Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517 № 826, 2008, с.67–86

Асимптотика базисных функций обобщенного ряда Тейлора для класса $H_{\rho,2}$

В.А. Макаричев

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского (ХАИ), Украина

Доказано существование асимптотики базисных функций $\varphi_{n,0}$ и ψ_{n,α_n} обобщенного ряда Тейлора для функций класса $H_{\rho,2}$, и получен первый член асимптотических разложений этих функций.

2000 Mathematics Subject Classification 42A70.

Предварительные результаты

В [1] В.А. Рвачевым были построены ряды, которые он назвал обобщенными рядами Тейлора (ОРТ), для бесконечно дифференцируемых на отрезке $[-1,1]$ функций φ, таких, что $\|\varphi^{(n)}\|_{C_{[-1,1]}} \le c(\varphi)\rho^n 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$, $1 \le \rho < 2$. Класс этих функций обозначен через H_ρ.

Пусть $N_n = \left\{-2^{n-1}, -2^{n-1}+1, \ldots, 2^{n-1}\right\}$ при $n \ne 0$, $N_0 = \{-1, 0, 1\}$;

$$x_{n,k} = \frac{k}{2^{n-1}} \text{ при } n \ne 0,\ k \in N_n;\ x_{0,k} = k,\ k \in N_0.$$

В [1] доказано, что если $f \in H_\rho$, то

$$f^{(l)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k \in N_n} f^{(n)}(x_{n,k})\, \varphi_{n,k}^{(l)}(x),$$

где ряд в правой части сходится равномерно на $[-1,1]$ для каждого $l = 0, 1, 2, \ldots$, и базисные функции $\varphi_{n,k}(x)$ однозначно определяются из условий:

$$\varphi_{n,k} \in H_1,\ \varphi_{n,k}^{(m)}(x_{m,s}) = \delta_n^m \cdot \delta_s^k,$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots, k \in N_n, m = 0, 1, 2, \ldots, s \in N_m,$$

где δ_n^m – символ Кронекера. Построение $\varphi_{n,k}(x)$ было проведено с использованием функции $up(x)$, которая является финитным решением функционально-дифференциального уравнения $y'(x) = 2 \cdot (y(2x+1) - y(2x-1))$.

В 1986 г. была поставлена задача ([10], задача 44, с. 59): исследовать поведение базисных функций обобщенного ряда Тейлора с большими номерами и найти удобные формулы для их вычисления.

Решению данной задачи посвящена статья Т.В. Рвачевой [6]. В работе был получен результат относительно функций $\varphi_{n,k}(x)$, имеющих следующую нормировку: $\varphi_{n,k}^{(m)}(x_{m,s}) = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}\delta_n^m\delta_s^k$. Для этого на отрезке $[-1,0]$ была определена функция:
$ab(x) = up(x) + \lambda up\left(x-\frac{1}{2}\right) + \lambda^2 up\left(x-1+\frac{1}{2^2}\right) + \ldots + \lambda^n up\left(x-1+\frac{1}{2^n}\right) + \ldots,$
где λ — наименьший по модулю корень функции $\Phi(z) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} up\left(-1+\frac{1}{2^m}\right)z^m$.
Четное продолжение функции $ab(x)$ на отрезок $[-1,1]$ обозначено через $ab_c(x)$, а нечетное — $ab_s(x)$. С точностью 10^{-6} было получено $\lambda = -3.228718$. Кроме того, с точностью 10^{-6} было найдено значение $d = Res_\lambda\left(\frac{1}{\Phi(z)}\right) = 6.614673$. Доказано, что функции $\frac{1}{c_{2n}}\varphi_{2n,0}(x)$ и $\frac{1}{c_{2n+1}}\varphi_{2n+1,0}(x)$ равномерно при $n\to\infty$ сходятся на отрезке $[-1,1]$ соответственно к функциям $ab_c(x)$ и $ab_s(x)$, где $c_k = -\frac{d}{\lambda^{k+1}}$. Было также установлено, что если $r = \frac{p}{2^m}$ — фиксированная двоично-рациональная точка, где p — нечетное, то функции $\frac{1}{c_{2n}}\varphi_{2n,k}(x)$, где $\frac{k}{2^{2n-1}} = r$, и $\frac{1}{c_{2n+1}}\varphi_{2n+1,k}(x)$, где $\frac{k}{2^{2n}} = r$, равномерно при $n\to\infty$ сходятся на отрезке $[-1,1]$ соответственно к функциям
$\Phi^c{}_{\frac{p}{2^m}}(x) = ab_c(x-\frac{p}{2^m}) - (ab_c(-1-\frac{p}{2^m})\varphi_{0,-1}(x) + ab_c(-\frac{p}{2^m})\varphi_{0,0}(x) +$
$+ ab_c(1-\frac{p}{2^m})\varphi_{0,1}(x)) - \sum\limits_{j=2}^{m+1}\frac{1}{2^{\frac{j(j-1)}{2}}}\sum\limits_{l=-2^{j-2}}^{2^{j-2}} ab_c\left(\frac{l}{2^{j-1}}-\frac{p}{2^m}\right)\varphi_{j-1,l}(x)$
и
$\Phi^s{}_{\frac{p}{2^m}}(x) = ab_s(x-\frac{p}{2^m}) - (ab_s(-1-\frac{p}{2^m})\varphi_{0,-1}(x) + ab_s(-\frac{p}{2^m})\varphi_{0,0}(x) +$
$+ ab_s(1-\frac{p}{2^m})\varphi_{0,1}(x)) - \sum\limits_{j=2}^{m+1}\frac{1}{2^{\frac{j(j-1)}{2}}}\sum\limits_{l=-2^{j-2}}^{2^{j-2}} ab_s\left(\frac{l}{2^{j-1}}-\frac{p}{2^m}\right)\varphi_{j-1,l}(x).$

Рассмотрим класс функций $H_{\rho,2} = \left\{f \in C^\infty_{[-1,1]} : \left|f^{(n)}(x)\right| \le c(f)\rho^n 2^{n^2}\right\}$. Построение ОРТ для класса $H_{\rho,2}$ было проведено Г.А. Старцем [2, 3, 7].

Пусть

$$N_n = \{-2\cdot4^{n-1}, -2\cdot4^{n-1}+1, \ldots, 2\cdot4^{n-1}-1, 2\cdot4^{n-1}\} \text{ при } n\in N,\ N_0 = \{-1,0,1\};$$

$$x_{n,k} = \frac{k}{2\cdot4^{n-1}} \text{ при } k\in N_n \text{ и } n>0,\ x_{0,k} = k \text{ при } k \in N_0;$$

$$D_0 = \{1;3\}, D_1 = \{1,3,\ldots,15\}, \ldots, D_n = \{1,3,\ldots,4^{n+1}-1\};$$

$$x^*_{n,p} = -1 + \frac{p}{2\cdot4^n} \text{ при } p\in D_n.$$

Введем обозначение $\triangle_h^2(f(x)) = f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)$ – вторая разность с шагом h.

Согласно [2, 7], если $f \in H_{\rho,2}$ $(1 < \rho < 4)$, то

$$f^{(l)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k \in N_n} a_{n,k} \varphi_{n,k}^{(l)}(x) + \sum_{p \in D_n} b_{n,p} \psi_{n,p}^{(l)}(x) \right),$$

где $a_{n,k} = f^{(n)}(x_{n,k})$, $b_{n,p} = \triangle_h^2 \left(f^{(n)}(x_{n,p}^*) \right)$ – вторые разности в точках $x_{n,p}^*$ с шагом $h = \frac{1}{2 \cdot 4^n}$. При этом ряд в правой части сходится равномерно при каждом $l = 0, 1, 2, \ldots$ Функции $\varphi_{n,k}(x)$ и $\psi_{n,p}(x)$ однозначно определяются из условий:

$$\varphi_{n,k}(x) \in H_{1,2}, \ \psi_{n,p}(x) \in H_{1,2},$$

$$\varphi_{n,k}^{(l)}(x_{l,s}) = \delta_n^l \delta_k^s \tag{1}$$

$$\psi_{n,p}^{(l)}(x_{l,s}) = 0 \tag{2}$$

$$\triangle_h^2 \left(\varphi_{n,k}^{(l)}(x_{l,p}^*) \right) = 0 \tag{3}$$

$$\triangle_h^2 \left(\psi_{n,p}^{(l)}(x_{l,q}^*) \right) = \delta_n^l \delta_p^q \tag{4}$$

где вторые разности берутся с шагом $h = \frac{1}{2 \cdot 4^l}$.

ОРТ для неквазианалитических классов H_ρ, $H_{\rho,2}$ позволяют восстанавливать функции f по значениям $f^{(n)}(x)$, $x \in \Lambda_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ с достаточно простыми конечными множествами Λ_n. Отметим также, что с помощью ОРТ можно доказывать теоремы существования и единственности решений краевых задач нового типа для функционально-дифференциальных уравне-ний [1, 8, 9].

Целью данной статьи является изучение поведения при $n \to \infty$ базисных функций $\varphi_{n,0}(x)$ и $\psi_{n,\alpha_n}(x)$, где $\alpha_n = 2 \cdot 4^n - 1$. Наши доказательства аналогичны доказательствам из упомянутой выше работы Рвачёвой.

Для достижения поставленной цели будет использован следующий метод: устанавливается связь базисных функций $\varphi_{n,0}(x)$ и $\psi_{n,\alpha_n}(x)$ с некоторыми вспомогательными функциями, посредством изучения поведения которых при $n \to \infty$ будут исследованы функции $\varphi_{n,0}(x)$ и $\psi_{n,\alpha_n}(x)$.

Построение базисных функций $\varphi_{n,0}(x)$ и $\psi_{n,\alpha_n}(x)$ было проведено с использованием функции

$$mup_2(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{sin^2\left(\frac{2t}{4^k}\right)}{\frac{4t}{4^k} sin\left(\frac{t}{4^k}\right)} dt,$$

которая является финитным решением функционально-дифференциального уравнения

$$y'(x) = 2\left(y(4x+3) - y(4x-1) + y(4x+1) - y(4x-3)\right) \tag{5}$$

В [3] указаны следующие формулы:

$$\varphi_{0,0}(x) = mup_2(x),$$

$$\varphi_{n,0}(x) = \int_{-1}^{x} \left(\frac{1}{4^{n-1}} \varphi_{n-1,0}(4t) + (-1)^n c_n mup_2(4t+1) - c_n mup_2(4t-1) \right) dt,$$

$$\psi_{0,1}(x) = -mup_2(x) + mup_2(x - \frac{1}{2}),$$

$$\psi_{n,\alpha_n}(x) = \int_{-1}^{x} (\psi_{n-1,\alpha_{n-1}}(4t-3) + (-1)^n d_n mup_2(4t-3))\, dt, n > 0,$$

где коэффициенты c_n, d_n определяются из условий $\varphi_{n,0}(0) = 0, \psi_{n,\alpha_n}(0) = 0$. Кроме того, в работе указана возможность представить функции $\varphi_{n,0}(x)$ и $\psi_{n,\alpha_n}(x)$ в виде линейной комбинации сдвигов функции $mup_2(x)$.

В дальнейшем нам понадобятся следующие свойства функции $mup_2(x)$:

1) $supp\, mup_2(x) = [-1, 1]$, при этом $mup_2(x)$ является четной [2];

2) $mup_2(x) \in C^{\infty}_{[-1,1]}$, $\|mup_2^{(k)}\|_{C_{[-1,1]}} = 2^{k^2}$ [2];

3) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} mup_2(x)dx = 1$, а также $mup_2(0) = 1$ [2];

4) функция $mup_2(x)$ на промежутке $[-1, 0]$ монотонно возрастает;

5) производная порядка l функции $mup_2(x)$ может быть найдена по формуле

$$mup_2^{(l)}(x) = 2^{l^2} \sum_{k=1}^{4^l} \delta_k^{(l)} mup_2 \left(4^l x + 4^l - 2k + 1 \right),$$

где $\delta_1^{(l)} = 1$, $\left| \delta_i^{(l)} \right| = 1$ при $i = 2, 3, \ldots, 4^l$ (для нас важно значение только $\delta_1^{(l)}$);

6) $mup_2(-1) = mup_2(1) = 0$, $mup_2^{(l)} \left(\frac{2s}{4^l} \right) = 0$, где $s \in \left\{ -\frac{4^l}{2}, -\frac{4^l}{2} + 1, \ldots, \frac{4^l}{2} \right\}$;

7) $\triangle_h^2 \left(mup_2^{(l)} \left(\frac{s}{2 \cdot 4^l} \right) \right) = 0$ с шагом $h = \frac{1}{2 \cdot 4^l}$, $s \in \left\{ -2 \cdot 4^l + 1, \ldots, 2 \cdot 4^l - 1 \right\}$, $s \neq 2k$, $k \in Z$, $l = 0, 1, 2, \ldots$;

8) значения функции $mup_2(x)$ в точках вида $-1 + \frac{1}{4^k}$ и $-1 + \frac{1}{2 \cdot 4^k}$ вычисляются по формулам: $mup_2 \left(-1 + \frac{1}{4^k} \right) = \frac{\nu_{k-1}}{2^{k^2}(k-1)!}$ и

$$mup_2 \left(-1 + \frac{1}{2 \cdot 4^k} \right) = \frac{1}{2^{(k+1)^2}} \sum_{s=0}^{k} \frac{\mu_s}{s!(k-s)!},$$

где $\nu_k = \int\limits_0^1 x^k mup_2(x)dx$, $\mu_s = \int\limits_{-1}^1 x^s mup_2(x)dx$;

9) величины $\nu_k = \int\limits_0^1 x^k mup_2(x)dx$, $\mu_s = \int\limits_{-1}^1 x^s mup_2(x)dx$ могут быть найдены

по следующим формулам: $\mu_0 = 1$, $\mu_{2n-1} = 0$,

$$\mu_{2n} = \frac{(2n)!}{4(4^{2n}-1)} \sum_{k=1}^{n} \frac{1+3^{2k+1}}{(2n-2k)!(2k+1)!} \mu_{2n-2k},$$

$$\nu_{2n} = \frac{1}{2}\mu_{2n}, \ \nu_{2n-1} = \frac{1}{4^{2n+1}} \sum_{l=0}^{n} \frac{(2n)!(1+3^{2l})}{(2n-2l)!(2l)!} \mu_{2n-2l}.$$

Свойства 4)–9) взяты из диссертации Г.А. Старца [11]. Для полноты изложения приведем краткую форму доказательства этих свойств.

Докажем свойство 4). Пусть $p_1(x) = \begin{cases} 1, \ x \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right] \\ \frac{1}{2}, \ x \in \left(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}\right) \bigcup \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) \\ 0, \ |x| \geq \frac{3}{4} \end{cases}$ и $p_{s+1}(x) = 4p_s(4x)$, где $s = 1, 2, \ldots$. Рассмотрим последовательность независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_s, \ldots$, имеющих плотности $p_1(x), p_2(x), \ldots, p_s(x), \ldots$. Далее, для каждого $k \in N$ положим $Y_k = \sum\limits_{i=1}^{k} X_i$. Характеристическая функция случайной величины Y_k имеет вид $\varphi_k(t) = \prod\limits_{j=1}^{k} \frac{sin^2\left(\frac{2t}{4^j}\right)}{\frac{4t}{4^j} sin\left(\frac{t}{4^j}\right)}$. Согласно теореме Леви (см., напр., [12], с. 114), функция $F(t) = \lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k(t)$ является характеристической функцией случайной величины Y, к которой по распределению сходятся случайные величины Y_k при $k \longrightarrow \infty$. Поскольку $F(t)$ — преобразование Фурье функции $mup_2(x)$ (это получается путем применения преобразования Фурье к функционально-дифференциальному уравнению (20)), $mup_2(x)$ является плотностью распределения случайной величины Y. Поэтому $mup_2(x)$ неотрицательна. Исходя из уравнения (20) и того, что $supp\ mup_2(x) = [-1, 1]$, получаем $mup_2{}'(x) \geq 0$ при $x \in [-1, 0]$, а из этого следует, что на промежутке $[-1, 0]$ функция $mup_2(x)$ возрастает.

Свойства 5) и 6) получаются из уравнения (20) последовательным дифференцированием.

Докажем свойство 8). Для этого воспользуемся формулой Тейлора с остатком в интегральной форме. Так как $mup_2^{(l)}(-1) = 0$, имеем $mup_2\left(-1 + \frac{1}{2\cdot 4^k}\right) = \frac{1}{k!} \int\limits_{-1}^{-1+\frac{1}{2\cdot 4^k}} \left(-1 + \frac{1}{2\cdot 4^k} - t\right)^k \cdot mup_2^{(k+1)}(t)dt$. После проведения некоторых преобразований с использованием свойства 5) получим, что

$$mup_2\left(-1 + \frac{1}{2\cdot 4^k}\right) = \frac{1}{2^{(k+1)^2}k!} \int_{-1}^{1} (x+1)^k mup_2(x)dx,$$

откуда следует, что

$$mup_2\left(-1 + \frac{1}{2\cdot 4^k}\right) = \frac{1}{2^{(k+1)^2}} \sum_{s=0}^{k} \frac{\mu_s}{s!(k-s)!}.$$

Аналогично получается равенство

$$mup_2\left(-1+\frac{1}{4^k}\right)=\frac{1}{2^{k^2}(k-1)!}\int\limits_0^1 x^{k-1}mup_2(x)dx.$$

Докажем свойство 9). Равенство $\mu_0=1$ следует из свойства 3). Так как функция $mup_2(x)$ является четной (свойство 1)), то $\mu_{2n-1}=0$.

