣстной постановкѣ вопроса о теоремѣ Эйлера. Функціи $\wp(u)$ и $\sigma(u)$ на столько хорошо извѣстны теперь—онѣ встрѣчаются уже и въ изслѣдованіяхъ русскихъ ученыхъ—, что мнѣ о нихъ распространяться излишне: незнакомымъ-же съ ними могу указать на свое вышеназванное сочиненіе по теоріи эллиптическихъ функцій. Скажу еще только то, что Вейерштрассъ излагалъ теорію эллиптическихъ функцій на своихъ лекціяхъ двоякимъ образомъ: одинъ разъ онъ выходилъ изъ интеграловъ,—это тотъ курсъ, который повидимому слушалъ Миттагъ-Леффлеръ, какъ то можно предполагать на основаніи вышеупомянутой статьи его; другой разъ,—и этотъ курсъ былъ повторяемъ,—онъ принималъ за исходную точку теорему сложенія и доказывалъ, что аналитическая функція одной независимой перемѣнной обладающая алгебраической теоремой сложенія будетъ: или 1) алгебраическая, или 2) алгебраическая отъ $e^{\frac{u\pi i}{\omega}}$, или 3) алгебраическая функція отъ $s=\wp(u)$, опредѣляемой дифференціальнымъ уравненіемъ:

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = 4s^3 - g_2 s - g_3,$$

гдѣ g_2 и g_3 приличнымъ образомъ выбранныя постоянныя, и условіемъ, что $\wp(0) = \infty^2$, а затѣмъ онъ прямо строилъ функцію $\sigma(u)$ по ея нулямъ согласно съ своей извѣстной теоремой, о которой будетъ рѣчь впереди, и оттуда, дифференцируя по взятіи логариѳма разъ и другой, получалъ функцію $\zeta(u)$ и $\wp(u)$ и обнаруживалъ такимъ образомъ ихъ свойства, а затѣмъ и свойства эллиптическихъ интеграловъ. Имъ подробно былъ развитъ и способъ вычисленія этихъ функцій. Такой рукописный курсъ я видѣлъ въ Лейпцигѣ въ 1883 г. Оба курса появятся вмѣстѣ въ одномъ изъ слѣдующихъ томовъ „Mathem. Werke" Вейерштрасса.

