



С.Н. Зиненко

Математический анализ

Предел и непрерывность функций одной переменной

(сборник задач)

2013

1. Пределы степенных функций

Найти пределы функций	
$x \rightarrow a$	
№ 1.1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$	№ 1.1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+1)^3}{x^3 + 1}$
№ 1.2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$	№ 1.2. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)^3}{x^3 + 1}$
№ 1.3. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^3 + 3x^2 + 5x + 3}$	№ 1.3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^3 + 4x^2 + x - 6}$
№ 1.4. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 - 5} - 2}{(x - 3)}$	№ 1.4. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2 + 9} - 5}{(x - 4)}$
№ 1.5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x}$	№ 1.5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{1+x} - 1}{x}$
$x \rightarrow \infty$	
№ 1.6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x + 3}{4x^3 + 5x^2 - 6}$	№ 1.6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 5}{2x^4 + 3x^2 - 6x + 1}$
№ 1.7. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x}{3x^4 + 4x^2 + 5}$	№ 1.7. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 3}{x^4 - 5x^2 + 4x}$
№ 1.8. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - x^3 - 4}{x^3 - x^2 + 2x - 3}$	№ 1.8. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^7 - x^3 - 1}{x^4 - x^2 + x - 1}$
№ 1.9. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^3 + 1} + \sqrt[3]{x^2 - x}}{\sqrt[4]{x^6 - x^5} - \sqrt[5]{x^4 + x^3}}$	№ 1.9. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^6 + x^5} + \sqrt[3]{x^6 - x^4}}{\sqrt[4]{x^8 - x^7} - \sqrt[5]{x^{15} + x^{12}}}$
№ 1.10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^4 + \sqrt[3]{x^9 + 1}} + \sqrt[3]{x^4 - \sqrt[4]{x^{12} - 1}}}{\sqrt[4]{x^8 - \sqrt[5]{x^{20} + 2}} - \sqrt[5]{x^8 + \sqrt[6]{x^{24} - 2}}}$	№ 1.10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + \sqrt[3]{x^5 + 1}} + \sqrt[3]{x^2 - \sqrt[4]{x^6 - 1}}}{\sqrt[4]{x^8 - \sqrt[5]{x^{15} + 2}} - \sqrt[5]{x^8 + \sqrt[6]{x^{15} - 2}}}$
№ 1.11. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})$	№ 1.11. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1})$
№ 1.12. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x - \sqrt{x}})$	№ 1.12. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x + \sqrt[4]{x^3}} - \sqrt[3]{x - \sqrt[4]{x^3}})$

2. Пределы тригонометрических функций

Найти пределы функций	
$x \rightarrow 0$	
№ 2.1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2 \cdot \operatorname{arctg} x}{(1 - \cos \sqrt{x}) \cdot \arcsin^2 x}$	№ 2.1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 x \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{x}}{(1 - \cos^4 \sqrt{x}) \cdot \arcsin x^3}$
№ 2.2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3(\operatorname{arctg} x^2)}{(1 - \cos \sqrt{\arcsin x^6})}$	№ 2.2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2(\arcsin x^3)}{(1 - \cos \sqrt{\operatorname{arctg}^3 x^2})}$
№ 2.3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\arcsin x^3}$	№ 2.3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^3 x - \sin^3 x}{\operatorname{arctg}^5 x}$
№ 2.4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \arcsin^2 x} - \sqrt{\cos x}}{x^2}$	№ 2.4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + \operatorname{arctg}^2 x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin x^2}$
№ 2.5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \sin x}{x + 3\arcsin x}$	№ 2.5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 2\operatorname{tg} x}{3x + \operatorname{arctg} x}$
№ 2.6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^4 x}{\sin x^2}$	№ 2.6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{\arcsin^2 x}$
№ 2.7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 3x}}{\arcsin^4(\sqrt{x})}$	№ 2.7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x \sqrt[3]{\cos 4x}}{\operatorname{arctg}^6(\sqrt[3]{x})}$
№ 2.8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a + 2x) - 2\sin(a + x) + \sin a}{\sin x^2}$	№ 2.8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(a + 2x) - 2\cos(a + x) + \cos a}{1 - \cos x}$
$x \rightarrow a$	
№ 2.9. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$	№ 2.9. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos 3x}$
№ 2.10. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(x - \frac{\pi}{2})}{\cos x}$	№ 2.10. $\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$
№ 2.11. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2} \sin x - 1}{\arcsin(x - \frac{\pi}{4})}$	№ 2.11. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2\sin x - \sqrt{3}}{\operatorname{arctg}(x - \frac{\pi}{3})}$
№ 2.12. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0}$	№ 2.12. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0}$
№ 2.13. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} x_0}{x - x_0}$	№ 2.13. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} x_0}{x - x_0}$
$x \rightarrow \infty$	
№ 2.14. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x}$	№ 2.14. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \arcsin \frac{1}{x}$

