ЗАПИСКИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА ХГУ И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXV 1957

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ, ПОРОЖДАЮЩИХ ЭРМИТОВО-ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ ЯДРА

Н. И. Ахиезер и И. М. Глазман

Харьков

Комплексно-значное ядро $K(x, y)$ $(0 \leqslant x, y < a)$ называют эрмитово-положительным[1], если

$$\sum_{j,\ k=1}^{n} K(x_j, x_k)\xi_j\overline{\xi_k} \geqslant 0 \tag{1}$$

при любом натуральном n, любых $x_j (j=1, 2, \ldots, n)$ из интервала $[0, a)$ и любых комплексных ξ_j $(j=1, 2, \ldots, n)$.

Особое значение имеют эрмитово-положительные ядра, порождаемые функциями от одной переменной. Мы будем рассматривать три класса таких функций. Областью определения этих функций будем считать интервал $-a < x < a\,(a \leqslant \infty)$. Функции будем предполагать комплексно-значными и непрерывными при $x=0$. Следуя М. Г. Крейну [5], обозначим упомянутые три класса $\boldsymbol{P}_a$, $\boldsymbol{P}_a^*$, $\boldsymbol{G}_a$.

Класс $\boldsymbol{P}_a$ состоит из всех функций $f(x)$ указанного рода, которые порождают эрмитово-положительные ядра $K(x, y)$ $(0 \leqslant x, y < a)$ по формуле

$$K(x, y) = f(x-y).$$

Функции $f(x)$ класса $\boldsymbol{P}_a$ называются эрмитово-положительными в интервале $(-a, a)$.

Из рассмотрения формы

$$f(0)|\xi_1|^2 + f(x)\xi_1\overline{\xi_2} + f(-x)\xi_2\overline{\xi_1} + f(0)|\xi_2|^2$$

следует, что для всякой функции $f(x) \in \boldsymbol{P}_a$

$$f(-x) = \overline{f(x)} \qquad (-a < x < a),$$

то есть „эрмитовость“, а также, что

$$|f(x)| \leqslant f(0) \qquad (-a < x < a).$$

Таким образом, для неравной нулю тождественно функции $f(x) \in \boldsymbol{P}_a$ обязательно неравенство

$$f(0) > 0.$$

[1] Иногда будем называть его эрмитово-положительным в квадрате $0 \leqslant x < a$, $0 \leqslant y < a$.

Поэтому, не нарушая общности, мы примем, что для всех функций $f(x) \in \boldsymbol{P}_a$ выполнено условие нормировки

$$f(0) = 1.$$

Функция принадлежит классу $\boldsymbol{P}_a^*$, если при любом натуральном n она является n-ой степенью некоторой функции класса $\boldsymbol{P}_a$ (таким образом $\boldsymbol{P}_a^* \subset \boldsymbol{P}_a$).

Наконец, *класс $\boldsymbol{G}_a$ состоит из всех функций $g(x)$ рассматриваемого рода, которые удовлетворяют условиям*

$$g(0) = 0, \ g(-x) = \overline{g(x)}$$

и порождают эрмитово-положительные ядра $K(x, y)$ в квадрате $0 \leqslant x < a$, $0 \leqslant y < a$ по формуле

$$K(x, y) = g(x - y) - g(x) - g(-y).$$

Классы $\boldsymbol{P}_\infty$ и $\boldsymbol{P}_\infty^*$ играют известную роль в теории вероятностей, как совокупности характеристических функций любых законов распределения (класс $\boldsymbol{P}_\infty$) и всех безгранично делимых законов распределения (класс $\boldsymbol{P}_\infty^*$).

Согласно теореме С. Бохнера [3][1] *функции класса $\boldsymbol{P}_\infty$ вполне характеризуются представлением*

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} d\sigma(\lambda). \tag{2}$$

где $\sigma(\lambda)$ — неубывающая, в существенном однозначно[2] определяемая по $f(x)$ функция, для которой $\sigma(\infty) - \sigma(-\infty) = 1$.

Подобным образом согласно теореме П. Леви [6] *функции класса $\boldsymbol{P}_\infty^*$ вполне характеризуются представлением*

$$F(x) = e^{g(x)}$$

$$g(x) = i\gamma x + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{i\lambda x} - 1 - \frac{i\lambda x}{1+\lambda^2}\right) \frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda^2}, \tag{3}$$

где γ — вещественная постоянная, а $\sigma(\lambda)$ — неубывающая функция, для которой

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(\lambda)}{1+\lambda^2} < \infty;$$

число γ определяется функцией $g(x)$ однозначно, а функция $\sigma(\lambda)$ — в существенном однозначно.

Как доказал М. Г. Крейн [5], *совокупность функций $g(x)$, допускающих представление* (3), *совпадает с классом $\boldsymbol{G}_\infty$.*

Класс $\boldsymbol{P}_a$ при $a < \infty$ впервые изучил М. Г. Крейн. В 1939 году он доказал [4] следующую теорему продолжения: *каждая функция класса $\boldsymbol{P}_a$ может быть продолжена до некоторой функции класса $\boldsymbol{P}_\infty$.* Отсюда следует, что функции класса $\boldsymbol{P}_a$ при $a < \infty$ также характеризуются представлением (2), но теперь функция $\sigma(\lambda)$ может не опре-

[1] Одновременно с С. Бохнером эту теорему получил А. Я. Хинчин.

