Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

Г. Ч. Курінний

КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА

Навчально-методичний посібник з алгебри
для студентів 1-го курсу механіко-математичного факультету

Харків – 2015

Зміст

1 Алгебраїчна форма комплексного числа

1.1 Означення комплексних чисел

Числа, які використовують для вимірювання довжин, ваги, температури та подібного, і які вивчалися в школі, це дійсні числа. Їх властивості добре відомі із школи. Нагадаємо, що множина дійсних чисел з операціями додавання та множення є полем. Тобто існує нульове число та одиниця; у кожного дійсного числа є протилежне, а ненульове число має обернене; додавання та множення асоціативні; між собою операції додавання та множення зв'язані дистрибутивними законами. Поле дійсних чисел позначається через $\mathbb{R}$.

Поле комплексних чисел $\mathbb{C}$ є розширенням поля дійсних чисел $\mathbb{R}$. Так само, як поле дійсних чисел є розширенням поля раціональних чисел $\mathbb{Q}$, а поле раціональних чисел є розширенням поля цілих чисел $\mathbb{Z}$.

$$\mathbb{C} \supset \mathbb{R} \supset \mathbb{Q} \supset \mathbb{Z}$$

Исторично комплексні числа виникли в математиці на початку XVI століття у зв'язку з рішенням алгебраїчних рівнянь 3-го ступеня, а пізніше, і рівнянь 2-го ступеня з від'ємним дискримінантом. Наприклад, потрібно знайти розв'язки рівняння

$$x^2 + 2x + 5 = 0.$$

Обчислюємо дискримінант: $D = 4 - 20 = -16 < 0$. Якщо ми позначимо через i число, квадрат якого дорявнює -1, то $\sqrt{-1} = \pm i$, тоді $\sqrt{-16} = \sqrt{-1 \cdot 16} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{16} = \pm i \cdot 4$. Отже, за відомою формулою отримуємо

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm i \cdot 4}{2} = -1 \pm i \cdot 2 = -1 \pm 2i.$$

Визначення 1.1 *Число, яке має вигляд $a + bi$, де $a, b \in \mathbb{R}$, $i^2 = -1$ називається комплексним числом. Символ i називається уявною одиницею. Число a назвається дійсною частиною комплексного числа $a + bi$ та позначається через $\mathrm{Re}\,(a + bi)$, число bi називається уявною частиною комплексного числа $a + bi$, а число b називається коефіцієнтом уявної частини і позначається через $\mathrm{Im}\,(a + bi)$.*

Отже

$$\mathrm{Re}\,(a + bi) = a, \qquad \mathrm{Im}\,(a + bi) = b.$$

Вирази $2 - 3i, \quad 0 + 0i, \quad -e - \pi i, \quad 1 + 1i$ є комплексними числами. В інженерних науках, де символ i використовується для позначення сили струму, замість i використовують символ j.

За домовленістю, замість $0+bi$ пишемо bi і кажемо, що це число уявне; замість $a+0i$ пишемо a, і кажемо, що це комплексне число є дійсним; замість $a+1i$ пишемо $a+i$. Отже замість $2+0i$ пишемо 2, замість $0-3i$ пишемо $-3i$. Подібним чином, замість $2+1i$ пишемо $2+i$, замість $0+1i$ пишемо i.

Дійсною частиною числа $2 + 3i$ є 2, а коефіцієнтом уявної частини є 3. Отже, $\mathrm{Re}\,(2 + 3i) = 2, \quad \mathrm{Im}\,(2 + 3i) = 3$.

Також для позначення дійсної частини і коефіцієнта уявної частини використовують відповідно $\Re$ (готична буква R) і $\Im$ (готична буква I).

В мовах програмування комплексні числа $z = a + bi$ можуть бути задані як впорядкована пара $z = (a, b)$ дійсних чисел. І тоді a є дійсною частиною комплексного числа z, а b — уявною частиною цього числа.

Два комплексні числа рівні тоді і тільки тоді, коли в них однакові і дійсні і уявні частини:

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c \ \text{ і } \ b = d.$$

Зазвичай комплексні числа позначаються літерою z. Форма $z = a+bi$ називається алгебраїчною формою комплексного числа z.

1.2 Дії з комплексними числами в алгебраїчній формі

Операції додавання та множення з комплексними числами в алгебраїчній формі здійснюються так само, як і з дійсними числами. При множенні використовується рівність $i^2 = -1$.

Додавання комплексних чисел здійснюється за правилом

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i.$$

Приклад: $(5 + 2i) + (2 - i) = 7 + i$.

Комплексні числа можна віднімати: якщо $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$, то

$$z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i.$$

Знайдемо добуток двох комплексних чисел $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$:

$$z_1 z_2 = (a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = ac - bd + (ad + bc)i$$

Останню формулу можна прийняти за означення операції множення комплексних чисел, тобто:

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Приклади: $(-4 + 7i) \cdot (2 + 5i) = (-8 - 35) + (-20 + 14)i = -43 - 6i$, $(5 + 6i) \cdot i = -6 + 5i$.

Якщо число $z = a + bi$ ненульове, то на нього можна ділити:

$$\frac{c + di}{a + bi} = \frac{(c + di)(a - bi)}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{(ac + bd) + (ad - bc)i}{a^2 + b^2} = \frac{ac + bd}{a^2 + b^2} + \frac{ad - bc}{a^2 + b^2} i.$$

Згідно з введеним правилом ділення:

$$\frac{7 - 9i}{-3 + i} = \frac{(7 - 9i)(-3 - i)}{(-3 + i)(-3 - i)} = \frac{-30 + 20i}{10} = -3 + 2i.$$

1.3 Поле комплексних чисел

Комплексні числа разом з операціями додавання та множення утворюють поле, тобто операції додавання та множення задовольняють відповідним аксіомам.

- Обидві операції асоціативні:

$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3 \text{ (асоціативність додавання);}$$

$$z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3 \qquad \text{(асоціативність множення);}$$

- Обидві комутативні:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \qquad \text{(комутативність додавання);}$$

$$z_1 z_2 = z_2 z_1 \qquad \text{(комутативність множення).}$$

- Існує нуль (нейтральний елемент щодо операції додавання):

$$0 = 0 + 0i, \quad 0 + z = z + 0 = z \ \forall z \in \mathbb{C}.$$

- Існує одиниця (нейтральний елемент щодо операції множення):

$$1 = 1 + 0i, \quad 1 \cdot z = z \cdot 1 = z \ \forall z \in \mathbb{C}.$$

- Для кожного елемента $z = a + bi$ існує протилежний

$$-z = -a - bi, \quad z + (-z) = (-z) + z = 0.$$

- Для ненульового елемента $z = a + bi \neq 0$ існує обернений

$$z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{bi}{a^2 + b^2}, \quad zz^{-1} = z^{-1}z = 1.$$

- Між собою додавання та множення зв'язані дистрибутивним законом

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3.$$

При доведенні використовуються відповідні властивості дійсних чисел — вони вважаються відомими.

