УДК 517.5

О. Б. СКАСКИВ

ОБОБЩЕНИЕ МАЛОЙ ТЕОРЕМЫ ПИКАРА

Малая теорема Пикара утверждает, что целая функция, отличная от тождественной постоянной, принимает каждое конечное значение, за исключением быть может одного. Эту теорему Пикара можно получить (см., например, [1], с. 27—28), как следствие из невозможности тождества

$$e^{g_1(z)} + e^{g_2(z)} = F(z), \tag{1}$$

где g_j ($j = 1, 2$) — произвольные целые функции, при этом $g_1(z) \not\equiv \not\equiv g_1(0)$, а $F(z) \equiv 1$.

На Всесоюзной конференции по теории функций и дифференциальных уравнений в г. Черноголовке в 1983 г. И. В. Островский поставил задачу, выяснить, при каких условиях на лакунарность степенного разложения функции F тождество (1) останется невозможным. При этом он высказал гипотезу, что тождество (1) невозможно, если степенное разложение функции F имеет адамаровские лакуны, т. е.

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{\mu_k} \tag{2}$$

и $\mu_{k+1} \geqslant \theta\mu_k$ ($k \geqslant 1$), $\theta > 1$. В этой статье доказывается теорема, указывающая на справедливость гипотезы И. В. Островского. Наш результат следующий.

Теорема 1. *Если целая функция F вида (2) удовлетворяет условию*

$$\frac{n}{\mu_n} \ln n (\ln \ln n)^{2+\varepsilon} = o(1) \ (n \to +\infty), \ \varepsilon > 0, \tag{3}$$

что тождество (1) невозможно, если только $F(z) \not\equiv 0$ и $g_1(z) \not\equiv \not\equiv g_1(0)$.

Логарифмической мерой $m_{\ln}(E)$ *измеримого множества* $E \subset [1, +\infty[$ *называем величину* $m_{\ln}(E) = \int\limits_E d\ln t$.

Теорему 1 мы получим при помощи одного результата У. Хеймана [2] из следующей теоремы.

Теорема 2. *Если целая функция* F *удовлетворяет соотношению* $\ln\min\{|F(z)| : |z| = r\} > \Delta \ln\max\{|F(z)| : |z| = r\}$, $\Delta > 0$, *при* $r \in E$, $m_{\ln}(E) = +\infty$, *то тождество* (1) *невозможно, если только* $g_1(z) \not\equiv g_1(0)$.

Нам удобно будет перейти от степенных рядов к абсолютно сходящимся всюду в $\boldsymbol{C}$ рядам Дирихле вида

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{z\lambda_n},\ 0 \leqslant \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n \uparrow +\infty\ (n \to +\infty).$$

Через S будем обозначать класс всех целых функций, представленных такими рядами Дирихле, а через S_1 — класс экспоненциальных многочленов с неотрицательными показателями. Считаем, что $S_1 \subset S$.

Обозначим $M(x, F) = \sup\{|F(x+iy)| : y \in \boldsymbol{R}\}$ и $m(x, F) = \inf\{|F(x+iy)| : y \in \boldsymbol{R}\}$. Мерой измеримого множества $E \subset [0, +\infty[$ называем величину $mE = \int\limits_E dt$. Через C и C_∞ обозначим, соответственно, класс всех множеств $E \subset [0, +\infty[$ конечной и бесконечной меры.

Рассмотрим следующий класс целых функций

$$S_2 = \{F \in S : \ln m(x, F) > \Delta \ln M(x, F),\quad x \in E_\infty \in C_\infty,\ \Delta > 0. \quad (4)$$

Легко видеть, что теорема 2 при помощи замены z на e^z следует из теоремы.

Теорема 3. *Пусть* $F \in S_2$, $g_j \in S$ $(j = 1, 2)$. *Тогда тождество* (1) *невозможно, если только* $g_1(z) \not\equiv g_1(0)$.

Прежде, чем доказывать теорему 3 введем некоторые обозначения и рассмотрим несколько вспомогательных утверждений. Обозначим $A(x, F) = \inf\{\operatorname{Re} F(x+iy) : y \in \boldsymbol{R}\}$ и $B(x, F) = \sup\{\operatorname{Re} F(x+iy) : y \in \boldsymbol{R}\}$. Пусть дальше всюду $0 \leqslant \varepsilon(x) < 1$ — некоторая функция, определенная на $[0, +\infty[$ такая, что $\varepsilon(x) = 0(1)$ $(x \to +\infty)$. Обозначим

$$W_B(x, F, \varepsilon) = \{z : \operatorname{Re} z = x,\ \operatorname{Re} F(z) \geqslant (1 - \varepsilon(x))\, B(x, F)\},$$

$$W_M(x, F, P - \varepsilon) = \{z : \operatorname{Re} z = x,\ |F(z)| \geqslant (P - \varepsilon(x))\, M(x, F)\}.$$

Поскольку для целой функции $F \in S$ функция $\ln M(x, F)$ — выпуклая, то она имеет всюду, за исключением счетного множества точек, производную и всюду — правостороннюю производную (возрастающую к $+\infty$ в случае $F \in S \setminus S_1$), которую мы обозначим через $L(x, F)$.