[2] Говоря „в существенном однозначно“, мы имеем в виду, что разность двух различных функций $\sigma(\lambda)$, дающих представление одной и той же функции $f(x)$, равна константе во всех точках, где эта разность непрерывна.

деляться однозначно по функции $f(x)$. В цитированной заметке [4] М. Г. Крейна проблема представления функций класса $\boldsymbol{P}_a$ трактуется как континуальный аналог классической проблемы моментов (роль индекса n играет переменная x). Результаты М. Г. Крейна, относящиеся к классам $\boldsymbol{P}_a^*$ и $\boldsymbol{G}_a$, опубликованы в 1944 году в упомянутой заметке [5].

Настоящая статья преследует методическую цель связного изложения вопросов спектрального представления классов $\boldsymbol{P}_a$ $\boldsymbol{P}_a^*$ и $\boldsymbol{G}_a$.

В последнее время, в связи с теоретико-вероятностными приложениями, возрос интерес к вопросам спектрального представления различных классов позитивных функций. Мы надеемся, что настоящая статья будет полезна для всех впервые знакомящихся или желающих систематизировать основные сведения по теории эрмитово-положительных функций.

Читатель, уже знакомый с рассматриваемой областью, сможет найти кое-что новое в приводимых ниже методах доказательства спектральных теорем. Отметим, в частности, что для доказательства компактности множеств функций, порождающих эрмитово-положительные ядра, мы не переходим к соответствующим множествам характеристических функций, а проводим выбор на основе признака Арцела. В конце статьи метод доказательства теоремы Бохнера, предложенный одним из авторов в 1937 году [1], переносится на случай теоремы П. Леви.

§ 1. Некоторые свойства функций класса $\boldsymbol{P}_a$ вытекают прямо из определения этого класса. Так, непосредственно на основе определения было доказано выше, что для любой функции $f(x) \in \boldsymbol{P}_a$ справедливо неравенство[1]

$$|f(x)| \leqslant 1 \qquad (-a < x < a).$$

Столь же просто получается следующая важная теорема, принадлежащая А. П. Артеменко[2].

Теорема 1. Если $f(x) \in \boldsymbol{P}_a$, то

$$|f(x_1)-f(x_2)|^2 \leqslant 2\{1-\mathbf{R}f(x_1-x_2)\} \quad (0 \leqslant x_1,\ x_2 < a).$$

Доказательство. Запишем неравенство (1) для ядра

$$K(x,\ y)=f(x-y) \text{ при } n=3,\ x_3=0,\ \xi_1=\xi,\ \xi_2=-\xi,\ \xi_3=\eta.$$

Это неравенство будет иметь вид

$$f(0)|\eta|^2+2\mathbf{R}\{[f(x_1)]-f(x_2)\,\xi\bar{\eta}\}+2\{f(0)-\mathbf{R}f(x_1-x_2)\}|\xi|^2 \geqslant 0,$$

откуда немедленно следует, что

$$|f(x_1)-f(x_2)|^2 \leqslant 2\{1-\mathbf{R}f(x_1-x_2)\}.$$

Не мешает заметить, что при доказательстве теоремы 1 не была использована непрерывность функции $f(x) \in \boldsymbol{P}_a$ в точке $x=0$, которую мы включили выше в определение класса $\boldsymbol{P}_a$. На основании теоремы 1 эта непрерывность в одной лишь точке $x=0$ влечет равномерную непрерывность функции $f(x) \in \boldsymbol{P}_a$ во всем интервале $(-a,\ a)$.

Основное свойство функций класса $\boldsymbol{P}_\infty$ выражает

Теорема 2. Для принадлежности функции $f(x)$ классу $\boldsymbol{P}_\infty$ необходимо и достаточно, чтобы она допускала представление

---

[1] Напомним, что функции $f(x)$ класса $\boldsymbol{P}_a$ мы считаем нормированными в нуле: $f(0)=1$.

[2] А. П. Артеменко сообщил эту теорему М. Г. Крейну [4].

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x}\, d\sigma(\lambda), \tag{2}$$

где $\sigma(\lambda)$ — неубывающая функция с полной вариацией, равной единице.