3. Пределы трансцендентных функций

Найти пределы функций	
$\left\{ \frac{0}{0} \right\} \quad \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}$	
№ 3.1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{\ln(1 + \operatorname{arctg} x)}$ № 3.2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{\arcsin^2 x}$ № 3.3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1}$ № 3.4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[15]{1 + \sin^5 x} - 1}{\sqrt[25]{1 + \operatorname{arctg} x^5} - 1}$ № 3.5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2}$ № 3.6. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0}$	№ 3.1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(e^{\operatorname{tg} x} - 1)}{\ln(1 + \arcsin x)}$ № 3.2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x^2} - \cos x}{\operatorname{arctg}^2 x}$ № 3.3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^3} - 1}{\sqrt[3]{1+x^3} - 1}$ № 3.4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[7]{\cos x} - 1}{\sqrt[9]{1 + \operatorname{arctg} x^2} - 1}$ № 3.5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\arcsin^2 x + \cos x)}{x^2}$ № 3.6. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\ln x - \ln x_0}{x - x_0}$
$\{1^\infty\}$	
№ 3.7. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+2} \right)^{(x+1)}$ № 3.8. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} \right)^x$ № 3.9. $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(\frac{2x^2 + 1}{x^2 + 1} \right)^x$ № 3.10. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$ № 3.11. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{\arcsin x}{\sin x - x}}$ № 3.12. $\lim_{x \rightarrow 0} (2 \sin 3x + \cos 4x)^{\frac{1}{\operatorname{arctg} x}}$	№ 3.7. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x+1} \right)^{(x+3)}$ № 3.8. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)^x$ № 3.9. $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{2x^2 - 1} \right)^x$ № 3.10. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos^2 x)^{\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}}$ № 3.11. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{x} \right)^{\frac{\operatorname{arctg} x}{\sin x - x \cos x}}$ № 3.12. $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin^2 x + \cos x)^{\frac{1}{\ln \cos x}}$

4. Главная часть функции, o -символика

Найти пределы функций, используя o -символику	
№ 4.1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\arcsin x^3}$ № 4.2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \arcsin^2 x} - \sqrt{\cos x}}{x^2}$ № 4.3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \sin x}{x + 3\arcsin x}$ № 4.4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x - \arcsin x}$ № 4.5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^3 + 1} + \sqrt[3]{x^2 - x}}{\sqrt[4]{x^6 - x^5} - \sqrt[5]{x^4 + x^3}}$	№ 4.1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\operatorname{arctg} x}$ № 4.2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \operatorname{arctg}^2 x} - \sqrt{\cos x}}{\sin x^2}$ № 4.3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 2\sin x}{3x + \arcsin x}$ № 4.4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{tg} x}{x - \operatorname{arctg} x}$ № 4.5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^4 + 1} + \sqrt[3]{x^4 - x}}{\sqrt[4]{x^8 - x^5} - \sqrt[5]{x^8 + x^3}}$
Найти главную часть функции при $x \rightarrow \omega$, выяснить, является ли функция бесконечно малой (большой), определить порядок малости (роста)	
$x \rightarrow 0$	
№ 4.6. $f(x) = x + x^2 - 2x^3$ № 4.7. $f(x) = \sin^3 x (1 - \cos \sqrt{x})$ № 4.8. $f(x) = \ln(1 + \operatorname{arctg}(e^x - 1))$ № 4.9. $f(x) = 2x - \sin x$ № 4.10. $f(x) = e^{x^2} - \cos x$ № 4.11. $f(x) = \sqrt[15]{1 + \sin^5 x} - 1$ № 4.12. $f(x) = \operatorname{tg} x - \sin x$ № 4.13. $f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{\sin^2 x}$ № 4.14. $f(x) = (\cos x)^{\sin x} - 1$	№ 4.6. $f(x) = x^4 + x^2 - 2x$ № 4.7. $f(x) = (1 - \cos \sqrt[4]{x}) \arcsin x^3$ № 4.8. $f(x) = \sin(\ln(1 + \operatorname{arctg}(e^{\sin x} - 1)))$ № 4.9. $f(x) = 3x + \operatorname{arctg} x$ № 4.10. $f(x) = e^{\sin x^2} - \cos x$ № 4.11. $f(x) = \sqrt[9]{1 + \operatorname{arctg} x^2} - 1$ № 4.12. $f(x) = \operatorname{ctg} x - \frac{1}{\sin x}$ № 4.13. $f(x) = \frac{\arcsin x}{\operatorname{tg}^2 x}$ № 4.14. $f(x) = (\cos x)^{\operatorname{tg} x} - 1$