Следующая лемма в неявном виде содержится в [3] на с. 149—150.

Лемма 1. *Пусть* $F \in S \setminus S_1$. *Тогда для всех* $z \in W_M(x, F, P-\varepsilon)$ *и для всех* $x \geqslant 0$ *вне некоторого множества* E *из* C *имеет место равенство*

$$F(z+\eta) = F(z) \exp\{\eta L(x, F) + \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j \eta^j\}, \tag{5}$$

где $|\eta| < \frac{1}{k(x)}$,

$$|\psi_j| < 2(1+\beta(x)\ln L(x, F))(k(x))^j, \quad j = 1, 2, \ldots \tag{6}$$

$$k(x) = k(x, F) = 4\{L(x, F)\}^{\frac{1}{2}+\beta(x)} \ln^{\frac{1+\alpha}{2}} L(x, F), \ \alpha > 0,$$

$$\beta(x) = -\frac{\ln(P-\varepsilon(x))}{\ln L(x, F)}, \quad 0 < P \leqslant 1, \quad \psi_j = \psi_j(F) \quad (j \geqslant 1),$$

а множество E *зависит от* F *и* $P-\varepsilon$, *т. е.* $E = E(P-\varepsilon, F)$.

Из леммы 1 мы получим следующую лемму.

Лемма 2. *Если в условиях леммы 1*

$$\eta = \eta(x) = O\left(\frac{1}{L(x, F)}\right) (x \to +\infty),$$

то для всех $z \in W_M(x, F, P-\varepsilon)$ *при* $x \to +\infty$ *вне некоторого множества* $E = E(P-\varepsilon, F)$ *из* C *имеет место соотношение*

$$F(z+\eta) = (1+o(1)) F(z) \exp\{\eta L(x, F)\}. \tag{7}$$

Доказательство. Поскольку из условий леммы вытекает, что $|\eta| k(x, F) = o(1)$ $(x \to +\infty)$, то из неравенств (6) следует

$$\left|\sum_{j=1}^{\infty} \psi_j \eta^j\right| < 2(1+\beta(x)\ln L(x, F)) \sum_{j=1}^{\infty} (|\eta| k(x))^j =$$

$$= 2(1+\beta(x)\ln L(x, F)) \frac{|\eta| k(x)}{1-|\eta| k(x)} = o(1) \ (x \to +\infty),$$

т. е. соотношение (7) немедленно следует из равенства (5).

Следствием леммы 2 является следующий аналог классической теоремы Вимана.

Лемма 3. *Пусть* $F \in S$ и $F(z) \not\equiv F(0)$. *Тогда соотношения* $(1+o(1)) B(x, F) = M(x, F) = -(1+o(1)) A(x, F)$ *выполняются при* $x \to +\infty$ *вне некоторого множества* $E_1(F) \in C$.

Доказательство. Пусть $F \in S \setminus S_1$ и $z \in W_M(x, F, 1-\varepsilon)$. Положим сначала $\eta = i(\pi - \arg F(z))/L(x, F)$. По лемме 2 при $x \to +\infty$ вне некоторого множества из C имеем

$$F(z+\eta) = (1+o(1))|F(z)| e^{i\pi} = -(1+o(1))|F(z)|, \tag{8}$$

т. е. $A(x, F) \leqslant \operatorname{Re} F(z+\eta) \leqslant -(1+o(1)) M(x, F)$, что вместе с неравенством $|A(x, F)| \leqslant M(x, F)$ доказывает правое соотношение из леммы. Полагая теперь $\eta = -i \arg F(z)/L(x, F)$ и применяя лемму 2 получим $F(z+\eta) = (1+o(1))|F(z)|$ при $x \to +\infty$ вне некоторого множества из C, т. е. $B(x, F) \geqslant \operatorname{Re} F(z+\eta) = (1+o(1))\, M(x, F)$. Последнее неравенство вместе с неравенством $B(x, F) \leqslant M(x, F)$ доказывает лемму 3 полностью, поскольку в случае $F \in S_1$, $F(z) \not\equiv F(0)$ утверждение леммы очевидно.

Лемма 4. *Пусть* $g_j \in S$ $(j = 1, 2)$, $g_j(z) \not\equiv g_j(0)$. *Тогда для каждого* $x \geqslant 0$ *вне некоторого множества* $E_2(\tilde{g}_j) \in C$ *существует точка* $z_j = x + iy_j(x)$ *такая, что*

$$g_j(z_j) = -(1 + o(1))\, M(x, g_j) \tag{9}$$

при $x \to +\infty$ *вне множества* $E_2(g_j)$.