Преобразование Фурье $F(t)=\prod\limits_{k=1}^{\infty}\frac{sin^2\left(\frac{2t}{4^k}\right)}{\frac{4t}{4^k}sin\left(\frac{t}{4^k}\right)}$ функции $mup_2(x)$ удовлетворяет равенству

$$F(t)=\frac{1}{t}\left(sin\left(\frac{3}{4}t\right)+sin\left(\frac{t}{4}\right)\right)\cdot F\left(\frac{t}{4}\right).$$

Разложим левую и правую части данного равенства в ряд Маклорена и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях t. Получаем

$$\frac{F^{(2n)}(0)}{(2n)!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k(1+3^{2k+1})}{(2k+1)!4^{2n+1}(2n-2k)!}F^{(2n-2k)}(0)$$

для любого $n=0,1,2,\ldots$. В силу того, что $F^{(n)}(0)=i^n\int\limits_{-1}^{1}x^n mup_2(x)dx$ при $n=0,1,2,\ldots$, имеем $F^{(2n)}(0)=(-1)^n\mu_{2n}$. Следовательно,

$$\mu_{2n}=\frac{(2n)!}{4(4^{2n}-1)}\sum_{k=1}^{n}\frac{1+3^{2k+1}}{(2n-2k)!(2k+1)!}\mu_{2n-2k}.$$

Так как функция $mup_2(x)$ является четной, имеем $\nu_{2n}=\frac{1}{2}\mu_{2n}$.

Формула $\nu_{2n-1}=\frac{1}{4^{2n+1}}\sum\limits_{l=0}^{n}\frac{(2n)!(1+3^{2l})}{(2n-2l)!(2l)!}\mu_{2n-2l}$ получается интегрированием по частям.

Докажем теперь свойство 7). Согласно свойству 8)

$$mup_2\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}mup_2(x)dx.$$

В силу свойств 1) и 3)

$$mup_2\left(-\frac{1}{2}\right)=mup_2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2},$$

откуда следует $\triangle_{\frac{1}{2}}\left(mup_2(-\frac{1}{2})\right)=\triangle_{\frac{1}{2}}\left(mup_2(-\frac{1}{2})\right)=0$.

Пусть $l>0$. Тогда вторая разность с шагом $h=\frac{1}{2\cdot 4^l}$ с учетом свойства 5) представляется в виде $\triangle_h^2\left(mup_2^{(l)}\left(\frac{s}{2\cdot 4^l}\right)\right)=2^{l^2}\sum\limits_{k=1}^{4^l}\delta_k^{(l)}\triangle_{\frac{1}{2}}^2 mup_2\left(\frac{s+2\cdot 4^l-4k+2}{2}\right)$, где каждое слагаемое является второй разностью с шагом $\frac{1}{2}$. В силу свойства 1) величина $\triangle_h^2\left(mup_2^{(l)}\left(\frac{s}{2\cdot 4^l}\right)\right)$ является линейной комбинацией $\triangle_{\frac{1}{2}}^2\left(mup_2\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ и $\triangle_{\frac{1}{2}}^2\left(mup_2\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$, которые в свою очередь равны нулю. Таким образом, свойство 7) доказано.

Получение асимптотики для $\varphi_{n,0}$

Введем в рассмотрение следующие функции: для $x \in [-1, 0]$

$$\tilde{\varphi}_0(x) = mup_2(x)$$

и

$$\tilde{\varphi}_n(x) = mup_2\left(x - 1 + \frac{1}{4^n}\right) + \sum_{s=0}^{n-1} x_{n-s-1} mup_2\left(x - 1 + \frac{1}{2\cdot 4^s}\right),$$

$n = 1, 2, \ldots$, где коэффициенты x_i удовлетворяют бесконечной треугольной системе линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} mup_2\left(-1+\frac{1}{4}\right) + x_0 mup_2\left(-1+\frac{1}{2}\right) = 0, \\ mup_2\left(-1+\frac{1}{4^2}\right) + x_1 mup_2\left(-1+\frac{1}{2}\right) + x_0 mup_2\left(-1+\frac{1}{2\cdot 4}\right) = 0, \\ \ldots \\ mup_2\left(-1+\frac{1}{4^n}\right) + x_{n-1} mup_2\left(-1+\frac{1}{2}\right) + x_{n-2} mup_2\left(-1+\frac{1}{2\cdot 4}\right) + \\ \quad + \ldots + x_0 mup_2\left(-1+\frac{1}{2\cdot 4^{n-1}}\right) = 0, \\ \ldots \end{cases} \tag{6}$$

Так как $mup_2\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, то указанная система имеет единственное решение.

На промежуток $[0, 1]$ функции $\tilde{\varphi}_n$ с четными номерами n продолжим четным образом, с нечетными номерами — нечетным образом. Это необходимо для того, чтобы данные функции были бесконечно дифференци-руемыми на $[-1, 1]$.

Установим связь между функциями $\varphi_{n,0}(x)$ и $\tilde{\varphi}_n(x)$. Для этого нам понадобятся некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Для любых $l \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, $s \in \{k \in N_l : \ k \le 0\}$ и $n \in N$ имеют место равенства*

$$mup_2^{(l)}\left(x_{l,s} - 1 + \frac{1}{4^n}\right) = \begin{cases} 2^{l^2} mup_2(-1 + \frac{1}{4^{n-l}}), \textit{если } \ l \le n \textit{ и } \ s = 0, \\ 0, \textit{во всех других случаях.} \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $l = 0$. В этом случае $s \in \{-1; 0\}$. Для $s = 0$ указанное в лемме равенство выполняется. Если $s = -1$, то в силу свойства 1) функции $mup_2(x)$ верно $mup_2(-2 + \frac{1}{4^n}) = 0$ для любого $n \in N$.

Пусть $l > 0$. Напомним, что в этом случае $x_{l,s} = \frac{s}{2\cdot 4^{l-1}}$.

Свойство 5) функции $mup_2(x)$ дает

$$mup_2^{(l)}\left(x_{l,s}-1+\frac{1}{4^n}\right)=2^{l^2}\sum_{k=1}^{4^l}\delta_k^{(l)}mup_2\left(2s+\frac{1}{4^{n-l}}-2k+1\right).$$

Если $k>1$, то при любых $s\in\{-2\cdot 4^{l-1},-2\cdot 4^{l-1}+1,\ldots,0\}$ и $n\in N$ точка $2s+\frac{1}{4^{n-l}}-2k+1$ лежит вне интервала $(-1,1)$. Поэтому в силу свойства 1) функции $mup_2(x)$ имеет место

$$mup_2^{(l)}\left(x_{l,s}-1+\frac{1}{4^n}\right)=2^{l^2}mup_2\left(2s+\frac{1}{4^{n-l}}-1\right).$$

Так как точка $2s+\frac{1}{4^{n-l}}-1$ принадлежит интервалу $(-1,1)$ только в том случае, когда $s=0$ и $l\le n$, то верны равенства

$$mup_2^{(l)}\left(x_{l,s}-1+\tfrac{1}{4^n}\right)=\begin{cases}2^{l^2}mup_2(-1+\frac{1}{4^{n-l}}), \text{если}\quad l\le n \text{ и } \ s=0,\\ 0, \text{во всех остальных случаях.}\end{cases}$$

Итак, лемма 1 доказана.

Аналогично можно доказать следующее утверждение.

Лемма 2. *Для любых $l\in\{0,1,2,\ldots\}$, $s\in\{k\in N_l:\ k\le 0\}$ и $j\in N$ имеют место равенства*

$$mup_2^{(l)}\left(x_{l,s}-1+\frac{1}{2\cdot 4^j}\right)=\begin{cases}2^{l^2}mup_2(-1+\frac{1}{2\cdot 4^{j-l}}), \textit{если}\quad l\le j \ \textit{и}\ \ s=0,\\ 0, \textit{во всех других случаях.}\end{cases}$$

Лемма 3. *Для любых $n\in\{0,1,2,\ldots\}$, $l\in\{0,1,2,\ldots\}$ и $s\in N_l$ верно*

$$\tilde\varphi_n^{(l)}(x_{l,s})=2^{n^2}\delta_n^l\delta_0^s.$$

Доказательство. Так как $\tilde\varphi_0(x)=mup_2(x)$, то в силу свойств 3) и 6) функции $mup_2(x)$ выполняется $\tilde\varphi_0^{(l)}(x_{l,s})=2^{n^2}\delta_0^l\delta_0^s$ для любых $l\in\{0,1,2,\ldots\}$ и $s\in N_l$.

Рассмотрим любое $n\in N$.

Если $l=n$ и $x_{l,s}=0$, то в силу лемм 1 и 2 получаем

$$\tilde\varphi_n^{(l)}(0)=2^{l^2}mup_2(0)=2^{n^2}.$$

Если $l<n$ и $x_{l,s}=0$, то следствием лемм 1 и 2 является

$$\tilde\varphi_n^{(l)}(0)=2^{l^2}\left(mup_2\left(-1+\frac{1}{4^{n-l}}\right)+\sum_{j=l}^{n-1}x_{n-j-1}mup_2\left(-1+\frac{1}{2\cdot 4^{j-l}}\right)\right).$$

Значит, в силу (21) получаем $\tilde\varphi_n^{(l)}(0)=0$.

Во всех остальных случаях из лемм 1 и 2 следует $\tilde\varphi_n^{(l)}(x_{l,s})=0$.

Итак, лемма доказана.

Лемма 4. *Для любых $n \in N$, $l \in \{0,1,2,\ldots\}$ и $p \in D_l$ имеют место равенства*

$$\triangle_h^2\left(mup_2^{(l)}\left(x_{l,p}^* - 1 + \frac{1}{4^n}\right)\right) = \begin{cases} 2^{l^2} mup_2\left(-1 + \frac{1}{4^{n-l}}\right), \ l < n \text{ и } p = 2\cdot 4^l \pm 1, \\ 0, \ \text{во всех остальных случаях,} \end{cases}$$

где вторые разности берутся с шагом $h = \frac{1}{2\cdot 4^l}$.

Доказательство. Рассмотрим любое $n \in N$.

Далее будем рассматривать $x_{l,p}^* \le 0$ (напомним, что $x_{l,p}^* = -1 + \frac{p}{2\cdot 4^l}$). В этом случае $p \le 2\cdot 4^l$, а так как $p \ne 0 (mod\ 2)$, имеем $p \le 2\cdot 4^l - 1$.

Возможны 6 случаев:

$l > n$ и $p \ge 1 + 2\cdot 4^l - 2\cdot 4^{l-n}$;

$l > n$ и $p < 1 + 2\cdot 4^l - 2\cdot 4^{l-n}$;

$l = n$ и $p = 2\cdot 4^n - 1$;

$l = n$ и $p < 2\cdot 4^n - 1$;

$l < n$ и $p = 2\cdot 4^l - 1$;

$l < n$ и $p < 2\cdot 4^l - 1$.

Рассмотрим каждый из этих случаев.

а) $l > n$ и $p \ge 1 + 2\cdot 4^l - 2\cdot 4^{l-n}$. В этом случае

$$x_{l,p}^* - 1 + \frac{1}{4^n} = \frac{p - 2\cdot 4^l + 2\cdot 4^{l-n} - 2\cdot 4^l}{2\cdot 4^l}.$$

Далее, $0 \ge p - 4^{l+1} + 2\cdot 4^{l-n} \ge 1 + 2\cdot 4^l - 2\cdot 4^{l-n} - 4^{l+1} + 2\cdot 4^{l-n} = -2\cdot 4^l + 1$. Поэтому согласно свойству 7) функции $mup_2(x)$ имеем $\triangle_h^2\left(mup_2^{(l)}\left(x_{l,p}^* - 1 + \frac{1}{4^n}\right)\right) = 0$.

б) $l > n$ и $p < 1 + 2\cdot 4^l - 2\cdot 4^{l-n}$. Тогда $p \le 2\cdot 4^l - 2\cdot 4^{l-n}$, а так как $p \ne 0 (mod\ 2)$, получим $p \le 2\cdot 4^l - 2\cdot 4^{l-n} - 1$, поэтому $\triangle_h^2\left(mup_2^{(l)}\left(x_{l,p}^* - 1 + \frac{1}{4^n}\right)\right) = mup_2^{(l)}\left(x_{l,p}^* - 1 + \frac{1}{4^n} + h\right) -$ $- 2\cdot mup_2^{(l)}\left(x_{l,p}^* - 1 + \frac{1}{4^n}\right) + mup_2^{(l)}\left(x_{l,p}^* - 1 + \frac{1}{4^n} - h\right)$.

Далее, $x_{l,p}^* - 1 + \frac{1}{4^n} - h < x_{l,p}^* - 1 + \frac{1}{4^n} < x_{l,p}^* - 1 + \frac{1}{4^n} + h = \frac{p - 2\cdot 4^l + 1}{2\cdot 4^l} - 1 + \frac{1}{4^n} =$ $= \frac{1 + p - 2\cdot 4^l - 2\cdot 4^l + 2\cdot 4^{l-n}}{2\cdot 4^l} \le \frac{1 + 2\cdot 4^l - 2\cdot 4^{l-n} - 1 - 2\cdot 4^l - 2\cdot 4^l + 2\cdot 4^{l-n}}{2\cdot 4^l} = -1$. Поэтому в силу свойств 1), 5) и 6) функции $mup_2(x)$ выполняется $\triangle_h^2\left(mup_2^{(l)}\left(x_{l,p}^* - 1 + \frac{1}{4^n}\right)\right) = 0$.

в) $l = n$ и $p = 2\cdot 4^n - 1$. Тогда $mup_2^{(n)}\left(x_{l,p}^* - 1 + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{2\cdot 4^n}\right) =$ $= mup_2^{(n)}\left(\frac{2\cdot 4^n - 1 - 2\cdot 4^n}{2\cdot 4^n} - 1 + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{2\cdot 4^n}\right) = mup_2^{(n)}\left(-1 + \frac{1}{4^n}\right) =$ $= 2^{n^2} \sum_{k=1}^{4^n} \delta_k^{(n)} mup_2\left(4^n\left(-1 + \frac{1}{4^n}\right) + 4^n - 2k + 1\right) = 2^{n^2} \sum_{k=1}^{4^n} \delta_k^{(n)} mup_2(2 - 2k)$.

В силу свойства 1) функции $mup_2(x)$ имеем

$$mup_2(2 - 2k) = \begin{cases} 1, \ k = 1, \\ 0, \ k > 1. \end{cases}$$

Следовательно, в силу свойства 3) имеем $mup_2^{(n)}\left(x^*_{l,p}-1+\frac{1}{4^n}+h\right)=2^{n^2}$.

Далее, $mup_2^{(n)}\left(x^*_{l,p}-1+\frac{1}{4^n}\right)=mup_2^{(n)}\left(-1+\frac{1}{2\cdot 4^n}\right)=$

$=2^{n^2}\sum\limits_{k=1}^{4^n}\delta_k^{(n)}mup_2\left(4^n\left(-1+\frac{1}{2\cdot4^n}\right)+4^n-2k+1\right)=$

$=2^{n^2}\sum\limits_{k=1}^{4^n}\delta_k^{(n)}mup_2\left(\frac{1}{2}-2k+1\right)$. В силу свойства 1) функции $mup_2(x)$

$$mup_2\left(-2k+1+\frac{1}{2}\right)=\begin{cases}mup_2\left(-\frac{1}{2}\right), & k=1\\ 0, & k>1.\end{cases}$$

Из свойств 3) и 8) следует, что $mup_2\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}mup_2(x)dx=\frac{1}{2}$. Поэтому $mup_2^{(n)}\left(x^*_{l,p}-1+\frac{1}{4^n}\right)=\frac{1}{2}\cdot 2^{n^2}$.

$x^*_{l,p}-1+\frac{1}{4^n}-h=\frac{2\cdot4^n-1-2\cdot4^n}{2\cdot4^n}-1+\frac{1}{4^n}-\frac{1}{2\cdot4^n}=-1$. Согласно свойству 6) $mup_2^{(n)}\left(x^*_{l,p}-1+\frac{1}{4^n}-h\right)=0$.

Таким образом, $\triangle_h^2\left(mup_2^{(n)}\left(x^*_{n,p}-1+\frac{1}{4^n}\right)\right)=2^{n^2}\cdot\left(1-2\cdot\frac{1}{2}\right)=0$.

г) $l=n$ и $p<2\cdot4^n-1$. В этом случае равенство $\triangle_h^2\left(mup_2^{(n)}\left(x^*_{n,p}-1+\frac{1}{4^n}\right)\right)=0$ доказывается так же, как и в случае б).

д) $l<n$ и $p=2\cdot4^l-1$. Тогда $mup_2^{(l)}\left(x^*_{l,p}-1+\frac{1}{4^n}+h\right)=$

$=mup_2^{(l)}\left(-1+\frac{1}{4^n}\right)=2^{l^2}\sum\limits_{k=1}^{4^l}\delta_k^{(l)}mup_2\left(4^l\left(-1+\frac{1}{4^n}\right)+4^l-2k+1\right)=$

$=2^{l^2}\sum\limits_{k=1}^{4^l}\delta_k^{(l)}mup_2\left(-2k+1+\frac{1}{4^{n-l}}\right)$.

В силу свойства 1) функции $mup_2(x)$ имеем:

$$mup_2\left(\frac{1}{4^{n-l}}-2k+1\right)=\begin{cases}mup_2\left(-1+\frac{1}{4^{n-l}}\right), & k=1,\\ 0, & k>1.\end{cases}$$

Значит, $mup_2^{(l)}\left(x^*_{l,p}-1+\frac{1}{4^n}+h\right)=2^{l^2}mup_2\left(-1+\frac{1}{4^{n-l}}\right)$.

$x^*_{l,p}-1+\frac{1}{4^n}-h<x^*_{l,p}-1+\frac{1}{4^n}=\frac{2\cdot4^l-1-2\cdot4^l}{2\cdot4^l}-1+\frac{1}{4^n}=-1+\frac{1}{4^n}-\frac{1}{2\cdot4^l}\le-1$.

Поэтому $\triangle_h^2\left(mup_2^{(l)}\left(x^*_{l,p}-1+\frac{1}{4^n}\right)\right)=2^{l^2}mup_2\left(-1+\frac{1}{4^{n-l}}\right)$.

е) $l<n$ и $p<2\cdot4^l-1$. В этом случае равенство $\triangle_h^2\left(mup_2^{(n)}\left(x^*_{n,p}-1+\frac{1}{4^n}\right)\right)=0$ доказывается так же, как и в случае б).