Приклад доведення дистрибутивного закону. Нехай $z_1 = a_1 + b_1 i, \quad z_2 = a_2 + b_2 i, \quad z_3 = a_3 + b_3 i$. Тоді за визначенням додавання та множення комплексних чисел маємо

$$z_2 + z_3 = (a_2 + a_3) + (b_2 + b_3)i, z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i, z_1 z_3 = (a_1 a_3 - b_1 b_3) + (a_1 b_3 + a_3 b_1)i.$$

Знову, використовуючи означення множення та додавання комплексних чисел, маємо

$$\begin{aligned} z_1(z_2 + z_3) &= (a_1 + b_1 i) \cdot ((a_2 + a_3) + (b_2 + b_3)i) = \\ &= ((a_1(a_2 + a_3) - b_1 \cdot (b_2 + b_3)) + (a_1 \cdot (b_2 + b_3) + b_1 \cdot (a_2 + a_3))i; \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} z_1 z_2 + z_1 z_3 &= ((a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i) + ((a_1 a_3 - b_1 b_3) + (a_1 b_3 + a_3 b_1)i) = \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2 + a_1 a_3 - b_1 b_3) + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_1 b_3 + a_3 b_1)i. \end{aligned} \tag{2}$$

Далі потрібно порівняти праві частини рівностей (1) та (2). При доведенні того, що вони збігаються, ми розкриваємо дужки, тобто використовуємо властивості дійсних чисел. Доведення дистрибутивності закінчене.

Нагадаємо, що *полем* називається непорожня множина з двома операціями — додавання та множення, які мають наступні властивості (задовольняють наступні аксіоми):

- множина утворюює комутативну групу відносно операції додавання (отже в ній є нуль);
- ненульові елементи множини також утворюють комутативну групу відносно операції множення (отже серед ненульових елементів є 1);
- між собою додавання та множення зв'язані дистрибутивним законом.

Піднесення уявної одиниці до натурального степеня n (у відповідності до визначення) здійснюється за правилами:

$$i^n = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad n = 4k, \\ -1, & \text{якщо} \quad n = 4k + 2, \\ i, & \text{якщо} \quad n = 4k + 1, \\ -i, & \text{якщо} \quad n = 4k + 3. \end{cases}$$

Доведення можна провести методом індукції.

1.4 Операція спряження

Для комплексних чисел визначена операція спряження, тобто комплексному числу ставиться у відповідність спряжене (або комплексно-спряжене) число.

Визначення 1.2 *Спряженим до числа $z = a + bi$ називается число $\overline{z} = a - bi$.*

Спряження має властивості:

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}, \tag{3}$$

$$\overline{z^n} = \overline{z}^n, \tag{4}$$

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}, \tag{5}$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \tag{6}$$

$$\overline{(-z)} = -\overline{z}. \tag{7}$$

А також, якщо $z = a + bi$, і $a^2 + b^2 = 1$, то

$$z^{-1} = \overline{z}. \tag{8}$$

Вправа. Довести вказані властивості.
Вказівка. Доведення здійснюється обчисленням правої та лівої частин відповідної рівності.

2 Приклади інших означень поля комплексних чисел

Поле комплексних чисел єдине. Коли це стверджують, то мають на увазі, що всі поля комплексних чисел ізоморфні між собою. Нагадаємо, що під ізоморфністю двох полів мається на увазі існування взаємно однозначної відповідності, яка узгоджена з операціями. Наведемо ще чотири визначення поля комплексних чисел.

2.1 Приєднання іншої уявної одиниці

Як вправи можна порекомендувати перевірити, що поле $\mathbb{C}$, одержане з поля дійсних чисел шляхом приєднання умовної одниці j, яка за визначенням задовольняє умову $j^2 = -j - 1$, ізоморфне побудованому вище.

2.2 Поле комплексних чисел як множина впорядкованих пар дійсних чисел

За другим визначенням комплексні числа — це впорядковані пари (a, b) дійсних чисел a, b. Ці пари додаються та множаться за правилами

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2), \qquad (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1).$$

2.3 Поле комплексних чисел як факторкільце кільця многочленів

За третім визначенням поле комплексних чисел визначається як "факторкільце кільця многочленів за головним ідеалом, що породжений многочленом x^2+1". Наведемо це визначення.

Береться кільце усіх многочленів з дійсними коефіцієнтами. Воно розбивається на підмножини – класи. Два многочлени f, g належать одному класу в тому і тільки тому випадку, коли для деякого мночлена q можна записати $f - g = (x^2 + 1) \cdot q$ тобто різниця многочленів f та g ділиться на многочлен $x^2 + 1$. Так побудовані класи і є комплексні числа.

Класи множаться і додаються наступним чином. Нехай є два класи z_1 та z_2. Виберемо в цих класах по одному многочлену $f \in z_1, \quad g \in z_2$. Додавши ці два многочлени один до одного і перемноживши їх ми одержимо ще два многочлени $p = f + g, \quad q = f \cdot g$. Далі шукаємо класи, яким належать побудовані многочлени p, q – нехай $p \in z_3, \quad q \in z_4$. Тепер, за визначенням, буде

$$z_1 z_2 = z_4, \quad z_1 + z_2 = z_3.$$

Доведення коректності третього визначення і доведення ізоморфності поля, побудованого за третім визначення, полю, що побудоване за першим визначенням, виходить за межі плану лекції.

2.4 Поле комплексних чисел як множина матриць

За четвертим визначенням комплексними числами називають матриці вигляду

$$z = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},$$

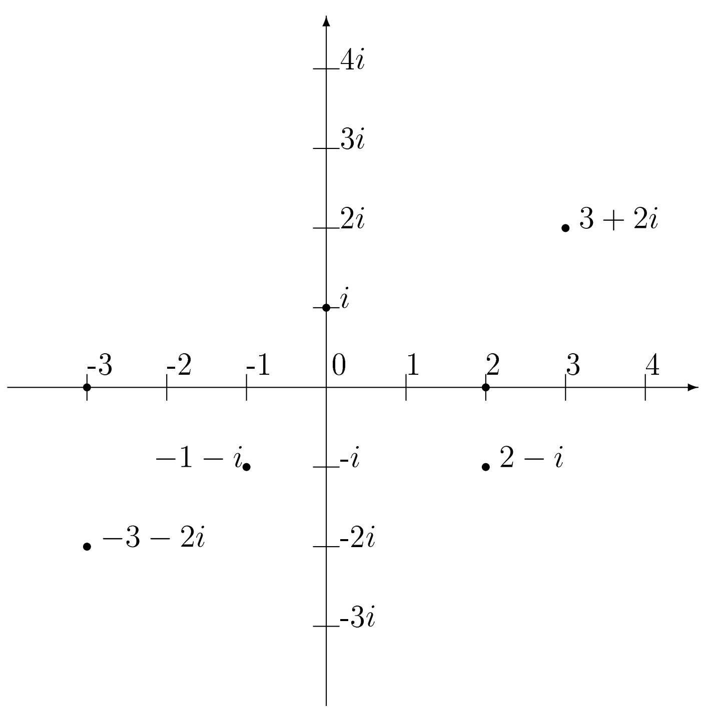
які множаться і додаютья звичайним для матриць чином.

3 Комплексна площина

3.1 Геометрична інтерпретація комплексних чисел та тригонометрична форма комплексного числа.

Комплексне число $a + bi$ зображають точкою (a, b) площини з прямокутною системою координат.

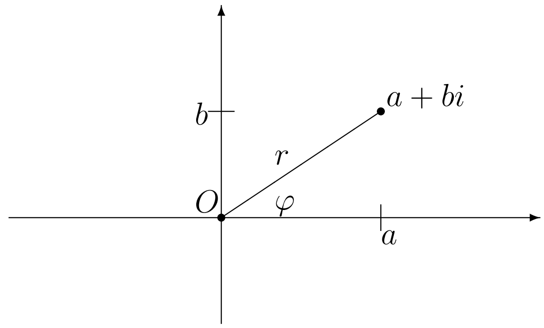
Площина, на якій зображаються комплексні числа, називається *комплексною площиною.*



На комплексній площині зображені точки $3 + 2i$, $-1 - i$, $-3 - 2i$, $2 - i$, i, 2, -3.