Утверждение леммы 4 в случае $g_j \in S \setminus S_1$ немедленно получаем из соотношения (8), принимая во внимание, что $\operatorname{Re}(z+\eta) = x$ и $|F(z)| = (1+o(1))\, M(x, F)$ $(x \to +\infty)$. В случае $g_j \in S_1$, $g_j(z) \not\equiv g_j(0)$ утверждение леммы 4 очевидно.

Лемма 5. *Пусть* $F \in S_2$, $g_j \in S$ $(j = 1, 2)$, $g_1(z) \not\equiv g_1(0)$. *Если выполняется тождество* (1), *то*

$$(\Delta + o(1))\, M(x, g_1) \leqslant M(x, g_2) \leqslant \left(\frac{1}{\Delta} + o(1)\right) M(x, g_1) \tag{10}$$

при $x \to +\infty$ *вдоль множества* $E_3 \in C_\infty$, *где*

$$E_3 = E_\infty \setminus (E_1(g_1) \cup E_1(g_2) \cup E_2(g_1) \cup E_2(g_2)).$$

Доказательство. Применяя соотношения (9) к тождеству (1), при $x \to +\infty$ вне множества $E_2(g_1) \cup E_2(g_2)$ получаем

$$F(z_1) = e^{g_2(z_1)} + e^{-(1+o(1))M(x,\, g_1)} = e^{g_2(z_1)} + o(1) \tag{11}$$

и

$$F(z_2) = e^{g_1(z_2)} + o(1), \tag{12}$$

где $z_j = x + iy_j(x)$ $(j = 1, 2)$ — определены в лемме 4. Пусть $\varepsilon(x) \downarrow 0$ $(x \to +\infty)$, тогда для каждого $x \geqslant 0$ выберем произвольную точку $z_j^* = (x + iy_j^*) \in W_B(x, g_j, \varepsilon)$. Применяя лемму 3, при $x \to +\infty$ вне множества $E_1(g_j)$ имеем

$$\operatorname{Re} g_j(z_j^*) \geqslant (1 - \varepsilon(x))\, B(x, g_j) = (1 + o(1))\, M(x, g_j). \tag{13}$$

При помощи соотношения (4) из (11) имеем

$$\ln\left(e^{\operatorname{Re} g_2(z_1)} + o(1)\right) \geqslant \ln|F(z_1)| \geqslant \Delta \ln|F(z_1^*)| = \\ = \Delta \ln\left|e^{g_1(z_1^*)} + e^{g_2(z_1^*)}\right|$$

при $x \to +\infty$, $x \in E_3 \in C_\infty$, т. е.

$$\exp\left\{\left(\frac{1}{\Delta} + o(1)\right) \operatorname{Re} g_2(z_1)\right\} \geqslant e^{\operatorname{Re} g_1(z_1^*)} - e^{\operatorname{Re} g_2(z_1^*)}. \tag{14}$$

Если теперь предположить, что левое неравенство из (10) для некоторой последовательности $x_n \uparrow +\infty$ $(n \to +\infty)$, $x_n \in E_3$, не выполняется, т. е. при некотором $\delta \in]0, \Delta[$ имеет место неравенство $M(x_n, g_2) \leq (\Delta - \delta) M(x_n, g_1)$, то из (14) получим

$$\operatorname{Re} g_1(z_1^*) \leq \ln \left(\exp \left\{ \left(1 - \frac{\delta}{\Delta} + o(1)\right) M(x_n, g_1) \right\} + \right.$$

$$\left. + \exp\{(\Delta - \delta) M(x_n, g_1)\} \right) \leq \left(1 - \frac{\delta}{\Delta} + o(1)\right) M(x_n, g_1) + \ln 2,$$

что противоречит неравенству (13). Следовательно, левое неравенство из (10) выполняется при $x \to +\infty$ $(x \in E_3)$.

Благодаря равноправию g_1 и g_2, при помощи аналогичных рассуждений доказывается справедливость при $x \to +\infty$ $(x \in E_3)$ правого неравенства из (10). Лемма 5 полностью доказана.

Доказательство теоремы 3. Прежде всего заметим, что если имеет место тождество (1), то по лемме 5 или $g_j \in S_1$ $(j = 1, 2)$, или же $g_j \in S \setminus S_1$ $(j = 1, 2)$.

