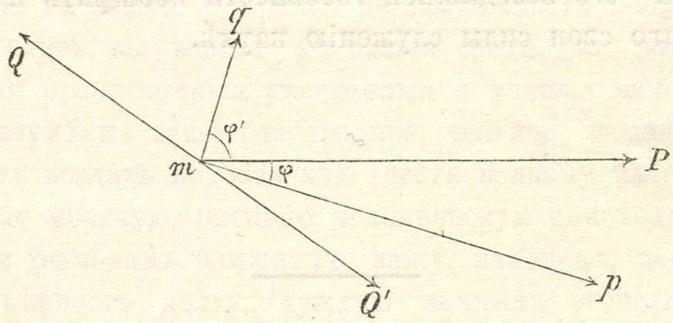
По вопросу о сложенiи силъ.

Х. С. Головина.

1. Положимъ, что на данную точку m дѣйствуетъ сила $2p'$, по направленiю данной прямой mP, (фиг. 1-я) и еще двѣ силы p', направленныя по другой данной прямой QQ' въ противоположныя стороны.



Фиг. 1-я.

Такъ какъ двѣ послѣднiя силы взаимно уравновѣшиваются, то общая равнодѣйствующая всей системы силъ приводится къ силѣ $2p'$, направленной по прямой mP. Но та же система силъ можетъ быть замѣнена двумя взаимно перпендикулярными силами p и q, причемъ p будетъ равнодѣйствующей двухъ равныхъ силъ p', направленныхъ по прямымъ mP и mQ, а q равнодѣйствующей двухъ такихъ же силъ p', направленныхъ по mP и mQ'.

Обозначая углы, составляемые прямою mP съ направленiями силъ p и q, черезъ φ и $\varphi' = \frac{\pi}{2} - \varphi$, можемъ написать

$$p = 2p'f(\varphi) \quad \text{и} \quad q = 2p'f(\varphi').$$

Сила $2p'$, очевидно, будетъ равнодѣйствующей двухъ взаимно-перпендикулярныхъ силъ p и q; обозначимъ ея величину черезъ r, т. е. положимъ

$$2p' = r.$$

Тогда будетъ

$$p = rf(\varphi) \quad \text{и} \quad q = rf(\varphi').$$

Положимъ, что къ точкѣ m приложена вторая система такихъ-же силъ p и q, но расположенная симметрически съ первой относительно направленія mP равнодѣйствующей силы r; тогда общая равнодѣйствующая четырехъ силъ будетъ $2r$ и направится также по прямой mP.

Такъ какъ послѣднія силы попарно равны и направлены подъ равными углами (φ и φ') къ своей равнодѣйствующей, то можно написать

$$r = pf(\varphi) + qf(\varphi') = r\{[f(\varphi)]^2 + [f(\varphi')]^2\}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что

$$[f(\varphi)]^2 + [f(\varphi')]^2 = 1$$

и

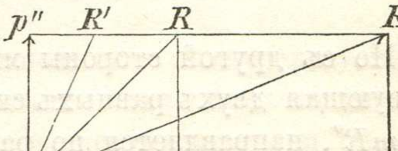
$$p^2 + q^2 = r^2.$$

Уголъ φ можетъ имѣть произвольную величину, а, слѣдовательно, и величины силъ p и q могутъ быть какія угодно.

Такимъ образомъ найдено, что величина равнодѣйствующей r двухъ взаимно-перпендикулярныхъ, но имѣющихъ какую угодно величину, силъ p и q опредѣляется длиною діагонали параллелограмма, построеннаго на отрѣзкахъ, изображающихъ эти силы.

Конечно, пока нельзя утверждать, что и направленіе равнодѣйствующей опредѣляется тою же діагональю; но не трудно указать частный случай, въ которомъ это будетъ имѣть мѣсто. Въ самомъ дѣлѣ, если величины двухъ взаимно-перпендикулярныхъ силъ будутъ равны между собою ($q = p$), то ихъ равнодѣйствующая направится по равнодѣлящей прямого угла и, слѣдовательно, совпадетъ съ діагональю сказаннаго параллелограмма, который обращается тогда въ квадратъ.