Таким образом, при $x^*_{l,p}\le0$ верно

$$\triangle_h^2\left(mup_2^{(l)}\left(x^*_{l,p}-1+\frac{1}{4^n}\right)\right)=\begin{cases}2^{l^2}mup_2\left(-1+\frac{1}{4^{n-l}}\right), & l<n \text{ и } p=2\cdot4^l-1,\\ 0, & \text{во всех остальных случаях,}\end{cases}$$

Применяя аналогичные рассуждения, можно доказать, что при $x^*_{l,p} \geq 0$ имеет место

$$\triangle_h^2\left(\mathit{mup}_2^{(l)}\left(x^*_{l,p}-1+\frac{1}{4^n}\right)\right)=\begin{cases}2^{l^2}\mathit{mup}_2\left(-1+\frac{1}{4^{n-l}}\right), & l<n \text{ и } p=2\cdot 4^l+1,\\ 0, \text{ во всех остальных случаях.}\end{cases}$$

Итак, лемма доказана.

Аналогично можно доказать следующее утверждение:

Лемма 5. *Для любых* $s \in \{0,1,2,\ldots\}$, $l \in \{0,1,2,\ldots\}$ *и* $p \in D_l$ *имеет место*

$$\triangle_h^2\left(\mathit{mup}_2^{(l)}\left(x^*_{l,p}-1+\frac{1}{2\cdot 4^s}\right)\right)=\begin{cases}2^{l^2}\mathit{mup}_2\left(-1+\frac{1}{2\cdot 4^{s-l}}\right), & l\leq n, p=2\cdot 4^l\pm 1,\\ 0, \text{ во всех остальных случаях,}\end{cases}$$

где вторые разности берутся с шагом $h=\frac{1}{2\cdot 4^l}$.

Лемма 6. *Для любых* $s \in \{0,1,2,\ldots\}$, $l \in \{0,1,2,\ldots\}$ *и* $p \in D_l$ *верно* $\triangle_h^2\left(\tilde{\varphi}_n^{(l)}\left(x^*_{l,p}\right)\right)=0$.

Доказательство. Так как $\tilde{\varphi}_0(x)=\mathit{mup}_2(x)$, то в силу свойств 3) и 7) функции $\mathit{mup}_2(x)$ выполняется $\triangle_h^2\left(\tilde{\varphi}_0^{(l)}\left(x^*_{l,p}\right)\right)=0$.

Рассмотрим любое $n \in N$. Пусть $x^*_{l,p} \leq 0$, то есть $p \leq 2\cdot 4^l$, а так как $p \neq 0(\mathit{mod}\ 2)$, имеем $p \leq 2\cdot 4^l-1$. Тогда $x^*_{l,p}+h=-1+\frac{p}{2\cdot 4^l}+\frac{1}{2\cdot 4^l}\leq 0$. Значит, $\triangle_h^2\left(\tilde{\varphi}_n^{(l)}\left(x^*_{l,p}\right)\right)=$

$$=\triangle_h^2\left(\mathit{mup}_2^{(l)}\left(x^*_{l,p}-1+\tfrac{1}{4^n}\right)\right)+\sum_{s=0}^{n-1}x_{n-s-1}\triangle_h^2\left(\mathit{mup}_2^{(l)}\left(x^*_{l,p}-1+\tfrac{1}{2\cdot 4^s}\right)\right).$$

Из лемм 4 и 5 следует

$$\triangle_h^2\left(\tilde{\varphi}_n^{(l)}\left(x^*_{l,p}\right)\right)=\begin{cases}2^{l^2}\left(\mathit{mup}_2\left(-1+\frac{1}{4^{n-l}}\right)+\sum\limits_{s=l}^{n-1}x_{n-s-1}\mathit{mup}_2\left(-1+\frac{1}{2\cdot 4^{s-l}}\right)\right),\\ \qquad \text{если } l<n \text{ и } p=2\cdot 4^l-1;\\ 0, \text{ во всех других случаях.}\end{cases}$$

Используя систему уравнений (21), получаем следующее: если $l<n$ и $p=2\cdot 4^l-1$, то $\triangle_h^2\left(\tilde{\varphi}_n^{(l)}\left(x^*_{l,p}\right)\right)=0$. Значит, $\triangle_h^2\left(\tilde{\varphi}_n^{(l)}\left(x^*_{l,p}\right)\right)=0$ при $x^*_{l,p}\leq 0$.

Аналогичным образом можно показать, что $\triangle_h^2\left(\tilde{\varphi}_n^{(l)}\left(x^*_{l,p}\right)\right)=0$ при $x^*_{l,p}\geq 0$.

Итак, лемма доказана.

Теперь сформулируем теорему, которая устанавливает связь между $\varphi_{n,0}(x)$ и $\tilde{\varphi}_n(x)$.

Теорема 1. *Для любого* $n \in \{0,1,2,\ldots\}$ *имеет место*

$$\tilde{\varphi}_n(x)\equiv 2^{n^2}\varphi_{n,0}(x).$$

Доказательство. Рассмотрим произвольное $n \in \{0,1,2,\ldots\}$.

Из свойства 2) функции $mup_2(x)$ следует, что $\tilde{\varphi}_n \in H_{1,2}$.

Кроме того, леммы 3 и 6 дают следующее:

а) $\tilde{\varphi}_n^{(l)}(x_{l,s}) = 2^{n^2}\delta_n^l \delta_0^s$,

б) $\triangle_h^2\left(\tilde{\varphi}_n^{(l)}\left(x_{l,p}^*\right)\right) = 0$.

Согласно теореме 2 из [2] справедливо $\tilde{\varphi}_n(x) \equiv 2^{n^2}\varphi_{n,0}(x)$.

Итак, теорема доказана.

Теперь, когда связь между $\tilde{\varphi}_n(x)$ и $\varphi_{n,0}(x)$ установлена, исследуем поведение функций $\tilde{\varphi}_n(x)$ при $n \to \infty$. Для этого мы будем использовать систему уравнений (21).

Положим $\zeta_k = mup_2\left(-1 + \frac{1}{2\cdot 4^k}\right)$ и $\eta_s = mup_2\left(-1 + \frac{1}{4^{s+1}}\right)$. В этих обозначениях система (21) принимает вид:

$$\begin{cases} \eta_0 + x_0\zeta_0 = 0, \\ \eta_1 + x_1\zeta_0 + x_0\zeta_1 = 0, \\ \ldots \\ \eta_{n-1} + x_{n-1}\zeta_0 + x_{n-2}\zeta_1 + \ldots + x_0\zeta_{n-1} = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Рассмотрим функции $\Lambda(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \eta_k z^k$ и $\Phi(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \zeta_k z^k$.

Пусть $V(z) = -\frac{\Lambda(z)}{\Phi(z)}$. Разложим функцию $V(z)$ в ряд Маклорена:

$$V(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^k.$$

Тогда из равенства $\Lambda(z) + \Phi(z)V(z) = 0$ следует, что коэффициенты x_k разложения $V(z)$ будут удовлетворять системе (22).

Из свойств 8) и 9) функции $mup_2(x)$ следует, что коэффициенты η_k и ζ_k функций $\Lambda(z)$ и $\Phi(z)$ можно вычислять точно. Вместе с наличием удобных оценок для этих коэффициентов это позволяет вычислять первые корни функции $\Phi(z)$ с произвольной точностью. Если обозначить через $z_1, z_2, \ldots$ корни $\Phi(z)$, расположенные в порядке возростания модулей, то вычисления с точностью 10^{-6} дают $\lambda = z_1 = -9,617232$, $z_2 = -58,870525$ и $z_3 = -311,828551$. Кроме того, с точностью 10^{-6} получаем $\Lambda(\lambda) = 0,160084$. Значит, функция $V(z)$ в круге $|z| \leq 58$ имеет единственный полюс λ (первого порядка). Для нас важна величина $d = Res_\lambda V(z) = -\frac{\Lambda(\lambda)}{\Phi'(\lambda)}$. С точностью 10^{-6} имеем $d = -3,827878$.

Мы получили, что функция $\mu(z) = V(z) - \frac{d}{z-\lambda}$ является аналитической для $|z| \leq 58$:

$$\mu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k z^k, \text{ где } |u_k| \leq \frac{M}{58^k},\ M = max_{|z|=58}|\mu(z)|.$$

С точностью 10^{-6} получаем $M = 3,59482$.

С другой стороны, в круге $|z| < |\lambda|$

$$\frac{d}{z-\lambda} = -\frac{d}{\lambda}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{\lambda}} = -\frac{d}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{\lambda}\right)^k.$$

Значит, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x_k z^k = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{d}{\lambda^{k+1}} + u_k\right) z^k,\ |z| < |\lambda|$, то есть асимптотика для x_k имеет вид:

$$x_k = -\frac{d}{\lambda^{k+1}} + u_k,\ |u_k| \leq \frac{M}{58^k} \tag{8}$$

Для того, чтобы описать поведение функций $\tilde{\varphi}_n(x)$ при $n \longrightarrow \infty$, нам понадобится функция $ab_2(x)$. На сегменте $[-1, 0]$ функцию $ab_2(x)$ определим формулой

$$ab_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k mup_2\left(x - 1 + \frac{1}{2\cdot 4^k}\right).$$

Далее, пусть $ab_{2,c}(x)$ — это функция $ab_2(x)$, четно продленная на $[-1, 1]$, а $ab_{2,s}(x) - ab_2(x)$, продленная на $[-1, 1]$ нечетно.

Кроме того, мы будем использовать функцию

$$h_n(x) = \tilde{\varphi}_n(x) - mup_2\left(x - 1 + \frac{1}{4^n}\right),$$

которая определена на отрезке $[-1, 0]$. В силу определения функции $\tilde{\varphi}_n(x)$ справедливо

$$h_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x_{k-1} mup_2\left(x - 1 + \frac{1}{2\cdot 4^{n-k}}\right).$$

Лемма 7. *Для любых* $x \in \left[-1, -\frac{1}{2\cdot 4^n}\right]$ *и* $n \in N$

$$\left|ab_2(x) - \frac{1}{c_n}h_n(x)\right| \leq C\cdot\frac{n\cdot|\lambda|^n}{32^n},\ \textit{где}\ c_n = -\frac{d}{\lambda^{n+1}}.$$

Доказательство. Пусть $x \in \left[-1, -\frac{1}{2\cdot 4^n}\right]$.

Из свойства 1) функции $mup_2(x)$ следует, что

$$ab_2(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\lambda^k mup_2\left(x - 1 + \frac{1}{2\cdot 4^k}\right).$$

$\left|ab_2(x) - \frac{1}{c_n}h_n(x)\right| =$

$= \left|\sum\limits_{k=0}^{n-1}\lambda^k mup_2\left(x - 1 + \frac{1}{2\cdot 4^k}\right) - \frac{1}{c_n}\sum\limits_{k=1}^{n}(c_k + u_k) mup_2\left(x - 1 + \frac{1}{2\cdot 4^{n-k}}\right)\right| =$

$= \left|\sum\limits_{k=0}^{n-1}\lambda^k mup_2\left(x - 1 + \frac{1}{2\cdot 4^k}\right) - \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{c_k}{c_n} mup_2\left(x - 1 + \frac{1}{2\cdot 4^{n-k}}\right) -\right.$

$-\frac{1}{c_n}\sum\limits_{k=1}^{n} u_k mup_2\left(x-1+\frac{1}{2\cdot 4^{n-k}}\right)| = |\sum\limits_{k=0}^{n-1}\lambda^k mup_2\left(x-1+\frac{1}{2\cdot 4^k}\right) -$
$-\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda^{n-k} mup_2\left(x-1+\frac{1}{2\cdot 4^{n-k}}\right)-\frac{1}{c_n}\sum\limits_{k=1}^{n} u_k mup_2\left(x-1+\frac{1}{2\cdot 4^{n-k}}\right)| =$
$=\left|\frac{1}{c_n}\sum\limits_{k=1}^{n} u_k mup_2\left(x-1+\frac{1}{2\cdot 4^{n-k}}\right)\right|$. Значит, при $x\in\left[-1,-\frac{1}{2\cdot 4^n}\right]$

$$\left|ab_2(x)-\frac{1}{c_n}h_n(x)\right|\le\frac{1}{|c_n|}\sum_{k=1}^{n}\left|mup_2\left(x-1+\frac{1}{2\cdot 4^{n-k}}\right)\right|\frac{M}{58^k}.$$

Так как $mup_2(x)$ монотонно возрастает на $[-1,0]$ (свойство 4)), то для $x\in\left[-1,-\frac{1}{2\cdot 4^n}\right]$ имеет место

$$\left|mup_2\left(x-1+\frac{1}{2\cdot 4^{n-k}}\right)\right|\le mup_2\left(-1+\frac{1}{2\cdot 4^{n-k}}\right)\le mup_2\left(-1+\frac{1}{4^{n-k}}\right).$$

Если $k\le n-1$, то согласно свойству 8):

$$mup_2\left(-1+\frac{1}{4^{n-k}}\right)=\frac{\nu_{n-k-1}}{2^{(n-k)^2}(n-k-1)!},\text{ где }\nu_{n-k-1}=\int\limits_0^1 x^{n-k-1}mup_2(x)dx.$$

Из свойств 3) и 4) следует $\nu_{n-k-1}\le 1$. Поэтому при $k\le n-1$ выполняется $\left|mup_2\left(x-1+\frac{1}{2\cdot 4^{n-k}}\right)\right|\le\frac{1}{2^{(n-k)^2}}$.

При $k=n$ имеем $\left|mup_2\left(x-1+\frac{1}{2\cdot 4^{n-k}}\right)\right|\le mup_2\left(-\frac{1}{2}\right)\le mup_2(0)=1$ (согласно свойству 3) функции $mup_2(x)$). Следовательно, $\left|ab_2(x)-\frac{1}{c_n}h_n(x)\right|\le$ $\le\frac{1}{|c_n|}\left(\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2^{(n-k)^2}}\cdot\frac{M}{58^k}+\frac{M}{58^n}\right)=\frac{M}{|c_n|}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{2^{-(n-k)^2}}{58^k}\le\frac{M}{|c_n|}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{2^{-(n-k)^2}}{32^k}=$ $=\frac{M}{|c_n|}\sum\limits_{k=1}^{n}2^{-(n-k)^2-5k}$. Заметим, что $max_k(-(n-k)^2-5k)$ достигается при $k=\ n-\frac{5}{2}$. Значит, $\left|ab_2(x)-\frac{1}{c_n}h_n(x)\right|\le\frac{M}{|c_n|}\sum\limits_{k=1}^{n}2^{-\left(\left(\frac{5}{2}\right)^2+5n-\frac{25}{2}\right)}=$ $=\frac{n\cdot M\cdot 2^{\frac{25}{4}}\cdot 2^{-5n}}{|c_n|}=C\cdot\frac{n\cdot|\lambda|^n}{32^n}$.

Итак, лемма доказана.

Лемма 8. *Для любых $n\in N$ и $x\in\left[-\frac{1}{2\cdot 4^n},0\right]$ справедливы оценки:*

а) $\left|\frac{1}{c_n}h_n(x)\right|\le C\cdot\frac{|\lambda|^n}{(n-1)!2^{n^2}}$, *где* $c_n=-\frac{d}{\lambda^{n+1}}$;

б) $|ab_2(x)|\le\frac{\tilde{C}}{64^n}$.

Доказательство. Пусть $x\in\left[-\frac{1}{2\cdot 4^n},0\right]$. Для получения первой оценки воспользуемся формулой Тейлора с остатком в интегральной форме:

$$\tilde{\varphi}_n(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\tilde{\varphi}_n^{(k)}(0)}{k!}x^k+\frac{1}{(n-1)!}\int\limits_0^x(x-t)^{n-1}\tilde{\varphi}_n^{(n)}(t)dt.$$

Из леммы 3 следует, что $\tilde{\varphi}_n^{(k)}(0) = 0$ при $k < n$. Поэтому

$$\tilde{\varphi}_n(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1}\tilde{\varphi}_n^{(n)}(t)dt.$$

Исходя из (8), получаем $|x_k| \leq |\frac{d}{\lambda^{k+1}}| + \frac{M}{58^k}$. Значит,

$$1 + |x_0| + |x_1| + \ldots + |x_n| \leq 1 + \frac{|d|}{|\lambda| - 1} + \frac{58M}{57} = C_0.$$

Воспользуемся полученной оценкой:
$\left|\tilde{\varphi}_n^{(n)}(x)\right| = \left|mup_2^{(n)}\left(x - 1 + \frac{1}{4^n}\right) + \sum\limits_{s=0}^{n-1} x_{n-s-1} mup_2^{(n)}\left(x - 1 + \frac{1}{2\cdot 4^s}\right)\right| \leq$
$\leq \left\|mup_2^{(n)}\right\|_{C_{[-1,1]}} \cdot (1 + |x_0| + \ldots + |x_{n-1}|) \leq 2^{n^2}C_0$ (последний переход следует из свойства 2)). Следовательно, $|\tilde{\varphi}_n(x)| \leq \frac{2^{n^2}C_0}{(n-1)!}\int\limits_x^0 (t-x)^{n-1}dt =$
$= \frac{2^{n^2}C_0}{(n-1)!}\cdot\frac{(-x)^n}{n} \leq \frac{2^{n^2}C_0}{n!}\cdot\frac{1}{2^n\cdot 4^{n^2}} \leq \frac{C_0}{2^n\cdot 2^{n^2}n!}$. Кроме того, из свойств 4) и 8) следует $mup_2\left(x - 1 + \frac{1}{4^n}\right) \leq mup_2\left(-1 + \frac{1}{4^n}\right) \leq \frac{1}{2^{n^2}(n-1)!}$.

Значит, $\left|\frac{1}{c_n}h_n(x)\right| = \frac{1}{|c_n|}\left|\tilde{\varphi}_n(x) - mup_2\left(x - 1 + \frac{1}{4^n}\right)\right| \leq$
$\leq \frac{1}{|c_n|}\left[\frac{C_0}{2^n\cdot 2^{n^2}n!} + \frac{1}{2^{n^2}(n-1)!}\right] = C\cdot\frac{|\lambda|^n}{2^{n^2}(n-1)!}$. Итак, первая оценка получена.

Приступим к доказательству второй оценки.

