

Координатизація площини полем дійсних чисел. Повнота системи аксіом евклідової площини

Курінний Г.Ч, Невмержицька О.М, Шугайло О.О.

Травень 2015 року

Зміст

1	Відношення порядку на прямій і впорядкування площини.	1
1.1	Відношення “між”, та аксіоми, яким це відношення підкоряється . .	2
1.2	Відрізки та трикутники	3
1.3	Властивості відношення “між”	4
1.4	Відношення лінійного порядку на прямій, що узгоджене з відношенням “між”	8
1.5	Промені, кути, тикутники.	12
2	Рухи та конгруентність фігур	16
2.1	Аксіоми групи рухів	17
2.2	Фігури та їх конгруентність	19
2.3	Прямі кути, суміжні кути, вертикальні кути	22
2.4	Трикутники та їх властивості	26
2.5	Порівняння, додавання на віднімання відрізків та кутів.	30
2.5.1	Факторизація	30
2.5.2	Порівняння відрізків	31
2.6	Додавання та віднімання кутів та відрізків	34
2.7	Ділення відрізків і кутів навпіл	34
2.8	Аксіома неперервності	35
1	Відношення порядку на прямій і впорядкування площини.	

Теорема гарантує нам, що моделлю системи аксіом 1-5, 6-1,6-2 або 1-5б D-1,D-2 є площина F^2 , точками якої є пари (x, y) елементів поля F , а прямими є множини точок, що адовольняють певному лінійному рівнянню

$$ax + by + c = 0, \quad a, b, c \in F, \quad (a, b) \neq (0, 0).$$

Наведена система аксом не повна, оскільки можна ввести нові аксіоми, які б обмежили можливості для вибору поля F .

Система аксіом буде повною, якщо координатизуюче поле F єдине. Громадська думка вказує на поле дійсних чисел як на найважливіше, а серед площин найважливішою є площина $\mathbb{R}^2$. Поле дійсних чисел визначається тим, що воно впорядковане, архімедове і неперервне, причому існує не впорядковане поле (поле класів лишків за певним модулем), існує впорядковане повне неархімедове поле (поле p -адичних чисел), і існує впорядковане архімедове але не повне поле (поле раціональних чисел). Далі розглядаємо групи аксіом, які забезпечують відповідні властивості поля, і роблять площину “класичною”

1.1 Відношення “між”, та аксіоми, яким це відношення підкоряється

Завдання полягає в тому, щоб аксіоматизувати відношення між трьома точками на прямій, коли одна точка розташована між двома другими (див. рис. 1)

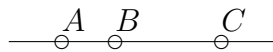


Рис. 1: Точка B розташована між точками A та C .

Тернарне відношення “між” на множині U будемо позначати $Mizh$, коли три елементи $a, b, c \in U$ у вказаному порядку знаходяться у відношенні $Mizh$, ми пишемо

$$(a, b, c) \in Mizh$$

і кажемо, що елемент b розташований (знаходиться) між елементами A та C .

Аксіома М-1: Якщо серед трьох елементів множини U є два однакові, то ці три елементи ні в якому порядку не знаходяться у відношенні $Mizh$.

Аксіома М-2: $(a, b, c) \in Mizh \Leftrightarrow (c, b, a) \in Mizh$.

Аксіома М-3: $(a, b, c) \in Mizh \Rightarrow (b, a, c) \notin Mizh$.

Аксіома М-4: $(a, b, c) \in Mizh \Rightarrow (a, c, b) \notin Mizh$.

Виписані 4 аксіоми можуть стосуватися будь-якої множини. Наступні — уже спираються на те, що множина U це множина точок деякої площини.

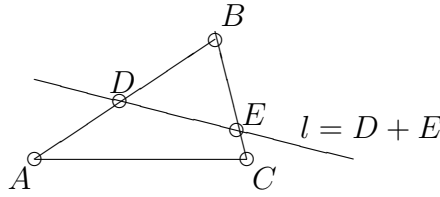


Рис. 2: Аксиома Паша - якщо пряма перетнула одну сторону трикутника і не проходить через вершину, то вона перетне і іншу сторону..

Аксиома М-5. Якщо три точки не колінеарні, то вони не можуть ні в якому порядку знаходитися у відношенні *Mizh*.

Аксиома М-6. Для будь-яких двох різних точок a, b існує третя точка c така, що $(a, b, c) \in Mizh$.