Предположим сначала, что $g_j \in S_1$ $(j = 1, 2)$ и имеет место тождество (1). Поскольку

$$g_j(z) = \sum_{m=0}^{n_j} a_m^{(j)} e^{z \mu_m^{(j)}}, \quad 0 \leq \mu_0^{(j)} < \mu_1^{(j)} < \cdots < \mu_{n_j}^{(j)},$$

то

$$g_j(z) = (1 + o(1))\, a_{n_j}^{(j)} e^{z \mu_{n_j}^{(j)}}, \quad \operatorname{Re} z \to +\infty.$$

Положим $a_{n_j}^{(j)} = a_j$, $\mu_{n_j}^{(j)} = \mu_j$. По условию теоремы $g_1(z) \not\equiv g_1(0)$, поэтому по лемме 5 $\mu_1 = \mu_2 \overset{\text{def}}{=} \mu > 0$ и $0 < \Delta |a_1| \leq |a_2| \leq \frac{1}{\Delta} |a_1|$. Обозначим $\alpha_j = \arg a_j$ $(j = 1, 2)$. Если $\alpha_1 = \alpha_2$, то полагая $y_0 = \frac{\pi - \alpha_1}{\mu}$ при $z_0 = x + iy_0$ получим

$$|F(z_0)| = |e^{g_1(z_0)} + e^{g_2(z_0)}| \leq \exp\{-(1 + o(1)) |a_1| e^{\mu x}\} +$$
$$+ \exp\{-(1 + o(1)) |a_2| e^{\mu x}\} = o(1) \quad (x \to +\infty),$$

что, благодаря соотношению (4), невозможно. Пусть теперь $\alpha_1 \neq \alpha_2$. Если $|\alpha_2 - \alpha_1| \neq \pi$, то существует θ такое, что $\cos\theta < 0$ и $\cos(\theta + \alpha_2 - \alpha_1) < 0$. Тогда для правой части тождества (1) при $z = x + i\frac{(\theta - \alpha_1)}{\mu}$ снова имеем

$$|F(z)| = |e^{g_1(z)} + e^{g_2(z)}| \leq \exp\{(1 + o(1)) |a_1| e^{\mu x} \cos\theta\} +$$
$$+ \exp\{(1 + o(1)) |a_2| e^{\mu x} \cos(\theta + \alpha_2 - \alpha_1)\} = o(1) \quad (x \to +\infty),$$

что невозможно. Осталось рассмотреть случай $|\alpha_2 - \alpha_1| = \pi$. Тогда $\cos(\theta + \alpha_2 - \alpha_1) = -\cos\theta$ и из тождества (1) при $z = x + \frac{i(\theta - \alpha_1)}{\mu}$ для всех θ таких, что $\cos\theta > 0$, выводим

$$F\left(x + i\frac{\theta - \alpha_1}{\mu}\right) = \exp\{(1 + o(1)) |a_1| e^{\mu x} \cos\theta\} + o(1) \quad (x \to +\infty).$$

Применяя соотношение (4), при $x \to +\infty$ $(x \in E_\infty)$ для θ_j таких, что $\cos\theta_j > 0$, отсюда получим

$$(1+o(1))\,|a_1|\,e^{\mu x}\cos\theta_1 = \ln\left|F\left(x+i\,\frac{\theta_1-\alpha_1}{\mu}\right)\right| \geqslant$$
$$\geqslant \Delta\ln\left|F\left(x+i\,\frac{\theta_2-\alpha_1}{\mu}\right)\right| = (\Delta+o(1))\,|a_1|\,e^{\mu x}\cos\theta_2.$$

Из последних соотношений для всех θ_1 и θ_2 таких, что $\cos\theta_j > 0$ $(j=1,2)$ имеем $\cos\theta_1 \geqslant \Delta\cos\theta_2$, что невозможно. Теорема 3 в случае $g_j \in S_1$ $(j=1,2)$ доказана.

Предположим теперь, что $g_j \in S \diagdown S_1$ $(j=1,2)$ и имеет место тождество (1). Покажем, что для каждого $x \in E_3$ существует точка $z^{(1)} = x + iy^{(1)}(x)$ такая, что

$$\operatorname{Re} g_j(z^{(1)}) \geqslant (\Delta^2+o(1))\,B(x, g_j)\ \ (j=1,2) \tag{15}$$

при $x \to +\infty$ $(x \in E_3)$.

