ВЕСТНИК

ХАРЬКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 230

МЕХАНИКА, ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

1982

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ УССР

ВЕСТНИК
ХАРЬКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 230

МЕХАНИКА, ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Основан в 1965 г.

ХАРЬКОВ
ИЗДАТЕЛЬСТВО ПРИ ХАРЬКОВСКОМ
ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ
ИЗДАТЕЛЬСКОГО ОБЪЕДИНЕНИЯ
«ВИЩА ШКОЛА»
1982

Список литературы: 1. *Вайнберг М. М., Треногин В. А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений.— М.: Наука, 1969.— 527 с. 2. *Ржаницын А. Р.* Устойчивость равновесия упругих систем.— М.: ГИТТЛ, 1955.— 475 с.

Поступила в редколлегию 12.12.78.

УДК 519.4+519.1

В. Н. КАЛЮЖНЫЙ

ОБОБЩЕННЫЕ ГАУССОВЫ КОЭФФИЦИЕНТЫ

Гауссовыми коэффициентами называются величины

$$\binom{n}{k}_\alpha = \frac{(\alpha^n - 1)(\alpha^{n-1} - 1)\,\ldots\,(\alpha^{n-k+1} - 1)}{(\alpha^k - 1)(\alpha^{k-1} - 1)\,\ldots\,(\alpha - 1)}. \tag{1}$$

Они удовлетворяют соотношениям

$$\binom{n}{k}_\alpha = \alpha^k \binom{n-1}{k}_\alpha + \binom{n-1}{k-1}_\alpha, \tag{2}$$

$$\binom{n}{0}_\alpha = \binom{n}{n}_\alpha = 1 \tag{3}$$

и связаны с биномиальными коэффициентами $\binom{n}{k}$ предельным соотношением $\lim\limits_{\alpha\to 1}\binom{n}{k}_\alpha = \binom{n}{k}$. В определении α может быть элементом какого-нибудь поля, имеющим бесконечный порядок по умножению, хотя обычно α — комплексное число, $|\alpha| \neq 1$. Наша задача — дать определение величины $\binom{n}{k}_\alpha$, которое допускало бы в качестве α элемент конечного порядка и приводило бы к формуле (1), когда последняя имеет смысл. Отметим, что принято вместо α писать q, а тождества с гауссовыми коэффициентами называть q-тождествами. Построению q-аналогов для соотношений с биномиальными коэффициентами посвящены работы Карлица, Гулда, Роты, Гольдмана и других авторов. Мы вводим новое обозначение в связи с изменением природы индекса. Будет показано, что некоторые тождества допускают и «α-формулировку».

Пусть α — элемент некоторого поля K. Обозначим через w порядок элемента α в мультипликативной группе поля K. Допускаются случаи $w = 1$, т. е. $\alpha = 1$ и $w = \infty$. Определим обобщенные гауссовы коэффициенты $\binom{n}{k}_\alpha$ рекуррентным соотношением (2) и начальными условиями (3). Если $n < k$ или хотя бы одно из чисел n, $k < 0$, считаем, что $\binom{n}{k}_\alpha = 0$. При $\alpha = 1$ это определение приводит к биномиальным коэффициентам $\binom{n}{k}$, причем без использования предельного перехода. Рассмотрим полиномы $P_0(X)=1$, $P_n(X)=(X-1)(X-\alpha)\ldots(X-\alpha^{n-1})$ $(n\geqslant 1)$; $Q_n(X)=$ $=P_n(X)/P_n(\alpha^n)$ $(0\leqslant n<w)$. Отметим для дальнейшего, что $P_w(X)=X^w-1$ $(w<\infty)$.

Найдем явный вид обобщенных гауссовых коэффициентов.

Лемма 1. *Если $k<w$, то для любого n выполняется равенство $\binom{n}{k}_\alpha=Q_k(\alpha^n)$ или, что то же самое, соотношение* (1).

Доказательство проводится по индукции с использованием соотношения $Q_k(\alpha X)=\alpha^k Q_k(X)+Q_{k-1}(X)$.

Следующее утверждение и его следствия являются специфическими для случая $1<w<\infty$.

Лемма 2. *Если $k+n\leqslant w$, $0<n<w$,* то $\binom{w-n}{k}_\alpha=$ $=(-1)^k\alpha^{-kn-\binom{k}{2}}\binom{k+n-1}{k}_\alpha$.