Відстань $\sqrt{a^2 + b^2}$ від точки $z = a + bi$ комплексної площини до початку координат називають *модулем* комплексного числа z и позначають $r = |z|$. Таким чином,

$$r = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$



Аргумент φ ненульового комплексного числа $z = a + bi$ — дійсне число, що визначається умовами (див. рис.):

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad \mathrm{tg}\varphi = \frac{b}{a}. \tag{9}$$

Вважається

$$0 \le \varphi < 2\pi. \tag{10}$$

Умова (10), як кажуть, “не є догмою“, досить зручно аргумент шукати при обмеженнях

$$-\pi < \varphi \le \pi. \tag{11}$$

Аргумент комплексного числа z позначається $\arg z$.

Для заданого комплексного числа z множину тих φ, що задовольняють умову (9), позначають через $\mathrm{Arg}\ z$.

При використанні формул (9) потрібно пам’ятати домовленість про області значень обернених тригонометричних формул:

$$0 \le \arccos x \le \pi, \quad -\frac{\pi}{2} \le \arcsin x \le \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} < \mathrm{arctg}\, x < \frac{\pi}{2}$$

При обмеженнях (10) для знаходження аргумента φ комплексного числа $z = a + bi$ можна використовувати формули

- $\varphi = 0$, якщо $a > 0, b = 0$;
- $\varphi = \arccos\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \arcsin\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \mathrm{arctg}\dfrac{b}{a}$, якщо $a > 0, b > 0$;
- $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, якщо $a = 0, b > 0$;
- $\varphi = \arccos\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \pi - \arcsin\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \mathrm{arctg}\dfrac{b}{a} + \pi$, якщо $a < 0, b > 0$;
- $\varphi = 2\pi - \arccos\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \pi - \arcsin\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \mathrm{arctg}\dfrac{b}{a} + \pi$, якщо $a < 0, b < 0$;
- $\varphi = \pi$, якщо $a < 0, b = 0$;
- $\varphi = \dfrac{3\pi}{2}$, якщо $a = 0, b < 0$;
- $\varphi = 2\pi - \arccos\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = 2\pi + \arcsin\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = 2\pi + \mathrm{arctg}\dfrac{b}{a}$, якщо $a > 0, b < 0$.

При обмеженнях (11) для знаходження аргумента φ комплексного числа $z = a + bi$ можна використовувати формули

- $\varphi = 0$, якщо $a > 0, b = 0$;
- $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, якщо $a = 0, b > 0$;
- $\varphi = \pi$, якщо $a < 0, b = 0$;
- $\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$, якщо $a = 0, b < 0$;
- $\varphi = \arccos \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \arcsin \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \mathrm{arctg}\dfrac{b}{a}$, якщо $a > 0, b > 0$;
- $\varphi = \arccos \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, якщо $a < 0, b > 0$;
- $\varphi = \mathrm{arctg}\dfrac{b}{a} + \pi$, якщо $a < 0, b < 0$;
- $\varphi = \arcsin \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \mathrm{arctg}\dfrac{b}{a}$, якщо $a > 0, b < 0$.

Розглянемо приклади — знайдемо аргументи φ кількох комплексних чисел.

Приклад 1. Нехай $z = 2 + 2i$. Тоді $|z| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$,

$$\cos\varphi = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \mathrm{tg}\,\varphi = 1.$$

Із цих рівностей із врахуванням обмеження (10) ми знаходимо

$$\varphi = \arccos\frac{1}{\sqrt{2}} = \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} = \mathrm{arctg}\,1 = \frac{\pi}{4}.$$

Приклад 2. Нехай $z = 2$. Тоді $|z| = \sqrt{4} = 2$,

$$\cos\varphi = \frac{2}{2} = 1,\ \sin\varphi = \frac{0}{2} = 0,\ \mathrm{tg}\,\varphi = 0.$$

Тут $\varphi = \arccos 1 = \arcsin 0 = \mathrm{arctg}\,0 = 0$.

Приклад 3. Нехай $z = 2i$. Тоді $|z| = \sqrt{4} = 2$,

$$\cos\varphi = \frac{0}{2} = 0,\ \sin\varphi = \frac{2}{2} = 1,\ \mathrm{tg}\,\varphi - \text{ не існує.}$$

Тут $\varphi = \arccos 0 = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$.

Приклад 4. Нехай $z = 1 - \sqrt{3}i$, відповідна точка знаходиться у четвертому квадранті. Тоді $|z| = 2$,

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}, \sin\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \mathrm{tg}\,\varphi = -\sqrt{3}.$$

Із цих рівностей із врахуванням обмеження (10) ми знаходимо $\varphi = \dfrac{5\pi}{3}$, а з урахуванням обмежень (11) $\varphi = -\dfrac{\pi}{3}$,

Ще кілька прикладів

$|-3-5i| = \sqrt{34},\ \arg(-3-5i) = \mathrm{arctg}\,\dfrac{5}{3} + \pi$;

$|-3+5i| = \sqrt{34},\ \arg(-3+5i) = \arccos(-\dfrac{3}{\sqrt{34}})$;

$|-5i| = 5,\ \arg(-5i) = -\dfrac{\pi}{2}$.

Кожне комплексне число z може бути записане у вигляді

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{12}$$

для деяких дійсних $r \geq 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$. Для ненульових чисел такий запис єдиний. А для нульового числа цей запис не використовують.

Запис комплексного числа z у вигляді (12) називається *тригонометричною формою комплексного числа z.*

3.2 Дії з комплексними числами в тригонометричній формі

Якщо

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2), \quad z_1, z_2 \neq 0,$$

два комплексні числа в тригонометричній формі, то

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)); \tag{13}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)). \tag{14}$$

Тобто, щоб перемножити два комплексні числа у тригонометричній формі, потрібно модулі цих чисел перемножити, а аргументи додати. При діленні комплексних чисел у тригонометричній формі модулі діляться а аргументи віднімаються.

Доведення. Нехай є комплексні числа $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, $\quad z_1, z_2 \neq 0$. Тоді за правилом множення комплексних чисел маємо

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2).$$

Оскільки за відомими із школи тригонометричними формулами

$$\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 = \cos(\varphi_1 + \varphi_2); \quad \cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2) = \sin(\varphi_1 + \varphi_2),$$

то формула множення комплексних чисел в тригонометричній формі доведена.

Для доведення формули (14) беремо ті ж числа z_1, z_2, що і при доведенні формули (13), використовуємо формулу $z\bar{z} = |z|^2$, формулу (13) і пишемо

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2} = \frac{1}{r_2^2} r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot r_2(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_1) =$$

$$= \frac{1}{r_2^2} r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot r_2(\cos(-\varphi_2) + i\sin(-\varphi_2)) = \frac{r_1}{r_2}\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2).$$

■

Комплексні числа можно підносити до натурального степеня за допомогою *формули Муавра*

$$z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)), n \in \mathbb{N}. \tag{15}$$

Доведення. При $n = 0$ формула Муавра правильна тому, що $z^0 = 1$ за визначенням для всіх ненульових чисел z.

Для цілих додатніх чисел n формула Муавра доводиться методом повної математичної індукції.

База індукції (перший крок індуктивного доведення) — перевіряємо те, що формула є вірною у випадку, коли степінь дорівнює $n = 1$, — підставляємо у формулу (15) $n = 1$ і одержуємо очевидне правильне співвідношення

$$(r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)))^1 = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)).$$

Таким чином база індукції обгрунтована.

Індуктивне припущення (другий крок індуктивного доведення) — припускаємо, що формула Муавра (15) справджується при деякому додатному цілому n.