Доказательство достаточности следует из тождества

$$\sum_{j,\,k=1}^{n} f(x_j-x_k)\,\xi_j\bar{\xi}_k=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{j,\,k=1}^{n} e^{i\lambda(x_j-x_k)}\,\xi_j\bar{\xi}_k\,d\sigma(\lambda)=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k e^{i\lambda x_k}\right|^2 d\sigma(\lambda).$$

Доказательство необходимости не так просто, но может быть получено различными методами. Один из этих методов, указанный в статье [1] (см. также [2]), основан на рассмотрении преобразования Лапласа

$$H(\zeta)=\int_{0}^{\infty} e^{i\zeta x} f(x)\,dx$$

функции $f(x)\in \boldsymbol{P}_\infty$. Следуя этому методу, устанавливают, используя лишь позитивность форм, характеризующих класс $\boldsymbol{P}_\infty$, что функция $H(\zeta)$ регулярна в полуплоскости $\mathrm{I}\zeta>0$, имеет в ней неотрицательную вещественную часть и удовлетворяет условию

$$\sup_{\eta>0}|\eta H(i\eta)|<\infty. \tag{4}$$

Отсюда делается заключение[1], что $H(\zeta)$ допускает представление

$$i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda+\zeta},$$

а затем остается лишь использовать, что

$$i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda+\zeta}=\int_{0}^{\infty} e^{i\zeta x}dx\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x}\, d\sigma(\lambda).$$

Дальнейшим фундаментальным предложением теории эрмитово-положительных функций является принадлежащая М. Г. Крейну

Теорема 3. Какова бы ни была функция $f(x)\in \boldsymbol{P}_a$, найдется такая функция $\tilde{f}(x)\in \boldsymbol{P}_\infty$, что

$$f(x)=\tilde{f}(x) \qquad (-a<x<a). \tag{5}$$

Доказательство[2]. Обозначим через $\boldsymbol{S}$ множество всех чисел вида $\pm\frac{k}{m}$ $(m=1,\ 2,\ 3,\ \ldots;\ k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$, а через $\boldsymbol{R}$ — часть $\boldsymbol{S}$, лежащую в интервале $(-a,\ a)$.

---

[1] См., например, [2].

[2] По существу здесь повторяется доказательство М. Г. Крейном его общей теоремы о расширении позитивных функционалов (см. статью М. Г. Крейна в [9])

Линейное многообразие всех вещественных тригонометрических полиномов

$$\sum_{j=1}^{s} A_j e^{ir_j\lambda}$$

с „показателями“ $r_j \in M$, где M — некоторое множество вещественных чисел, будем обозначать через $T(M)$.

Возьмем сначала многообразие $T(R)$ и с помощью заданной функции $f(x) \in P_a$ определим на $T(R)$ однородный и аддитивный вещественный функционал Φ, полагая

$$\left.\begin{aligned} \Phi[\cos r\lambda] &= \frac{1}{2}\{f(r)+f(-r)\} \\ \Phi[\sin r\lambda] &= \frac{1}{2i}\{f(r)-f(-r)\} \end{aligned}\right\} \quad (r \in R).$$

Функционал Φ позитивен на $T(R)$ в том смысле, что из

$$\psi \in T(R), \quad \psi(\lambda) \geqslant 0 \quad (-\infty < \lambda < \infty)$$

следует

$$\Phi[\psi] \geqslant 0.$$

Действительно, согласно известной теореме Фейера—Рисса[1] неотрицательный на всей оси тригонометрический полином $\psi \in T(R)$ допускает представление

$$\psi(\lambda) = \left| \sum_{j=1}^{n} \xi_j e^{ir_j\lambda} \right|^2 \qquad (r_j \geqslant 0, \ r_j \in R)$$

и, следовательно,

$$\Phi[\psi] = \Phi\left[\sum_{j,k=1}^{n} e^{i(r_j - r_k)\lambda} \xi_j \bar{\xi}_k \right] = \sum_{j,k=1}^{n} f(r_j - r_k)\xi_j \bar{\xi}_k \geqslant 0.$$

Перенумеруем все положительные числа множества $S - R$ и обозначим их $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots$, а множество, получаемое из R присоединением чисел $\pm\rho_1, \pm\rho_2, \ldots, \pm\rho_k$, — через R_k.

Возьмем число ρ_1 и обозначим через A совокупность функций $\psi \in T(R)$, для которых

$$\cos \rho_1\lambda - \psi(\lambda) \geqslant 0 \qquad (-\infty < \lambda < \infty).$$

Эта совокупность не пуста, так как $-1 \in A$.

Подобным образом обозначим через B совокупность функций $\psi \in T(R)$, для которых

$$\psi(\lambda) - \cos\rho_1\lambda \geqslant 0 \qquad (-\infty < \lambda <)\infty.$$

Совокупность B также не пуста, так как $1 \in B$.

Если $\psi_- \in A$, $\psi_+ \in B$, то

$$\psi_-(\lambda) \leqslant \psi_+(\lambda) \qquad (-\infty < \lambda < \infty),$$

и, следовательно,

$$\Phi[\psi_-] \leqslant \Phi[\psi_+],$$

так что имеет место неравенство

$$\alpha_1 = \sup_{\psi \in A} \Phi[\psi] \leqslant \inf_{\psi \in B} \Phi[\psi] = \beta_1.$$

[1] [7], стр. 89 и 278.

Возьмем любое число γ_1, лежащее в интервале

$$\alpha_1 \leqslant x \leqslant \beta_1, \tag{6}$$

и расширим линейно функционал Φ на вещественную линейную оболочку $\boldsymbol{Q}$ многообразия $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{R})$ и функции $\cos \rho_1 \lambda$ с помощью равенства
$$\Phi[\cos \rho_1 \lambda] = \gamma_1.$$

Докажем, что из

$$\varphi \in Q, \ \varphi(\lambda) \geqslant 0 \qquad (-\infty < \lambda < \infty)$$

следует

$$\Phi[\varphi] \geqslant 0.$$

Действительно, функция φ, принадлежащая $\boldsymbol{Q}$, имеет вид

$$\varphi(\lambda) = -\psi(\lambda) + \vartheta \cos \rho_1 \lambda,$$

где $\psi \in \boldsymbol{T}(\boldsymbol{R})$, а ϑ — вещественное число (для определенности предположим, что $\vartheta > 0$).