Доказательство. Преобразуем выражение $\prod\limits_{i=w-n-k+1}^{w-n}(\alpha^i-$ $-1)=(-1)^k\prod\limits_{i=w-n-k+1}^{w-n}(\alpha^w-\alpha^i)=(-1)^k\alpha^{\frac{2w-2n-k+1}{2}k}\prod\limits_{i=w-n-k+1}^{w-n}\times$ $\times(\alpha^{w-i}-1)=(-1)^k\alpha^{-kn-\binom{k}{2}}\prod\limits_{j=n}^{k+n-1}(\alpha^j-1)$. Деля это равенство на $\prod\limits_{j=1}^{k}(\alpha^j-1)$, получим требуемое.

Следствие 1. При $0\leqslant k<w$ имеем $\binom{w-1}{k}_\alpha=(-1)^k\alpha^{-\binom{k+1}{2}}$.

Следствие 2. Если $1<k\leqslant w-1$, то $\binom{w}{k}_\alpha=0$.

Доказательство: $\binom{w}{k}_\alpha=\alpha^k\binom{w-1}{k}_\alpha+\binom{w-1}{k-1}_\alpha=\alpha^k(-1)^k\alpha^{-\binom{k+1}{2}}+$ $+(-1)^{k-1}\alpha^{-\binom{k}{2}}=0$.

Теорема 1. *Пусть $n=aw+r\left(a=\left[\frac{n}{w}\right],\ 0\leqslant r<w\right)$ $k=bw+$ $+s\left(b=\left[\frac{k}{w}\right],\ 0\leqslant s<w\right)$. Тогда* $\binom{n}{k}_\alpha=\binom{a}{b}\binom{r}{s}_\alpha=\binom{a}{b}Q_s(\alpha^r)$.

Доказательство проведем индукцией по n. В индуктивном переходе рассмотрим четыре случая.

1) $0\leqslant r<w-1$, $0<s\leqslant w-1$. Имеем $\binom{n+1}{k}_\alpha=\alpha^k\binom{n}{k}_\alpha+$ $+\binom{n}{k-1}_\alpha=\alpha^s\binom{a}{b}\binom{r}{s}_\alpha+\binom{a}{b}\binom{r}{s-1}_\alpha=\binom{a}{b}\left[\alpha^s\binom{r}{s}_\alpha+\binom{r}{s-1}_\alpha\right]=$ $=\binom{a}{b}\binom{r+1}{s}_\alpha$.

2) $r = w - 1$, $0 < s \leqslant w - 1$. Пользуясь предыдущим случаем и следствием 2, получаем

$$\binom{n+1}{k}_\alpha = \binom{a}{b}\binom{w}{s}_\alpha = 0 = \binom{a+1}{b}\binom{0}{s}_\alpha.$$

3) $0 \leqslant r < w - 1$, $s = 0$. Имеем

$$\binom{n+1}{k}_\alpha = \alpha^k \binom{n}{k}_\alpha + \binom{n}{k-1}_\alpha = \binom{a}{b}\binom{r}{0}_\alpha +$$

$$+ \binom{a}{b-1}\binom{r}{w-1}_\alpha = \binom{a}{b} + 0 = \binom{a}{b}\binom{r+1}{0}_\alpha.$$

4) $r = w - 1$, $s = 0$. Как и выше, получаем

$$\binom{n+1}{k}_\alpha = \binom{a}{b}\binom{w-1}{0}_\alpha + \binom{a}{b-1}\binom{w-1}{w-1}_\alpha =$$

$$= \binom{a}{b} + \binom{a}{b-1} = \binom{a+1}{b} = \binom{a+1}{b}\binom{0}{0}_\alpha.$$

Следствие. Выполняются соотношения симметрии

$$\binom{n}{k}_\alpha = \binom{n}{n-k}_\alpha.$$

Доказательство. Если $n < k$, то обе части равны нулю. Далее будем считать, что $n \geqslant k$, а значит $a \geqslant b$.