Індуктивний перехід (третій крок індуктивного доведення) — використовуючи індуктивне припущення і формулу для множення комплексних чисел у тригонометричній формі, доводимо формулу (15) у випадку, коли в ній n замінене на $n+1$:

$$(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^{n+1} = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n (r_1(\cos\varphi + i\sin\varphi))^1 =$$

$$= (r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi))(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)) = r^{n+1}(\cos((n+1)\varphi) + i\sin((n+1)\varphi)).$$

Формулу Муавра можна застосовувати для ненульових комплексних чисел z при всіх цілих n — не тільки для натуральних, але і для від'ємних, тому що для від'ємного n і ненульового комплексного числа $z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$ можна записати

$$\begin{aligned} z^n = (z^{-1})^{-n} = (r^{-1}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))^{-n} = \\ = r^n(\cos((-n)(-\varphi)) + i\sin((-n)(-\varphi))) = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)) \end{aligned} \qquad (16)$$

■

3.3 Добування кореня із комплексного числа

Для заданного комплексного числа

$$a = |a|(\cos\varphi + i\sin\varphi) \neq 0$$

множина розв'язків рівняння

$$z^n = a$$

має n різних елементів і позначаєтся через

$$\sqrt[n]{a} = \{z_0, z_2, \ldots, z_{n-1}\},$$

де

$$z_k = \sqrt[n]{|a|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1. \qquad (17)$$

Наприклад,

$$\sqrt{1} = \{1, -1, \}; \sqrt{-1} = \{i, -i\}; \sqrt{i} = \pm(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}});$$

$$\sqrt[3]{1} = \{1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\};$$

$$\sqrt[3]{-1} = \{-1, \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\};$$

Доведення формули (17) розбивається на дві частини. У першій частині ми доводим, що всі виписані числа є різними коренями $n-$го степеня, а в другій ми обгрунтовуємо, що інших коренів немає.

У тому, що виписані числа є коренями, ми переконуємося прямою перевіркою з використанням формули Муавра. Оскільки аргументи виписаних комплексних чисел відрізняються менше ніж на 2π, то збігатися косинуси і синуси одночасно не можуть і, таким чином, корені різні.

В другій частині доведення ми беремо довільний корінь $b = |b|(\cos\psi + i\sin\psi)$. Для цього комплексного числа b (за визначенням кореня) повинно бути $b^n = a$, або в тригонометричній формі (з використанням формули Муавра)

$$|b|^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = |a|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Оскільки косинуси і синуси кутів $n\psi, \varphi$ збігаються, то самі кути відрізняються на число, що кратне 2π, тобто при деякому цілому m буде $n\psi - \varphi = m \cdot 2\pi$ і, відповідно,

$$n\psi = \varphi + m \cdot 2\pi, \qquad \psi = \frac{\varphi + m \cdot 2\pi}{n}.$$

Далі записуєм о ціле число m у вигляді $m = nq + k$, де $k, q \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq k < n$. Зробити це дозволяють шкільні знання з арифметики. Далі

$$\psi = \frac{\varphi + m \cdot 2\pi}{n} = \frac{\varphi + (nq + k) \cdot 2\pi}{n} = \frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n} + q \cdot 2\pi.$$

Оскільки кути ψ і $\dfrac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n}$ відрізняються на величину, що кратна 2π, то синуси і косинуси цих кутів збігаються і число b належить виписаній множині $\sqrt[n]{a}$. Формула (17) для коренів $n-$го степеня із комплексного числа доведена.

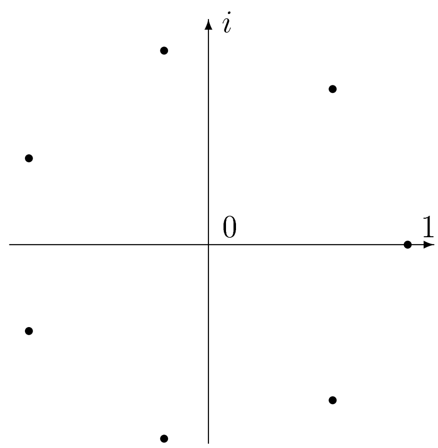
Корені n-го степеня з комплексного числа a разташовуються у вершинах правильного n-кутника, що вписаний у коло радіуса $\sqrt[n]{|a|}$ з центром у початку координат.

3.4 Корені із одиниці

Корені n-го степеня із одиниці звичайно позначаються $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{n-1}$.

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1..$$

На рисунку зображені на комплексній площині корені із одиниці 7-го степеня, вони разташовуються на одиничному колі і ділять це коло на 7 рівних дуг.



Оскільки корені із одниці розташовуються на одиничному колі, тому рівняння $z^n = 1$ називають рівнянням поділу кола, а многочлен

$$z^n - 1$$

називається многочленом поділу кола.

Одиничне коло в комплексній площині є групою. Корені з одиниці утворюють підгрупу цієї групи. Нагадаємо, що

> *Групою* називають непорожню множину з однією асоціативною бінарною операцією, в якій є нейтральний елемент відносно цієї операції, і кожен елемент має обернений.

Позначимо множину коренів $n-$го степеня через $\mathrm{Root}(n)$. Множина $\mathrm{Root}(n)$ визначається умовою:

$$a \in \mathrm{Root}(n) \Leftrightarrow a^n = 1.$$

- Ця множина замкнена відносно операції множення (множення комплексних чисел), тобто якщо a, b належать $\mathrm{Root}(n)$, то їх добуток ab також належить $\mathrm{Root}(n)$, тому що

$$a^n = b^n = 1 \Rightarrow (ab)^n = a^n b^n = 1.$$

- Множина $\mathrm{Root}(n)$ містить в собі одиницю, оскільки $1^n = 1$.

- Також множина $\mathrm{Root}(n)$ замкнена відносно операції знаходження оберненого числа, оскільки

$$a^n = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n} = 1.$$

Отже, $\mathrm{Root}(n)$ є групою.

Групи, в яких операція названа множенням, називають *мультиплікативними*. Отже $\mathrm{Root}(n)$ є мультиплікативною групою.

Оскільки множення комплексних чисел комутативне, то група $\mathrm{Root}(n)$ комутативна.

Всі елементи групи $\mathrm{Root}(n)$ є степенями одного елемента $\varepsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$

$$\mathrm{Root}(n) = \{1 = \varepsilon_1^0, \varepsilon_1^1, \varepsilon_1^2, \ldots, \varepsilon_1^{n-2}, \varepsilon_1^{n-1}\}.$$

Такі групи, тобто групи, в яких всі елементи є степенями одного, називають *циклічними*.

Отже, $\mathrm{Root}(n)$ є циклічною групою.

Всі комплексні числа, що мають модуль 1, утворюють групу, тому що модуль добутку двох комплексних чисел є добутком модулів множиків, модуль одиниці дорівнює одиниці і $|a^{-1}| = |a|^{-1}$ для $a \in \mathbb{C}$. Всі комплексні числа, що мають модуль 1, утворюють коло одиничного радіуса з центром в початку координат. Тому коло одиничного радіуса з початком координат є групою, неперервною групою.

Якщо G – скінченна циклічна група і $G = \{1, a, a^2, \ldots\}$, то такий елемент a називають *твірним*.

Твірні елементи групи коренів називають *первісними коренями* з одиниці. Можна сказати, що

> Корінь $n-$го степеня з одиниці називається *первісним* в тому і тільки тому випадку, коли він не є коренем ніякого меншого степеня.

Необхідною і достатньою умовою того, щоб число ε_k було первісним коренем, є взаємна простота чисел n і k, тобто рівність одиниці найбільшого спільного дільника цих чисел.

4 Задачі, що стосуються комплексних чисел

4.1 Задання ліній в комплексній площині

4.1.1 Коло

Колом називають геометричне місце точок (ГМТ) для яких відстань від заданої точки (ця точка називається *центром* кола) є сталою величиною (ця величина називається *радіусом* кола).