Поэтому

$$\Phi[\cos \rho_1 \lambda] = \gamma_1 \geqslant \alpha_1 \geqslant \Phi[\vartheta^{-1}\psi] = \vartheta^{-1}\Phi[\psi]$$

и

$$\Phi[\varphi] = \Phi[-\psi + \vartheta \cos \rho_1 \lambda] = \vartheta\Phi[-\vartheta^{-1}\psi + \cos \rho_1 \lambda] =$$
$$= \vartheta\{-\vartheta^{-1}\Phi[\psi] + \Phi[\cos \rho_1 \lambda]\} \geqslant 0. \tag{7}$$

Теперь расширим линейно функционал Φ на вещественную линейную оболочку $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{R}_1)$ многообразия $\boldsymbol{Q}$ и функции $\sin \rho_1 \lambda$ с помощью равенства

$$\Phi[\sin \rho_1 \lambda] = \delta_1,$$

где δ_1 — любое число интервала (6), если заменить при определении чисел α_1 и β_1 условие $\psi \in \boldsymbol{T}(\boldsymbol{R})$ условием $\psi \in \boldsymbol{Q}$ и функцию $\cos \rho_1 \lambda$ функцией $\sin \rho_1 \lambda$.

Определим теперь функцию $\tilde{f}(r)$ на множестве $\boldsymbol{R}_1$, полагая

$$\tilde{f}(r) = \Phi[\cos r\lambda] + i\Phi[\sin r\lambda].$$

Продолжая начатый процесс расширения функционала Φ, определим его последовательно на многообразиях $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{R}_2)$, $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{R}_3)$, ... и в пределе на $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{S})$. При этом связанная с функционалом Φ функция $\tilde{f}(r)$ будет определена на множестве $\boldsymbol{S}$.

В силу рассуждений, которые привели к неравенству (7), функционал Φ позитивен на $\boldsymbol{T}$ $(\boldsymbol{S})$, а поэтому при любом натуральном n, любых комплексных ξ_j и любых $r_j \in \boldsymbol{S}$ бдует иметь место неравенство

$$\sum_{j,\,k=1}^{n} \tilde{f}(r_j - r_k)\xi_j\bar{\xi}_k \geqslant 0. \tag{8}$$

Функция $\tilde{f}(r)$, определенная на $\boldsymbol{S}$, будет непрерывна, так как она непрерывна при $r = 0$ и в силу неравенств (8), для нее справедлива теорема 1 при x_1, $x_2 \in \boldsymbol{S}$.

Расширим теперь $\tilde{f}(r)$ по непрерывности на всю ось и полученную функцию обозначим $\tilde{f}(x)$. Функция $\tilde{f}(x)$ является искомым продолжением функции $f(x)$. Действительно, принадлежность функции $\tilde{f}(x)$ к $\boldsymbol{P}_\infty$ следует из ее непрерывности и неравенств (8). Равенство (5) следует из того, что при $r \in \boldsymbol{R}$

$$\tilde{f}(r) = f(r),$$

где обе части, левая и правая, непрерывны.

Теорема продолжения таким образом доказана.

Следствие. Любая функция $f(x)$ класса $\boldsymbol{P}_a (a \leqslant \infty)$ допускает в интервале $(-a, a)$ представление (2).

§ 2. Перейдем к классу $\boldsymbol{G}_a$ и начнем с доказательства предложения, аналогичного теореме 1 § 1. Устанавливаемые этим предложением неравенства приводят к заключению об ограниченности и равномерной непрерывности функций $g(x) \in \boldsymbol{G}_a$ при $a < \infty$ (но не при $a = \infty$, как это имело место для класса $\boldsymbol{P}_a$).

Теорема 4. Если $g(x) \in \boldsymbol{G}_a$, то

1) при $-\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2}$ справедливо неравенство

$$|g(2x)| \leqslant M |g(x)|,$$

где M — *абсолютная константа*;

2) для любых $x_1, x_2 \in [0, a)$ справедливо неравенство

$$|g(x_2) - g(x_1)| \leqslant 2 \sqrt{\left|\mathbf{R}g\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)\right| \cdot |\mathbf{R}g(x_2 - x_1)| + 2\left|\mathbf{I}g\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)\right|}.$$

Доказательство. Запишем неравенство (1) для ядра

$$K(x, y) = g(x - y) - g(x) - g(-y)$$

сначала при $n = 2$, полагая $x_1 = x$, $x_2 = 2x$ $\left(0 < x < \frac{a}{2}\right)$, а затем при $n = 3$, полагая $x_3 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$, $\xi_1 = \xi$, $\xi_2 = -\xi$, $\xi_3 = \eta$.