Предположим вначале, что $r \geqslant s$. Тогда $n - k = (a - b)\,w + (r - s)$, $0 \leqslant r - s < w$. Поэтому

$$\binom{n}{k}_\alpha = \binom{a}{b}\binom{r}{s}_\alpha = \binom{a}{a-b}\binom{r}{r-s}_\alpha = \binom{n}{n-k}_\alpha.$$

Пусть теперь $r < s$. Тогда $0 \leqslant r < r + w - s < w$, $n - k = (a - b - 1)\,w + (w + r - s)$. Следовательно,

$$\binom{n}{k}_\alpha = \binom{a}{b}\binom{r}{s}_\alpha = 0 = \binom{a}{a-b-1}\binom{r}{r+w-s}_\alpha = \binom{n}{n-k}_\alpha.$$

***Лемма* 3.** *Для всех n, i, k справедливо равенство*

$$\binom{n}{i}_\alpha \binom{i}{k}_\alpha = \binom{n}{k}_\alpha \binom{n-k}{n-i}_\alpha. \tag{4}$$

Доказательство. Пусть $n = aw + r$, $k = bw + s$, $i = cw + t$ $(0 \leqslant r, s, t < w)$.

Предположим вначале, что $r < t$. Тогда $\binom{n}{i}_\alpha = 0$. Если при этом $r < s$, то $\binom{n}{k}_\alpha = 0$. Если же $r \geqslant s$, то $\binom{n-k}{n-i}_\alpha = \binom{a-b}{a-c-1} \times \binom{r-s}{w+r-t}_\alpha = 0$, поскольку, $0 \leqslant r - s < w + r - t$.

Теперь можем считать, что $t \leqslant r$. Если к тому же $r < s$, то $\binom{i}{k}_\alpha = \binom{n}{k}_\alpha = 0$. Если же $t < s < r$, то $\binom{i}{k}_\alpha = 0$, $\binom{n-k}{n-i}_\alpha = \binom{a-b}{a-c}\binom{r=s}{r=t}_\alpha = 0$, так как $0 \leqslant r-s < r-t$.

Таким образом, в каждом из рассмотренных случаев обе части равенства обращаются в нуль.

Наконец, можно считать, что $s \leqslant t \leqslant r$. Требуемое равенство получается перемножением соотношений

$$\binom{a}{c}\binom{c}{b} = \binom{a}{b}\binom{a-b}{a-c}, \quad \binom{r}{t}_\alpha \binom{t}{s}_\alpha = \binom{r}{s}_\alpha \binom{r-s}{r-t}_\alpha.$$

Лемма доказана.

При любом w остается справедливым классическое соотношение

$$P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \alpha^{\binom{n-k}{2}} \binom{n}{k}_\alpha X^k \quad (n \geqslant 0) \tag{5}$$

и его обращение

$$X^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_\alpha P_k(X) \quad (n \geqslant 0), \tag{6}$$

поскольку их индуктивные доказательства используют только формулы (2), (3). Полагая в тождестве (5) $X = 1$, получаем равенство

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \alpha^{\binom{n-k}{2}} \binom{n}{k}_\alpha = \delta_{n,0}.$$

Пользуясь формулой (4), его можно преобразовать в следующее:

$$\sum_{i=k}^{n} (-1)^{i-k} \alpha^{\binom{i-k}{2}} \binom{n}{i}_\alpha \binom{i}{k}_\alpha = \delta_{n,k}.$$

В пространстве полиномов $K[X]$ рассмотрим линейный оператор $(\Delta_\alpha F)(X) = (F(\alpha X) - F(X))/X$. С точностью до числового множителя он введен в работах Джексона [1,2]. В статье [3] этот оператор назван эйлеровой производной. В его использовании исключался случай $w < \infty$. Нам понадобится также оператор $(T_\beta F)(X) = F(\beta X)$. Можно показать, что

$$(\Delta_\alpha^n F)(X) = \alpha^{-\binom{n}{2}} X^{-n} (P_n(T_\alpha) F)(X); \tag{7}$$

$$(T_\alpha^n F)(X) = \sum_{k=0}^{n} \alpha^{\binom{k}{2}} \binom{n}{k}_\alpha X^k (\Delta_\alpha^k F)(X);$$

$$\alpha^{\binom{k}{2}} \Delta_\alpha^k P_n = P_k(\alpha^k) \binom{n}{k}_\alpha P_{n-k}. \tag{8}$$

Предположим, что $w < \infty$. Тогда оператор Δ_α нильпотентен. Действительно, $P_w(T_\alpha) = T_\alpha^w - 1 = 0$. Из формулы (7) следует, что $\Delta_\alpha^w = 0$. В результате формула Джексона [1] (записанная в несколько иных обозначениях)

$$F = \sum_{k=0}^{w-1} \alpha^{\binom{k}{2}} (\Delta_\alpha^k F)(1)\, Q_k \tag{9}$$

справедлива только для многочленов степени ниже w.