Запишем $ab_2(x)$ в виде

$$ab_2(x) = mup_2\left(x - \frac{1}{2}\right) + \lambda\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^{k-1}mup_2\left(x - 1 + \frac{1}{2\cdot 4^k}\right).$$

Дифференцируя последнее равенство, получаем: $ab_2'(x) = mup_2'\left(x - \frac{1}{2}\right) + 2\lambda ab_2(4x)$, $ab_2''(x) = mup_2''\left(x - \frac{1}{2}\right) + 8\lambda\cdot mup_2'\left(4x - \frac{1}{2}\right) + 16\lambda^2 ab_2(16x)$ и $ab_2'''(x) = mup_2'''\left(x - \frac{1}{2}\right) + 32\lambda\cdot mup_2''\left(4x - \frac{1}{2}\right) + 256\lambda^2\cdot mup_2'\left(16x - \frac{1}{2}\right) + 512\lambda^3\cdot ab_2(64x)$.

Заметим, что $ab_2(0) = \Phi(\lambda) = 0$, так как λ – корень функции $\Phi(z)$. Далее, $ab_2'(0) = mup_2'\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\lambda\cdot ab_2(0) = 0$. Аналогично, $ab_2''(0) = ab_2'''(0) = 0$. Поэтому воспользовавшись формулой Тейлора с остатком в интегральной форме, получаем: $ab_2(x) = \frac{1}{2}\int\limits_0^x ab_2'''(t)(x-t)^2dt$.

Пусть $A = max_{x\in[-1,0]}|ab_2'''(x)|$. Тогда $|ab_2(x)| \leq \frac{A}{2}\int\limits_x^0 (x-t)^2dt \leq \frac{A}{6}(-x)^3$.

С учетом того, что $x \in \left[-\frac{1}{2\cdot 4^n}, 0\right]$, получаем $|ab_2(x)| \leq \frac{\tilde{C}}{64^n}$.

Итак, лемма доказана.

Лемма 9. *Для любых $n \in N$ и $x \in [-1, 0]$ имеет место* $\left|\frac{1}{c_n}mup_2\left(x - 1 + \frac{1}{4^n}\right)\right| \leq \frac{c\cdot|\lambda|^n}{2^{n^2}\cdot(n-1)!}$, *где* $c_n = -\frac{d}{\lambda^{n+1}}$.

Доказательство данной леммы следует из свойств 4) и 8) функции $mup_2(x)$.

Сформулируем основной результат относительно функций $\varphi_n(x)$.

Теорема 2. *Справедливы асимптотические формулы*

$$\frac{2^{(2n)^2}}{c_{2n}}\varphi_{2n,0}(x) = ab_{2,c}(x) + R_{2n}(x),$$

$$\frac{2^{(2n-1)^2}}{c_{2n-1}}\varphi_{2n-1,0}(x) = ab_{2,s}(x) + R_{2n-1}(x),$$

причем для функций $R_n(x)$ *справедливы оценки* $|R_n(x)| \leq M\frac{n|\lambda|^n}{32^n}$.

Утверждение теоремы непосредственно следует из теоремы 1 и лемм 7, 8 и 9.

Получение асимптотики для $\psi_{n,\alpha_n}(x)$

Построение асимптотики для базисных функций $\psi_{n,\alpha_n}(x)$ проводится так же, как и для $\varphi_{n,0}(x)$.

Рассмотрим функции:

$$\tilde{\psi}_n(x) = \begin{cases} -mup_2\left(x - 1 + \frac{1}{4^n}\right) + 2mup_2\left(x - 1 + \frac{1}{2\cdot 4^n}\right) + \\ \quad + \sum\limits_{s=0}^{n-1} y_{n-s-1} mup_2\left(x - 1 + \frac{1}{2\cdot 4^s}\right), \quad x \leq 0, \\ 0, \ x > 0, \end{cases}$$

где коэффициенты y_i удовлетворяют бесконечной треугольной системе линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} -mup_2\left(-1 + \frac{1}{4}\right) + 2mup_2\left(-1 + \frac{1}{2\cdot 4}\right) + y_0 mup_2\left(-1 + \frac{1}{2}\right) = 0, \\ -mup_2\left(-1 + \frac{1}{4^2}\right) + 2mup_2\left(-1 + \frac{1}{2\cdot 4^2}\right) + \\ \quad + y_0 mup_2\left(-1 + \frac{1}{2\cdot 4}\right) + y_1 mup_2\left(-1 + \frac{1}{2}\right) = 0, \\ \ldots \\ -mup_2\left(-1 + \frac{1}{4^n}\right) + 2mup_2\left(-1 + \frac{1}{2\cdot 4^n}\right) + \\ \quad + y_0 mup_2\left(-1 + \frac{1}{2\cdot 4^{n-1}}\right) + \ldots + y_{n-1} mup_2\left(-1 + \frac{1}{2}\right) = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Так как $mup_2\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, то указанная система имеет единственное решение.

Установим связь между $\psi_{n,\alpha_n}(x)$ и $\tilde{\psi}_n(x)$.

Теорема 3. *Для любого* $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ *имеет место*

$$\tilde{\psi}_n(x) \equiv 2^{n^2}\psi_{n,\alpha_n}(x).$$

Доказательство. Рассмотрим произвольное $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Используя леммы 1, 2, 4, 5 и систему уравнений (9), можно доказать следующее:

а) $\tilde{\psi}_n^{(l)}\left(x_{l,s}\right)=0$,

б) $\triangle_h^2\left(\tilde{\psi}_n^{(l)}\left(x_{l,p}^*\right)\right)=2^{n^2}\delta_n^l\delta_0^s$.

Кроме того, из свойства 2) функции $mup_2(x)$ следует, что $\tilde{\psi}_n\in H_{1,2}$. Поэтому, согласно теореме 2 из [2] справедливо $\tilde{\psi}_n(x)\equiv 2^{n^2}\psi_{n,\alpha_n}(x)$.

Итак, теорема доказана.

Исследуем поведение при $n\longrightarrow\infty$ функций $\tilde{\psi}_n(x)$. Для этого будем использовать систему (9).

С использованием обозначений $\zeta_k=mup_2\left(-1+\frac{1}{2\cdot 4^k}\right)$ и $\eta_s=mup_2\left(-1+\frac{1}{4^{s+1}}\right)$ система (9) принимает вид:

$$\begin{cases} y_0\cdot\zeta_0=\eta_0-2\cdot\zeta_1,\\ y_0\cdot\zeta_1+y_1\zeta_0=\eta_1-2\cdot\zeta_2,\\ \dots\\ y_0\cdot\zeta_{n-1}+\ldots+y_{n-1}\zeta_0=\eta_{n-1}-2\cdot\zeta_n.\end{cases}\tag{10}$$

Напомним, что в силу свойств 8) и 9) функции $mup_2(x)$ коэффициенты $\zeta_k=mup_2\left(-1+\frac{1}{2\cdot 4^k}\right)$ и $\eta_s=mup_2\left(-1+\frac{1}{4^{s+1}}\right)$ являются рациональными.

В предыдущем разделе были введены функции $\Lambda(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\eta_k z^k$ и $\Phi(z)=$ $=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\zeta_k z^k$. Введем в рассмотрение функцию $T(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\zeta_{k+1}z^k$.

Пусть $W(z)=\frac{\Lambda(z)-2\cdot T(z)}{\Phi(z)}$. Разложим функцию $W(z)$ в ряд Маклорена:

$$W(z)=\sum_{k=0}^{\infty}y_k z^k.$$

Тогда из того, что $W(z)\cdot\Phi(z)=\Lambda(z)-2\cdot T(z)$ следует, что первые n коэффициентов y_k разложения $W(z)$ будут удовлетворять системе (10) для любого n.

В предыдущем разделе были указаны первые три корня функции $\Phi(z)$: $\lambda=z_1=-9,617232$, $z_2=-58,870525$ и $z_3=-311,828551$. Кроме того, с точностью 10^{-6} находим $\Lambda(\lambda)-2\cdot T(\lambda)=0,056104$. Значит, функция $W(z)$ в круге $|z|\le 58$ имеет единственный полюс λ (первого порядка). Так же, как и в предыдущем разделе, для нас важна величина $\ell=Res_\lambda W(z)=\frac{\Lambda(\lambda)-2\cdot T(\lambda)}{\Phi'(\lambda)}$. С точностью 10^{-6} имеем $\ell=1,341544$. Мы получили, что функция $\xi(z)=W(z)-\frac{\ell}{z-\lambda}$ является аналитической для $|z|\le 58$:

$$\xi(z)=\sum_{k=0}^{\infty}v_k z^k,\ \text{где}\ |v_k|\le\frac{B}{58^k},\ B=max_{|z|=58}|\xi(z)|.$$

С точностью 10^{-6} получаем $B = 4,21404$.

С другой стороны, в круге $|z| < |\lambda|$:

$$\frac{\ell}{z-\lambda} = -\frac{\ell}{\lambda} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{\lambda}} = -\frac{\ell}{\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\lambda}\right)^k$$

Значит, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} y_k z^k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{\ell}{\lambda^{k+1}} + v_k\right) z^k$, $|z| < |\lambda|$, то есть асимптотика для y_k имеет вид:

$$y_k = -\frac{\ell}{\lambda^{k+1}} + v_k,\ |v_k| \leq \frac{B}{58^k}.$$

Теперь мы можем описать поведение функций $\varphi_n(x)$ при $n \longrightarrow \infty$. Для этого будет использована функция $ab_2(x)$, которая была введена в предыдущем разделе. Кроме того, на сегменте $[-1,0]$ определим функцию $g_n(x) = \tilde{\psi}_n(x) + mup_2\left(x - 1 + \frac{1}{4^n}\right) - 2mup_2\left(x - 1 + \frac{1}{2\cdot 4^n}\right)$.

С учетом определения функций $\tilde{\psi}_n(x)$ имеем

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} y_{k-1} mup_2\left(x - 1 + \frac{1}{2\cdot 4^{n-k}}\right)$$

Лемма 10. *Для любых* $x \in \left[-1, -\frac{1}{2\cdot 4^n}\right]$ *и* $n \in N$ *имеет место*

$$\left|ab_2(x) - \frac{1}{b_n} g_n(x)\right| \leq C \cdot \frac{n \cdot |\lambda|^n}{32^n},$$

где $b_n = -\frac{\ell}{\lambda^{n+1}}$.

Доказательство данной леммы повторяет доказательство леммы 7.

Лемма 11. *Для любых* $n \in N$ *и* $x \in \left[-\frac{1}{2\cdot 4^n}, 0\right]$ *имеет место*

$$\left|\frac{1}{b_n} g_n(x)\right| \leq C \cdot \frac{|\lambda|^n}{(n-1)! 2^{n^2}},$$

где $b_n = -\frac{\ell}{\lambda^{n+1}}$.

Доказательство данной леммы совпадает с доказательством леммы 8.

Лемма 12. *Для любого* $x \in [-1,0]$ *имеет место*

$$\left|\frac{1}{b_n}\left(-mup_2\left(x - 1 + \frac{1}{4^n}\right) + 2mup_2\left(x - 1 + \frac{1}{2\cdot 4^n}\right)\right)\right| \leq \frac{\tilde{c} \cdot |\lambda|^n}{2^{n^2}(n-1)!},$$

где $b_n = -\frac{\ell}{\lambda^{n+1}}$.

Доказательство данной леммы следует из свойств 4) и 8) функции $mup_2(x)$.

Сформулируем основной результат относительно функций $\psi_{n,\alpha_n}(x)$. Для этого нам понадобится следующая функция:

$$ap_2 = \begin{cases} ab_2(x), x \leq 0, \\ 0, x > 0. \end{cases}$$

Теорема 4. *Справедлива асимптотическая формула*

$$\frac{2^{n^2}}{b_n}\psi_{n,\alpha_n}(x) = ap_2(x) + R_n(x),$$

причем для функций $R_n(x)$ *справедливы оценки* $|R_n(x)| \le M\frac{n|\lambda|^n}{32^n}$.

Утверждение теоремы непосредственно следует из теоремы 3, лемм 10, 11, 12 и второй оценки леммы 8.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рвачев В.А. Финитные решения функционально-дифференциальных уравнений и их применение // Усп. мат. наук. – 1990. – 45, вып.1(271) – С. 77-103.
2. Теория R-функций и актуальные проблемы прикладной математики. – Киев: Наук. думка, 1986. – 264 с.
3. Рвачева Т.В. Об асимптотике базисных функций обобщенного ряда Тейлора // Вiсник ХНУ, Сер. "Математика, прикладна математика i механiка". – 2003. – 602. – С. 94-104.
4. Рвачев В.А., Старец Г.А. Некоторые атомарные функции и их применение // Докл. АН УССР, сер. А. – 1983. – 11. – С.22-24.
5. Старец Г.А. Построение базисных функций для обобщенных рядов Тейлора // Мат. методы анализа динамических систем. – 1984. – 8. – С. 16 - 19.
6. Старец Г.А. Сходимость обобщенных рядов Тейлора классов $H_\rho(m)$ // Мат. методы анализа динамических систем. – 1985. – 9. – С. 37-39.
7. Albanese A.A., Bonet J. Ultradifferentiable Fundamental Kernels of Linear Partial Differential Operators on Non-quasianalytic Classes of Roumieu Type // Publ. RIMS, Kyoto Univ. – 2007. – 43. – P. 39–54.
8. Albanese A.A. Surjective linear partial differential operators with variable coefficients on non-quasianalytic classes of Roumieu type, in Hyperbolic Problems and Regularity Questions // Trends in Math., Basel, – 2006. – P. 7–16.
9. Малицкий И.И. Применение обобщенных рядов Тейлора в теории дифференциально-функциональных уравнений с отклоняющимся аргументом // Докл. АН УССР, сер. А. – 1985. – 10. – С.17-18.
10. Томилова Е.П. Применение обобщенных рядов Тейлора для решения некоторых дифференциально-функциональных уравнений // Мат. методы анализа динамических систем. – 1984. – 8. – С. 33-35.

11. Старец Г.А. Один класс атомарных функций и его применение // Дисс. канд. физ.-мат. наук. – Харьков: ХГУ, 1985.

12. Линник Ю.В., Островский И.В. // Разложения случайных величин и векторов. – Москва: Наука, 1972. – 480 с.

Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.911.5 № 826, 2008, с.87–99

Теорема Красносельского - Крейна для дифференциальных уравнений с многозначными решениями

Н.В. Скрипник

Одесский национальный университет имени И.И.Мечникова, Украина

В статье рассматривается возможность обоснования теоремы о непрерывной зависимости решений от параметра и метода усреднения для дифференциальных уравнений и включений с производной Хукухары в случае, когда правая часть не удовлетворяет условию Липшица по фазовой переменной. *2000 Mathematics Subject Classification* 34A60, 34C29.

В работах В.А.Плотникова [8, 10, 22], М.М.Хапаева, О.П.Филатова [13], А.Б.Васильева [1] рассмотрено обоснование метода усреднения для дифференциальных включений. При этом существенно использовалось выполнение условия Липшица по фазовой переменной для исходного или усредненного включения. Впоследствии T.Janiak и E.Luczak - Kumorek [19] получили аналогичные результаты по обоснованию метода усреднения для функционально - дифференциальных уравнений. В работах T.Dontchev [17] условие Липшица было заменено односторонним условием Липшица.

M.Kisielewicz [21] и А.В.Плотников [7] рассмотрели возможность применения некоторых схем усреднения для дифференциальных уравнений с производной Хукухары [14, 15, 20]. В [4] А.В.Плотниковым было введено понятие дифференциального включения с производной Хукухары, получены некоторые свойства их решений и рассмотрена возможность применения некоторых схем усреднения для такого типа включений в стандартной форме при выполнении условия Липшица [5, 6, 7]. R.Dabrowska и T.Janiak в [16] получили некоторые аналогичные результаты для дифференциальных включений с производной Хукухары с запаздыванием.

В связи с этим представляет интерес обоснование теорем о непрерывной зависимости решения от параметра, предложенное М.А.Красносельским и С.Г.Крейном в [3] для обыкновенных дифференциальных уравнений при менее ограничительных условиях, что позволяет получить обоснование принципа усреднения для более широкого класса дифференциальных уравнений. В [12] доказан аналог теоремы М.А.Красносельского - С.Г.Крейна для дифференциальных включений в терминах обычных решений и $R-$решений.

В данной работе рассмотрим возможность переноса полученных результатов на дифференциальные уравнения и включения с производной Хукухары.

Развитие теории многозначных отображений привело к вопросу о том, что понимать под производной от многозначного отображения. Основной причиной возникновения трудностей является нелинейность пространства $comp(\mathbb{R}^n)[conv(\mathbb{R}^n)]$ непустых компактных [и выпуклых] множеств евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, что приводит к отсутствию разности двух множеств. Поэтому существует несколько подходов к решению этой проблемы. Одним из них является определение разности, предложенной Хукухарой [18].

Определение 1 [18]. *Пусть $X,\ Y \in conv(\mathbb{R}^n)$. Множество $Z \in conv(\mathbb{R}^n)$ такое, что $X = Y + Z$, называется разностью множеств X и Y и обозначается $X \overset{h}{-} Y$.*

Определение 2 [14, 18]. *Многозначное отображение $X : \mathbb{R} \to conv(\mathbb{R}^n)$ называется дифференцируемым по Хукухаре в точке $t_0 \in \mathbb{R}$, если существует выпуклое компактное множество $D_hX(t_0)$ такое, что пределы*

$$\lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{1}{\Delta t}\Big(X(t_0+\Delta t) \overset{h}{-} X(t_0)\Big) \quad \text{и} \quad \lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{1}{\Delta t}\Big(X(t_0) \overset{h}{-} X(t_0-\Delta t)\Big)$$

существуют и равны $D_hX(t_0)$.

Отметим, что в данном определении предполагается, что при всех достаточно малых положительных Δt разности $X(t_0) \overset{h}{-} X(t_0 - \Delta t)$ и $X(t_0 + \Delta t) \overset{h}{-} X(t_0)$ существуют.

Первые результаты по дифференциальным уравнениям с производной Хукухары

$$D_hX = F(t, X),\ X(0) = X_0, \tag{1}$$

где $t \in I \subset \mathbb{R}-$ время, $F : I \times conv(\mathbb{R}^n) \to conv(\mathbb{R}^n)$ многозначное отображение, $X_0 \in conv(\mathbb{R}^n)-$ начальное состояние, были получены в работах F.S. de Blasi, F.Iervolino [14, 15] и охватывали круг вопросов, связанных с существованием решений, их единственностью и непрерывной зависимостью от начальных условий и параметров.