2. Положимъ теперь, что къ точкѣ m приложена кромѣ сказанныхъ силъ p и p, дѣйствующихъ по направленіямъ mp' и mp'', (фиг. 2-я) еще сила, направленіе которой совпадаетъ съ направленіемъ одной изъ данныхъ силъ mp', а величина r равна величинѣ равнодѣйствующей этихъ силъ. Тогда общая равнодѣйствующая направится по равнодѣлящей угла Rmp' и, слѣдовательно, отрѣжетъ на линіи $p''R$ отрѣзокъ $RR_1 = r$. Поэтому и для двухъ взаимно-перпендикулярныхъ силъ p и $p + r$ равнодѣйствующая опредѣляется, какъ по величинѣ, такъ и по направленію, діагональю параллелограмма, построеннаго на составляющихъ силахъ. Можно сказать, что всякая сила, направленная по прямой mR_1, разлагает-

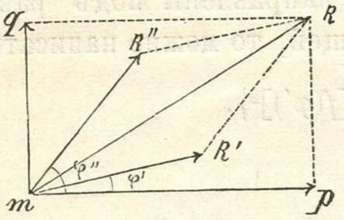


Фиг. 2-я.

*

ся на составляющія по взаимно-перпендикулярнымъ направленіямъ mp' и mp'', слѣдуя правилу параллелограмма силъ, или, иначе, что составляющія эти будутъ представлять собою проекціи силы на соотвѣтствующія направленія.

Не трудно показать, что тѣже заключенія будутъ имѣть мѣсто и для направленія mR', дѣлящаго пополамъ уголъ $p''mR$, а также для направленій равнодѣлящихъ угловъ $p'mR_1$ и $p''mR'$ и т. д. для безконечно большого числа направленій равнодѣйствующей силы.



Фиг. 3-я.

3. Пусть два направленія mR' и mR'' (фиг. 3-я) обладаютъ сказаннымъ свойствомъ относительно осей mp и mq, и положимъ, что по этимъ направленіямъ на точку m дѣйствуютъ двѣ силы равной величины r'.

Каждая изъ этихъ послѣднихъ силъ можетъ быть замѣнена ея составляющими по направленіямъ осей; для силы, направленной по mR', эти составляющія будутъ:

$$p' = r'\cos\varphi' \quad \text{и} \quad q' = r'\sin\varphi',$$

а для силы, направленной по mR'':

$$p'' = r'\cos\varphi'' \quad \text{и} \quad q'' = r'\sin\varphi''.$$

Силы, дѣйствующія вдоль одной прямой, складываются алгебраически и потому можно сказать, что двѣ данныя силы r' замѣняются двумя же взаимно-перпендикулярными силами

$$p = r'(\cos\varphi' + \cos\varphi'') \quad \text{и} \quad q = r'(\sin\varphi' + \sin\varphi'').$$

Величина равнодѣйствующей послѣднихъ силъ, какъ показано выше, будетъ

$$r = \sqrt{p^2 + q^2} = r'\sqrt{2 + 2\cos(\varphi'' - \varphi')} = 2r'\cos\left(\frac{\varphi'' - \varphi'}{2}\right).$$

Но съ другой стороны мы знаемъ, что та же сила r, какъ равнодѣйствующая двухъ равныхъ силъ r', дѣйствующихъ по направленіямъ mR' и mR'', направляется по равнодѣлящей угла $R'mR''$, т. е. подъ угломъ $\dfrac{\varphi'' + \varphi'}{2}$ къ оси mp.

Проекція равнодѣйствующей r на эту ось будетъ

$$r\cos\frac{\varphi'' + \varphi'}{2} = 2r'\cos\frac{\varphi'' + \varphi'}{2}\cos\frac{\varphi'' - \varphi'}{2} = r'(\cos\varphi' + \cos\varphi'').$$

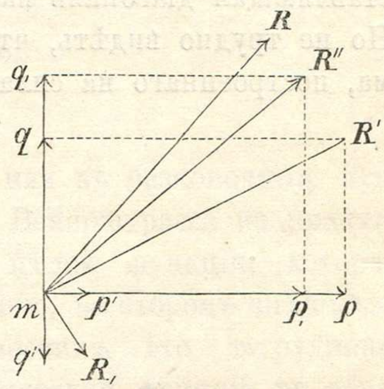
Слѣдовательно будетъ

$$r\cos\frac{\varphi'' + \varphi'}{2} = p,$$

т. е. проекція силы r на ось mp будетъ представлять въ тоже время составляющую этой силы по направленію сказанной оси.