В комплексній площині відстань між точками z_1, z_2 дорівнює $|z_2 - z_1|$. Коли потрібно обчислити відстань від довільної точки z до заданої незмінної точки z_0, то ми обчислюємо $|z - z_0|$. Таким чином, рівняння кола радіуса r із центром в точці z_0 має вигляд

$$|z - z_0| = r.$$

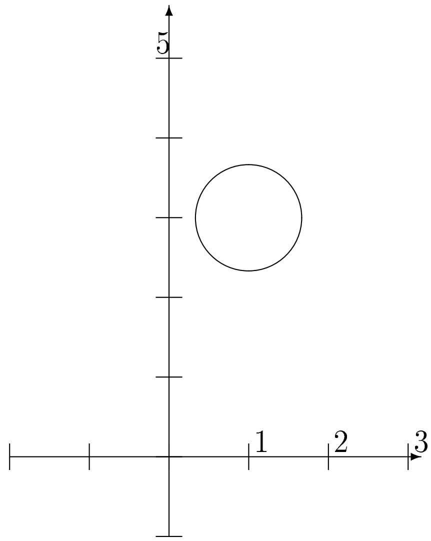


Рис. 1: Коло радіуса 2 з центром в точці $z = 1+3i$ задане рівнянням $|z-1-3i| = 2$. Внутрішність цього кола (круг) задана нерівністю $|z-1-3i| < 2$. Область зовні кола задана нерівністю $|z-1-3i| > 2$.

Відповідно, коло з центром в точці $3+5i$ радіуса 7 має вигляд $|z-(3+5i)| = 7$, коло радіуса 3 з центром в точці -2 має вигляд $|z+2| = 3$, а рівняння $|z+9+10i| = 2$ є рівнянням кола радіуса 2 з центром в точці $-9-10i$.

Розглянемо рівняння

$$|(2-3i)z+7+8i| = 2.$$

Спочатку перетворимо це рівняння, використовуючи те, що $(2-3i)z+7+8i = (2-3i)(z - \dfrac{-7-8i}{2-3i})$:

$$|(2-3i)z+7+8i| = |(2-3i)| \cdot \left|z - \frac{-7-8i}{2-3i}\right| = \sqrt{13}\left|z - \frac{-7-8i}{2-3i}\right| = 2.$$

Поділимо останнє рівняння на $\sqrt{13}$:

$$\left|z - \frac{-7-8i}{2-3i}\right| = \frac{2}{\sqrt{13}}.$$

А це вже рівняння кола радіуса $\dfrac{2}{\sqrt{13}}$ із центром в точці

$$\frac{-7-8i}{2-3i} = \frac{(-7-8i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{(-7-8i)(2+3i)}{13} = \frac{10-37i}{13}.$$

4.1.2 Промінь

Для заданого числа $0 \le \varphi < 2\pi$ рівняння

$$\arg z = \varphi$$

є рівнянням променя, що виходить з початку координат і утворює з додатним напрямком дійсної осі кут φ. Кут тут орієнтований, тобто може бути додатним і може бути від'ємним, він підраховується від додатного напрямку дійсної осі до променя. Сам початок координат променю не належить.

4.1.3 Пряма лінія

Рівнянням прямої, яка у відповідній прямокутній системі координат має рівняння $y = kx$, в комплексній площині буде

$$\operatorname{tg} \arg z = k.$$

Строго кажучи, в наведене рівняння підставляти 0 замість z не маємо права. Тому наведене рівняння — це рівняння прямої з виколотим початком координат.

Рівняння

$$\operatorname{tg} \arg(z - z_0) = k.$$

задає два промені, які виходять із z_0, але саму точку z_0 ці промені не містять. Отже це рівняння прямої з видаленою точкою z_0.

Горизонтальна пряма, яка знаходиться на відстані 5 від осі Ox у верхній півплощині, складається із усіх точок z таких, що Im $z = 5$, тому запис

$$\operatorname{Im} z = 5$$

є рівнянням цієї прямої.

Вертикальна пряма, яка знаходиться на відстані 5 від осі Ox у лівій півплощині, складається із усіх точок z таких, що Re $z = -5$, тому запис

$$\operatorname{Re} z = -5$$

є рівнянням цієї прямої.

В загальному випадку рівняння горизонтальної прямої, що перетинає вісь Oy в точці $y = a$, тобто проходить через точку $z = 0 + ai$, має вигляд

$$\operatorname{Im} z = a.$$

Рівняння вертикальної прямої, що перетинає вісь Ox в точці $x = a$, тобто проходить через точку $z = a + 0i$, має вигляд

$$\operatorname{Re} z = a.$$

Можна перевірити, що для двох комплексних чисел $a \neq 0, b$ рівняння

$$\operatorname{Im}(az + b) = 0, \qquad \operatorname{Re}(az + b) = 0$$

задають дві взаємно перпеникулярні прямі, які проходять через точку $\dfrac{-b}{a}$. До того ж, будь-яку пару взаємно перпендикулярних прямих можна задати такою парою рівнянь.

4.1.4 Еліпс

Нехай на площині задані дві різні точки $F_1,\ F_2$ і додатне число $2a$, що більше відстані між точками $F_1,\ F_2$. Геометричне місце точок A для яких сума відстаней від A до F_1 та до F_2 дорівнює $2a$ називається *еліпсом.* Точки F_1, F_2 називаються фокусами (вогнищевими точками) еліпса, а число a називається більшою піввіссю цього еліпса.

Із означення еліпса видно, що в комплексній площині рівнянням еліпса із фокусами $z_1,\ z_2$ і більшою піввіссю a буде

$$|z - z_1| + |z - z_2| = 2a. \tag{18}$$

Так рівнянням еліпса з фокусами $-1 + 7i,\ 3 + 9i$ і більшою піввіссю 5 буде

$$|z + 1 - 7i| + |z - 3 - 9i| = 10,$$

а рівнянням еліпса з вогнищевими точками (фокусами) $z_1 = 1 + 1.5i,\ z_2 = 5 - 0.5i$ буде

$$|z - 1 - 1.5i| + |z - 5 + 0.5i| = 10.$$

4.1.5 Гіпербола

Нехай на площині задані дві різні точки $F_1,\ F_2$ і додатне число $2a$, що менше відстані між точками $F_1,\ F_2$. Геометричне місце точок A для яких модуль різниці відстаней від A до F_1 та до F_2 дорівнює $2a$ називається *гіперболою.* Точки $F_1,\ F_2$ називаються фокусами (вогнищевими точками) гіперболи, а число a називається піввіссю цієї гіперболи.

Із означення гіперболи видно, що в комплексній площині рівнянням гіперболи із вогнищевими точками $z_1,\ z_2$ і піввіссю a буде

$$||z - z_1| - |z - z_2|| = 2a.$$

Гіпербола складається із двох гілок. Одна гілка задається рівнянням

$$|z - z_1| - |z - z_2| = 2a,$$

а друга — рівнянням

$$-|z - z_1| + |z - z_2| = 2a.$$

Так рівнянням гіперболи з вогнищевими точками $-1 + 7i,\ 3 + 9i$ і піввіссю 2 буде

$$||z + 1 - 7i| - |z - 3 - 9i|| = 4.$$

4.1.6 Парабола

Нехай на площині задана пряма d і точка F. Тоді геометричне місце точок A таких, що відстань від A до d дорівнює відстані від A до F, називається *параболою.* В такому випадку пряма d називається директрисою а точка F називається вогнищевою точкою (фокусом) цієї параболи.