В силу первого неравенства

$$\begin{vmatrix} g(x) + g(-x) & g(-2x) + g(x) - g(-x) \\ g(2x) + g(-x) - g(x) & g(2x) + g(-2x) \end{vmatrix} > 0$$

и значит

$$|g(2x) - g(x) + g(-x)|^2 \leqslant |g(x) + g(-x)| \, |g(2x) + g(-2x)|$$

или

$$|g(2x)| \leqslant 2|g(x)| + 2\sqrt{|g(x)| \, |g(2x)|},$$

откуда

$$|g(2x)| \leqslant (4 + 2\sqrt{3}) |g(x)|$$

и первое утверждение доказано.

Второе неравенство после упрощений примет вид

$$-\mathbf{R}g(x_2 - x_1)|\xi|^2 - \mathbf{R}g\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)|\eta|^2 -$$

$$-\mathbf{R}\left\{\left[g\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right) - g\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right) - g(x_2) + g(x_1)\right]\xi\bar{\eta}\right\} \geqslant 0.$$

Отсюда

$$\left|g(x_2) - g(x_1) + g\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right) - g\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)\right|^2 \leqslant 4|\mathbf{R}g(x_2 - x_1)| \cdot \left|\mathbf{R}g\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)\right|,$$

и значит, второе утверждение также доказано.

Нам придется применять теорему 4 для доказательства компактности некоторого семейства функций, принадлежащих классу G_∞. Поэтому целесообразно сформулировать следующий, удобный для этого приложения вариант теоремы 4.

Теорема 4-bis. Если $g(x)\in G_\infty$ и

$$M_\delta=\sup_{0\leqslant x\leqslant\delta}|g(x)|,$$

где δ — произвольно взятое положительное число, то

1) для любого $x\in(-\infty,\ \infty)$

$$|g(x)|\leqslant M_\delta\left(1+\frac{8|x|^3}{\delta^3}\right),$$

2) для любых $x\pm h\in[0,\ \infty)$

$$|g(x+h)-g(x-h)|\leqslant 2|\mathrm{I}g(h)|+2\sqrt{M_\delta\left(1+\frac{8|x|^3}{\delta^3}\right)|\mathrm{R}g(2h)|}\,.$$

Теорема 5. Если $f(x)\in P_a$, то $f(x)-1\in G_a$.

Доказательство следует из тождества

$$\sum_{j,\,k=1}^{n} f(z_j-z_k)\zeta_j\overline{\zeta}_k=$$

$$=\sum_{p,\,q=1}^{n} f(z_{2p}-z_{2q-1})\zeta_{2p}\overline{\zeta}_{2q-1}+\sum_{p,\,q=1}^{n} f(z_{2p}-z_{2q})\zeta_{2p}\overline{\zeta}_{2q}+$$

$$+\sum_{p,\,q=1}^{n} f(z_{2p-1}-z_{2q-1})\zeta_{2p-1}\overline{\zeta}_{2q-1}+\sum_{p,\,q=1}^{n} f(z_{2p-1}-z_{2q})\zeta_{2p-1}\overline{\zeta}_{2q}.$$

Действительно, полагая $z_{2p}=0$, $z_{2p-1}=x_p$, $\zeta_{2p-1}=\xi_p$, $\zeta_{2p}=-\xi_p$ $(p=1,\ 2,\dots,\ n)$, получим

$$0\leqslant\sum_{j,\,k=1}^{2n} f(z_j-z_k)\zeta_j\overline{\zeta}_k=\sum_{p,\,q=1}^{n}\{f(x_p-x_q)-f(x_p)-f(-x_q)+f(0)\}\xi_p\overline{\xi}_q=$$

$$=\sum_{p,\,q=1}^{n}\{g(x_p-x_q)-g(x_p)-g(-x_q)\}\xi_p\overline{\xi}_q,$$

где

$$g(x)=f(x)-1=f(x)-f(0).$$

А так как $g(x)$ — эрмитова функция и $g(0)=0$, то теорема доказана.

Теорема 6. Если $g(x)\in G_a$, то

$$F(x)=e^{g(x)}\qquad(-a<x<a)\tag{9}$$

есть эрмитово-положительная функция в интервале $(-a,\ a)$.

Доказательство. Воспользуемся одной леммой И. Шура [1], которая утверждает, что из позитивности форм

$$\sum_{j,\,k=1}^{n} a_{jk}\xi_j\overline{\xi}_k,\quad \sum_{j,\,k=1}^{n} b_{jk}\xi_j\overline{\xi}_k$$

---

[1] [7] стр. 113 и 310.