Аксиома М-7 (аксіома Паша): Нехай є три різні неколінеарні точки A, B, C і пряма l , яка не проходить через точку C і перетинає пряму $A + B$ в точці D , що розташована між точками A і B . Тоді існує точка E , що розташована або між точками A і C , або між точками B і C і, крім того (див. рис. 2), $l = D + E$.

1.2 Відрізки та трикутники

Визначення 1.1 Відрізком на площині називаємо множину, що складається із двох вибраних (можливо однакових) точок і точок, що лежать між ними. Дві вибрані точки називаємо кінцями відрізка, а точки, що лежать між кінцями, називаємо внутрішніми точками відрізка. Відрізок, у якого кінці збігаються, називаємо нульовим.

Якщо A, B дві точки площини, то відрізок, для якого A, B є кінцями, позначаємо $[AB]$, множину внутрішніх точок цього відрізка позначаємо (AB) . Отже, для двох точок A, B площини

$$[A, B] = \{A, B\} \cup (A, B) = [B, A].$$

Оскільки оностайності у трактуванні відрізка та його точок у підходах до аксіоматизації площини немає, то зайвий раз підкреслимо, що далі і кінці і внутрішні точки є точками відрізка, вони лежать на відрізку, вони належать відрізку і т.п.

Теорема 1.1 (про існування внутрішніх точок ненульового відрізка) Якщо відрізок ненульовий, то множина внутрішніх точок у цього відрізка не порожня.

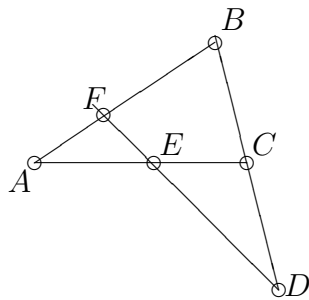


Рис. 3: Побудова точки E , що знаходиться між точками A та C .

Доведення. Нехай A, C — дві різні точки площини. Вкажемо точку (див. рис. 3), яка лежить між цими точками.

Для цього вибираємо точку F , що не лежить на прямій $A+C$ і будуємо точку B так, щоб точка F лежала між A і B — можливість такої побудови забезпечується аксіомою М-6. Далі будуємо точку D так, щоб точка C лежала між B та D — тут ми знову скористалися аксіомою М-6. Далі застосовуємо аксіому М-7 до трьох точок A, B, C і прямої $F+D$, яка забезпечує нам існування точки E , точки, що лежить між A і C і лежить на прямій $F+D$.

■

1.3 Властивості відношення “між”

Теорема 1.2 *Серед трьох різних колінеарних точок одна обов’язково лежить між двома іншими.*

Доведення. Нехай A, B, C три різні колінеарні точки і

$$(B, A, C) \notin Mizh,$$

$$(A, C, B) \notin Mizh, \text{ і } B \notin A \cup C.$$

Вибираємо точку D (див. рис. ??), яка не лежить на прямі $A+C$. Вибираємо точку G так, щоб точка D лежала між точками B і G — можливість такого вибору забезпечена аксіомою М-6.

Наступним кроком є побудова точки F як точки перетину прямої $A+G$ і $C+D$. Аксіома М-7, застосована до трьох точок A, G, B і прямої $C+D$ забезпечує $(A, F, G) \in Mizh$.

Наступним кроком є побудова точки E як точки перетину прямої $C+G$ і $A+D$. Аксіома М-7, застосована до трьох точок A, G, E і прямої $C+D$ забезпечує $(A, D, E) \in Mizh$.

Аксіома М-7, застосована до трьох точок A, E, C і прямої $G+D$ забезпечує $(A, B, C) \in Mizh$.

Доведення теореми завершене.

■

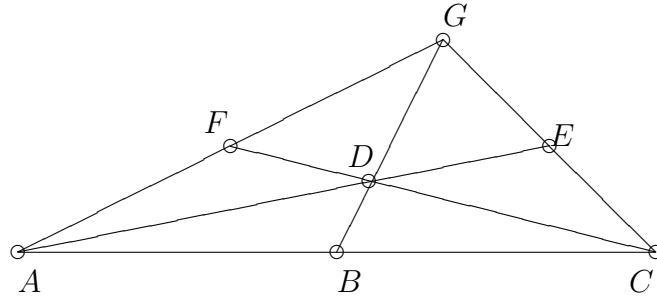


Рис. 4: Одна із точок A, B, C знаходиться між рештою двом

Теорема 1.3 *Будь-які чотири різні колінеарні точки можна позначити A_1, A_2, A_3, A_4 так, що*

$$\text{---} \circ A_1 \circ A_2 \circ A_3 \circ A_4$$

$$(A_i, A_j, A_k) \in Mizh \Leftrightarrow (1 \leq i < j < k \leq 4) \vee (4 \geq i > j > k \geq 1).$$

Доведення.