При занятіяхъ спеціальными теоріями функцій эллиптическихъ, гиперэллиптическихъ и Абелевыхъ, естественно было встрѣтиться съ вопросами, касающимися аналитическихъ функцій вообще, и обратиться къ внимательному пересмотру установившихся понятій: отсюда вышли и курсы по введенію въ общую теорію аналитическихъ функцій, читавшіеся нѣсколько разъ Вейерштрассомъ, (между прочимъ и въ осенній семестръ 1884 г., когда я былъ въ Берлинѣ), и рядъ мемуаровъ и замѣтокъ, помѣщавшихся въ ежемѣсячныхъ отчетахъ Академіи, и собранныхъ въ 1886 г. въ особый сборникъ подъ названіемъ: „Abhandlungen aus der Functionenlehre" (Berlin, J. Springer) въ виду громаднаго интереса, возбужденнаго ими въ математическомъ мірѣ и вызвавшаго цѣлый рядъ дальнѣйшихъ изслѣдованій. Въ этой сферѣ вліяніе Вейерштрасса была огромное: если изслѣдованія въ теоріи гиперэллиптическихъ интеграловъ вызвали не болѣе какъ 10—12 опубликованныхъ работъ, теорія же эллиптическихъ функцій уже значительно больше, то изслѣдованія по вопросамъ общей теоріи функцій создали цѣлую литературу на всѣхъ почти европейскихъ языкахъ, столь обширную, что одинъ списокъ сочиненій потребовалъ бы не одинъ печатный листъ. Особенно посчатливилось, что впрочемъ весьма понятно, вопросу объ аналитическомъ представленіи однозначныхъ функцій, а затѣмъ непрерывнымъ функціямъ неимѣющимъ производныхъ, и вообще теоріи рядовъ. И дѣйствительно, возможность построить однозначную функцію по даннымъ ея нулямъ, а также и однозначную функцію съ даннымъ числомъ существенно-особенныхъ точекъ, принадлежитъ къ числу замѣчательнѣйшихъ его открытій. И въ этой области его идеи и открытія распространялись его учениками не менѣе, чѣмъ его мемуарами, хотя многіе изъ нихъ переводились на французскій языкъ вскорѣ по выходѣ. Пинкэрле, Коссакъ, Штольцъ, Ковалевская, Миттагъ-Леффлеръ, Бирманъ и другіе были изъ числа первыхъ и наиболѣе ознакомившихъ ученый міръ съ его взглядами и открытіями въ области аналитическихъ функцій. Но до сихъ поръ нѣтъ такого курса, который близко подходилъ бы къ его лекціямъ и далъ бы возможность составить полное и точное понятіе о всей его теоріи аналитическихъ функцій, какъ объ органически цѣломъ. Я даже не знаю была-ли она излагаема полностью и на его лекціяхъ, ибо онъ, ссылаясь на свой курсъ въ нѣкоторыхъ мемуарахъ, называетъ его „введенiемъ въ теорiю аналитическихъ функцiй“. Мнѣ два раза въ 1884 г. представлялся случай ознакомиться съ такимъ курсомъ: одинъ разъ лѣтомъ въ Лейпцигѣ по рукописнымъ лекцiямъ, имѣвшимся въ библiотекѣ математическаго семинара, другой разъ осенью того-же года въ Берлинѣ, когда Вейерштрассъ читалъ этотъ курсъ; но я не воспользовался этими случаями, боясь отвлечься отъ главнаго предмета своихъ тогдашнихъ занятiй—теорiй гиперэллиптическихъ и Абелевыхъ интеграловъ, и въ Берлинѣ прослушалъ лишь нѣсколько лекцiй, посвященныхъ понятiю о числѣ и четыремъ дѣйствiямъ надъ числами, съ чего Вейерштрассъ всегда считалъ нужнымъ начинать эти курсы. Это начало однакожъ большинству слушателей показалось скучнымъ, и я былъ свидѣтелемъ знакомаго намъ явленiя: послѣ первой лекцiи въ большой аудиторiи, не могшей вмѣстить всѣхъ слушателей, онъ долженъ былъ перейти въ громадный залъ, выстроенный отдѣльно въ саду за зданiемъ Университета, который могъ вмѣстить болѣе тысячи слушателей; но число ихъ, (можетъ быть и вслѣдствiе дурныхъ аккустическихъ и оптическихъ свойствъ этой залы), быстро сократилось, такъ что онъ чрезъ нѣсколько лекцiй перешелъ въ аудиторiю, меньшую первоначальной, которая могла вмѣстить не болѣе 150—200 слушателей, и то далеко была не полна. Онъ читалъ сидя въ креслахъ около доски, на которой формулы писалъ одинъ изъ студентовъ; читалъ онъ не спѣшно и достаточно громко, но возрастъ (ему на слѣдующiй годъ исполнилось 70 лѣтъ) уже сказывался: не всякое слово выходило отчетливо, и частенько приходилось ему поправлять свои выраженiя. Впрочемъ столь элементарныя вещи часто повторять представляетъ своего рода трудность, ибо приходится задерживать ради слушателей естественное быстрое теченiе своихъ мыслей. Какъ дѣло шло дальше, не знаю, ибо я тоже пересталъ ходить на лекцiи по вышеуказанной причинѣ. Но возвратимся отъ лектора и лекцiй къ ихъ предмету—теорiи аналитическихъ функцiй. Какъ извѣстно, Вейерштрассъ усвоилъ Лагранжевское опредѣленiе аналитической функцiи рядомъ расположеннымъ по степенямъ независимой перемѣнной или независимыхъ перемѣнныхъ, если ихъ нѣсколько, но *безусловно* и *равномѣрно-сходящимся* внутри извѣстной области, о чемъ во времена Лагранжа еще не думали; необходимость сходимости ряда была указана раньше Абелемъ и Коши, послѣднимъ даже и необходимость ея безусловности, но равномѣрность, если неявно и заключалась въ нѣкоторыхъ изъ прежнихъ доказатетьствъ, и если даже и были у Вейерштрасса предшественники, обращавшiе на это вниманiе, какъ Стоксъ, Зейдель, Гейне и можетъ быть и еще нѣкоторые другiе, то все-таки онъ былъ первый, который уже въ раннихъ своихъ работахъ подчеркнулъ ея необходимость для ряда представляющаго аналитическую функцiю, и постояннымъ употребленiемъ выраженiя „безусловно и равномѣрно-сходящiйся рядъ“, такъ сказать пріучилъ математиковъ не забывать этого необходимаго условія для того, чтобы рядъ могъ представлять аналитическую функцію. Мы уже упоминали какъ рано и независимо отъ другихъ возникла у него идея объ аналитическомъ продолженіи функцій. Это его привело къ понятію о функціяхъ, которыя не могутъ быть продолжены за извѣстную границу, къ функціямъ прерывнымъ (fonction lacunaire), и къ роли, которую тутъ играютъ существенно особенныя точки. Онъ показалъ, въ мемуарѣ „Zur Functionentheorie", что можно построить такой сходящійся рядъ, который въ разныхъ областяхъ будетъ представлять различныя функціи. Ряды же привели его и къ непрерывнымъ функціямъ, которыя не имѣютъ производныхъ [1]). Строго обосновавъ теорію рядовъ, онъ сдѣлалъ ихъ почти единственнымъ средствомъ и орудіемъ всѣхъ своихъ выводовъ и доказательствъ, проведя строго и послѣдовательно ихъ употребленіе чрезъ всѣ свои изслѣдованія и курсы. Это придаетъ его работамъ и курсамъ единство, стройность, строгость и элементарность, хотя нѣкоторые выводы и доказательства выходятъ чрезъ это-же не рѣдко длинноваты, что затрудняетъ ихъ усвоеніе и нѣсколько вредитъ производимому ими впечатлѣнію. Но съ другой стороны, онъ чрезъ это даетъ своимъ ученикамъ такое орудіе, которое остается нерѣдко единственнымъ дѣйствительнымъ въ тѣхъ областяхъ знанія, въ которыя заведены теперь математики успѣхами науки. Вейерштрассъ, какъ и Кронекеръ, (хотя въ другомъ смыслѣ,) были ариѳметическаго направленія въ математикѣ, въ противоположность ученымъ Клебшевской школы, которые суть геометры по преимуществу, изслѣдуя вопросы чистаго анализа при помощи геометріи. Вейерштрассъ не хотѣлъ пользоваться и Римановой поверхностью при изученіи алгебраическихъ функцій, лишая себя такого хорошаго вспомогательнаго средства только для того, чтобы оставаться чистымъ ариѳметикомъ.