Поэтому, если правило параллелограмма силъ справедливо для двухъ направленій mR' и mR'', то оно будетъ справедливо и для направленія mR, раздѣляющаго пополамъ уголъ между этими двумя направленіями.

4. Подраздѣляя послѣдовательно пополамъ углы между различными направленіями, для которыхъ доказано правило сложенія и разложенія силъ, придемъ къ заключенію, что правило это будетъ справедливо для безконечно большаго числа направленій, непрерывно слѣдующихъ одно за другимъ, т. е. будетъ справедливо для всякаго, произвольно выбраннаго, направленія. Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что для нѣкотораго направленія mR силы r (фиг. 4-я) правило параллелограмма не имѣетъ мѣста; тогда направленіе mR' діагонали параллелограмма, построеннаго на составляющихъ p и q силы $r = mR$, должно отличаться отъ направленія самой силы mR, а величина этой діагонали будетъ $mR' = r = \sqrt{p^2 + q^2}$.



Фиг. 4-я.

По доказанному выше всегда можно выбрать такое направленіе mR'', лежащее между mR и mR', для котораго правило параллелограмма будетъ справедливо и, слѣдовательно, составляющія силы r, дѣйствующей по mR'', будутъ проекціями этой силы на оси mp и mq; при этомъ необходимо будетъ $p_1 < p$ и $q_1 > q$. Силу mR можно разсматривать какъ равнодѣйствующую силъ mR'' и mR_1, при чемъ составляющія силы mR_1 по осямъ будутъ

$$mp' = p - p_1 \qquad \text{и} \qquad mq' = -(q_1 - q).$$

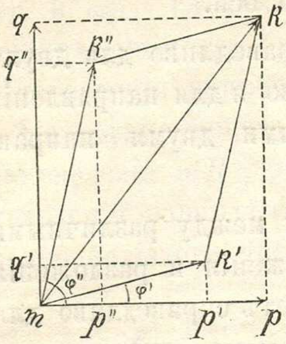
Равнодѣйствующая mR оказывается лежащею внѣ угла, образуемаго ея составляющими mR'' и mR_1, что невозможно; стало быть направленіе силы mR не можетъ отличаться отъ направленія діагонали параллелограмма, построеннаго на ея составляющихъ.

Такимъ образомъ можно считать доказаннымъ, что равнодѣйствующая двухъ какихъ угодно взаимно-перпендикулярныхъ силъ опредѣляется, какъ по величинѣ, такъ и по направленію, діагональю параллелограмма, построеннаго на силахъ составляющихъ.

5. Послѣдній выводъ не трудно распространить и на силы, уголъ между которыми будетъ какой угодно, отличающійся отъ прямого.

Пусть даны двѣ такія силы r' и r'', наклоненныя подъ углами φ' и φ'' къ оси mp (фиг. 5-я).

Составляющія (или проекціи) силы r' по осямъ mp и mq будутъ



Фиг. 5-я.

$$p' = r'\cos\varphi' \qquad \text{и} \qquad q' = r'\sin\varphi'.$$

Составляющія по тѣмъ же осямъ силы r'' будутъ

$$p'' = r''\cos\varphi'' \qquad \text{и} \qquad q'' = r''\sin\varphi''.$$

Полагая

$$p = r'\cos\varphi' + r''\cos\varphi'' \qquad \text{и} \qquad q = r'\sin\varphi' + r''\sin\varphi'',$$

можемъ, по предыдущему, сказать, что силы p и q (взаимно-перпендикулярныя) замѣняютъ собою данныя силы r' и r''; равнодѣйствующая тѣхъ и другихъ силъ будетъ таже сила r, представляющая діагональ параллелограмма, построеннаго на силахъ p и q. Но не трудно видѣть, что она же будетъ діагональю параллелограмма, построеннаго на силахъ r' и r''.