У комплексній площині легко шукати відстань між двома точками $z_1,\ z_2$ — вона дорівнює $|z_1 - z_2|$. Також легко шукати відстань від точки z_1 до прямої d, на якій лежить точка z_2, у двох випадках, — коли пряма горизонтальна або вертикальна. Коли пряма вертикальна, відстань від z_1 до d дорівнює $|\operatorname{Re}(z_1 - z_2)|$, де z_2 — довільна точка на вектикальній прямій d; а коли пряма горизонтальна, відстань від z_1 до d дорівнює $|\operatorname{Im}(z_1 - z_2)|$, де z_2 — довільна точка на горизонтальній прямій d.

Отже, коли пряма d горизонатальна і на ній лежить точка z_2, точка z_1 не лежить на прямій, то рівняння параболи з директрисою d і фокусом z_1 має вигляд

$$|\operatorname{Im}(z_2 - z)| = |z_1 - z|.$$

Коли пряма d вертикальна і на ній лежить точка z_2, точка z_1 не лежить на прямій, то рівняння параболи з директрисою d і фокусом z_1 має вигляд

$$|\operatorname{Re}(z_2 - z)| = |z_1 - z|.$$

Парабола з горизонтальною директрисою $\operatorname{Im} z = -5$ і фокусом $z_2 = 2 + 3i$ має рівняння

$$|\operatorname{Im}(-5i - z)| = |2 + 3i - z|.$$

Парабола з вертикальною директрисою $\operatorname{Re} z = -5$ і фокусом $z_2 = 2 + 3i$ має рівняння

$$|\operatorname{Re}(-5 - z)| = |2 + 3i - z|.$$

4.2 Рухи комплексної площини

Рухом площини називають таке її взаємно однозначне відображення в себе, при якому зберігаються відстані між точками, тобто відстань між точками завжди дорівнює відстані між образами цих точок.

За теоремою Шаля (приймемо її без доведення), всі рухи площини можна розділити на три типи — обертання, паралельні перенесення та ковзні симетрії. Осьові симетрії, обертання та паралельні перенесення досить ретельно висвітлюються в шкільному курсі. А ковзна симетрія — це композиція (послідовне виконання) осьової симетрії та паралельного перенесення на вектор, що паралельний осі симетрії.

4.2.1 Паралельне перенесення

Паралельне перенесення можна задати формулою

$$z \mapsto z + z_0.$$

Тут $z \in \mathbb{C}$ — змінна точка комплексної площини, а z_0 — довільним чином обраний один незмінний (фіксований) елемент поля комплексних чисел. Це паралельне перенесення переводить точку 0 в точку z_0. Прикладом паралельного перенесення буде

$$z \mapsto z + 9 - 3i.$$

Паралельним перенесенням, яке переводить точку z_1 в точку z_2 буде

$$z \mapsto z + (z_2 - z_1).$$

4.2.2 Обертання

Обертання навколо початку координат (навколо нуля) на кут α можна задати формулою

$$z \mapsto (\cos\alpha + i\sin\alpha)z.$$

Це твердженя забезпечується правилом множення комплексних чисел в тригонометричній формі.

Для прикладу, обертання навколо нуля на кут $\dfrac{\pi}{4}$ можна задати формулою

$$z \mapsto (\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})z.$$

Образом точки $15 \cdot (\cos\dfrac{2\pi}{17} + i\sin\dfrac{2\pi}{17})$ буде $15 \cdot (\cos(\dfrac{2\pi}{17} + \dfrac{\pi}{4}) + i\sin(\dfrac{2\pi}{17} + \dfrac{\pi}{4}))$.

Щоб здійснити обертання навколо довільної точки z_0 на кут α, потрібно спочатку перенести точку z_0 паралельним перенесенням в нуль, потім здійснити обертання навколо нуля, а потім нуль повернути в точку z_0. Отже потрібно здійснити композицію (послідовне виконання) трьох рухів

$$z \mapsto z - z_0, \quad z \mapsto (\cos\alpha + i\sin\alpha)z, \quad z \mapsto z + z_0.$$

Результатом послідовного виконання вказаних трьох рухів буде

$$z \mapsto (\cos\alpha + i\sin\alpha)(z - z_0) + z_0.$$

4.2.3 Осьова симетрія та ковзна симетрія

Осьова симетрія відносно осі Ox може бути задана формулою

$$z \mapsto \overline{z}.$$

Ковзна симетрія відносно осі Ox з паралельним перенесенням вздовж осі Ox на вектор (комплексне число) $a = a + 0i$ може бути задана формулою

$$z \mapsto \overline{z} + a.$$

Щоб здійснити ковзну симетрію відносно довільної прямої, потрібно паралельним перенесенням перенести пряму так, щоб вона проходила через початок координат, потім повернути площину так, щоб пряма збіглася із віссю Ox, потім здійснити ковзну симетрію відносно осі Ox, потім здійснити зворотне обертання і, нарешті, паралельне перенесення, що зворотне до початкового.

4.3 Задання областей в комплексній площині

Зміст терміну “область“ розкривається в тому розділі математики, який називається “топологія“. Тут ми будемо користуватися інтуїтивною уявою про область, відповідно, строгих доведень з використанням точних означень кривих, неперервних кривих, граничних та внутрішніх точок будемо уникати. Будемо користуватися тим, що площина   є областю. Пряма розбиває площину на дві області (півплощини) — точки однієї області можна з’єднати відрізком, що не перетинає пряму, а точки із різних півплощин таким відрізком з’єднати неможливо. Парабола розбиває площину на дві області — в одній знаходиться вогнищева точка, а в другій знаходиться директриса. Еліпс ділить площину на дві області — внутрішню, де знаходяться вогнищеві точки, і зовнішню — через зовнішні точки проходять прямі, які не перетинають еліпс. Коло ділить площину на дві області — внутрішню (її називають круг, що обмежений колом) і зовнішню, зовнішність кола.

Із простих областей — кругів, смуг, кутів та подібного за допомогою теоретикомножинних операцій можна отримати більш складні — кільця, внутрішності багатокутників, сектори, сегменти та подібне.

4.3.1 Внутрішність за зовнішність кола. Кільце

Коло радіуса r із центром в точці z_0 має рівняння $|z - z_0| = r$. Внутрішність кола називають кругом. Круг складається із точок, що знаходяться ближче від центра, ніж точки кола. Отже внутрішність кола (круг) можна задати нерівністю

$$|z - z_0| < r.$$

Відповідно, зовнішність цього кола може бути задана нерівністю

$$|z - z_0| > r.$$

Якщо два дійсні додатні числа r_1, r_2 задовольняють умову $0 < r_1 < r_2$, то нерівності

$$r_1 < |z - z_0| < r_2$$

задають кільце із внутрішнім радіусом r_1 і зовнішнім радіусом r_2.

4.3.2 Кут

Кут визначається двома променями, що виходять із однієї точки (позначимо її z_0), яку називають вершиною кута. Як ми знаємо, промінь, що виходить з точки z_0 під кутом α має рівняння $\arg(z - z_0) = \alpha$. Відповідно, два промені, що виходять із вершини z_0, мають рівняння $\arg(z - z_0) = \alpha_1$, $\arg(z - z_0) = \alpha_2$. Припустимо, що

$$0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < 2\pi.$$

Тоді два промені визначають два кути — один задаємо нерівністю

$$\alpha_1 < \arg(z - z_0) < \alpha_2,$$

і другий задаємо нерівністю

$$\alpha_2 < \arg(z - z_0) < \alpha_1 + 2\pi.$$

4.3.3 Внутрішність та зовнішність еліпса

Еліпс із вогнищевими точками z_1, z_2 і піввіссю a має рівняння (18). Відповідно, внутрішню частину еліпса задаємо нерівністю

$$|z - z_1| + |z - z_2| < 2a. \tag{19}$$

а зовнішню частину задаємо нерівністю

$$|z - z_1| + |z - z_2| > 2a. \tag{20}$$

4.3.4 Внутрішність та зовнішність параболи

Парабола ділить площину на дві області. В одній частині точки ближчі до вогнищевої точки ніж до директриси, а в другій частині точки ближчі до директриси, ніж до вогнищевої точки. Першу частину називають внутрішньою областю параболи, а другу — зовнішньою областю. Отже, коли є пряма (директриса) і точка (вогнищева точка), то замінивши в рівнянні параболи рівність на одну із нерівностей, одержимо задання внутрішньої або зовнішньої області параболи.