Поскольку из (12) при $x \to +\infty$ $(x \in E_3)$ следует неравенство $\ln m(x, F) \leqslant B(x, g_1) + o(1)$, то

$$\max\{\ln m(x, F),\ B(x, g_1)\} - (M(x, g_1))^{0,5} < B(x, g_1) \tag{16}$$

для всех достаточно больших $x \in E_3$. Пусть

$$H_1 = \{x \in E_3 : M(x, F) \geqslant q\exp(B(x, g_1) - (M(x, g_1))^{0,5})\},$$
$$H_2 = E_3 \diagdown H_1,\ 0 < q < 1.$$

Положим

$$R(x) = \begin{cases} \ln m(x, F) - (M(x, g_1))^{0,5}, & x \in H_1, \\ B(x, g_1) - (M(x, g_1))^{0,5}, & x \in H_2. \end{cases}$$

Благодаря (16), для всех достаточно больших $x \in E_3$ имеет место неравенство $R(x) < B(x, g_1)$. Но по лемме 3 при $x \to +\infty$ $(x \in E_3)$ имеем

$$A(x, g_1) = -(1+o(1))\,M(x, g_1) < -(M(x, g_1))^{0,5} < R(x).$$

Поэтому $A(x, g_1) < R(x) < B(x, g_1)$ для всех достаточно больших $x \in E_3$. Отсюда следует, что для всех достаточно больших $x \in E_3$ существует точка $z^{(1)} = x + iy^{(1)}(x)$ такая, что

$$\operatorname{Re} g_1(z^{(1)}) = R(x). \tag{17}$$

Поэтому из тождества (1), благодаря соотношению (4), при $x \to +\infty$ $(x \in H_1)$ имеем

$$\exp\{\operatorname{Re} g_2(z^{(1)})\} \geqslant |F(z^{(1)})| - \exp\{\operatorname{Re} g_1(z^{(1)})\} \geqslant$$
$$\geqslant m(x, F)\,(1 - \exp\{R(x) - \ln m(x, F)\}) \geqslant$$
$$\geqslant \exp\{\Delta\ln M(x, F) + \ln(1 - \exp\{-(M(x, g_1))^{0,5}\})\} \geqslant$$
$$\geqslant \exp\{(\Delta+o(1))\,(B(x, g_1) - (M(x, g_1))^{0,5})\}. \tag{18}$$

При $x \to +\infty$ $(x \in H_2)$ из тождества (1) снова выводим

$$\begin{aligned}\exp\{\operatorname{Re} g_2(z^{(1)})\} &\geqslant \exp\{\operatorname{Re} g_1(z^{(1)})\} - |F(z^{(1)})| \geqslant \\ &\geqslant (1 - M(x, F) e^{-R(x)}) e^{R(x)} \geqslant (1-q) e^{R(x)} = \\ &= \exp\{(1 + o(1))(B(x, g_1) - (M(x, g_1))^{0,5})\}. \end{aligned} \tag{19}$$

Из (18) и (19) при помощи леммы 3 при $x \to +\infty$ $(x \in E_3)$ получим

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} g_2(z^{(1)}) &\geqslant (\Delta + o(1))(B(x, g_1) - (M(x, g_1))^{0,5}) = \\ &= (\Delta + o(1)) B(x, g_1). \end{aligned} \tag{20}$$

Поскольку при $x \to +\infty$ $(x \in E_3)$ выполняется соотношение (10), то по лемме 3 имеем

$$\begin{aligned} B(x, g_1) &= (1 + o(1)) M(x, g_1) \geqslant \\ &\geqslant (\Delta + o(1)) M(x, g_2) = (\Delta + o(1)) B(x, g_2) \end{aligned} \tag{21}$$

при $x \to +\infty$ $(x \in E_3)$. Применяя (21), из (20) получаем соотношение (15) $(j = 2)$.

Заметим теперь, что при $x \to +\infty$ $(x \in H_1)$, благодаря соотношению (4), имеем

$$\begin{aligned} R(x) &\geqslant \ln m(x, F) - (M(x, g_1))^{0,5} \geqslant \Delta \ln M(x, F) - \\ &- (M(x, g_1))^{0,5} \geqslant \Delta B(x, g_1) + \Delta \ln q - (1 + \Delta)(M(x, g_1))^{0,5} = \\ &= (\Delta + o(1)) B(x, g_1). \end{aligned}$$

Отсюда и из (17) следует соотношение (15) $(j = 1)$.

Из (15) по лемме 3 имеем

$$\begin{aligned} |g_j(z^{(1)})| &\geqslant \operatorname{Re} g_j(z^{(1)}) \geqslant (\Delta^2 + o(1)) B(x, g_j) = \\ &= (\Delta^2 + o(1)) M(x, g_j) > \frac{\Delta^2}{2} M(x, g_j) \end{aligned}$$

при $x \to +\infty$ $(x \in E_3)$. Значит, $z^{(1)} \in W_M\left(x, g_j, \frac{\Delta^2}{2}\right)$ для всех достаточно больших $x \in E_3$. Таким образом, утверждение леммы 2 выполняется для функций g_j $(j = 1, 2)$ в окрестностях точек $z^{(1)}$ для всех достаточно больших x из множества

$$E_4 = E_3 \setminus \left(E\left(\frac{\Delta^2}{2}, g_1\right) \cup E\left(\frac{\Delta^2}{2}, g_2\right)\right) \in C_\infty.$$