Определение 3 [15]. *Многозначное отображение $X(t)$, определенное на промежутке $J \subset I$, называется решением уравнения (1), если оно абсолютно непрерывно и удовлетворяет системе (1) почти всюду на J.*

Дифференциальное уравнение (1) эквивалентно [14] интегральному уравнению

$$X(t) = X_0 + \int_0^t F(s, X(s))\,ds,$$

интеграл в котором понимается в смысле Хукухары [18].

Имеет место следующая теорема существования и единственности:

Теорема 1 *[14, 15]. Пусть многозначное отображение $F(t, X)$ удовлетворяет условиям:*

1) $F(t, X)$ измеримо по $t \in I$ при каждом фиксированном $X \in conv(\mathbb{R}^n)$;

2) $F(t, X)$ непрерывно по $X \in conv(\mathbb{R}^n)$ при почти всех $t \in I$;

3) существует суммируемая функция $k(t)$ такая, что $h(F(t, X), \{0\}) \leq k(t)$ для почти всех $t \in I$.

Тогда задача (1) имеет по крайней мере одно решение.

Если, кроме того, многозначное отображение $F(t, X)$ удовлетворяет условию Липшица по $X \in conv(\mathbb{R}^n)$, то есть существует ограниченная суммируемая функция $\lambda(t) \geq 0$ такая, что

$$h(F(t, X_1), F(t, X_2)) \leq \lambda(t) h(X_1, X_2),$$

то задача (1) имеет единственное решение.

Здесь и в дальнейшем $h(A, B)-$ расстояние по Хаусдорфу между множествами $A, B \in comp(\mathbb{R}^n)$.

Рассмотрим вопрос о непрерывной зависимости решения от параметра.

Теорема 2 *Пусть для дифференциального уравнения с производной Хукухары*

$$D_h X = F(t, X, \lambda), \tag{2}$$

где многозначное отображение $F(t, X, \lambda)$, принимающее значения в $conv(\mathbb{R}^n)$, определено при $0 \leq t \leq T, X \in D, D-$ ограниченная область в $conv(\mathbb{R}^n)$, $\lambda \in \Lambda, \Lambda-$ некоторое множество значений параметра λ, имеющее $\lambda_0 \in \Lambda$ предельной точкой, выполнены следующие условия:

а) многозначное отображение $F(t, X, \lambda)$ равномерно ограничено, непрерывно по t, равномерно непрерывно по X равномерно относительно t и λ;

б) многозначное отображение $F(t, X, \lambda)$ интегрально непрерывно по λ в точке λ_0, то есть для любых $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$ и любого $X \in D$ выполняется условие:

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} h\left(\int_{t_1}^{t_2} F(s, X, \lambda) ds, \int_{t_1}^{t_2} F(s, X, \lambda_0) ds\right) = 0; \tag{3}$$

в) решения $X(t, \lambda_0)$ уравнения

$$D_h X = F(t, X, \lambda_0), \tag{4}$$

удовлетворяющие начальному условию $X(0, \lambda_0) = X_0 \in D^1 \subset D$, определены при $0 \leq t \leq T$ и лежат вместе с некоторой $\rho-$ окрестностью в области D.

Тогда каждому $\eta > 0$ соответствует такая окрестность $U(\lambda_0)$ точки λ_0, что при $\lambda \in U(\lambda_0)$ для любого решения $X(t, \lambda)$ уравнения (2), определенного при $0 \leq t \leq T$ и удовлетворяющего начальному условию $X(0, \lambda) = X_0$, существует такое решение $X(t, \lambda_0)$ уравнения (4), что справедливо неравенство

$$h(X(t, \lambda), X(t, \lambda_0)) < \eta, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Доказательство. Из условий а),б) теоремы и ограниченности области D следует, что сходимость в (3) является равномерной относительно t_1, t_2 и X.

Покажем, что пределом любой равномерно сходящейся последовательности решений уравнения (2) является решение уравнения (4).

Пусть $X(t,\lambda)$ $(\lambda \to \lambda_0,\ \lambda \in \Lambda)-$ равномерно сходящаяся последовательность решений (2), удовлетворяющих начальному условию $X(0,\lambda) = X_0$. Следовательно, существует такое непрерывное многозначное отображение $Y(t)$, что

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\max_{t\in[0,T]} h(X(t,\lambda), Y(t)) = 0.$$

В силу эквивалентности дифференциального уравнения с производной Хукухары и соответствующего интегрального уравнения многозначное отображение $X(t,\lambda)$ является решением уравнения

$$X(t,\lambda) = X_0 + \int\limits_0^t F(s, X(s,\lambda),\lambda)\,ds. \tag{5}$$

Перейдем в (5) к пределу при $\lambda \to \lambda_0$.

Для этого сначала покажем, что для любых $0 \le \tau < t \le T$ справедливо равенство

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\int_0^t F(s, X(s,\lambda),\lambda)ds = \int_0^t F(s, Y(s),\lambda_0)ds. \tag{6}$$

Введем в рассмотрение кусочно - постоянное многозначное отображение $\overline{Y}(t)$ такое, что $\max\limits_{t\in[0,T]} h(Y(t),\overline{Y}(t)) < \delta$, где δ выбираем из условия равномерной непрерывности правой части таким образом, чтобы при всех $X, Y \in D$, удовлетворяющих условию $h(X,Y) < \delta$, выполнялось неравенство

$$h(F(s,X,\lambda), F(s,Y,\lambda)) < \frac{\varepsilon}{4T}.$$

Выберем окрестность $U(\lambda_0)$ точки λ_0 так, чтобы при $\lambda \in U(\lambda_0)$ и любых $s \in [0,T]$ была справедлива оценка $h(X(s,\lambda), Y(s)) < \delta$. Тогда

$$I_1 = h\left(\int_0^t F(s, X(s,\lambda),\lambda)ds, \int_0^t F(s, Y(s),\lambda)ds\right) \le$$

$$\le \int_0^t h(F(s, X(s,\lambda),\lambda), F(s,Y(s),\lambda))ds \le \frac{\varepsilon}{4},$$

$$I_2 = h\left(\int_0^t F(s, Y(s),\lambda)ds, \int_0^t F(s, \overline{Y}(s),\lambda)ds\right) \le$$

$$\le \int_0^t h(F(s, Y(s),\lambda), F(s,\overline{Y}(s),\lambda))ds < \frac{\varepsilon}{4},$$

$$I_4 = h\left(\int_0^t F(s, Y(s),\lambda_0)ds, \int_0^t F(s, \overline{Y}(s),\lambda_0)ds\right) \le$$

$$\leq \int_0^t h(F(s,Y(s),\lambda_0), F(s,\overline{Y}(s),\lambda_0))ds < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Сузим окрестность $U(\lambda_0)$, используя условие б) теоремы так, чтобы при $\lambda \in U(\lambda_0)$ выполнялось неравенство

$$I_3 = h\left(\int_\tau^t F(s,\overline{Y}(s),\lambda)ds, \int_\tau^t F(s,\overline{Y}(s),\lambda_0)ds\right) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Таким образом,

$$h\left(\int_\tau^t F(s,X(s,\lambda),\lambda)ds, \int_\tau^t F(s,Y(s),\lambda_0)ds\right) \leq I_1 + I_2 + I_3 + I_4 < \varepsilon,$$

то есть предельное равенство (6) доказано.

Тогда, переходя в (5) к пределу при $\lambda \to \lambda_0$, получаем

$$Y(t) = X_0 + \int_{t_0}^t F(s,Y(s),\lambda_0)ds,$$

то есть отображение $Y(t)$ является решением дифференциального уравнения (4).

Следовательно, показано, что предел любой равномерно сходящейся последовательности решений (2) является решением включения (4).

Покажем, что для любого η существует окрестность $U(\lambda_0)$ точки λ_0 такая, что для любого решения $X(t,\lambda), \lambda \in U(\lambda_0)$ включения (2), удовлетворяющего начальному условию $X(0,\lambda) = X_0$, существует решение $X(t,\lambda_0)$ включения (4) такое, что

$$h(X(t,\lambda), X(t,\lambda_0)) < \eta, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Предположим противное. Тогда существуют η_0 и последовательность решений $X(t,\lambda_k)$, $\lambda_k \in U(\lambda_0)$, $\lambda_k \to \lambda_0$, $k \to \infty$ включения (2) такие, что

$$\max_{t\in[0,T]} h(X(t,\lambda_k), X(t,\lambda_0)) \geq \eta_0 \tag{7}$$

для всех решений $X(t,\lambda_0)$ включения (4).

Так как семейство $X(t,\lambda)$ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно, то по теореме Асколи [2] из него можно выделить равномерно сходящуюся подпоследовательность, пределом которой в силу доказанного выше будет решение (4), что противоречит (7).

Замечание 1. Если $X(t,\lambda_0)$– некоторое решение дифференциального уравнения (4), то может не существовать последовательности решений (2), сходящейся к $X(t,\lambda_0)$ при $\lambda \to \lambda_0$.

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$D_h X = \left[\sqrt{\min_{x\in X} x}, \sqrt{\max_{x\in X} x}\right] + \lambda^2[1,4], \quad X(0,\lambda) = \{0\}. \tag{8}$$

Тогда при $\lambda_0 = 0$ уравнение (4) имеет вид

$$D_h X = \left[\sqrt{\min_{x\in X} x}, \sqrt{\max_{x\in X} x}\right], \quad X(0,0) = \{0\}. \tag{9}$$

Очевидно, что решения $X(t,\lambda)$ уравнения (8) сходятся к решению (9) вида $X(t,0) = \left\{\frac{t^2}{4}\right\}$. В то же время не существует последовательности $X(t,\lambda)$, сходящейся к тривиальному решению уравнения (9).

Замечание 2. Если уравнение (4) имеет единственное решение, то любая последовательность решений $X(t,\lambda)$ уравнения (2) сходится к этому решению при $\lambda \to \lambda_0$.

Из этой теоремы непосредственно следует теорема о принципе усреднения.

Теорема 3 *Пусть в области* $Q = \{t \geq 0,\ X \in D \subset conv(\mathbb{R}^n), D-$*ограниченная область*$\}$ *для дифференциального уравнения с производной Хукухары*

$$D_h X = \varepsilon F(t, X) \tag{10}$$

выполнены следующие условия:

а) многозначное отображение $F : Q \to conv(\mathbb{R}^n)$ *равномерно ограничено, непрерывно по* t *и равномерно непрерывно по* X *равномерно относительно* t*;*

б) для всех $X \in D$ *существует предел*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T F(s,X)ds = F_0(X); \tag{11}$$

в) решения $Y(\tau),\ \tau = \varepsilon t$ *уравнения*

$$D_h Y = F_0(Y), \quad Y(0) = X_0 \in D^1 \subset D \tag{12}$$

определены при $0 \leq \tau \leq L$ *и лежат вместе с* $\rho-$ *окрестностью в* D.

Тогда для любого $\eta > 0$ *существует такое* $\varepsilon_0 > 0$, *что при* $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ *для любого решения* $X(t,\varepsilon)$ *уравнения (10), удовлетворяющего условию* $X(0,\varepsilon) = X_0$, *существует решение уравнения (12) такое, что на промежутке* $[0, L\varepsilon^{-1}]$ *справедливо неравенство*

$$h(X(t,\varepsilon), Y(\varepsilon t)) < \eta.$$

В справедливости этой теоремы легко убеждаемся, если в уравнении (10) произведем замену $\varepsilon t = t_1,\ \varepsilon = \lambda$. Вместо (10) имеем уравнение

$$D_h X = F(t_1, X, \lambda), \tag{13}$$

где принято обозначение $F\left(\frac{t_1}{\lambda}, X\right) = F(t_1, X, \lambda)$.

Существование среднего (11) эквивалентно интегральной непрерывности по λ в точке $\lambda = 0$ правой части уравнения (13), то есть эквивалентно соотношению

$$\lim_{\lambda\to 0}\int_0^{t_1} F\left(\frac{t_1}{\lambda}, X\right) dt_1 = \int_0^{t_1} F_0(X)dt_1. \tag{14}$$

Действительно, полагая в левой части соотношения (14) $\frac{t_1}{\lambda} = t$, имеем

$$\lim_{\lambda\to 0}\int_0^{t_1} F\left(\frac{t_1}{\lambda}, X\right) dt_1 = \lim_{\lambda\to 0}\lambda\int_0^{t_1} F\left(\frac{t_1}{\lambda}, X\right) d\left(\frac{t_1}{\lambda}\right) = \lim_{\lambda\to 0}\lambda\int_0^{\frac{t_1}{\lambda}} F(t,X)\,dt =$$

$$= t_1\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\frac{t_1}{\lambda}}\int_0^{\frac{t_1}{\lambda}} F(t,X)\,dt = t_1\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T F(t,X)dt = t_1F_0(X) = \int_0^{t_1} F_0(X)dt_1.$$

Перейдем к рассмотрению вопроса о непрерывной зависимости от параметра решений дифференциальных включений с производной Хукухары, а также метода усреднения.

Обозначим через $cc(\mathbb{R}^n)(cocc(\mathbb{R}^n))$ пространство, состоящее из всех непустых [и выпуклых] подмножеств пространства $conv(\mathbb{R}^n)$ с метрикой

$$d(A,B) = \max\{\max_{a\in A}\min_{b\in B} h(a,b), \max_{b\in B}\min_{a\in A} h(a,b)\}.$$

Определим также скалярную функцию $dist(a,B)$, $a\in conv(\mathbb{R}^n)$, $B\in cc(\mathbb{R}^n)$ следующим образом

$$dist(a,B) = \min_{b\in B} h(a,b).$$

Определение 4. *Под интегралом Ауманна - Хукухары от многозначного отображения $F : [t_0,T] \to cc(\mathbb{R}^n)$ будем понимать множество $G \in cc(\mathbb{R}^n)$, определяемое следующим образом*

$$G = \left\{ g\in conv(\mathbb{R}^n),\ g = \int_{t_0}^T f(t)dt : f(\cdot)\in F(\cdot)\right\},$$

где $f : [t_0,T] \to conv(\mathbb{R}^n)$ и интеграл от многозначного отображения $f(\cdot)$ понимается в смысле Хукухары [18].

Теорема 4 *[7]. Пусть многозначное отображение $F : [t_0,T] \to cocc(\mathbb{R}^n)$ ограничено и интегрируемо. Тогда множество $G = \int_{t_0}^T F(s)ds$ выпукло и компактно.*

Рассмотрим дифференциальное включение с производной Хукухары

$$D_hX \in F(t,X), \tag{15}$$

где $F : I\times conv(\mathbb{R}^n) \to cc(\mathbb{R}^n)$– многозначное отображение.

Определение 5. *Решением дифференциального включения (15) называется абсолютно непрерывное многозначное отображение $X(t)$, определенное на промежутке $J \subset I$, производная которого удовлетворяет включению (15) почти всюду на I.*

Имеет место следующая теорема существования и непрерывной зависимости решения от параметра:

Теорема 5 *[5, 7]. Пусть*

1) отображение $F : [t_0, T] \times conv(\mathbb{R}^n) \to cc(\mathbb{R}^n)$ измеримо по t, удовлетворяет условию Липшица по X с суммируемой функцией $\lambda(t)$ и существует суммируемая функция $k(t)$ такая, что $d(F(t, x), \{\{0\}\}) \leq k(t)$ для почти всех t;

2) отображение $Y(\cdot)$ абсолютно непрерывно на $[t_0, T]$ и

$$dist(D_h Y(t), F(t, Y(t))) < \rho(t)$$

почти всюду на $[t_0, T]$, где $\rho(\cdot)-$ суммируемая функция на $[t_0, T]$;

3) для некоторого $X_0 \in conv(\mathbb{R}^n)$ выполнено условие $h(Y(t_0), X_0) \leq \delta$.

Тогда существует решение $X(\cdot)$ задачи (15) определенное на $[t_0, T]$ такое, что:

1) $X(t_0) = X_0$;

2) $h(X(t), Y(t)) \leq \xi(t),\ t \in [t_0, T]$;

3) $h(D_h X(t), D_h Y(t)) \leq \lambda(t)\xi(t) + \rho(t)$ почти всюду на $[t_0, T]$, где

$$\xi(t) = \delta e^{m(t)} + \left| \int_{t_0}^{t} e^{m(t)-m(s)} \rho(s) ds \right|,\ m(t) = \left| \int_{t_0}^{t} \lambda(s) ds \right|,\ t \in [t_0, T].$$

Рассмотрим теперь вопрос о непрерывной зависимости от параметра в случае, когда правая часть включения (15) не удовлетворяет условию Липшица по X.

Теорема 6 *Пусть для дифференциального включения*

$$D_h X \in F(t, X, \lambda), \tag{16}$$

где многозначное отображение $F(t, X, \lambda)$, принимающее значения в $cocc(\mathbb{R}^n)$, определено при $0 \leq t \leq T, X \in D, D-$ ограниченная область в $conv(\mathbb{R}^n)$, $\lambda \in \Lambda, \Lambda-$ некоторое множество значений параметра λ, имеющее $\lambda_0 \in \Lambda$ предельной точкой, выполнены следующие условия:

а) многозначное отображение $F(t, X, \lambda)$ равномерно ограничено, непрерывно по t, равномерно непрерывно по X равномерно относительно t и λ;

б) многозначное отображение $F(t, X, \lambda)$ интегрально непрерывно по λ в точке λ_0, то есть для любых $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$ и любого $X \in D$ выполняется условие:

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} d\left(\int_{t_1}^{t_2} F(s, X, \lambda) ds, \int_{t_1}^{t_2} F(s, X, \lambda_0) ds \right) = 0; \tag{17}$$

в) решения $X(t,\lambda_0)$ включения

$$D_h X \in F(t, X, \lambda_0), \tag{18}$$

удовлетворяющие начальному условию $X(0,\lambda_0) = X_0 \in D^1 \subset D$, определены при $0 \le t \le T$ и лежат вместе с некоторой $\rho-$ окрестностью в области D.

Тогда каждому $\eta > 0$ соответствует такая окрестность $U(\lambda_0)$ точки λ_0, что при $\lambda \in U(\lambda_0)$ для любого решения $X(t,\lambda)$ включения (16), определенного при $0 \le t \le T$ и удовлетворяющего начальному условию $X(0,\lambda) = X_0$, существует такое решение $X(t,\lambda_0)$ включения (18), что справедливо неравенство

$$h(X(t,\lambda), X(t,\lambda_0)) < \eta, \quad 0 \le t \le T.$$

Доказательство. Из условий а),б) теоремы и ограниченности области D следует, что сходимость в (17) является равномерной относительно t_1, t_2 и X.