следует позитивность формы

$$\sum_{j,\,k=1}^{n} a_{jk}\, b_{jk}\, \xi_j\, \overline{\xi}_k.$$

В силу этой теоремы произведение двух эрмитово-положительных в квадрате $0 \leqslant x < a$, $0 \leqslant y < a$ ядер есть снова эрмитово-положительное ядро. Следовательно, из того, что ядро $G(x, y)$ эрмитово-положительно, вытекает, что и ядро[1] $\exp G(x, y)$, является также эрмитово-положительным. На основании сказанного и того, что $g(x) \in G_a$, следует эрмитово-положительность ядра

$$\exp\{g(x-y) - g(x) - g(-y)\}$$

в квадрате $0 \leqslant x < a$, $0 \leqslant y < a$, то есть при любом натуральном n, любых $x_j (j = 1, 2, \ldots, n)$ из интервала $[0, a)$ и любых комплексных $\zeta_j (j = 1, 2, \ldots, n)$ имеет место неравенство

$$\sum_{j,\,k=1}^{n} \exp\{g(x_j - x_k) - g(x_j) - g(-x_k)\}\, \zeta_j \overline{\zeta}_k \geqslant 0.$$

Это неравенство можно переписать в виде

$$\sum_{j,\,k=1}^{n} e^{g(x_j - x_k)}\, \xi_j \overline{\xi}_k \geqslant 0, \tag{10}$$

где

$$\xi_j = \zeta_j e^{-g(x_j)} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Учитывая определение (9) функции $F(x)$, находим в силу (10), что $F(x)$ — эрмитово-положительна в интервале $(-a, a)$.

Так как вместе с функцией $g(x)$ классу G_a принадлежит и функция $\nu g(x)$, какова бы ни была положительная постоянная ν, то теорему 6 можно сформулировать следующим образом.

Теорема 6-bis. Если $g(x) \in G_a$, то

$$F(x) = e^{g(x)} \qquad (-a < x < a)$$

есть функция класса P_a^*.

§ 3. В этом параграфе мы покажем, что теорема 6-bis допускает обращение, и одновременно докажем основную для классов G_a, P_a^* теорему продолжения.

Теорема 7. Для всякой функции $F(x) \in P_a^*$ найдется такая функция $g(x) \in G_\infty$, что

$$F(x) = e^{g(x)} \qquad (-a < x < a).$$

Доказательство. В силу определения класса P_a^* при любом натуральном n найдется такая функция $f_n(x) \in P_a$, что

$$F(x) = [f_n(x)]^n \qquad (-a < x < a).$$

На основании теоремы продолжения для класса P_a найдется такая функция $\tilde{f}_n(x) \in P_\infty$, что

$$f_n(x) = \tilde{f}_n(x) \qquad (-a < x < a).$$

---

[1] Это рассуждение, использующее лемму Шура в родственном вопросе, применил впервые Шенберг [8].

По функциям $\tilde{f}_n(x)$ построим функции

$$g_n(x) = n[\tilde{f}_n(x) - 1] \qquad (-\infty < x < \infty).$$

На основании теоремы 5 $g_n(x) \in G_\infty$ $\quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Возьмем какое-нибудь положительное число $\delta < \frac{a}{2}$, столь малое, чтобы при $-\delta \leqslant x \leqslant \delta$ величина $F(x)$ была достаточно близкой к единице. Полагая

$$\Phi(x) = \mathbf{I} F(x),$$

будем иметь при $-\delta \leqslant x \leqslant \delta$ следующие соотношения:

$$\mathbf{R}[g_n(x)] = \mathbf{R} n\{[F(x)]^{\frac{1}{n}} - 1\} = n\left\{ |F(x)|^{\frac{1}{n}} \cos\frac{\Phi(x)}{n} - 1 \right\}$$

$$\mathbf{I}[g_n(x)] = n\,|F(x)|^{\frac{1}{n}} \sin\frac{\Phi(x)}{n}.$$

Отсюда

$$|\mathbf{R}[g_n(x)]| \leqslant \ln\frac{1}{|F(x)|} + \frac{1}{2n}\Phi^2(x)$$

$$|\mathbf{I}[g_n(x)]| \leqslant |\Phi(x)|.$$

Из этих оценок мы заключаем, что

$$M_\delta^{(n)} = \max_{0 \leqslant x \leqslant \delta} |g_n(x)| \leqslant \omega(\delta),$$

а также, что при $-h \leqslant \varepsilon \leqslant h$ $\quad (h \leqslant \delta)$

$$|\mathbf{R}[g_n(\varepsilon)]| + |\mathbf{I}[g_n(\varepsilon)]| \leqslant \omega(h),$$

где величина

$$\omega(\xi) = \sup_{|x| \leqslant \xi}\left\{ \ln\frac{1}{|F(x)|} + |\Phi(x)| + \frac{1}{2}\Phi^2(x) \right\}$$

от n не зависит и стремится к нулю вместе с ξ.

Вспоминая теорему 4-bis мы заключаем на основании полученных оценок, что последовательность функций $g_n(x)$ $(-\infty < x < \infty;$ $n = 1, 2, 3, \ldots)$ в каждом конечном интервале равномерно ограничена и равностепенно непрерывна. Поэтому существует такая последовательность $g_{n_k}(x)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ и такая непрерывная функция $g(x)$ $(-\infty < x < \infty)$, для которых равномерно в каждом конечном интервале

$$\lim_{k\to\infty} g_{n_k}(x) = g(x).$$

Эта предельная функция $g(x)$, очевидно, принадлежит классу G_∞, а с другой стороны в интервале $(-a, a)$

$$g(x) = \lim_{k\to\infty} n_k\{[F(x)]^{\frac{1}{n_k}} - 1\} = \ln F(x),$$

и теорема доказана.