Занятія Абелевыми функціями, зависящими отъ нѣсколькихъ перемѣнныхъ независимыхъ, заставили его, болѣе чѣмъ кого либо, обратить вниманіе и на функціи многихъ перемѣнныхъ вообще, и во II томѣ его Mathem. Werke мы находимъ 4 мемуара [2]), посвященныя такимъ функціямъ. Изъ нихъ три первые показываютъ, что Вейерштрассъ занимался разработкой теоріи функцій n перемѣнныхъ съ $2n$ системами періодовъ по плану Ліувиля и нашелъ нѣкоторыя теоремы, аналогичныя теоремѣ Ліувиля относительно функцій двояко-періодическихъ отъ од-

---

[1]) 6-й мемуаръ II-го тома.

[2]) Ueber die allgemeinen eindeutigen und 2n-fach periodischen Functionen von n Veränderlichen. 1869. 2) Neuer Beweis eines Hauptsatzes der Theorie der periodischen Functionen mehreren Veränderlichen. 1879. 3) Untersuchungen über die 2r-fach periodischen Functionen von r Veränderlichen. 1880. 4) Einige auf die Theorie der analytischen Functionen mehrerer Veränderlichen sich beziehende Sätze.

ной независимой перемѣнной; но эти изслѣдованія остались неоконченными. Послѣдній мемуаръ, (который былъ отлитографированъ въ 1879 г., а напечатанъ первый разъ въ 1886 г. въ сборникѣ „Abhandlungen aus der Functionenlehre") посвященъ доказательствамъ тѣхъ общихъ предложеній, представляющихъ обобщенія нѣкоторыхъ предложеній, касающихся функцій одной независимой перемѣнной, которыя ему необходимы были въ теоріи Абелевыхъ трансцендентныхъ.