$x \rightarrow a$	
№ 4.15. $f(x) = x + x^2 - 2x^3$, $x \rightarrow 1$	№ 4.15. $f(x) = x^4 + x^2 - 2x$, $x \rightarrow 1$
№ 4.16. $f(x) = \sin 3x$, $x \rightarrow \pi$	№ 4.16. $f(x) = \operatorname{tg} 3x$, $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$
№ 4.17. $f(x) = x^x - 1$, $x \rightarrow 1$	№ 4.17. $f(x) = (\sin x)^{\sin x} - 1$, $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$
№ 4.18. $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$	№ 4.18. $f(x) = \operatorname{ctg} x$, $x \rightarrow \pi$
№ 4.19. $f(x) = \frac{x^3 - 1}{(x - 1)^2}$, $x \rightarrow 1$	№ 4.19. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{(x - 1)^3}$, $x \rightarrow 1$
$x \rightarrow \infty$	
№ 4.20. $f(x) = x + x^2 - 2x^3$	№ 4.20. $f(x) = x^4 + x^2 - 2x$
№ 4.21. $f(x) = \sqrt[3]{x^7 + \sqrt[4]{x^{20} + 1}} + \sqrt[4]{x^9 + \sqrt[5]{x^{40} + 1}}$	№ 4.21. $f(x) = \sqrt[5]{x^3 + \sqrt[4]{x^9 + 1}} + \sqrt[4]{x^2 + \sqrt[5]{x^8 + 1}}$
№ 4.22. $f(x) = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{x}} - 1$	№ 4.22. $f(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)^{\frac{1}{x-1}} - 1$
Найти главную часть функции при а) $x \rightarrow 0$, б) $x \rightarrow 1$, в) $x \rightarrow \pm\infty$ Построить эскиз графика функции в окрестности указанных точек	
№ 4.23. $f(x) = \frac{x \operatorname{arctg} x}{x^3 - 1}$	№ 4.23. $f(x) = \frac{x^2}{\operatorname{arctg} x (x^3 - 1)}$

5. Точки разрыва функции

Найти точки разрыва функции, определить их характер и изобразить эскиз графика в окрестности этих точек

№ 5.1. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

№ 5.2. $f(x) = \frac{\cos x}{x}$

№ 5.3. $f(x) = \frac{(x-1)^2}{(x^3-1)}$

№ 5.4. $f(x) = \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}$

№ 5.5. $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x-1}$

№ 5.6. $f(x) = \frac{1}{\arcsin(x+1)}$

№ 5.7. $f(x) = \sin \frac{1}{x}$

№ 5.8. $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$

№ 5.9. $f(x) = \frac{1}{\left(1 - e^{\frac{x}{x-1}}\right)}$

№ 5.1. $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x}$

№ 5.2. $f(x) = \frac{\operatorname{ctg} x}{x}$

№ 5.3. $f(x) = \frac{(x+1)^3}{(x^2-1)}$

№ 5.4. $f(x) = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x-2}}$

№ 5.5. $f(x) = \operatorname{arcctg} \frac{1}{x+1}$

№ 5.6. $f(x) = \frac{1}{\operatorname{arctg}(x-1)}$

№ 5.7. $f(x) = \cos \frac{1}{x}$

№ 5.8. $f(x) = x \cos \frac{1}{x}$

№ 5.9. $f(x) = \frac{x}{\left(1 - e^{\frac{x}{x+1}}\right)}$