Теорема 2. *При* $0 \leqslant r < w < \infty$ *выполняется равенство*

$$\frac{1}{w} \sum_{i=k}^{w-1} \alpha^{-ri} \binom{i}{k}_\alpha = (-1)^{k-r} \alpha^{\binom{k-r}{2}} \binom{k}{r}_\alpha \frac{1}{P_k(\alpha^k)}.$$

Доказательство. Рассмотрим многочлен $U_r(X) = \frac{1}{w} \times \times \sum_{i=0}^{w-1} \alpha^{-ri} X^i$. Из соотношения $U_r(\alpha^t) = \frac{1}{w} \sum_{i=0}^{w-1} \alpha^{(t-r)i} = \delta_{r,\,t}$ $(0 \leqslant \leqslant t < w)$ по формуле (7) находим $\alpha^{\binom{k}{2}} (\Delta_\alpha^k u_r)(1) = (-1)^{k-r} \alpha^{\binom{k-r}{2}} \times \times \binom{k}{r}_\alpha$. На основании равенства (9) имеем

$$U_r = \sum_{k=0}^{w-1} (-1)^{k-r} \alpha^{\binom{k-r}{2}} \binom{k}{r}_\alpha \frac{P_k}{P_k(\alpha^k)}.$$

С другой стороны, в силу (6) получаем

$$U_r = \frac{1}{w} \sum_{i=0}^{w-1} \alpha^{-ri} \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k}_\alpha P_k =$$

$$= \sum_{k=0}^{w-1} \frac{1}{w} \left(\sum_{i=k}^{w-1} \alpha^{-ri} \binom{i}{k}_\alpha \right) P_k.$$

Остается приравнять коэффициенты при P_k в разложениях для U_r. Приведем без доказательства аналог формулы Лейбница, справедливый в случае $1 < w \leqslant \infty$ (ср. [4])

$$\Delta_\alpha^n (FG) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_\alpha (\Delta_\alpha^k F)(T_\alpha^k \Delta_\alpha^{n-k} G). \tag{10}$$

Легко видеть, что при $w = \infty$ в ядро оператора Δ_α входят только константы. В противоположном случае, как видно из следующей теоремы, оно бесконечномерно.

Теорема 3. *При* $1 < w < \infty$ *справедливо равенство* $\operatorname{Ker} \Delta_\alpha = K[P_w(X)]$.

Доказательство. Для $n = 1$ формула (10) имеет вид: $\Delta_\alpha(FG) = F(\Delta_\alpha G) + (\Delta_\alpha F)(T_\alpha G)$ (11). Отсюда следует, что $\operatorname{Ker} \Delta_\alpha$ подалгебра в $K[X]$. Очевидно, что $X^w - 1 \in \operatorname{Ker} \Delta_\alpha$, откуда $K[Pw] \subset \operatorname{Ker} \Delta_\alpha$.

Проверим обратное включение. Произвольный полином F из $\operatorname{Ker} \Delta_\alpha$ запишем в виде $F(X) = \sum\limits_{n \geqslant 0} F_n(X) P_w^n(X)$, где

$$F_n(X) = \sum_{k=0}^{m} a_n^{(k)} Q_k(X), \tag{12}$$

а в качестве m может быть взято $w - 1$. Из формулы (8) вытекает, что $\Delta_\alpha^m Q_m = \alpha^{-\binom{m}{2}}$, $\Delta_\alpha^m Q_k = 0$ $(k < m)$. Поэтому $\Delta_\alpha^m F_n = \alpha^{-\binom{m}{2}} a_n^{(m)}$. Равенство (11) показывает также, что если $\Delta_\alpha G = 0$, то $\Delta_\alpha(FG) = \Delta_\alpha(F) T_\alpha(G)$. Следовательно, $0 = \Delta_\alpha^m F = \sum\limits_{n \geqslant 0} \Delta_\alpha^m (F_n) \times P_w^n = \alpha^{-\binom{m}{2}} \sum\limits_{n \geqslant 0} a_n^{(m)} P_w^{(n)}$. Отсюда $a_n^{(m)} = 0$ $(n \geqslant 0)$. Таким образом, равенства (12) выполняются с заменой m на $m - 1$ и т. д. Наконец, они справедливы при $m = 0$, тем самым $F_n(X) = a_n^{(0)}$. Значит, $F = \sum\limits_{n \geqslant 0} a_n^{(0)} P_w^n \in K[P_w]$.