4.3.5 Півплощина та смуга

Півплощина, що обмежена вертикальною прямою, може бути задана однією з нерівностей

$$\mathrm{Re}\ z > a, \quad \mathrm{Re}\ z < a.$$

Тут $a \in \mathbb{R}$, z — змінне комплексне число. Відповідно, вертикальну смугу можна задати системою нерівностей

$$a_1 < \mathrm{Re}\ z < a_2$$

для деяких дійсних чисел $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.

Півплощина, що обмежена горизонтальною прямою, може бути задана однією з нерівностей

$$\mathrm{Im}\ z > a, \quad \mathrm{Im}\ z < a.$$

Тут $a \in \mathbb{R}$, z — змінне комплексне число. Відповідно, горизонтальну смугу можна задати системою нерівностей

$$a_1 < \mathrm{Im}\, z < a_2$$

для деяких дійсних чисел $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.

Для задання смуги, що обмежена похилими паралельними прямими, потрібно виписати рівняння цих прямих а потім належним чином рівності замінити на нерівності.

Складні області одержуються як перетин чи об'єднання простих областей: кругів, смуг, кутів та подібного.

4.4 Використання комплексних чисел в комбінаториці

Комплексне число $z = a+bi$ можна піднести до степеня двома різними способами. Перший — за допомогою бінома Ньютона:

$$z^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} bi - C_n^2 a^{n-2} b^2 - C_n^3 a^{n-3} b^3 i + \ldots + C_n^n b^n i^n. \tag{21}$$

Другий — за допомогою формули Муавра:

$$z = a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \tag{22}$$

Оскільки одне і те ж комплексне число z^n записане двома способами, то і дійсна частина і уявна частина у цих чисел одна і та ж. Таким чином, із (21) і (22) одержуємо дві рівності.

Змінюючи числа $a, b \in \mathbb{R}$ ми одержимо різні співвідношення для біномних коефіцієнтів C_n^k.

Для прикладу, піднесемо до $n-$го степеня $1+i$ двома способами. Одержимо

$$(1+i)^n = 1 + C_n^1 i - C_n^2 - C_n^3 i + C_n^4 + C_n^5 i + \ldots + C_n^n i^n = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k C_n^{2k} + i \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k C_n^{2k+1};$$

$$(1+i)^n = (\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}))^n = 2^{\frac{n}{2}}(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4})$$

Звідси одержуємо дві тотожності для біномних коефіцієнтів:

$$\sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k C_n^{2k} = 2^{\frac{n}{2}} \cos\frac{n\pi}{4}, \quad \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k C_n^{2k+1} = 2^{\frac{n}{2}} \sin\frac{n\pi}{4}$$

4.5 Косинус та синус кратних дуг

Інколи виникає потреба в записі функцій $\sin nx$ та $\cos nx$ у вигляді многочлена (тобто використовуючи лише додавання та множення) від функцій $\sin x$ та $\cos x$. Таке завдання виконується наступним чином. Спочатку записуємо комплексне число

$$z = \cos x + i\sin x,$$

що має модуль 1 і записане в тригонометричній формі. Далі це число підноситься до $n-$го степеня за допомогою формули Муавра та за допомогою бінома Ньютона. Після цього прирівнюються дісні та уявні частини цих двох піднесень. Виконаємо цю роботу:

$$z^n = \cos nx + i\sin nx;$$

$$z^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k i^k \cos^{n-k} x \sin^k x.$$

Звідси

$$\cos(nx) = \mathrm{Re}\,(z^n) = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k C_n^{2k} \cos^{n-2k} x \sin^{2k} x;$$

$$\sin(nx) = \mathrm{Im}\,(z^n) = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k C_n^{2k+1} \cos^{n-1-2k} x \sin^{2k+1} x.$$

Окремими випадками наведених вище формул є наступні:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x; \quad \sin 2x = 2 \sin x \cos x;$$

$$\cos 3x = \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x; \quad \sin 3x = -\sin^3 x + 3 \sin^2 x \cos x;$$

$$\cos 4x = \cos^4 x - 6 \cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x; \quad \sin 4x = 4 \cos^3 x \sin x - 4 \cos x \sin^3 x;$$

$$\cos 5x = \cos^5 x - 10 \cos^3 x \sin^2 x + 5 \cos x \sin^4 x.$$

$$\sin 5x = 5 \cos^4 x \sin x - 10 \cos^2 x \sin^3 x + \sin^5 x;$$

4.6 Степені косинуса та синуса

При обчисленні інтегралів використовуються формули перетворення степенів синуса та косинуса у синуси та косинуси кратних дуг.

Якщо

$$|z| = 1, \qquad z = \cos x + i \sin x,$$

то

$$z^{-1} = \frac{1}{\cos x + i \sin x} = \cos x - i \sin x = \overline{z}, \quad z + z^{-1} = 2 \cos x, \quad z - z^{-1} = 2i \sin x.$$

Тому

$$\cos^n x = \left(\frac{z + z^{-1}}{2} \right)^n, \tag{23}$$

і

$$\sin^n x = \left(\frac{z - z^{-1}}{2i} \right)^n \tag{24}$$

Піднесемо праву частину рівності (23) за формулою бінома Ньютона:

$$\cos^n x = \left(\frac{z + z^{-1}}{2} \right)^n = 2^{-n} \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k z^k (z^{-1})^{n-k} = \right) = 2^{-n} \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k z^{2k-n} \right).$$

Далі скористаємося формулою Муавра, згідно з якою $z^{2k-n} = \cos(2k-n)x + i \sin(2k-n)x$:

$$\cos^n x = 2^{-n} \sum_{k=0}^{n} C_n^k (\cos(2k-n)x + i \sin(2k-n)x).$$

При додаванні уявні частини доданків справа повинні скоротитися, бо зліва стоїть дійсне число. Тому

$$\cos^n x = 2^{-n} \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos(2k-n)x. \tag{25}$$

Про запис (25) кажуть як про запис $n-$го степеня косинуса через косинуси кратних дуг.

Подібне чинять і з формулою (24) — праву частину підносять до n−го степеня за допомогою бінома Ньютона, потім користуються формулою Муавра, і одержують рівність

$$\sin^n x = (2i)^{-n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k (\cos(2k-n)x + i \sin(2k-n)x). \tag{26}$$

Кінцевий вигляд формули для n−го степеня синуса залежить від парності числа n. Якщо n парне число і $n = 2m$ для деякого натурального числа m, то

$$\sin^n x = (-4)^{-m} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k \cos(2k-n)x. \tag{27}$$

Якщо ж число n непарне, тобто $n = 2m+1$ для деякого натурального числа m, то

$$\sin^n x = (-4)^{-m} \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k \sin(2k-n)x. \tag{28}$$

Про записи (27), (28) кажуть як про записи n−го степеня синуса через косинуси та синуси кратних дуг.