Сформулируем теперь два непосредственных следствия теорем 6-bis и 7:

1. Всякая функция $F(x) \in P_a^*$ $(a < \infty)$ может быть продолжена до функции класса P_∞^*.

2. Всякая функция $g(x) \in G_a$ $(a < \infty)$ может быть продолжена до функции класса G_∞.

§ 4. Теперь мы займемся интегральными представлениями. Благодаря уже доказанным фактам и, в частности, теоремам о расширении достаточно доказать только одно следующее предложение.

Теорема 8. Всякая функция $g(x) \in G_\infty$ допускает представление

$$g(x) = i\gamma x + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{i\lambda x} - 1 - \frac{i\lambda x}{1+\lambda^2} \right) \frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda^2} \quad (-\infty < x < \infty), \tag{3}$$

где γ — вещественная постоянная, а $\sigma(\lambda)$ — неубывающая функция, для которой

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(\lambda)}{1+\lambda^2} < \infty. \tag{3-bis}$$

При этом константа γ определяется функцией $g(x)$ однозначно, а функция $\sigma(\lambda)$ — в существенном однозначно.

Наоборот, всякая функция $g(x)$, допускающая представление (3), (3-bis), принадлежит классу G_∞

Доказательство. Пусть $g(x)$ — функция класса G_∞. В таком случае, по доказанному в § 2, на всей оси $-\infty < x < \infty$ справедливо неравенство

$$|g(x)| \leqslant A + B|x|^3.$$

Поэтому в полуплоскости $\eta = I\zeta > 0$ имеет смысл и представляет аналитическую функцию преобразование Лапласа

$$H(\zeta) = \zeta^2 \int_0^{\infty} g(x) e^{ix\zeta}\, dx. \tag{11}$$

Составим выражение

$$\frac{H(\zeta) + \overline{H(\zeta)}}{2\eta}.$$

Так как

$$\frac{1}{2\eta} = \int_0^{\infty} e^{i\zeta t} e^{-i\bar\zeta t}\, dt =$$

$$= \frac{1}{i\zeta} + \frac{\zeta}{\bar\zeta} \int_0^{\infty} e^{i\zeta t} e^{-i\zeta t}\, dt = -\frac{1}{i\bar\zeta} + \frac{\bar\zeta}{\zeta} \int_0^{\infty} e^{i\bar\zeta t} e^{-i\bar\zeta t}\, dt,$$

то

$$\frac{H(\zeta) + \overline{H(\zeta)}}{2\eta} = \zeta^2 \int_0^{\infty} g(x) e^{ix\zeta}\, dx \left\{ -\frac{1}{i\zeta} + \frac{\bar\zeta}{\zeta} \int_0^{\infty} e^{i\zeta t} e^{-i\bar\zeta t}\, dt \right\} +$$

$$+ \bar\zeta^2 \int_0^{\infty} \overline{g(x)} e^{-ix\bar\zeta}\, dx \left\{ \frac{1}{i\bar\zeta} + \frac{\zeta}{\bar\zeta} \int_0^{\infty} e^{i\zeta t} e^{-i\bar\zeta t}\, dt \right\} =$$

$$= \zeta\bar\zeta \left\{ \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} g(x) e^{i(x+t)\zeta} e^{-i\bar\zeta t}\, dx\, dt + \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \overline{g(x)} e^{-i(x+t)\bar\zeta} e^{i\zeta t}\, dx\, dt \right\} -$$

$$-\frac{\zeta}{i}\int_0^\infty g(x)\, e^{ix\zeta}\, dx + \frac{\bar\zeta}{i}\int_0^\infty \overline{g(x)}\, e^{-ix\bar\zeta}\, dx =$$

$$=\zeta\bar\zeta\left\{\int_0^\infty d\beta\int_\beta^\infty g(\alpha-\beta)\, e^{i\alpha\zeta}\, e^{-i\beta\bar\zeta} d\alpha + \int_0^\infty d\alpha\int_\alpha^\infty g(\alpha-\beta)\, e^{i\alpha\zeta}\, e^{-i\beta\bar\zeta}\, d\beta\right\} -$$

$$-\zeta\bar\zeta\left\{\int_0^\infty\int_0^\infty g(\alpha)\, e^{i\alpha\zeta}\, e^{-i\beta\bar\zeta}\, d\alpha d\beta + \int_0^\infty\int_0^\infty g(-\beta)\, e^{i\alpha\zeta}\, e^{-i\beta\bar\zeta}\, d\alpha\, d\beta\right\} =$$

$$=\zeta\bar\zeta\int_0^\infty\int_0^\infty \{g(\alpha-\beta)-g(\alpha)-g(-\beta)\}\, e^{i\alpha\zeta}\, e^{-i\beta\bar\zeta}\, d\alpha\, d\beta.$$

Полагая,

$$g(x-y)-g(x)-g(-y)=K(x,\ y),$$

таким образом находим

$$\frac{H(\zeta)+\overline{H(\zeta)}}{2\eta}=\zeta\bar\zeta\int_0^\infty\int_0^\infty K(\alpha,\ \beta)\, e^{i\alpha\zeta}\, e^{-i\beta\bar\zeta} d\alpha\, d\beta.$$