Теорема 4. *Для любого многочлена степени* $n < w$ *имеет место соотношение*

$$F(\lambda X) = \sum_{k=0}^{n} \alpha^{\binom{k}{2}} \lambda^k (\Delta_\alpha^k F)(\lambda) Q_k(X). \tag{13}$$

Доказательство. Можно проверить, что $\Delta_\alpha^k T_\lambda = \lambda^k T_\lambda \Delta_\alpha^k$, откуда $(\Delta_\alpha^k T_\lambda F)(1) = \lambda^k (\Delta_\alpha^k F)(\lambda)$. Применяя формулу (9) к многочлену $T_\lambda F$, получаем нужное равенство.

Следствие. При $n < w$ выполняется

$$P_n(\lambda Y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_\alpha \lambda^k P_{n-k}(\lambda) P_k(Y).$$

Это соотношение вытекает из (13) и (8). Придавая λ значения $1, \alpha, \ldots, \alpha^{w-1}$, видим, что справедлива

Теорема 5. *Для любого* $n < w$ *выполняется тождество*

$$P_n(XY) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_\alpha X^k P_{n-k}(X) P_k(Y).$$

Это небольшое видоизменение «q-биномиальной теоремы», комбинаторно доказанной в работе [5]. Запишем ее для многочленов Q_n:

$$Q_n(XY) = \sum_{k=0}^{n} \alpha^{-(n-k)k} X^k Q_{n-k}(X)\, Q_k(Y). \tag{14}$$

Полагая здесь $X = \alpha^u$, $Y = \alpha^v$, получаем обобщение q-аналога теоремы сложения Вандермонда [4,6]:

$$\binom{u+v}{n}_\alpha = \sum_{k=0}^{n} \alpha^{k(u-n+k)} \binom{u}{n-k}_\alpha \binom{v}{k}_\alpha =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \alpha^{(n-i)(u-i)} \binom{u}{i}_\alpha \binom{v}{n-i}_\alpha \quad (0 \leqslant n < w). \tag{15}$$

Введем следующие величины:

$$\binom{i,\ j}{k}_\alpha = \binom{j}{k-i}_\alpha P_{i+j-k}(\alpha^i) = \binom{j}{i+j-k}_\alpha P_{i+j-k}(\alpha^i).$$

Очевидно, что $\binom{i,\ j}{k}_\alpha = 0$, если выполняется хотя бы одно из неравенств $i > k$, $j > k$, $i + j - k < 0$, $i + j - k \geqslant w$. Если же $0 \leqslant i + j - k < w$, то $\binom{i,\ j}{k}_\alpha = \dfrac{P_{i+j-k}(\alpha^i)\, P_{i+j-k}(\alpha^j)}{P_{i+j-k}(\alpha^{i+j-k})}$. Отсюда вытекает симметричность: $\binom{i,\ j}{k}_\alpha = \binom{j,\ i}{k}_\alpha$.

***Лемма* 4.** *Выполняется соотношение*

$$\binom{i,\ j}{k-1}_\alpha + (\alpha^k - \alpha^j)\binom{i,\ j}{k}_\alpha = \binom{i,\ j+1}{k}_\alpha.$$

Доказательство. $\binom{i,\ j}{k-1}_\alpha + (\alpha^k - \alpha^j)\binom{i,\ j}{k}_\alpha = \binom{j}{k-1-i}_\alpha \times$ $\times P_{i+j-k+1}(\alpha^i) + (\alpha^i - \alpha^{i+j-k}) P_{i+j-k}(\alpha^i)\, \alpha^{k-i}\binom{j}{k-i}_\alpha = \Big[\binom{j}{k-i-1}_\alpha +$ $+ \alpha^{k-i}\binom{j}{k-i}_\alpha\Big] P_{i+j-k+1}(\alpha^i) = \binom{j+1}{k-i}_\alpha P_{i+j+1-k}(\alpha^i) = \binom{i,\ j+1}{k}_\alpha.$