Мы коснулись въ нашемъ очеркѣ лишь тѣхъ областей анализа, разработкой которыхъ Вейерштрассъ главнымъ образомъ занимался—центральныхъ, такъ сказать, областей его научной дѣятельности, ибо не имѣли времени познакомиться съ другими его работами, каковы напр.: Neuer Beweis des Fundamental-Satzes der Algebra (1859). Ueber die homogenen Functionen 2. Grades. Ueber eine Gattung reeller periodischen Functionen. Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen. Ueber sogenannte Dirichlet's Princip. Bemerkungen zur Integration eines Systems linearer Differential gleichungen mit constanten Coefficienten. Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Grössen. Zur Lindemann'schen Abhandlung „Ueber die Ludolph'sche Zahl", въ которомъ онъ упрощаетъ доказательство Линдемана, Neuer Beweis des Satzes, dass jede ganze rationalle Function einer Veränderlichen dargestellt kann als ein Product aus linearen Functionen derselben Veränderlichen 1891 г. и нѣкоторыя другія. Изъ двухъ здѣсь упомянутыхъ новыхъ доказательствъ основнаго предложенія Алгебры, второе представляетъ нѣкоторое видоизмѣненіе перваго. Они представляютъ интересъ, будучи построены на отличныхъ отъ другихъ доказательствъ основаніяхъ, но не отличаются краткостью.

Сверхъ упомянутыхъ курсовъ по теоріи функцій вообще, по теоріи эллиптическихъ, гиперэллиптическихъ и Абелевыхъ функцій, Вейерштрассъ читалъ еще лекціи по Варіаціонному исчисленію, представляющія огромный интересъ и въ научномъ и въ педагогическомъ отношеніи. Литографированный курсъ, который я имѣлъ случай просматривать, составляетъ томъ очень мелкаго письма, по размѣрамъ не меньшій перваго тома Math. Werke, и посвященъ только вопросамъ о maxima и minima простыхъ интеграловъ. Этому курсу предпослано введеніе, содержащее нѣкоторыя необходимыя свѣденія изъ Вейерштрассовской теоріи аналитическихъ функцій, (въ которомъ упоминаются уже и изслѣдованія Пуанкарэ, касающіяся Фуксовыхъ функцій); а затѣмъ подробная теорія maxima и minima функцій одной и главнымъ образомъ, нѣсколькихъ перемѣнныхъ, какъ абсолютныхъ, такъ и относительныхъ. Здѣсь я встрѣтилъ между прочимъ то, чего еще нигдѣ не встрѣчалъ, именно критеріи для различенія относительныхъ maxima и minima, когда они розыскиваются при помощи метода Лагранжа. Для вывода этихъ критеріевъ въ случаѣ функціи многихъ перемѣнныхъ ему понадобилось познакомить слушателей съ теоріей квадратичныхъ формъ, которыхъ перемѣнныя или независимы, или связаны нѣкоторыми условіями: условіемъ неизмѣняемости знака такой формы будетъ тогда требованіе, чтобы нѣкоторое уравненіе, легко получаемое въ формѣ опредѣлителя въ обоихъ случаяхъ, имѣло-бы всѣ корни вещественные и одного знака, что узнается по раскрытіи уравненія по числу перемѣнъ знаковъ его коэффиціентовъ. Если n перемѣнныхъ связаны m условіями, то это уравненіе будетъ степени $n-m$, и въ опредѣлителѣ всѣ элементы, находящіеся въ пересѣченіи послѣднихъ m строкъ съ послѣдними m столбцами, будутъ нули, а неизвѣстная входитъ, и притомъ въ первой степени, только въ элементы расположенные по главной діагонали, какъ и для случая, когда n перемѣнныхъ независимы. Если нѣкоторыя условія даны въ формѣ неравенства: $\varphi(x_1, x_2, \dots x_n) > 0$, то онъ полагаетъ $\varphi(x_1, x_2, \dots x_n) = x_{n+1}^2$, что для вещественныхъ значеній перемѣнныхъ равносильно данному условію, и такимъ образомъ задача сводится къ обыкновенной задачѣ объ относительныхъ maxima и minima. Это замѣчаніе мнѣ раньше тоже нигдѣ не встрѣчалось. Оба эти отдѣла занимаютъ почти четвертую часть всего курса; часть о maxima и minima разбита на 15 главъ; по этому уже можно судить какъ детально она разработана. Собственно курсъ Варіаціоннаго исчисленія разбивается на четыре части: сперва введеніе, разбивающееся на двѣ главы: первая имѣетъ назначеніемъ указать связь задачъ Варіаціоннаго исчисленія съ обыкновенной теоріей maxima и minima, для чего трактуется задача о плоской кривой, описывающей при вращеніи около прямой, взятой въ той-же плоскости, поверхность наименьшаго объема, по способу этой теоріи, разсматривая сперва многоугольникъ и переходя потомъ къ предѣлу, когда число сторонъ становится безконечно-большимъ; вторая глава посвящена тому, чтобы дать общее понятіе о задачахъ варіаціоннаго исчисленія. Затѣмъ первый отдѣлъ, разбитый на 15 главъ, посвященъ абсолютнымъ maxima и minima простого интеграла вида $\int_{t_0}^{t} F(x, y; x', y')\, dt$, гдѣ $x' = \frac{dx}{dt}$, $y' = \frac{dy}{dt}$. Этотъ отдѣлъ содержитъ много цѣнныхъ разъясненій, а главы VIII—XIII содержатъ и новое. Вейерштрассъ показываетъ сперва на частномъ примѣрѣ, именно на задачѣ Ньютона о тѣлѣ вращенія, поверхность котораго встрѣчаетъ наименьшее сопротивленіе отъ жидкой среды, въ которой движется, что необходимыя условія, выводимыя изъ разсмотрѣнія второй варіаціи, недостаточны, и даетъ новые критеріи. Второй отдѣлъ изъ 10 главъ посвященъ задачѣ объ изопериметрахъ, причемъ Вейерштрасъ развиваетъ свои критеріи и для этого случая; наконецъ послѣдній, третій отдѣлъ, изъ двухъ главъ, посвященъ тому случаю, когда функціи, входящія въ выраженіе, стоящее подъ знакомъ интеграла, и ихъ производныя связаны уравненіями.