Пусть $X(t,\lambda)$ $(\lambda \to \lambda_0,\ \lambda \in \Lambda)-$ равномерно сходящаяся последовательность решений (16), удовлетворяющих начальному условию $X(0,\lambda) = X_0$. Следовательно, существует такое непрерывное многозначное отображение $Y(t)$, что

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \max_{t \in [0,T]} h(X(t,\lambda), Y(t)) = 0.$$

Покажем, что для любых $0 \le \tau < t \le T$ справедливо равенство

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \int_\tau^t F(s, X(s,\lambda), \lambda) ds = \int_\tau^t F(s, Y(s), \lambda_0) ds. \tag{19}$$

Очевидно, что

$$d\left(\int_\tau^t F(s, X(s,\lambda), \lambda) ds, \int_\tau^t F(s, Y(s), \lambda_0) ds \right) \le I_1 + I_2 + I_3 + I_4,$$

где

$$I_1 = d\left(\int_\tau^t F(s, X(s,\lambda), \lambda) ds, \int_\tau^t F(s, Y(s), \lambda) ds \right),$$

$$I_2 = d\left(\int_\tau^t F(s, Y(s), \lambda) ds, \int_\tau^t F(s, \overline{Y}(s), \lambda) ds \right),$$

$$I_3 = d\left(\int_\tau^t F(s, \overline{Y}(s), \lambda) ds, \int_\tau^t F(s, \overline{Y}(s), \lambda_0) ds \right),$$

$$I_4 = d\left(\int_\tau^t F(s, Y(s), \lambda_0) ds, \int_\tau^t F(s, \overline{Y}(s), \lambda_0) ds \right),$$

$\overline{Y}(t)-$ кусочно-постоянное многозначное отображение, такое, что

$$\max_{t \in [0,T]} h(Y(t), \overline{Y}(t)) < \delta,$$

где δ выбираем из условия равномерной непрерывности правой части таким образом, чтобы при $h(X,Y)<\delta$ выполнялось неравенство

$$d(F(s,X,\lambda),F(s,Y,\lambda))<\frac{\varepsilon}{4T}.$$

Оценим каждое слагаемое в отдельности. Окрестность $U(\lambda_0)$ выберем так, чтобы была справедлива оценка $h(X(s,\lambda),Y(s))<\delta$ при $\lambda\in U(\lambda_0)$ и любых $s\in[0,T]$.

Тогда

$$I_1\le\int_\tau^t d(F(s,X(s,\lambda),\lambda),F(s,Y(s),\lambda))ds\le\frac{\varepsilon}{4},$$

$$I_2\le\int_\tau^t d(F(s,Y(s),\lambda),F(s,\overline{Y}(s),\lambda))ds<\frac{\varepsilon}{4},$$

$$I_4\le\int_\tau^t d(F(s,Y(s),\lambda_0),F(s,\overline{Y}(s),\lambda_0))ds<\frac{\varepsilon}{4}.$$

Сузим окрестность $U(\lambda_0)$, используя условие б) теоремы так, чтобы при $\lambda\in U(\lambda_0)$ выполнялось неравенство

$$I_3=d\left(\int_\tau^t F(s,\overline{Y}(s),\lambda)ds,\int_\tau^t F(s,\overline{Y}(s),\lambda_0)ds\right)<\frac{\varepsilon}{4}.$$

Таким образом, доказано предельное равенство (19).

Множество обычных решений дифференциального включения с производной Хукухары (16) совпадает со множеством обобщенных решений [5, 7, 11], которое определяется как множество непрерывных многозначных отображений $X(t,\lambda)$, удовлетворяющих включению

$$X(t,\lambda)\overset{h}{-}X(\tau,\lambda)\in\int_\tau^t F(s,X(s,\lambda),\lambda)ds$$

для любых $t,\tau\in[0,T],\ \tau<t$.

Тогда, переходя к пределу при $\lambda\to\lambda_0$, получаем

$$Y(t)\overset{h}{-}Y(\tau)\in\int_\tau^t F(s,Y(s),\lambda_0)ds,$$

то есть $Y(t)$– обобщенное, а следовательно [5, 7, 11], и обычное решение включения (18).

Таким образом, показано, что предел любой равномерно сходящейся последовательности решений включения (16) является решением включения (18).

Покажем, что для любого η существует окрестность $U(\lambda_0)$ точки λ_0 такая, что для любого решения $X(t,\lambda),\lambda\in U(\lambda_0)$ включения (16), удовлетворяющего начальному условию $X(0,\lambda)=X_0$, существует решение $X(t,\lambda_0)$ включения (18) такое, что

$$h(X(t,\lambda),X(t,\lambda_0))<\eta,\quad 0\le t\le T.$$

Предположим противное. Тогда существуют η_0 и последовательность решений $X(t,\lambda_k)$, $\lambda_k \in U(\lambda_0)$, $\lambda_k \to \lambda_0$, $k \to \infty$ включения (16) такие, что

$$\max_{t\in[0,T]} h(X(t,\lambda_k), X(t,\lambda_0)) \geq \eta_0 \tag{20}$$

для всех решений $X(t,\lambda_0)$ включения (18).

Так как семейство $X(t,\lambda)$ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно, то по теореме Асколи [2] из него можно выделить равномерно сходящуюся подпоследовательность, пределом которой в силу доказанного выше будет решение (18), что противоречит (20).

Замечание 3. Если $X(t,\lambda_0)$– некоторое решение дифференциального включения (18), то может не существовать последовательности решений (16), сходящейся к $X(t,\lambda_0)$ при $\lambda \to \lambda_0$.

Пример 2. Рассмотрим включение

$$D_h X \in \left\{ a\left(\left[\sqrt{\min_{x\in X} x}, \sqrt{\max_{x\in X} x}\right] + \lambda^2[1,4]\right),\ a\in[1,2]\right\}, \quad X(0,\lambda) = \{0\}. \tag{21}$$

Тогда при $\lambda_0 = 0$ включение (18) имеет вид

$$D_h X \in \left\{ a\left[\sqrt{\min_{x\in X} x},\ \sqrt{\max_{x\in X} x}\right],\ a\in[1,2]\right\}, \quad X(0,0) = \{0\}. \tag{22}$$

Очевидно, что решения $X(t,\lambda)$ включения (21) сходятся к решениям (22) вида

$$X(t,0) = \left\{\frac{a^2t^2}{4}\right\},\ a\in[1,2].$$

В то же время не существует последовательности $X(t,\lambda)$, сходящейся к тривиальному решению включения (22).

Замечание 4. Если включение (18) имеет единственное решение, то любая последовательность решений $X(t,\lambda)$ включения (16) сходится к этому решению при $\lambda \to \lambda_0$.

Из этой теоремы непосредственно следует теорема о принципе усреднения.

Теорема 7 *Пусть в области $Q = \{t \geq 0,\ X \in D \subset conv(\mathbb{R}^n), D-$ограниченная область$\}$ для дифференциального включения с производной Хукухары*

$$D_h X \in \varepsilon F(t,X) \tag{23}$$

выполнены следующие условия:

а) многозначное отображение $F: Q \to cocc(\mathbb{R}^n)$ равномерно ограничено, непрерывно по t и равномерно непрерывно по X равномерно относительно t;

б) для всех $X \in D$ существует предел

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T F(s,X)ds = F_0(X);$$

в) решения $Y(\tau)$, $\tau = \varepsilon t$ включения

$$D_h Y \in F_0(Y), \quad Y(0) = X_0 \in D^1 \subset D \tag{24}$$

определены при $0 \le \tau \le L$ и лежат вместе с $\rho-$ окрестностью в D.

Тогда для любого $\eta > 0$ существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ для любого решения $X(t,\varepsilon)$ включения (23), удовлетворяющего условию $X(0,\varepsilon) = X_0$, существует решение включения (24) такое, что на промежутке $[0, L\varepsilon^{-1}]$ справедливо неравенство

$$h(X(t,\varepsilon), Y(\varepsilon t)) < \eta.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Васильев А.Б. О непрерывной зависимости по параметру решений дифференциальных включений // Укр. мат. журн. – 1983. – Т.35, № 5. – С. 607–611.

2. Келли Дж.Л. Общая топология. – М.: Наука, 1981. – С.

3. Красносельский М.А., Крейн С.Г. О принципе усреднения в нелинейной механике// Успежи матем. наук. – 1955. – Т.10, № 3(65). – С. 147–152.

4. Плотников А.В. Дифференциальные включения с производной Хукухары и некоторые задачи управления // Деп.ВИНИТИ, 26.04.82, № 2036 – 82. - 35 с.

5. Плотников А.В. Дифференциальные включения с производной Хукухары // ОГУ им. И.И.Мечникова. – Одесса, 1987. – 43 с. Рукопись деп. в УкрНИИНТИ № 989 – Ук87.

6. Плотников А.В. Усреднение дифференциальных включений с производной Хукухары // Укр. мат. журн. – 1989. – Т.42, №1. – С. 121–125.

7. Комлева Т.А., Плотников А.В. Дифференциальные включения с производной Хукухары // Нелинейные колебания. – 2007. – Т.10, №2. – С. 229 - 246.

8. Плотников В.А. Усреднение дифференциальных включений // Укр. мат. журн. – 1979. – Т.31, №5.– С. 573–576.

9. Плотников В.А. Метод усреднения в задачах управления.– Киев – Одесса: Изд-во Лыбидь, 1992. – 188 с.

10. Плотников В.А., Плотникова Л.И. Усреднение дифференциальных включений с многозначными импульсами // Укр. мат. журн. – 1995. – Т.47, №11. – С. 1526–1532.

11. Плотников В.А., Плотников А.В., Витюк А.Н. Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы. – Одесса: Астропринт, 1999. – 356 с.

12. Плотникова Н.В. Теорема Красносельского - Крейна для дифференциальных включений // Дифференц. уравнения.– 2005. – Т.41, №7. – С. 997–1000.

13. Филатов О.П., Хапаев М.М. Усреднение систем дифференциальных включений. – М.: Изд-во Моск.ун-та, 1998. – 160 с.

14. de Blasi F.S., Iervolino F. Equazioni differentiali con soluzioni a valore compatto convesso // Boll. Unione Mat.Ital. – 1969. – Vol.2, № 4-5. – P.491 – 501.

15. Brandao Lopes Pinto A.J., de Blasi F.S., Iervolino F. Uniqueness and existence theorems for differential equations with compact convex valued solutions // Boll. Unione Mat.Ital. – 1970. – V.4. – P.534 – 538.

16. Dabrowska R., Janiak T. Stability of functional - differentional equations with compact convex valued solutions // Discuss. Math. – 1993. – № 13. – P. 87–92.

17. Donchev T. Functional differential inclusions involving dissipative and compact multifunctions // Glas. Mat. – 1998. – № 33 (53). – P.51 – 60.

18. Hukuhara M. Integration des applications mesurables dont la valeur est un compact convexe // Functial. Ekvac. – 1967. – № 10. – P. 205 – 223.

19. Janiak T., Luczak-Kumorek E. The theorem of miiddling for functional – differential equations of neutral type // Discuss. Math. – 1991. – № 11. – P.63 – 73.

20. Kisielewicz M. Description of a class of differential equations with set - valued solutions // Lincei - Rend. Sc. fis. mat. e nat. – 1975. – Vol.58. – P. 158 – 162.

21. Kisielewicz M. Method of averaging for differential equations with compact convex valued solutions // Rend. Mat. – 1976. – Vol. 9, № 3. – P. 397–408.

22. Plotnikov V.A., Ivanov R.P., Kitanov N.M. Method of averaging for impulsive differential inclusions // Pliska Stud. Math. Bulgar. – 1998. – № 12.– P. 43–55.

Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.948 № 826, 2008, с.100–114

О задаче рассеяния для функциональной модели Л. де Бранжа

О. В. Розуменко

Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина, Украина

Для функциональной модели недиссипативного оператора построена схема рассеяния Лакса – Филлипса. Вычислены волновые операторы и оператор рассеяния.

2000 Mathematics Subject Classification 47A40.

Функциональная модель для оператора сжатия T ($\|T\| \leq 1$), действующего в гильбертовом пространстве H, впервые была построена Б. Секефальви-Надем и Ч. Фояшем [5]. Данная модель реализуется оператором умножения на независимую переменную в специальном пространстве функций и базируется на исследовании известной схемы рассеяния П. Лакса и Р. Филлипса [7]. Другие функциональные модели были также получены Б. С. Павловым [9] и Л. де Бранжем – Дж. Ровняком [10].

В [1] предложен подход к построению функциональных моделей недиссипативных операторов, основанный на применении техники теории пространств Л. де Бранжа. В данной работе на базе построенной в [6] дилатации построена схема рассеяния П. Лакса и Р. Филлипса для этой функциональной модели: вычислены полугруппа $Z_t = \exp(itA)$, её дилатация, волновые операторы и оператор рассеяния, а также — характеристическая оператор-функция.

I. Напомним [1], что через $[H, G]$ принято обозначать множество ограниченных линейных операторов, действующих из гильбертова пространства H в гильбертово пространство G.

Совокупность гильбертовых пространств H, E и операторов $A \in [H, H]$, $\varphi \in [H, E]$, $J \in [E, E]$, где J — инволюция, $J = J^* = J^{-1}$, называется [1] локальным узлом

$$\Delta = (A, H, \varphi, E, J), \tag{1}$$

если выполняется условие

$$A - A^* = i\varphi^* J\varphi. \tag{2}$$

Оператор A называется основным оператором узла Δ, φ — каналовым оператором, а J — метрическим оператором узла Δ [4]. Пространство H называется внутренним, а E — внешним пространствами узла Δ.

Предположим, что внешнее пространство E узла Δ (1) конечномерно, $\dim E = r < \infty$. И пусть $\{f_\alpha\}_1^r$ — ортонормированный базис в E, тогда вектора

$$g_\alpha = \varphi^* f_\alpha \quad (1 \le \alpha \le r)$$

в H называются каналовыми векторами, а узловое соотношение (2) можно записать следующим образом:

$$\frac{A - A^*}{i} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{r} \langle \cdot, g_\alpha \rangle J_{\alpha,\beta} g_\beta, \tag{3}$$

где $J_{\alpha,\beta} = \langle J f_\alpha, f_\beta \rangle$ — матричные элементы матрицы σ, отвечающей оператору σ в базисе $\{f_\alpha\}_1^r$.

Совокупность

$$\Delta = (A, H, \{g_\alpha\}_1^r, J) \tag{4}$$

называется операторным комплексом [4], если выполняется условие (3), где $J = J^* = J^{-1}$.

Комплекс (4) называется простым [1], если $H_1 = H$, где

$$H_1 = \operatorname{span}\{A^n g_\alpha : 1 \le \alpha \le r \text{ и } n \ge 0\}.$$

Определим на линейном многообразии непрерывных на $[0, l]$ вектор-функций $f(x) = (f_1(x); ...; f_r(x))$ со значениями в евклидовом пространстве E^r эрмитово неотрицательную билинейную форму

$$\langle f, g \rangle_F = \int_0^l f(x) dF_x g^*(x), \tag{5}$$

где F_t — матричнозначная неубывающая функция на $[0, l]$, для которой $\operatorname{tr} F_t \equiv t$. Обозначим через $L^2_{r,l}(F_x)$ гильбертово пространство, полученное в результате замыкания введенного линейного многообразия вектор-функций $f(x)$ относительно метрики (5), для которых $\langle f, f \rangle_F < \infty$, с надлежащей факторизацией по ядру метрики (5).

Рассмотрим операторный комплекс

$$\Delta = \left(A, H, \{g_1, g_2\}, J_N = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix} \right). \tag{6}$$

Обозначим через $M_x(\lambda)$ — матрицу-функцию, являющуюся решением интегрального уравнения

$$M_x(\lambda) + i\lambda \int_0^x M_t(\lambda) dF_t J_N = I, \tag{7}$$

где $x \in [0, l]$, $\lambda \in \mathbb{C}$, которое в случае $dF_t = a_t dt$ эквивалентно задаче Коши

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx} M_x(\lambda) + i\lambda M_x(\lambda) a_x J_N = 0; \\ M_0(\lambda) = I. \end{cases}$$

Рассмотрим вектор-строку

$$L_x(\lambda) = [1, 0] M_x(\lambda) = [A_x(\lambda), B_x(\lambda)],$$

которая, в силу (7), является решением интегрального уравнения

$$L_x(\lambda) + i\lambda \int_0^x L_t(\lambda) dF_t J_N = [1, 0]. \tag{8}$$

Пусть $2P_\pm = I \pm J_N$, тогда $P_\pm^2 = P_\pm = P_\pm^*$; $P_+ P_- = 0$; $P_+ + P_- = I$. Выделим следующие важные свойства вектор-строки $L_x(z)$:

$$L_x(\lambda) P_+ = E_x(\lambda) L_0^+, \quad L_x(\lambda) P_- = \tilde{E}_x(\lambda) L_0^-,$$

где $L_0^\pm = L_0 P_\pm$, $L_0^+ = \frac{1}{2}[1, i]$, $L_0^- = \frac{1}{2}[1, -i]$ $(L_0 = [1, 0])$, а функции $E_x(\lambda)$ и $\tilde{E}_x(\lambda)$ равны

$$E_x(\lambda) = A_x(\lambda) - iB_x(\lambda), \quad \tilde{E}_x(\lambda) = A_x(\lambda) + iB_x(\lambda). \tag{9}$$

Функцию $\tilde{E}_x(\lambda)$ назовем сопряжённой функцией по отношению к $E_x(\lambda)$ (так как в случае вещественности матрицы-функции F_t будем иметь $\tilde{E}_x(\lambda) = \overline{E_x\left(\bar{\lambda}\right)}$ [1, 2]).

Справедлива следующая теорема [1].