Лема 1.1 *Якщо A_1, A_2, A_3, A_4 чотири різні колінеарні точки, точка A_2 лежить на відрізку $[A_1, A_3]$, точка A_3 лежить на відрізку $[A_2, A_4]$, то точка A_2, A_3 лежать на відрізку $[A_1, A_4]$.*

Доведення. Нехай точки A_1, A_2, A_3, A_4 задовольняють умови леми. Вибираємо довільно точку A , що не лежить на прямій $A_1 + A_4$, і вибираємо точку B так, що точка A лежить між B і A_3 (див. рис. 5) — можливість останнього вибору забезпечена аксіомою М-6.

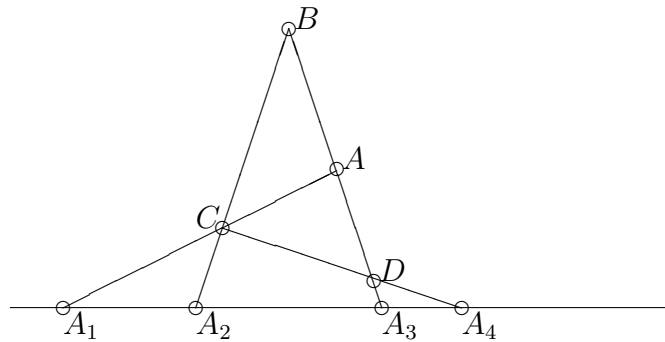


Рис. 5: Конфігурація точок і прямих до леми 1.1

Будуємо точку C як точку перетину прямої $A_1 + A$ і прямої $B + A_2$. Застосуємо акіому М₇ A_2, A_3, B і прямої $A_1 + A$, одержуємо, що точка C лежить між A_2 та B .

Будуємо точку D як точку перетину прямої $A_3 + B$ і прямої $C + A_4$. Застосуємо акіому М-7 до трьох точок A_2, A_4, C і прямої $A_3 + B$, одержуємо, що точка D лежить між A_4 та C .

Застосуємо акіому М-7 до трьох точок A_1, A_4, C і прямої $A_3 + B$, одержуємо, що точка A_3 лежить між A_4 та A_1 .

Для доведення леми лишилося перевірити, що точка A_2 лежить між A_4 та A_1 . Для цього застосуємо акіому М-7 до трьох точок A_1, A, A_3 і прямої $A_2 + B$, одержуємо, що точка C лежить між A_1 та A . Далі застосуємо акіому М-7 до трьох точок A_1, A, A_4 і прямої $A_2 + B$, одержуємо, що точка A_2 лежить між A_1 та A_4 .

Лема доведена.

■

Лема 1.2 *Якщо A_1, A_2, A_3, A_4 чотири різні колінеарні точки, точка A_2 лежить на відрізку $[A_1, A_3]$, точка A_3 лежить на відрізку $[A_1, A_4]$, то точка A_3 лежить на відрізку $[A_2, A_4]$.*

Доведення. Нехай точки A_1, A_2, A_3, A_4 задовольняють умови леми. Вибираємо

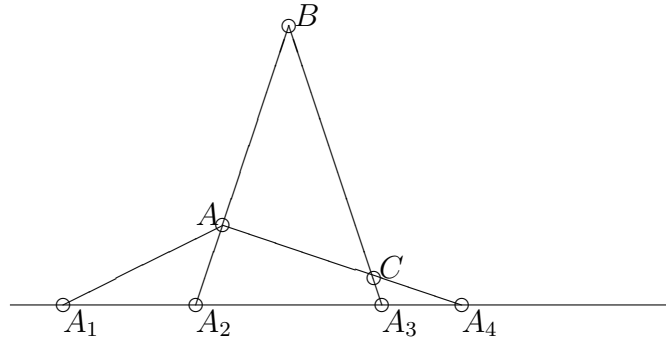


Рис. 6: Конфігурація точок і прямих до леми 1.2

довільно точку A , що не лежить на прямій $A_1 + A_4$, і вибираємо точку B так, що точка A лежить між B і A_2 (див. рис. 6) — можливість останнього вибору забезпечена аксіомою М-6.