Далее без труда устанавливаем [1], что

$$\int_0^\infty\int_0^\infty K(\alpha,\ \beta)\, e^{i\alpha\zeta}\, e^{-i\beta\bar\zeta}\, d\alpha\, d\beta. \geqslant 0 \tag{12}$$

Из неравенства (12) следует, что

$$\mathrm{R}H(\zeta)\geqslant 0 \qquad (\mathrm{I}\zeta>0).$$

На основании общей теоремы [2] об аналитических функциях с положительной вещественной частью в верхней полуплоскости получаем представление

$$H(\zeta)=-i\gamma-i\beta\zeta-\frac{1}{i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\lambda\zeta}{\lambda+\zeta}\,\frac{d\sigma(\lambda)}{1+\lambda^2},$$

где β — положительная, а γ — вещественная постоянная и $\sigma(\lambda)$ — неубывающая функция, для которой

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\sigma(\lambda)}{1+\lambda^2}<\infty.$$

При нормировке $\sigma(-\infty)=0$ функция $\sigma(\lambda)$ определяется по функции $H(\zeta)$ однозначно во всех своих точках непрерывности. Константы β, γ также определяются однозначно по функции $H(\zeta)$.

---

[1] При этом здесь не полностью используется тот факт, что ядро $K(x,\ y)$ эрмитово-положительно; нужна лишь справедливость специального вида неравенств

$$\frac{N^2}{n^2}\sum_{p,\ q=1}^{n} K\left(\frac{pN}{n},\ \frac{qN}{n}\right) e^{i\zeta\frac{pN}{n}}\, e^{-i\bar\zeta\frac{qN}{n}}\geqslant 0,$$

где n — любое натуральное число, ζ — любое комплексное число с положительной мнимой частью, а N — любое положительное число.

[2] См., например [2].

Заметим теперь, что

$$i\,\frac{\lambda^2(1-\lambda\zeta)}{(\lambda+\zeta)(1+\lambda^2)}=\zeta^2\int_0^\infty\left(e^{i\lambda t}-1-\frac{i\lambda t}{1+\lambda^2}\right)e^{it\zeta}\,dt.$$

Поэтому

$$H(\zeta)=-i\gamma-i\beta\zeta+\zeta^2\int_0^\infty e^{it\zeta}\,dt\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{i\lambda t}-1-\frac{i\lambda t}{1+\lambda^2}\right)\frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda^2},$$

и сравнение с (11) дает

$$\zeta^2\int_0^\infty g(t)\,e^{it\zeta}\,dt=$$

$$=-i\gamma-i\beta\zeta+\zeta^2\int_0^\infty e^{it\zeta}\,dt\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{i\lambda t}-1-\frac{i\lambda t}{1+\lambda^2}\right)\frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda^2}. \qquad (13)$$

Так как

$$1=-i\zeta\int_0^\infty e^{it\zeta}\,dt=-\zeta^2\int_0^\infty te^{it\zeta}\,dt,$$

то равенство (13) можно представить в виде

$$\int_0^\infty g(t)\,e^{it\zeta}\,dt=\int_0^\infty e^{it\zeta}\,dt\left\{i\gamma t-\beta+\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{i\lambda t}-1-\frac{i\lambda t}{1+\lambda^2}\right)\frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda^2}\right\}.$$

Из этого равенства, в силу произвольности точки ζ в верхней полуплоскости, следует, что

$$g(t)=i\gamma t-\beta+\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{i\lambda t}-1-\frac{i\lambda t}{1+\lambda^2}\right)\frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda^2}.$$

Так как $g(0)=0$, то $\beta=0$, и первая часть теоремы 8 доказана.

Вторая часть доказывается непосредственно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. И. Ахиезер. Об одной теореме С. Бохнера. Сообщ. Харьк. Мат. Об-ва, XIV, 75—79 (1937).

2. Н. И. Ахиезер и И. М. Глазман. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, М. — Л., 1950, стр. 206—217.

3. S. Bochner. Vorlesungen über Fouriersche Integrale, Leipzig, 1932, pp. 74—77.

4. М. Г. Крейн. О проблеме продолжения эрмитово положительных непрерывных функций. ДАН СССР, XXVI, 1, 17—21 (1944).

5. М. Г. Крейн. О логарифме безгранично разложимых эрмитово-положительных функций, ДАН СССР, т. **XV**, 3, 99—102 (1940).

6. P. Levy. Sur les intégrales dont les éléments sont des variables aléatoires independentes. Ann. d. R. Scuola Norm. di Pisa, **11**, 3, 337—366 (1934).

7. Полиа-Сеге. Задачи и упражнения из анализа. II, М — Л., 1938.

8. I. Schoenberg. Metric spaces and positive definite functions. Trans of the Amer. Math. Soc. **44**, 3, 522—536 (1938).

9. Н. Ахиезер и М. Крейн. О некоторых вопросах теории моментов. ГОНТИ—ДНТВУ, Харьков, 1938.