Покажем, что не существует последовательности (x_k), $x_k \to +\infty$ $(k \to +\infty)$ такой, что $x_k \in E_4$ и

$$h(x_k) \overset{\text{def}}{=} \frac{L(x_k, g_1)}{L(x_k, g_2)} \to h \in]0, +\infty[\quad (k \to +\infty). \tag{22}$$

Доказательство проведем, предположив, что имеет место противное. Предположим сначала, что такая последовательность уществует и $h = 1$. Тогда по лемме 2 при $\operatorname{Re} z^{(1)} = x_k \to +\infty$ и $\eta = i\pi/L(x_k, g_1)$ имеем

$$g_2(z^{(1)} + \eta) = (1 + o(1))\, e^{i\pi} g_2(z^{(1)}) \tag{23}$$

и

$$g_1(z^{(1)} + \eta) = (1 + o(1))\, g_1(z^{(1)}) \exp\{i\pi h(x_k)\}. \tag{24}$$

Из (23) и (24), применяя к 24) соотношение (22), а также вспоминая (15), получаем

$$\operatorname{Re} g_j(z^{(1)} + \eta) = -(1 + o(1)) \operatorname{Re} g_j(z^{(1)}) \leqslant -(\Delta^2 + o(1))\, B(x_k, g_j) \tag{25}$$

при $x_k \to +\infty$, где $\operatorname{Re} z^{(1)} = x_k$. Применим соотношения (25) к тождеству (1)

$$|F(z^{(1)} + \eta)| \leqslant e^{\operatorname{Re} g_1(z^{(1)} + \eta)} + e^{\operatorname{Re} g_2(z^{(1)} + \eta)} = o(1)\ (x_k \to +\infty).$$

Последнее соотношение невозможно, поскольку $x_k \in E_4 \subset E_\infty$, а из соотношения (4) следует $\ln|F(z^{(1)} + \eta)| \geqslant \Delta \ln M(x_k, F) \to +\infty$ $(k \to +\infty)$ в случае $F(z) \not\equiv F(0)$ и в противоположном случае $|F(z^{(1)} + \eta)| \equiv |F(0)| > 0$. Значит $h \neq 1$. Предположим теперь, что $h \in]0, 1[$. Выберем $\varepsilon_1 > 0$ из условия $h < (\pi - 2\varepsilon_1)/\pi < 1$. Положим $\alpha_1 = \frac{\pi}{2} + (-1)^n \varepsilon_1 + \pi n$, где n — целое число, которое мы выберем так, чтобы выполнялись неравенства

$$\frac{\pi}{2} + \varepsilon_1 < (\alpha_1 - \theta_2) h + \theta_1 < \frac{3\pi}{2} - \varepsilon_1, \tag{26}$$

где $\theta_j = \arg g_j(z^{(1)})$. Покажем, что такой выбор числа n возможен. Система неравенств (26) равносильна следующей:

$$a(x, h) \overset{\text{def}}{=} \left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon_1 - \theta_1\right)\frac{1}{h} - \frac{\pi}{2} - \varepsilon_1(-1)^n < \pi n <$$
$$< \left(\frac{3\pi}{2} - \varepsilon_1 - \theta_1\right)\frac{1}{h} - \frac{\pi}{2} - \varepsilon_1(-1)^n \overset{\text{def}}{=} b(x, h).$$

Очевидно, что такое n возможно выбрать, если $b(x, h) - a(x, h) > \pi$, т. е., если $\pi - 2\varepsilon_1 > \pi h$. Но последнее неравенство выполняется по условию выбора ε_1. Заметим, что $n = O(1)$ $(x \to +\infty)$ и $\alpha_1 = O(1)$ $(x \to +\infty)$. Тогда по лемме 2 при $\operatorname{Re} z^{(1)} = x_k \to +\infty$ и $\eta = i(\alpha_1 - \theta_2)/L(x_k, g_2)$ имеем

$$\operatorname{Re} g_2(z^{(1)} + \eta) = |g_2(z^{(1)})|\,(1 + o(1)) \cos\alpha_1 \tag{27}$$

и

$$\operatorname{Re} g_1(z^{(1)} + \eta) = (1 + o(1))\, |g_1(z^{(1)})| \cos((\alpha_1 - \theta_2) h + \theta_1). \tag{28}$$

Поскольку $\cos\alpha_1 = -\sin\varepsilon_1$, а из неравенств (26) следует, что $\cos((\alpha_1 - \theta_2) h + \theta_1) < -\sin\varepsilon_1$, то из (27) и (28), применяя (15) при $x_k \to +\infty$ получаем

$$\operatorname{Re} g_j(z^{(1)} + \eta) \leqslant -(1 + o(1))\, |g_j(z^{(1)})| \sin\varepsilon_1 \leqslant$$
$$\leqslant -(\Delta^2 + o(1))\, B(x_k, g_j) \sin\varepsilon_1, \tag{29}$$