Теорема 1. *Вектор-функция $L_x(\lambda) = [A_x(\lambda), B_x(\lambda)]$, являющаяся нетривиальным ($L_x(\lambda) \not\equiv [1, 0]$) решением интегрального уравнения (8), такова что:*

1) $L_t(\lambda) \in L_{2,a}^2(F_t)$ для любого $a \in [0, l]$ и $\lambda \in \mathbb{C}$,

2) функции $E_x(\lambda) = A_x(\lambda) - iB_x(\lambda)$ и $\tilde{E}_x(\lambda) = A_x(\lambda) + iB_x(\lambda)$ не имеют корней в полуплоскостях $\operatorname{Im}\lambda > 0$ и $\operatorname{Im}\lambda < 0$ соответственно, причем

$$|E_x(\lambda)| - \left|\tilde{E}_x(\lambda)\right| = \begin{cases} > 0, & \operatorname{Im}\lambda > 0; \\ = 0, & \operatorname{Im}\lambda = 0; \\ < 0, & \operatorname{Im}\lambda < 0; \end{cases}$$

и $E_x(0) = \tilde{E}_x(0) = 1$ при всех $x \in [0, l]$.

Напомним [1, 2], что функция $g(\lambda)$ называется функцией ограниченного вида в $\operatorname{Im}\lambda > 0$, если она является частным двух голоморфных ограниченных в $\operatorname{Im}\lambda > 0$ функций. Нетрудно видеть [2], что если $\operatorname{Re} g(\lambda) \geq 0$ в $\operatorname{Im}\lambda > 0$ и $g(\lambda)$ аналитична в полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda > 0$, то $g(\lambda)$ является функцией ограниченного вида. Отсюда легко получить [2] следующее представление аналитических ограниченного вида в $\operatorname{Im}\lambda > 0$ функций $g(\lambda)$:

$$g(\lambda) = B(\lambda)e^{-i\lambda h}G(\lambda),$$

где $B(\lambda)$ — произведение Бляшке, отвечающее нулям $g(\lambda)$; число $h \in \mathbb{R}$ называется средним типом $g(\lambda)$; а $G(\lambda)$ является голоморфной в $\operatorname{Im}\lambda > 0$ функцией, для которой

$$\operatorname{Re} G(x+iy) = \frac{y}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\mu(t)}{(t-x)^2+y^2} \quad (\lambda = x+iy;\ y>0);$$

причем вещественная функция $\mu(t)$ такова, что $\mu(0) = 0$ и

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{|d\mu(t)|}{1+t^2} < \infty.$$

Рассмотрим пару целых функций $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ такую, что функции $E(\lambda) = A(\lambda) - iB(\lambda)$ и $\tilde{E}(\lambda) = A(\lambda) + iB(\lambda)$ не имеют корней в полуплоскостях $\operatorname{Im}\lambda > 0$ и $\operatorname{Im}\lambda < 0$ соответственно, причем

$$|E(\lambda)| - \left|\tilde{E}(\lambda)\right| = \begin{cases} > 0, & \operatorname{Im}\lambda > 0; \\ = 0, & \operatorname{Im}\lambda = 0; \\ < 0, & \operatorname{Im}\lambda < 0. \end{cases}$$

Ассоциируем с такой парой функций гильбертово пространство $\mathcal{B}(A,B)$ [2].

Пространством Л. де Бранжа $\mathcal{B}(A,B)$ называется линейное многообразие целых функций $F(\lambda)$ таких, что:

а) $\dfrac{F(\lambda)}{E(\lambda)}\left(\dfrac{F(\lambda)}{\tilde{E}(\lambda)}\right)$ является функцией ограниченного вида и неположительного среднего типа в верхней, $\operatorname{Im}\lambda > 0$ (нижней, $\operatorname{Im}\lambda < 0$), полуплоскости;

б) имеет место

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{F(t)}{E(t)}\right|dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{F(t)}{\tilde{E}(y)}\right|dt < \infty.$$

Пространство $\mathcal{B}(A,B)$ является гильбертовым [2]. Скалярное произведение в $\mathcal{B}(A,B)$ задаётся естественным образом:

$$\langle F(\lambda), G(\lambda)\rangle_{\mathcal{B}(A,B)} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(t)\bar{G}(t)\frac{dt}{|E(t)|^2}.$$

Теорема Л. де Бранжа 2. [2] *Рассмотрим семейство гильбертовых пространств Л. де Бранжа* $\mathcal{B}\left(A_x(\lambda), B_x(\lambda)\right)$*, где вектор-строка* $L_x(\lambda) =$

$[A_x(\lambda), B_x(\lambda)]$ *является решением интегрального уравнения (8) на отрезке* $x \in [0, l]$ *для некоторой матричнозначной меры* F_t. *Сопоставим каждой строке* $[f(t), g(t)] \in L^2_{2,l}(F_t)$ *функцию*

$$F(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_0^a [f(t), g(t)] dF_t L_t^*(\bar{\lambda}), \tag{10}$$

где a — *внутренняя точка отрезка* $[0, l]$, $0 < a < l$. *Тогда* $F(\lambda) \in \mathcal{B}(A_a(\lambda), B_a(\lambda))$, *причем справедливо "равенство Парсеваля"*

$$\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|F(t)|^2}{|E_a(t)|^2} dt = \int_0^a [f(t), g(t)] dF_t \begin{bmatrix} \tilde{f}(t) \\ \tilde{g}(t) \end{bmatrix}.$$

Для любой функции $G(\lambda) \in \mathcal{B}(A_a(\lambda), B_a(\lambda))$ *существует вектор-функция* $[\varphi(t), \psi(t)] \in L^2_{2,l}(F_t)$ *с носителем на* $[0, a]$, *такая что для* $G(\lambda)$ *имеет место представление (10).*

II. Оператор-функция $Z_t \in [H, H]$ аргумента $t \in \mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\}$ называется полугруппой [3], если

$$Z_0 = I, \quad Z_{t+s} = Z_t \cdot Z_s.$$

Если Z_t непрерывна в равномерной топологии H, то $Z_t = \exp(itA)$, где $A \in [H, H]$ — инфинитезимальный оператор полугруппы Z_t [3] задается формулой

$$iA = s - \lim_{t \to 0} \frac{Z_t - I}{t}$$

Полугруппа U_t, действующая в пространстве $\mathcal{H}$, называется дилатацией полугруппы Z_t в H [5], если

$$\mathcal{H} \supseteq H; \quad Z_t = P_H U_t|_H \quad (t \geq 0), \tag{11}$$

где P_H — ортопроектор на H.

Рассмотрим комплекс [1]

$$\Delta = (A, \mathcal{B}(A_l(\lambda), B_l(\lambda)), \{e_1(\lambda), e_2(\lambda)\}, J_N), \tag{12}$$

где

$$AF(\lambda) = \frac{F(\lambda) - F(0)}{\lambda}, \quad F(\lambda) \in \mathcal{B}(A_l(\lambda), B_l(\lambda)), \tag{13}$$

$$e_1(\lambda) = \frac{B_l^*(\bar{\lambda})}{\lambda}, \quad e_2(\lambda) = \frac{1 - A_l^*(\bar{\lambda})}{\lambda}. \tag{14}$$

Теорема 3. [1] *Пусть спектр* $\sigma(A)$ *оператора* A *операторного комплекса* Δ *(6) сосредоточен в нуле,* $\sigma(A) = \{0\}$. *Тогда в случае простоты комплекс (6) унитарно эквивалентен комплексу (12).*

Вычислим полугруппу

$$Z_tF(\lambda) = e^{iAt}F(\lambda), \quad F(\lambda) \in \mathcal{B}\left(A_l(\lambda), B_l(\lambda)\right).$$

Так как

$$F(\lambda) = f_0 + \lambda f_1 + \frac{\lambda^2}{2!}f_2 + ...;$$

$$AF(\lambda) = f_1 + \frac{\lambda}{2!}f_2 + \frac{\lambda^2}{3!}f_3 + ...;$$

$$A^2F(\lambda) = \frac{1}{2!}f_2 + \frac{\lambda}{3!}f_3 + \frac{\lambda^2}{4!}f_4 + ...;$$

и т. д., имеем

$$Z_tF(\lambda) = e^{iAt}F(\lambda) = \sum_0^\infty \frac{(iA)^k t^k}{k!}F(\lambda) =$$

$$= F(\lambda) + itAF(\lambda) + \frac{i^2t^2}{2!}A^2F(\lambda) + ... = f_0 + (\lambda + it)f_1 +$$

$$+ \left(\frac{\lambda^2}{2!} + it\frac{\lambda}{2!} + \frac{i^2t^2}{2!}\cdot\frac{1}{2!}\right)f_2 + ... = f_0 + \lambda\left(1 + \frac{it}{\lambda}\right)f_1 +$$

$$+ \left(1 + \frac{it}{\lambda} + \frac{i^2t^2}{2!\lambda^2}\right)\frac{1}{2!}\lambda^2 f_2 + ... + \left(1 + \frac{it}{\lambda} + ... + \frac{1}{n!}\left(\frac{it}{\lambda}\right)^n\right)\frac{\lambda^n}{n!}f_n + ...$$

Итак,

$$e^{\frac{it}{\lambda}}(F(\lambda) - F(0)) = \left(1 + \frac{it}{\lambda} + \frac{1}{2!}\left(\frac{it}{\lambda}\right)^2 + ...\right)\left(\lambda f_1 + \lambda^2 f_2 + \lambda^3 f_3 + ...\right).$$

Теорема 4. *Полугруппа $Z_t = \exp(itA)$, где A имеет вид (13), на функции $F(\lambda) \in \mathcal{B}\left(A_l(\lambda), B_l(\lambda)\right)$ действует следующим образом:*

$$Z_tF(\lambda) = F(0) + P_+e^{\frac{it}{\lambda}}(F(\lambda) - F(0)), \tag{15}$$

где P_+ — ортопроектор на подпространство функций, аналитически продолжаемых в верхнюю полуплоскость.

Рассмотрим линейное многообразие вектор-функций $f(t)$ со значениями в гильбертовом пространстве G при $t \in [0, T]$. Обозначим через $L^2_{(0,T)}(G)$ гильбертово пространство, полученное в результате замыкания данного многообразия вектор-функций по норме

$$\|f\|^2 = \int_0^T \|f(t)\|^2_G dt < \infty.$$

Открытая система $F_\Delta = \{R_\Delta, S_\Delta\}$ называется [1] ассоциированной открытой системой с узлом Δ (1), если R_Δ и S_Δ задаются формулами

$$F_\Delta : \begin{cases} R_\Delta\left(h_0, u(t)\right) = h(t); \\ S_\Delta\left(h_0, u(t)\right) = \left(h_T, v(t)\right); \end{cases} \qquad t \in [0, T]. \tag{16}$$

При этом $h(t)$ является решением задачи Коши

$$R_\Delta : \begin{cases} i\dfrac{d}{dt}h(t) + Ah(t) = \varphi^* Ju(t); \\ h(0) = h_0 \end{cases} \qquad (0 \le t \le T), \tag{17}$$

а отображение S_Δ задается формулами

$$S_\Delta : \begin{cases} v(t) = u(t) - i\varphi h(t); \\ h_T = h(T), \end{cases} \tag{18}$$

где $h(t)$ — решение задачи (17).

Обозначим через $\mathcal{M}$ линейную оболочку вектор-функций вида

$$f(\xi) = \left(u_+(\xi), h(\lambda), u_-(\xi)\right), \tag{19}$$

где $u_\pm(\xi)$ — вектор-функции из E такие, что $\operatorname{supp} u_\pm(\xi) \in \mathbb{R}_\mp$, а $h(\lambda) \in \mathcal{B}\left(A_l(\lambda), B_l(\lambda)\right)$. Зададим на $\mathcal{M}$ норму

$$\|f\|^2 = \int\limits_{-\infty}^{0} \|u_+(\xi)\|_E^2 d\xi + \|h(\lambda)\|^2 + \int\limits_{0}^{\infty} \|u_-(\xi)\|_E^2 d\xi < \infty. \tag{20}$$

Замыкание многообразия $\mathcal{M}$ в этой метрике и образует гильбертово пространство, которое мы обозначим через $\mathcal{H}$. Через P_M обозначим [1] оператор сужения на множество M, а именно:

$$(P_M f)(\xi) = f(\xi)\chi_M(\xi),$$

где $\chi_M(\xi)$ — характеристическая функция множества M ($M \subset \mathbb{R}$) ($\chi_M(\xi) = 1$ при $\xi \in M$, и $\chi_M(\xi) = 0$ при $\xi \notin M$). Определим в $\mathcal{H}$ $J-$метрику, $\langle J.,.\rangle$, где

$$Jf(\lambda, \xi) = \left(Ju_+(\xi), h(\lambda), Ju_-(\xi)\right). \tag{21}$$

Зададим [1] в пространстве $\mathcal{H}$ полугруппу U_t, —

$$(U_t f)(\lambda, \xi) = f_t(\lambda, \xi) = \left(u_+(t, \xi), h_t(\lambda), u_-(t, \xi)\right), \qquad (t \ge 0). \tag{22}$$

Вектор-функция $u_-(t, \xi)$ имеет вид:

$$u_-(t, \xi) = P_{\mathbb{R}_+} u_-(\xi + t). \tag{23}$$

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} i\dfrac{d}{d\xi}y_t(\lambda,\xi)+\dfrac{y_t(\lambda,\xi)-y_t(0,\xi)}{\lambda}=\sum\limits_{\alpha,\beta=1}^{2}\left\langle P_{(-t,0)}u_-(\xi+t),e_\alpha\right\rangle_{\mathcal{B}}J_{\alpha\beta}e_\beta; \\ y_t(\lambda,-t)=h(\lambda);\ \xi\in(-t,0); \end{cases} \tag{24}$$

и положим $h_t(\lambda)=y_t(\lambda,0)$. Наконец,

$$u_+(t,\xi)=u_+(\xi+t)+P_{(-t,0)}\left\{u_-(\xi+t)-i\sum_{\alpha,\beta=1}^{2}\langle y_t(\lambda,\xi),e_\alpha\rangle e_\beta\right\}, \tag{25}$$

где $y_t(\lambda,\xi)$ — решение задачи Коши (24).

Справедливо следующее равенство [1]:

$$\int_{-t}^{0}\left\langle J\left[u_-(\xi+t)-i\sum_{\alpha,\beta=1}^{2}\langle y_t(\lambda,\xi),e_\alpha\rangle e_\beta\right],u_-(\xi+t)\right.$$

$$\left.-i\sum_{\alpha,\beta=1}^{2}\langle y_t(\lambda,\xi),e_\alpha\rangle e_\beta\right\rangle d\xi+\|h_t(\lambda)\|^2=\int_0^t\langle Ju_-(\xi),u_-(\xi)\rangle\,d\xi+\|h(\lambda)\|^2.$$

Легко видеть, что $y_t(\lambda,\xi)$, решение задачи Коши (24), имеет вид

$$y_t(\lambda,\xi)=h(0)+P_+e^{\frac{i(\xi+t)}{\lambda}}(h(\lambda)-h(0))-$$

$$-i\int_{-t}^{\xi}e^{iA(\xi-\theta)}\sum_{\alpha,\beta=1}^{2}\langle u_-(\theta+t),e_\alpha(\lambda)\rangle_{\mathcal{B}}J_{\alpha\beta}e_\beta d\theta,$$

$\xi\in(-t,0)$. Полугруппа U_t является дилатацией Z_t,

$$P_H U_t(0,h(\lambda),0)=(0,h_t(\lambda),0)=Z_t h(\lambda),$$

так как $h_t(\lambda)=y_t(\lambda,0)=h(0)+P_+e^{\frac{it}{\lambda}}(h(\lambda)-h(0))$, в силу задачи Коши (24). Сопряженная полугруппа U_t^* определяется в $\mathcal{H}$ следующим образом:

$$(U_t^*\tilde f)(\lambda,\xi)=\tilde f_t(\lambda,\xi)=\left(\tilde u_+(t,\xi),\tilde h_t(\lambda),\tilde u_-(t,\xi)\right), \tag{26}$$

где

$$\tilde u_+(t,\xi)=P_{\mathbb{R}_-}\tilde u_+(\xi-t),$$

а $\tilde h_t(\lambda)=\tilde y_t(\lambda,0)$, функция же $\tilde y_t(\lambda,\xi)$ является решением задачи Коши

$$\begin{cases} i\dfrac{d}{d\xi}\tilde y_t(\lambda,\xi)+\dfrac{\tilde y_t(\lambda,\xi)-\tilde y_t(0,\xi)}{\bar\lambda}=\sum\limits_{\alpha,\beta=1}^{2}\left\langle P_{(0,t)}u_+(\xi-t),e_\alpha\right\rangle J_{\alpha\beta}e_\beta; & \xi\in(0,t); \\ \tilde y_t(\lambda,t)=\tilde h(\lambda); \end{cases}$$

и задается выражением

$$\tilde{y}_t(\lambda,\xi) = \tilde{h}(0) + P_+ e^{\frac{i(\xi-t)}{\lambda}} + i\int\limits_{\xi}^{t} e^{iA^*(\theta-\xi)} \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \langle u_+(\theta-t), e_\alpha(\lambda)\rangle_{\mathcal{B}} J_{\alpha\beta} e_\beta(\lambda)d\theta, \tag{27}$$

где $\xi\in(0,t)$. И наконец

$$\tilde{u}_-(t,\xi) = \tilde{u}_-(\xi-t) + P_{(0,t)}\left[\tilde{u}_-(\xi-t) + i\sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \langle \tilde{y}_t(\lambda,\xi), e_\alpha\rangle e_\beta\right].$$

Введем метрику

$$\langle f(\xi,\lambda)\rangle_J^2 = \int\limits_{\mathbb{R}_-} \langle Ju_+(\xi), u_+(\xi)\rangle_E d\xi + \|h(\lambda)\|^2 + \int\limits_{\mathbb{R}_+} \langle Ju_-(\xi), u_-(\xi)\rangle_E d\xi. \tag{28}$$

Полугруппа U_t называется J-унитарной [1], если U_t унитарна в J-метрике (28),

$$U_t^* J U_t = J, \quad U_t J U_t^* = J \quad (\forall t\in\mathbb{R}_+).$$

Нетрудно видеть [6], что U_t (22) является J-унитарной дилатацией.