Розглядаємо три точки A_1, A, A_4 і пряму $A_3 + B$. Оскільки пряма $A_3 + B$ відрізок $[A_1, A_4]$, то вона повинна перетнути і один із відрізків $[A, A_1]$, $[A, A_4]$. Відрізок $[A, A_1]$ вона не може перетнути, оскільки в протилежному випадку точка A_3 лежала б між A_1 та A_2 , що неможливо. Тому пряма $A_3 + B$ перетинає відрізок $[A, A_4]$ — позначимо точку перетину буквою C . Далі застосуємо аксіому М-7 до трьох точок A_2, A, A_4 і прямої $B + A_3$, яка забезпечує нам потрібне $(A_2, A_3, A_4) \in Mizh$.

Лема доведена.

■

Повертаємося до доведення теореми. Нехай маємо чотири різні колінеарні точки. Вибираємо три з них, позначаємо буквою Q ту із них, що лежить між двома іншими, а дві інші позначаємо R і S .

Розглядаємо перший випадок - випадок, коли одна з точок P, R є внутрішньою для одного із відрізків $X, Y]$, де $X, Y \in \{P, Q, R, S\}$. Згідно з аксіомою М-2

$$(P, Q, R) \in Mizh \Leftrightarrow (R, Q, P) \in Mizh,$$

і ми можемо вважати, що

$$R \in (X, Y), \quad X, Y \in \{P, Q, S\}.$$

Знову аксіома М-2 дозволяє вважати, що $(X, R, S) \in Mizh$. і $X \in \{P, Q\}$. Коли $X = P$, лема 1.2 гарантує, що нумерація

$$\begin{array}{c} \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \\ \hline P = A_1 \quad Q = A_2 \quad R = A_3 \quad S = A_4 \end{array}$$

$$P = A_1, \quad Q = A_2, \quad R = A_3, \quad S = A_4$$

буде потрібною нумерацією точок. Отже в цьому випадку теорема доведена.

Другий випадок, коли жодна з точок P, R не є внутрішньою для жодного із відрізків $X, Y]$, де $X, Y \in \{P, Q, R, S\}$. Виділяємо три точки Q, R, S , Оскільки точка R не є внутрішньою точкою відрізка $[Q, S]$, то або

$$(R, Q, S) \in Mizh, \tag{1}$$

або

$$(R, Q, S) \in Mizh, \tag{2}$$

У випадку (1) лема (1.1) дозволяє ввести потрібну нумерацію

$$\begin{array}{c} \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \\ \hline P = A_1 \quad Q = A_2 \quad S = A_3 \quad R = A_4 \end{array}$$

$$P = A_1, \quad Q = A_2, \quad R = A_3, \quad S = A_4$$

А у випадку (2) ця ж лема забезпечує, що потрібною нумерацією буде

$$\begin{array}{c} \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \\ \hline P = A_1 \quad S = A_2 \quad Q = A_3 \quad R = A_4 \end{array}$$

$$P = A_1, \quad Q = A_2, \quad R = A_3, \quad S = A_4$$

■

1.4 Відношення лінійного порядку на прямій, що узгоджене з відношенням “між”

Нагадаємо термінологію, що стосується відношення порядку.

Нехай задана непорожня множина M . Бінарне відношення на M називається відношенням порядку, коли воно транзитивне і антисиметричне. Обернене до відношення порядку знову є відношенням порядку. Одне з цих двох взаємно обернених відношення називають "менше" і позначають $<$, а друге називають "більше" і позначають $>$. Якщо для двох елементів $a, b \in M$ або $a < b$ або $a > b$ то кажуть, що ці елементи порівнювані. В протилежному випадку, тобто коли ні $a < b$ ні $a > b$, то кажуть що ці елементи не порівнювані. Щоб підкреслити, що у множині можуть існувати два різні непорівнювані елементи, відношення порядку називають відношенням часткового порядку. Якщо усі пари різних елементів порівнювані, то такий порядок називають лінійним, а множину M разом із відношенням лінійного порядку називають лінійно впорядкованою.