где $0 < \varepsilon_1 < 1$. Таким образом, применяя (29) к тождеству (1), при $x_k \to +\infty$ выводим $|F(z^{(1)} + \eta)| = o(1)$, что, благодаря соотношению (4), невозможно, поскольку $x_k \in E_4 \subset E_\infty$, а из соотношения (4) следует неравенство $\ln|F(z^{(1)} + \eta)| \geqslant \Delta \ln M(x_k, F) \geqslant \delta > -\infty$. Значит $h \notin]0, 1[$. Аналогично доказывается, что $h \notin]1, +\infty[$. Таким образом, если существует (x_k) такая, что $x_k \in E_4$, $x_k \to +\infty$ $(k \to +\infty)$ и

$$h(x_k) = \frac{L(x_k, g_1)}{L(x_k, g_2)} \to h \quad (k \to +\infty),$$

то или $h = 0$, или $h = +\infty$. Обозначим

$$G_n^{(1)} = \left\{x \in E_4 : \frac{1}{n+1} \leqslant h(x) < \frac{1}{n}\right\}, \quad G^{(1)} = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n^{(1)}$$

и

$$G_n^{(2)} = \{x \in E_4 : n \leqslant h(x) < n+1\}, \quad G^{(2)} = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n^{(2)},$$

где $h(x) = L(x, g_1)/L(x, g_2)$.

Заметим, что для всех $n \geqslant 1$ множества $G_n^{(j)}$ $(j = 1, 2)$ измеримые, поскольку функция $h(x)$ измеримая, как частное двух измеримых функций $L(x, g_j)$ $(j = 1, 2)$. Кроме того отметим, что для всех $n \geqslant 1$ множества $G_n^{(1)}$ и $G_n^{(2)}$ имеют конечную меру и являются ограниченными множествами. Действительно, если бы некоторое множество $\{x \in E_4 : a \leqslant h(x) < b\}$, $0 < a < b < +\infty$, имело бесконечную меру или было бы неограниченным, то существовала бы последовательность (x_k), $x_k \in E_4$, $x_k \to +\infty$ $(k \to +\infty)$ такая, что $h(x_k) \to h \in [a, b]$ $(k \to +\infty)$, а это, по доказанному выше, невозможно.

Поскольку $G^{(1)} \cup G^{(2)} = E_4 \in C_\infty$, то или $G^{(1)} \in C_\infty$, или $G^{(2)} \in C_\infty$. Предположим сначала, что $G^{(1)} \in C_\infty$ (случай $G^{(2)} \in C_\infty$ рассматривается аналогично, благодаря равноправию функций g_1 и g_2). Пусть теперь $x \in G^{(1)}$. Тогда существует $n = n(x)$ такое, что $x \in G_{n(x)}^{(1)}$ и $n(x) \to +\infty$ $(x \to +\infty)$, отсюда $h(x) = o(1)$ $(x \to +\infty)$. Значит, по лемме 2 при $\eta = i\pi/L(x, g_2)$ и $x \to +\infty$ $(x \in G^{(1)})$ имеем

$$\operatorname{Re} g_2(z^{(1)} + \eta) = \operatorname{Re}((1 + o(1)) e^{i\pi} g_2(z^{(1)})) = -(1 + o(1)) \operatorname{Re} g_2(z^{(1)})$$

и

$$\operatorname{Re} g_1(z^{(1)} + \eta) = \operatorname{Re}((1 + o(1)) e^{i\pi h(x)} g_1(z^{(1)})) = (1 + o(1)) \operatorname{Re} g_1(z^{(1)}).$$

Из последних соотношений, а также из тождества (1) при $x \to +\infty$ $(x \in G^{(1)})$ получаем

$$M(x, F) \geqslant |F(z^{(1)} + \eta)| \geqslant \exp\{\operatorname{Re} g_1(z^{(1)} + \eta)\} - \\ - \exp\{\operatorname{Re} g_2(z^{(1)} + \eta)\} = \exp\{(1 + o(1)) \operatorname{Re} g_1(z^{(1)})\} - \\ - \exp\{-(1 + o(1)) \operatorname{Re} g_2(z^{(1)})\}.$$

Вспоминая неравенства (15), отсюда при $x \to +\infty$ $(x \in G^{(1)})$ получаем

$$\ln M(x, F) \geqslant \ln(\exp\{(\Delta^2 + o(1)) B(x, g_1)\} - \\ - \exp\{-(\Delta^2 + o(1)) B(x, g_2)\}) = (\Delta^2 + o(1)) B(x, g_1). \quad (30)$$