Теорема 5. *Полугруппа Z_t в $\mathcal{B}(A_l(\lambda), B_l(\lambda))$, где A действует по формуле (13), обладает J-унитарной дилатацией U_t (22) в $\mathcal{H}$.*

III. Подпространства D_+ и D_- в $\mathcal{H}$ называются [7] уходящим и приходящим подпространствами группы U_t в $\mathcal{H}$ в смысле П. Лакса и Р. Филлипса, если $D_-\perp D_+$ и

$$\begin{aligned} U_t D_+ &\subset D_+ \quad (\forall t\in\mathbb{R}_+);\\ U_{-t} D_- &\subset D_- \quad (\forall t\in\mathbb{R}_+). \end{aligned} \tag{29}$$

Отметим, что подпространства

$$D_+ = \{f(\xi) = (u_+(\xi),0,0)\in\mathcal{H}\}; \quad D_- = \{f(\xi) = (0,0,u_-(\xi))\in\mathcal{H}\}$$

являются уходящим и приходящим подпространствами для U_t, кроме того имеет место

$$\mathcal{H} = D_+ \oplus H \oplus D_-. \tag{30}$$

Зададим в гильбертовом пространстве

$$L^2_{\mathbb{R}}(E) = \left\{ g(\xi)\in E : \xi\in\mathbb{R} : \int\limits_{-\infty}^{\infty} \|g(\xi)\|_E^2 d\xi < \infty \right\} \tag{31}$$

свободную [8] унитарную группу сдвигов

$$(V_t g)(\xi) = g(\xi+t). \tag{32}$$

Естественное отождествление позволяет считать, что $D_\pm = L^2_{\mathbb{R}_\mp}(E) \subset L^2_{\mathbb{R}}(E)$. Определим [8] волновые операторы $W_\mp$,

$$W_\mp = s - \lim_{t\to\pm\infty} U_t P_{D_\mp} V_{-t}. \tag{33}$$

Нетрудно видеть [1], что имеют место следующие важные соотношения:

$$W_\pm P_{D_\pm} = P_{D_\pm}, \quad U_t W_\pm = W_\pm V_t \quad (t \in \mathbb{R}). \tag{34}$$

Определим гильбертовы пространства

$$L^2_{\mathbb{R}}(E,\alpha^-) = \left\{ g(\xi) \in E : \xi \in \mathbb{R};\ \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-2\alpha^-\xi} \|g(\xi)\|^2_E\, d\xi + \int\limits_{0}^{\infty} \|g(\xi)\|^2_E d\xi < \infty \right\}, \tag{35_-}$$

где $\alpha^- > \beta$, и

$$L^2_{\mathbb{R}}(E,\alpha^+) = \left\{ g(\xi) \in E : \xi \in \mathbb{R};\ \int\limits_{0}^{\infty} e^{-2\alpha^+\xi} \|g(\xi)\|^2_E\, d\xi + \int\limits_{-\infty}^{0} \|g(\xi)\|^2_E d\xi < \infty \right\}; \tag{35_+}$$

где $\alpha^+ > \beta' > 0$, причем $\|U_{-t}\| \le e^{\beta' t}$.

Имеют место

$$\begin{aligned} \langle JW_+v, W_+v'\rangle_{\mathcal{H}} &= \langle Jv, v'\rangle_{L^2(E)};\\ \langle JW_-u, W_-u'\rangle_{\mathcal{H}} &= \langle Ju, u'\rangle_{L^2(E)} \end{aligned} \tag{36}$$

для любых $u,\ u' \in L^2_{\mathbb{R}}(E,\alpha^-)$ (35_+) и $v,\ v' \in L^2_{\mathbb{R}}(E,\alpha^+)$ (35_-).

Справедлива следующая теорема [6].

Теорема 6. [6] *Пусть для дилатации U_t имеют место оценки $\|U_t\| \le e^{\beta t}$, $\|U_{-t}\| \le e^{\beta' t}$, где $\beta,\ \beta' > 0$. Тогда существуют волновые операторы W_- и W_+ (33), действующие соответственно из $L^2_{\mathbb{R}}(E,\alpha^+)$ (35_+) и из $L^2_{\mathbb{R}}(E,\alpha^-)$ (35_-) (где $\alpha^- > \beta$, $\alpha^+ > \beta'$) в пространство $\mathcal{H}$, $W_\pm$ обладают J-изометричностью (36), при этом имеют место соотношения (34).*

Найдем явный вид волнового оператора W_-. Пусть $g(\xi) \in L^2_{\mathbb{R}}(E,\alpha^-)$, тогда

$$U_t P_{D_-} V_{-t} g(\xi) = (u_+(t,\xi), h_t(\lambda), u_-(t,\xi)),$$

где $u_-(t,\xi) = P_{D_-} g(\xi)$; $h_t(\lambda) = y_t(\lambda, 0)$, где $y_t(\lambda,\xi)$ является решением задачи Коши

$$\begin{cases} i\dfrac{d}{d\xi} y_t(\lambda,\xi) + \dfrac{y_t(\lambda,\xi) - y_t(0,\xi)}{\lambda} = \sum\limits_{\alpha,\beta=1}^{2} \left\langle P_{(-t,0)} g(\xi), e_\alpha \right\rangle J_{\alpha\beta} e_\beta;\\ y_t(\lambda,-t) = 0; \end{cases}$$

и имеет вид

$$y_t(\lambda,\xi) = -i \int\limits_{-t}^{\xi} e^{iA(\xi-\theta)} \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \langle g(\theta), e_\alpha(\lambda)\rangle J_{\alpha\beta} e_\beta(\lambda) d\theta;$$

и, наконец,

$$u_+(t,\xi) = P_{(-t,0)}\left\{g(\xi) - i\sum_{\alpha,\beta=1}^{2}\langle y_t(\lambda,\xi), e_\alpha\rangle\, e_\beta\right\}.$$

Таким образом,

$$W_-g(\xi) = \left(P_{\mathbb{R}_-}\left\{g(\xi) - i\sum_{\alpha,\beta=1}^{2}\langle y_{+\infty}(\lambda,\xi), e_\alpha\rangle\, J_{\alpha\beta}e_\beta\right\}, y_{+\infty}(\lambda,0), P_{D_-}g(\xi)\right),$$

где

$$y_{+\infty}(\lambda,\xi) = -i\int_{-\infty}^{\xi} e^{iA(\xi-\theta)}\sum_{\alpha,\beta=1}^{2}\langle g(\theta), e_\alpha(\lambda)\rangle\, J_{\alpha\beta}e_\beta(\lambda)d\theta.$$

Оператор рассеяния S определим [1, 6, 7] следующим образом:

$$S = W_+^*W_- \quad \left(L^2_{\mathbb{R}}\left(E,\alpha^-\right) \to L^2_{\mathbb{R}}\left(E,\alpha^+\right)\right). \tag{37}$$

Для оператора рассеяния S выполняется [1] соотношение

$$SV_t = V_tS. \tag{38}$$

Найдем явный вид оператора рассеяния в $L^2_{\mathbb{R}}\left(E,\alpha^-\right)$. Из определения волновых операторов следует, что

$$S = s - \lim_{t\to\infty} V_{-t}P_{D_+}U_{2t}P_{D_-}V_{-t}.$$

Пусть $g(\xi) \in L^2_{\mathbb{R}}\left(E,\alpha^-\right)$, тогда

$$V_{-t}P_{D_+}U_{2t}P_{D_-}V_{-t}g(\xi) = V_{-t}P_{D_+}U_{2t}\left(0,0,P_{\mathbb{R}_-}g(\xi-t)\right) =$$

$$= V_{-t}P_{D_+}\left(v_t(\xi), h_t(\lambda), P_{\mathbb{R}_+}g(\xi+t)\right) = v_t(\xi-t),$$

где $v_t(\xi) = P_{(-2t,0)}\left\{g(\xi+t) - i\,\|\langle y_t(\xi,\lambda)e_\alpha, e_\beta\rangle\|\right\}$; $y_t(\lambda,\xi)$ является решением задачи Коши

$$\begin{cases} i\dfrac{d}{d\xi}y_t(\lambda,\xi) + \dfrac{y_t(\lambda,\xi) - y_t(0,\xi)}{\lambda} = \displaystyle\sum_{\alpha,\beta=1}^{2}\langle g(\xi+t), e_\alpha(\lambda)\rangle_B\, J_{\alpha\beta}e_\beta(\lambda); \\ y_t(\lambda,-2t) = 0;\ \xi \in (-2t,0); \end{cases}$$

а $P_{(-2t,0)}$ — оператор умножения на характеристическую функцию интервала $(-2t,0)$. Очевидно, что

$$y_t(\lambda,\xi) = \int_{-2t}^{\xi} e^{iA(\xi-\eta)}\sum_{\alpha,\beta=1}^{2}\langle g(\eta+t), e_\alpha(\lambda)\rangle_B\, J_{\alpha\beta}e_\beta(\lambda),$$

поэтому

$$v_t(\xi - t) = P_{(-t,t)} \left\{ g(\xi) - \int\limits_{-t}^{\xi} J_N \left\| \left\langle e^{iA(\xi - x)} e_\alpha, e_\beta \right\rangle \right\| dx \right\}.$$

Таким образом, после предельного перехода $t \to \infty$ окончательно получим

$$Sg(\xi) = g(\xi) - \int\limits_{-\infty}^{\xi} J_N \left\| \left\langle e^{iA(\xi - x)} e_\alpha, e_\beta \right\rangle \right\| g(x) dx =$$

$$= g(\xi) - \int\limits_{-\infty}^{\xi} J_N \left\| \left\langle e_\alpha(0) + P_+ e^{\frac{i(\xi - x)}{\lambda}} \left(e_\alpha(\lambda) - e_\alpha(0) \right), e_\beta \right\rangle \right\| g(x) dx.$$

IV. Напомним [4], что функция

$$S_\Delta(\lambda) = I - i\varphi(A - \lambda I)^{-1} \varphi^* J \tag{39}$$

называется характеристической оператор-функцией М. С. Лившица узла Δ.

Характеристической матрицей-функцией комплекса называется [1]

$$S_\Delta(\lambda) = I - iJ \left\| \left\langle (A - \lambda I)^{-1} g_\alpha, g_\beta \right\rangle \right\|, \tag{40}$$

где $S_\Delta(\lambda) = \|\langle S_\Delta(\lambda) f_\alpha, f_\beta \rangle\|$ — матрица, отвечающая характеристической оператор-функции $S_\Delta(\lambda)$ в базисе $\{f_\alpha\}_1^r$.

Для комплекса (12) имеем

$$S_\Delta(z) = I - iJ_N \left\| \left\langle (A - zI)^{-1} \hat{e}_\alpha(\lambda), \hat{e}_\beta(\lambda) \right\rangle \right\| =$$

$$= \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix},$$

$$s_{11} = 1 + \left\langle (A - zI)^{-1} \frac{1 - A_l^*(\bar{\lambda})}{\lambda}, \frac{B_l^*(\bar{\lambda})}{\lambda} \right\rangle;$$

$$s_{21} = - \left\langle (A - zI)^{-1} \frac{B_l^*(\bar{\lambda})}{\lambda}, \frac{B_l^*(\bar{\lambda})}{\lambda} \right\rangle;$$

$$s_{12} = \left\langle (A - zI)^{-1} \frac{1 - A_l^*(\bar{\lambda})}{\lambda}, \frac{1 - A_l^*(\bar{\lambda})}{\lambda} \right\rangle;$$

$$s_{22} = 1 - \left\langle (A - zI)^{-1} \frac{B_l^*(\bar{\lambda})}{\lambda}, \frac{1 - A_l^*(\bar{\lambda})}{\lambda} \right\rangle.$$

Вычислим резольвенту $(A-zI)^{-1}$, пусть $(A-zI)^{-1}u = f$ или $Af - zf = u$, где $f(\lambda) \in \mathcal{B}\left(A_l(\lambda), B_l(\lambda)\right)$. Тогда для компоненты $f_i(\lambda, z)$ функции $f(\lambda, z)$ мы получим

$$\frac{f_i(\lambda, z) - f_i(0, z)}{\lambda} - z f_i(\lambda, z) = u_i(\lambda); \quad i = 1, 2;$$

следовательно,

$$f_i(\lambda, z) = \frac{\lambda u_i(\lambda)}{1-\lambda z} - \frac{1}{z(1-\lambda z)} u_i\left(\frac{1}{z}\right); \quad i = 1, 2.$$

Таким образом,

$$s_{11} = 1 + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{A_l^*\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) - A_l^*(\bar{\lambda})}{1-\lambda z} \cdot \frac{\overline{B_l^*(\bar{\lambda})}}{\bar{\lambda}} \frac{d\lambda}{|E_l(\lambda)|^2}, \tag{41}$$

$$s_{21} = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{B_l^*(\bar{\lambda}) - B_l^*\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}{1-\lambda z} \cdot \frac{\overline{B_l^*(\bar{\lambda})}}{\bar{\lambda}} \frac{d\lambda}{|E_l(\lambda)|^2}$$

;

$$s_{12} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{A_l^*\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) - A_l^*(\bar{\lambda})}{1-\lambda z} \cdot \frac{\overline{1 - A_l^*(\bar{\lambda})}}{\bar{\lambda}} \frac{d\lambda}{|E_l(\lambda)|^2};$$

$$s_{22} = 1 - \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{B_l^*(\bar{\lambda}) - B_l^*\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}{1-\lambda z} \cdot \frac{\overline{1 - A_l^*(\bar{\lambda})}}{\bar{\lambda}} \frac{d\lambda}{|E_l(\lambda)|^2},$$

где $E_l(\lambda)$ имеет вид (9).

Пусть

$$dF_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} dt;$$

тогда уравнение (8) эквивалентно системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dl} A_l(\lambda) + \lambda B_l(\lambda) = 0; & A_0(\lambda) = 1; \\ \dfrac{d}{dl} B_l(\lambda) - \lambda A_l(\lambda) = 0; & B_0(\lambda) = 0, \end{cases}$$

решением которой являются функции $A_l(\lambda) = \cos l\lambda$, $B_l(\lambda) = \sin l\lambda$. Таким образом, $\mathcal{B}\left(A_l(\lambda), B_l(\lambda)\right)$ в этом случае совпадает с пространством Винера – Пэли [1, 2]. Рассмотрим случай $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда

$$s_{11} = 1 + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\frac{l}{z} - \cos l\lambda}{1-\lambda z} \cdot \frac{\sin l\lambda}{\lambda} d\lambda;$$

$$s_{12}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\frac{l}{z}-\cos l\lambda}{1-\lambda z}\cdot\frac{1-\cos l\lambda}{\lambda}d\lambda;$$

$$s_{21}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin l\lambda-\sin\frac{l}{z}}{1-\lambda z}\,\frac{\sin l\lambda}{\lambda}d\lambda; \qquad (42)$$

$$s_{22}=1-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin l\lambda-\sin\frac{l}{z}}{1-\lambda z}\cdot\frac{1-\cos l\lambda}{\lambda}d\lambda.$$

Приведем явный вид характеристической функции для случая $l>0, \operatorname{Im}\frac{1}{z}>0$ (в остальных случаях характеристическая функция имеет аналогичный вид):

$$s_{11}=1+\cos\frac{l}{z}\left[\pi-\pi e^{i\frac{l}{z}}\right]-\frac{1}{2}\left[-\pi e^{i\frac{2l}{z}}+\pi\right];$$

$$s_{12}=\pi ie^{i\frac{l}{z}}\left(\cos\frac{l}{z}+1\right)-\pi ie^{i\frac{2l}{z}};$$

$$s_{21}=\frac{1}{2}\pi ie^{i\frac{2l}{z}}-\sin lz\left[-\pi e^{i\frac{l}{z}}+\pi\right]; \qquad (43)$$

$$s_{22}=1-\pi\left[1-e^{i\frac{l}{z}}\right]+\frac{\pi}{2}\left[1-e^{i\frac{2l}{z}}\right]+\sin\left(\frac{l}{z}\right)\pi ie^{i\frac{l}{z}}.$$

Теорема 7. *Характеристическая оператор-функция $S_\Delta(\lambda)$ комплекса Δ (12) имеет вид*

$$S_\Delta(\lambda)=\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12}\\ s_{21} & s_{22}\end{bmatrix},$$

где s_{ij} (i, j = 1, 2) задаются формулами (41). Если

$$dF_t=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}dt;$$

s_{ij} (i, j = 1, 2) задаются формулами (42), а в случае $l>0$, $\operatorname{Im}\frac{1}{z}>0$ – формулами (43).

Как известно, [1], преобразование Фурье оператора рассеяния (37) совпадает с оператором умножения на характеристическую матрицу-функцию $S_\Delta(\lambda)$.

Автор выражает благодарность В.А. Золотареву за внимание и полезные замечания к статье.

ЛИТЕРАТУРА

1. Золотарев В. А. Аналитические методы спектральных представлений несамосопряженных и неунитарных операторов. Харьков: Изд. ХНУ, — 2003. — 342 с.

2. De Branges L. Hilbert spaces of entire functions. London: Prentice-Hall, — 1968. — 326 pp.

3. Рисс Ф., Надь Б. С. Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, — 1979. — 587 с.

4. Лившиц М. С., Янцевич А. А. Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах. Харьков: Изд. ХГУ, — 1971. — 160 с.

5. Секефальви-Надь Б., Фояш Ч. Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. М: Мир, — 1970. — 431 с.

6. Золотарев В. А., Розуменко О. В. Функциональная модель Павлова ограниченного несамосопряженного оператора. // Харьков: Вiсник Харкiвського нацiонального унiверситету. Серiя "Математика, прикладна математика i механiка — 2006. — **749**. С. 30 - 49.

7. Лакс П. Д., Филлипс Р. С. Теория рассеяния. М: Мир, — 1971. — 312 с.

8. Адамян В. М., Аров Д. З. Об унитарных сцеплениях полуунитарных операторов. // Кишинев: Математические исследования, — 1966. — Т. 1, вып. 2. — С. 3 – 64.

9. Павлов Б. С. Спектральный анализ диссипативного оператора Шредингера в терминах функциональной модели. // Итоги науки и техн. Сер. Совр. мат. фундам. направления, ВИНИТИ, — 1991. — Т. 65. — С. 95–163.

10. De Branges L., Rovnyak J. Canonical models in quantum scattering theory. // New-York, Wiley: Perturb. Theory and Appl. in Quant. Mech., — 1966. — Pp. 295–392.