Въ 1885 г. ему исполнилось 70 лѣтъ; по уставу германскихъ университетовъ этотъ возрастъ даетъ право профессору, сохраняя званіе, не читать болѣе лекцій. Вейерштрассъ воспользовался этимъ правомъ и уѣзжалъ въ Италію, но не на долго: по словамъ С. В. Ковалевской, съ которой я встрѣтился въ 1887 году, онъ соскучился безъ лекцій и опять сталъ читать ихъ; но едвали это долго продолжалось; по крайней мѣрѣ въ предисловіи къ I т. Math. Werke, отъ 15 мая 1894 г., онъ говоритъ, что пять лѣтъ назадъ онъ рѣшился издать полное собраніе своихъ сочиненій, но едва принялся за работу, какъ его посѣтила упорная болѣзнь, которая на нѣсколько лѣтъ сдѣлала его совершенно неспособнымъ къ работѣ, и только съ прошлаго лѣта т. е. въ 1893 г., состояніе здоровья позволило ему вновь приняться за изданіе своихъ сочиненій при содѣйствіи Академіи, какъ сказано выше, за которымъ онъ къ ней обратился, боясь не дожить до окончанія изданія. Опасенія его, какъ видимъ, оправдались и его не стало прежде, чѣмъ окончилось печатаніе III тома его сочиненій....

Профессоръ *М. Тихомандрицкій.*

Харьковъ,
27 февраля 1897 г.

Ровно черезъ мѣсяцъ послѣ того, какъ прочитана была эта рѣчь, и послѣ того, какъ уже приступлено было къ ея печатанію, мнѣ попался въ читальнѣ Университета только-что наканунѣ полученный № 16 „Verhandlungen der Physikalischen Gesellschaft zu Berlin“, содержащій отчетъ о засѣданіи 5-го марта (нов. стиля) 1897 г., наибольшую часть котораго занимаетъ рѣчь E. Lampe: „Zum Gedächtnisse von Karl Weierstrass“, прочитанная въ этомъ засѣданіи и содержащая много интересныхъ свѣденій о жизни и дѣятельности Вейерштрасса, а также характеристику его какъ учителя и человѣка,—свѣденій, почерпнутыхъ какъ изъ документальныхъ источниковъ, такъ и изъ личныхъ сношеній съ людьми, близко знавшими покойнаго ученаго, тогда какъ у меня подъ руками было лишь то, что помѣщено о немъ въ Braunsberger-progromm и въ „Conversations-lexikon“ Meyer'а, да кое-какія отрывочныя свѣденія, попадающіяся съ статьяхъ, напечатанныхъ въ первыхъ двухъ томахъ его Math. Werke. Такъ какъ весьма интересная рѣчь г-на Лампе, будучи напечатана въ спеціальномъ изданіи, можетъ быть не легко доступна иному читателю, то я позволю себѣ пополнить мою рѣчь нѣкоторыми заимствованными оттуда біографическими свѣденіями.