***Теорема* 6.** *Имеет место равенство*

$$P_i P_j = \sum_{k=0}^{i+j} \binom{i,\ j}{k}_\alpha P_k. \tag{16}$$

Доказательство. Проведем индуктивный переход по j:

$$P_i(X)\, P_{j+1}(X) = P_i(X)\, P_j(X)\,(X - \alpha^j) = \sum_{k=0}^{i+j} \binom{i,\ j}{k}_\alpha P_k(X)\,(X - \alpha^k) +$$

$$+\sum_{k=0}^{i+j}\binom{i,j}{k}_\alpha P_k(X)(\alpha^k-\alpha^j)=\sum_{k=0}^{i+j+1}\left[\binom{i,j}{k-1}_\alpha+(\alpha^k-\alpha^j)\binom{i,j}{k}_\alpha\right]\times$$

$$\times P_k(X)=\sum_{k=0}^{i+j+1}\binom{i,j+1}{k}_\alpha P_k(X).$$

Приравнивая в (16) коэффициенты при одинаковых степенях X, можно получить еще одно равенство, которое превращается при $\alpha=1$ в теорему сложения для биномиальных коэффициентов. Мы не станем его выписывать. Полагая в (16) $X=\alpha^n$ ($0\leqslant \leqslant n<w$) и преобразовывая, получаем равенство, двойственное к (15): $\binom{n}{i}_\alpha\binom{n}{j}_\alpha=\sum_{k=0}^{n}\alpha^{(k-i)(k-j)}\binom{k}{i}_\alpha\binom{i}{k-j}_\alpha\binom{n}{k}_\alpha$.

Лемма 5. *Выполняется равенство*

$$X^kP_n(X)=\sum_{i=n}^{n+k}\alpha^{n(n+k-i)}\binom{k}{i-n}_\alpha P_i(X).$$

Доказательство проводится индукцией по k. Переходя в этом равенстве к многочленам Q_n, получаем

$$X^kQ_n(X)=\alpha^{nk}\sum_{i=n}^{n+k}\binom{k}{i-n}_\alpha P_{i-n}(\alpha^i)Q_i(X)=$$

$$=\alpha^{nk}\sum_{i=n}^{n+k}\binom{i,\ k}{k+n}_\alpha Q_i(X),$$

откуда

$$X^kQ_{n-k}(X)=\alpha^{(n-k)k}\sum_{i=n-k}^{n}\binom{i,\ k}{n}_\alpha Q_i(X). \tag{17}$$

Из тождеств (14), (17) вытекает следующая теорема умножения.

Теорема 7. *Справедливо равенство*

$$Q_n(XY)=\sum_{i+k\geqslant n}^{i,\ k<n}\binom{i,\ k}{n}_\alpha Q_i(X)\,Q_k(X).$$

Полагая здесь $X=\alpha^u$, $Y=\alpha^v$, запишем еще одну формулу сложения для гауссовых коэффициентов

$$\binom{u+v}{n}_\alpha=\sum_{i+k\geqslant n}^{i,\ k<n}\binom{i,\ k}{n}_\alpha\binom{u}{i}_\alpha\binom{v}{k}_\alpha\ (n<w).$$

Обобщим разложение (9) на случай многочлена произвольной степени. В пространстве $K[X]$ введем линейный оператор D_w $(w < \infty)$, задав его действие на одночленах равенством

$$D_w(X^n) = [n/w]\, X^{n-w}.$$

Здесь, как и выше, $[t]$ обозначает целую часть числа t. В обозначениях $n = aw + r$ $(a = [n/w],\ 0 \leqslant r < w)$ можем также написать $D_w(X^n) = aX^{n-w}$. Легко видеть, что для любых многочленов H, R $(\deg R < w)$ выполняется: $D_w(H(X^w)R(X)) = (DH) \times (X^w)R(X)$. Поэтому $D_w(P_n(X)) = D_w((X^w - 1)^a P_r(X)) = a(X^w - 1)^{a-1} P_r(X) = aP_{(a-1)w+r}(X) = aP_{n-w}(X)$. Учитывая равенство (8), получаем при $b \geqslant 0$, $0 \leqslant s < w$