Прикладами застосування одержаних формул є

$$\cos^4 x = \frac{1}{8}(\cos 4x + 4\cos 2x + 3);$$
$$\sin^4 x = \frac{1}{8}(\cos 4x - 4\cos 2x + 3);$$
$$\sin^5 x = \frac{1}{16}(\sin 5x - 5\sin 3x + 10\sin x);$$
$$\cos^5 x = \frac{1}{16}(\cos 5x + 5\cos 3x + 10\cos x).$$

5 Розширення функцій дійсного змінного на комплексну площину

Якщо функція дійсного аргумента задана формулою, яка використовує лише операції додавання, множення, віднімання та ділення, то таку функцію можна обчислити і від комплексної змінної. Для прикладу, ми можемо обчислити функцію

$$f(z) = \frac{z^2 - 7iz + 3 + 5i}{(3-i)z^3 - 1 - i}$$

коли $z = 2 + 2i$. В складніших випадках використовуються так звані степеневі ряди.

5.1 Збіжність послідовностей і задання функції степеневим рядом.

Нехай задана нескінченна послідовність

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \tag{29}$$

комплексних чисел. Комплексне число a називається межею послідовності a_n, коли для будь-якого (скільки завгодно малого) дійсного додатного ε можна вказати такий номер N, що всі елемети a_n з більшими номерами ніж N знаходяться від a ближче ніж на ε, тобто

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n > N \; |a_n - a| < \varepsilon.$$

Це означення дозволяє розглядати нескінченні суми, так звані степеневі ряди

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = s(x), \tag{30}$$

де $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ — сталі комплексні числа, а x — комплексна змінна.

Під сумою $s(x)$ степеневого ряду (30) розуміють межу, до якої прямує послідовність часткових сум:

$$s_0(x) = a_0, s_1(x) = a_0 + a_1 x, s_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2, \ldots, s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \ldots$$

звичайно, коли ця межа існує. Деякі функції дійсної змінної можна розглядати як степеневий ряд. Тоді той же степеневий ряд, але від комплексної змінної буде задавати функцію і від комплексної змінної.

5.2 Експонента

В геометрії важливим числом є відношення довжини кола до його діаметра. Це число виникає природно, часто використовується і має спеціальне позначення – π. При вивченні функцій природно виникає і часто використовується число

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$

Це число має спеціальне позначення — e і називається натуральним числом Непера. Природність, важливість, зручність роботи з цим числом — все це для тих, хто професійно використовує математику.

$$e \approx 2.78$$

Показникова функція з натуральною основою e називається експонентою і позначається $\exp(x)$. Таким чином,

$$\exp(x) = e^x.$$

“Справжнє“ обчислення функції $\exp(x)$ (в мікрокалькуляторі, в компьютері ...) з належною точністю здійснюється за допомогою степеневого ряду (приймемо це на віру)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \tag{31}$$

Логарифм за натуральною основою має спеціальне позначення — ln, таким чином

$$\ln x = \log_e x.$$

Запишем означення функції e^x коли x уявне число, тобто для деякого дійсного y можна записати $x = iy$. Тоді

$$e^{iy} = 1 + iy + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^k}{k!}.$$

У функції e^{iy} легко відділити уявну частину від дійсної:

$$e^{iy} = (1 - \frac{1}{2!}y^2 + \frac{1}{4!}y^4 - \frac{1}{6!}y^6 + \ldots) + i(y - \frac{1}{3!}y^3 + \frac{1}{5!}y^5 - \frac{1}{7!}y^7 + \ldots),$$

або в стислому записі

$$e^{iy} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k)!} y^{2k}\right) + i \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} y^{2k+1}\right). \tag{32}$$

5.3 Синус та косинус комплексного аргумента

Як і для експоненти приймемо на віру, що синус та косинус обчислюються за допомогою степеневих рядів наступним чином

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \tag{33}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \tag{34}$$

Порівнюючи рівняння (31), (33), (34) бачимо, що при уявних x, тобто коли $x = iy$ для деякого дійсного y буде виконуватись рівність

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y.$$

Для комплексних чисесл $z = a + bi$ значення

Згідно з цією формулою

$$e^{i\pi} = -1, \quad e^{2\pi i} = 1, \quad e^{i\frac{3\pi}{4}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad e^{i} = \cos 1 + i \sin 1.$$

Скористаємося як відомим тим, що $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$. Ця формула дозволяє обчислити експоненту від комплексного числа, коли є можливість обчислювати експоненту, синус та косинус від дійсного аргумента:

$$\exp(a + bi) = \exp(a)\exp(ib) = \exp(a)(\cos b + i \sin b), \quad a, b \in \mathbb{R}. \tag{35}$$

В загальному випадку, коли комплексне число z має і дійсну і уявну частини, e^z визначають формулою

$$e^z = e^{a+bi} = e^a \cdot a^{bi} = e^a(\cos b + i \sin b). \tag{36}$$

Остання формула (36) дозволяє обчислювати окремо модуль і аргумент $\exp(a + bi)$:

$$|\exp(a + bi)| = \exp(a), \quad \arg\exp(a + bi) = b. \tag{37}$$

Повернемося власне до синуса та косинуса.

Коли аргумент косинуса є уявним числом, то значення косинуса є дійсним числом, оскільки в стеневий ряд входять тільки парні степені змінної. Точніше, коли y є дійсним числом, то

$$\cos(iy) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{2k}}{(2k)!} = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}). \tag{38}$$

Функцію $\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ називають *гіперболічним косинусом* і позначають $\mathrm{ch}(x)$ на пострадянському просторі і $\cosh(x)$ в англомовних текстах. Зокрема, позначення $\cosh(x)$ використовують пакети символьних обчислень. Отже

$$\cos(iy) = \cosh(y).$$

В конкретних випадках

$$\cos(i) = \cosh(1) = 1.5308035; \quad \cos(\pi i) = \cosh(\pi) = 11.59195328,$$

$$\cos(-29i) = \cosh(-29) = 1.965667149^{12}.$$

Оскільки степеневий ряд синуса містить лише непарні степені змінної, то синус уявного аргумента є уявним числом, точніше

$$\sin(iy) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(iy)^{2k+1}}{(2k+1)!} = i\sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Права частина останньої рівності носить назву *гіпеболічного синуса* і позначається sh на пострадянському просторі та sinh в англомовних текстах. В цих позначеннях

$$\sin(iy) = i\sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!} = i\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = i\sinh(y).$$

В конкретних випадках

$$\sin(-i) = i\sinh(-1) = -1.175201194; \quad \sinh(\pi i) = i\sinh(\pi) = 11.54873936,$$

$$\sin(-29i) = i\sinh(-29) = 1.965667149^{12}.$$

Якщо комплексне число містить ненульову дійсну і ненульову уявну частини, то косинус та синус обчислюються з використанням формул "косинуса суми" та "синуса суми":

$$\cos(a+bi) = \cos a\cos(bi) - \sin a\sin(bi), \qquad \sin(a+bi) = \sin a\cos(bi) + \cos a\sin(bi).$$

5.4 Логарифм комплексного аргумента

За означенням,

$$a^b = c \Leftrightarrow b = \log_a c.$$

Відповідно

$$e^{z_1} = z_2 \Leftrightarrow z_1 = \ln z_2. \tag{39}$$

Із формул (36), (39) випливає

$$\ln e^{a+bi} = \ln e^a(\cos b + i\sin b) = a + bi.$$

Для комплексного числа z, що записане в тригонометричній формі $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ вважаємо

$$\ln z = \ln r + i\varphi.$$

Таке визначення натурального логарифма або не має однозначності (коли аргумент ми вибираємо неоднозначно), або не має неперервності — за рахунок періодичності синуса та косинуса.

В конкретних випадках

$$\ln(-2-2\sqrt{3}) = 2\ln 2 + \frac{5\pi}{4}i; \quad \ln(-1) = \pi i; \quad \ln i = \frac{\pi}{2}i.$$

Покажчик