Поскольку $E_3(g_1) \cap E_4 = \varnothing$, то по лемме 4 для больших $x \in E_4$ существуют точка $z_1 = x + iy_1(x)$ и функция $\varepsilon(x) \to +0$ $(x \to +\infty)$ такие, что

$$\operatorname{Re} g_1(z_1) = -(1 - \varepsilon(x)) M(x, g_1). \quad (31)$$

Тогда из тождества (1), благодаря соотношению (4), следует, что при $x \to +\infty$ $(x \in G^{(1)})$

$$\operatorname{Re} g_2(z_1) \geqslant \ln(|F(z_1)| - \exp\{-(1 - \varepsilon(x)) M(x, g_1)\}) \geqslant \\ \geqslant (\Delta + o(1)) \ln M(x, F),$$

что вместе с соотношениями (30) и (21) при $x \to +\infty$ $(x \in G^{(1)})$ дает

$$\operatorname{Re} g_2(z_1) \geqslant (\Delta^3 + o(1)) B(x, g_1) \geqslant (\Delta^4 + o(1)) M(x, g_2). \quad (32)$$

Поэтому для всех достаточно больших $x \in G^{(1)}$ имеем $z_1 \in W_M \times \left(x, g_2, \frac{\Delta^4}{2}\right)$. Кроме того очевидно, что для достаточно больших $x \in G^{(1)}$ точка z_1 принадлежит множеству $W_M(x, g_1, 1 - \varepsilon)$. Значит утверждение леммы 2 имеет место для функций g_j $(j = 1, 2)$ в окрестностях точек z_1 для всех достаточно больших x из множества

$$E_5 = G^{(1)} \diagdown \left(E(1 - \varepsilon, g_1) \cup E\left(\frac{\Delta^4}{2}, g_2\right)\right), \quad E_5 \in C_\infty.$$

Таким образом, по лемме 2 при $\eta = i\pi/L(x, g_2)$ и $x \to +\infty$ $(x \in E_5 \subset G^{(1)})$ получим $g_2(z_1 + \eta) = (1 + o(1)) e^{i\pi} g_2(z_1)$ и $g_1(z_1 + \eta) = (1 + o(1)) e^{i\pi h(x)} g_1(z_1)$. Отсюда, применяя (31) и (32), а также вспоминая, что $h(x) = o(1)$ $(x \to +\infty,\ x \in E_5 \subset G^{(1)})$, выводим

$$\operatorname{Re} g_2(z_1 + \eta) = -(1 + o(1)) \operatorname{Re} g_2(z_1) \leqslant -(\Delta^4 + o(1)) M(x, g_2)$$

и

$$\operatorname{Re} g_1(z_1 + \eta) = (1 + o(1)) \operatorname{Re} g_1(z_1) = -(1 + o(1)) M(x, g_1).$$

Применение последних соотношений к тождеству (1) дает хорошо знакомое противоречие $0 < \delta \leqslant |F(z_1 + \eta)| \leqslant \exp\{\operatorname{Re} g_1(z_1 + \eta)\} + \exp\{\operatorname{Re} g_2(z_1 + \eta)\} = o(1)$ при $x \to +\infty$ $(x \in E_5 \in C_\infty)$. Теорема 3 полностью доказана.

Доказательство теоремы 1. В работе [2] У. Хейман доказал, что если при некотором $\varepsilon > 0$ выполняется условие (3), то $\ln \min\{|F(z)| : |z| = r\} = (1 + o(1)) \ln \max\{|F(z)| : |z| = r\}$ при $r \to +\infty$ вне множества E_1 такого, что $m_{\ln}(E_1 \cap [1, r]) = o(\ln r)$ $(r \to +\infty)$. Ясно, что $m_{\ln}([1, +\infty[\diagdown E_1) = +\infty$. Поэтому, применяя теорему 2 получаем утверждение теоремы 1.

В заключение сформулируем несколько более общее утверждение, чем содержащееся в теореме 3.

Теорема 4. *Пусть* $F \in S_2$, $g_j \in S$, $P_j \in S_1$ $(j = 1, 2)$. *Тогда тождество* $P_1(z)e^{g_1(z)} + P_2(z)e^{g_2(z)} = F(z)$ *невозможно, если только* $g_1(z) \not\equiv g_1(0)$, $P_1(z) \not\equiv 0$.

Доказательство теоремы 4 совершенно аналогично доказательству теоремы 3.

Список литературы: 1. *Виттих Г.* Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям.— М.: Физматгиз, 1960.— 319 с. 2. *Hayman W. K.* Angular value distribution of power series with gaps.— Proc. London Math. Soc. (3), 1972, **24**, № 4, p. 590—624. 3. *Стрелиц Ш. И.* Асимптотические свойства аналитических решений дифференциальных уравнений.— Вильнюс: Минтис, 1972.— 467 с.

Поступила в редколлегию 24.11.84.