$$\frac{D_w^b}{b!} \cdot \frac{\alpha^{\binom{s}{2}} \Delta_\alpha^s}{P_s(\alpha^s)} P_n = \binom{a}{b}\binom{r}{s} P_{n-bw-s};$$

$$\left(\frac{D_w^b}{b!} \cdot \frac{\alpha^{\binom{s}{2}} \Delta_\alpha^s}{P_s(\alpha^s)} P_n\right)(1) = \delta_{a,\,b}\delta_{r,\,s}.$$

Это дает возможность найти коэффициенты разложения произвольного полинома по базису $(P_n)_{n\geqslant 0}$. А именно, справедлива

Теорема 8. *Для любого многочлена F имеет место равенство*

$$F = \sum_{b\geqslant 0}\sum_{s=0}^{w-1}\left(\frac{D_w^b \alpha^{\binom{s}{2}} \Delta_\alpha^s}{b!\,P_s(\alpha^s)} F\right)(1)\, P_{bw+s}.$$

В случае $\alpha = 1$ оператор D_w становится оператором дифференцирования D, а написанное разложение превращается в формулу Тейлора.

Отметим также, что операторы Δ_α и D_w коммутируют.

Применим теорему 8 к многочлену X^n:

$$X^n = \sum_{b\geqslant 0}\sum_{s=0}^{w-1}\binom{a}{c}\binom{r}{s}_\alpha P_{bw+s}(X).$$

Сравнивая это разложение с (6), получим еще один вывод явной формулы для $\binom{n}{k}_\alpha$.

Список литературы: 1. *Jackson F. H.* q-Form of Taylor's theorem.— Messenger of Math., 1909, 38, p. 62—64. 2. *Jackson F. H.* q-Difference equations.— Amer. Journ. Math., 1910, 32, p. 305—314. 3. *Goldman J., Rota G.—C.* The number of subspaces of a vector space.— In: Recent progress in combinatorics. Ed. by Tutte, Acad. Press, 1969, p. 75—83. 4. *Carlitz L.* A q-identity.— Monatshefte Math., 1963, 67, N 4, p. 305—310. 5. *Goldman J., Rota G.—C.* On the foundations of combinatorial theory, IV: finite vector spaces and Eulerian

УДК 624.07:534.1

Об устойчивости абсолютно твердого стержня при двухпараметрическом нагружении. Гинзбург И. Н. — Вестн. Харьк. ун-та, 1982, № 230. Механика, теория управления и математическая физика, с. 69—73.

Для исследования нелинейной задачи устойчивости упругозащемленного абсолютно твердого стержня, нагруженного продольной и поперечной силами, используется метод, позволяющий находить критические нагрузки, число решений и их зависимость от нагрузок при силах, превышающих критические.

Устанавливается, что при комбинации нагрузок меньше критической имеет место одна форма равновесия, в критическом случае — две формы, а при комбинации нагрузок больше критической — три. Дана асимптотика этих решений.

Ил. 2. Библиогр.: 2 назв.

УДК 519.4

Обобщенные гауссовы коэффициенты. Калюжный В. Н. — Вестн. Харьк. ун-та, 1982, № 230. Механика, теория управления и математическая физика, с. 73—82.

Изучаются решения возвратного уравнения $\binom{n}{k}_\alpha = \alpha^k \binom{n-1}{k}_\alpha + \binom{n-1}{k-1}_\alpha$, удовлетворяющие условиям $\binom{n}{0}_\alpha = \binom{n}{n}_\alpha = 1$, где α — элемент некоторого поля с порядком $w \leqslant \infty$ по умножению. Найдено разложение произвольного полинома по многочленам Ньютона, построенным по периодической последовательности узлов $1, \alpha, \alpha^2, \ldots$ $(w < \infty)$.

Библиогр.: 6 назв.

УДК 513.838

Гиперфункция и теория гомологий. Головин В. Д. — Вестн. Харьк. ун-та, 1982, № 230. Механика, теория управления и математическая физика, с. 82—88.

В статье предложен новый подход к теории гиперфункций, основанный на теории гомологий аналитических пучков.
Библиогр.: 11 назв.