Карлъ Вейерштрассъ, католическаго вѣроисповѣданія, былъ старшій сынъ бургомистра города Остенфельда, у котораго были еще одинъ сынъ, Петръ Вейерштрассъ, теперь профессоръ филологіи въ Бреславскомъ Университетѣ, и двѣ дочери, Клара и Елизавета. К. Вейерштрассъ былъ холостъ; его сестры проживали вмѣстѣ съ нимъ въ Берлинѣ; одна изъ нихъ, Клара, умерла за годъ до его кончины, послѣдовавшей отъ болѣзни легкихъ, бывшей слѣдствіемъ инфлюэнцы, посѣтившей передъ тѣмъ его домъ. Послѣдніе годы своей жизни онъ не могъ ходить и проводилъ все время дома, въ креслахъ на колесахъ (Rollstuhl). Бывшіе тогда въ Берлинѣ ученики его, собравшись, постановили, чтобы ежедневно одинъ изъ нихъ посѣщалъ любимаго учителя, чтобы доставить ему въ бесѣдѣ развлеченіе, такъ какъ онъ любилъ общество, и отнюдь не былъ исключительно кабинетнымъ ученымъ, какъ то можно было о немъ думать, судя по наружному виду, и какимъ онъ мнѣ лично дѣйствительно представлялся. Въ гимназіи онъ давалъ отъ 28—30 уроковъ въ недѣлю, и не смотря на то, находилъ время заниматься наукою; подъ старость онъ съ любовью вспоминалъ время своего учительства. Въ 1854 г. Кенигсбергскій Университетъ, по предложенію извѣстнаго профессора Ришело, удостоилъ его степени доктора honoris causa. Чрезъ два года послѣ того онъ отправился съ ученою цѣлью въ Берлинъ, гдѣ въ то время открылось мѣсто преподавателя математики въ Технологическомъ Институтѣ (Gewerbeinstitut), на которое онъ былъ назначенъ 29 мая того же года, а 12 ноября того же года былъ назначенъ и экстраординарнымъ профессоромъ Университета; въ Академію былъ избранъ около того же времени, а вступительную рѣчь читалъ 9 іюля 1857 г. (день Лейбница). Въ Институтѣ онъ имѣлъ 12 лекцій въ недѣлю: 6 часовъ по Аналитической Геометріи и 6 часовъ по Дифференціальному и Интегральному исчисленію; здѣсь Hamburger и Schwartz сдѣлались его ревностными учениками. Въ Университетѣ онъ читалъ ежегодно одинъ курсъ publice и по крайней мѣрѣ одинъ privatim, предметомъ которыхъ были сперва теорія эллиптическихъ функцій (сначала по Якоби; функціи $\wp(u)$ и $\sigma(u)$ появились впервые въ курсѣ 1862—63 года); геометрическая оптика, короткое время послѣ смерти Штейнера синтетическая геометрія, пока не установился окончательно полный циклъ его курсовъ: по теоріи функцій вообще, по теоріи эллиптическихъ функцій, по теоріямъ гиперэллиптическихъ и Абелевыхъ интеграловъ и по варіаціонному исчисленію.

Множество лекцій по высшимъ наукамъ и усилившіяся съ переходомъ въ Берлинъ собственныя ученыя занятія сильно разстроили его нервную систему, съ нимъ стали дѣлаться головокруженія и обмороки [1]);

---

[1]) Это было причиною, что съ 1862 г. онъ сталъ прибѣгать къ помощи студентовъ, когда нужно было писать формулы на доскѣ.

вслѣдствіе чего по требованію пользовавшихъ его врачей онъ долженъ былъ съ 1862 года сократить свою преподавательскую дѣятельность, и въ Институтѣ онъ былъ временно замѣщенъ Аронгольдомъ, хотя числился тамъ преподавателемъ до 1864 г., когда была учреждена въ Берлинскомъ Университетѣ, нарочно для него, третья ординатура по математикѣ. Какъ извѣстно, подъ его редакціей изданы сочиненія Штейнера и 6 послѣднихъ томовъ сочиненій Якоби; кромѣ того первое время по смерти Борхардта онъ принималъ вмѣстѣ съ Кронекеромъ участіе въ редактированіи журнала Креля.

Прилагаемый при семъ портретъ Вейерштрасса представляетъ увеличенную фотографомъ А. Федецкимъ въ Харьковѣ копію съ фотографической карточки, пріобрѣтенной мною въ Берлинѣ зимою 1884 г. и очень похожей на Вейерштрасса въ то время; когда же именно снята эта фотографія мнѣ осталось неизвѣстнымъ.

М. Т.

29 Марта 1897 г.