Використовуючи теоретико-множинну та логічну смовліку умова транзитивності відношення $<$ записується наступним чином:

$$\forall a, b, c \in M \quad (a < b) \wedge (b < c) \Rightarrow a < c,$$

а умова антирефлексивності записується так

$$\forall f, b \in M \quad (a < b) \Rightarrow \neg(b < a).$$

Щоб підкреслити, що $\forall a \in M \quad \neg(a < a)$ відношення порядку називають “строгим”, відповідно, говорять про відношення “строого менше” і “строого більше.”

З кожним бінарним відношенням часткового порядку на множині M пов’язується тернарне відношення $Mizh$, що задається правилом

$$\forall a, b, c \in M \quad (a, b, c) \in Mizh \Leftrightarrow (a < b < c) \vee (a > b > c). \quad (3)$$

Якщо відношення порядку і відношення $Mizh$ зв’язані правилом (3). будемо казати, що вони узгоджені один з одним. Зрозуміло, що коли відношення порядку узгоджене з відношенням $Mizh$, то обернене відношення також узгоджене з $Mizh$. Коли ж інших узгодежних з $Mizh$ відношень порядку немає, то ми кажемо, що узгоджене з відношенням $Mizh$ відношення порядку єдине з точністю до оберненого.

Теорема 1.4 *Якщо відношення $Mizh$ на точках площини π задовольняє умови $M-1$ — $M-7$, то на кожній прямій існує і до того ж єдине (з точністю до оберненого) відношення лінійного порядку, яке узгоджене з $Mizh$*

Доведення. Нехай A, B — дві різні точки площини π . Введемо на прямій $A + B$ бінарне відношення $<$ наступними правилами

- $A < B$.
- Якщо A, B, C — три різні точки, то

$$(A, B, C) \in Mizh \Leftrightarrow (A < C) \wedge (B < C);$$

$$(A, C, B) \in Mizh \Leftrightarrow (A < C) \wedge (C < B);$$

$$(C, A, B) \in Mizh \Leftrightarrow (C < A) \wedge (C < B).$$

- Якщо A, B, C, D — чотири різні точки, то $C < D$ в тому і тільки тому випадку, коли ці точки можна перенумерувати так

$$\{A, B, C, D\} = \{A_1, A_2, A_3, A_4\},$$

що

$$A_i = A, A_j = B, A_p = C, A_q = D, \quad i < j, \quad p < q, \quad \{i, j, p, q\} = \{1, 2, 3, 4\},$$

і

$$\forall i, j, k \in \{1, 2, 3, 4\} \quad (A_i, A_j, A_k) \in Mizh \Leftrightarrow 1 \leq i < j < k \leq 4.$$

Потрібно довести, що так ведене відношення є лінійним порядком, тобто анти-симетричним, транзитивним бінарним відношенням, в якому будь-які дві точки прямої порівнювані, Єдиність відношення $<$ і порівнюваність будь-яких двох точок прямої випливе із теорем 1.2, 1.3. Перевіримо транзитивність введеного відношення $<$.

Отже маємо три точки C, D, E , для яких $C < D, D < E$. Потрібно довести, що $C < E$. У випадку, коли множина $\{A, B, C, D, E\}$ складається із двох, трьох чи чотирьох елементів, транзитивність випливає із теорем 1.2, 1.3. Далі вважаємо, що множина $\{A, B, C, D, E\}$ складається із 5 різних точок площини, що лежать на прямій $A + B$.

Перепозначаємо елементи A, B, C, D так, що

$$\{A, B, C, D\} = \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$$

$$B_i = A, B_j = B, B_p = C, B_q = D, \quad i < j, \quad p < q, \quad \{i, j, p, q\} = \{1, 2, 3, 4\},$$

$$\forall i, j, k \in \{1, 2, 3, 4\} \quad (B_i, B_j, B_k) \in Mizh \Leftrightarrow 1 \leq i < j < k \leq 4,$$

і розглядаємо три можливості:

$$(B_1, B_4, E) \in Mizh, \tag{4}$$

$$(B_1, E, B_4) \in Mizh, \tag{5}$$

$$(E, B_1, B_4) \in Mizh, \tag{6}$$

Якщо виконується (4), то позначаємо $E = B_5$, $\{A, B, C, D, E\} = \{B_1, B_2, B_3, B_4, B_5\}$ і маємо

$$\forall i, j, k \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad (B_i, B_j, B_k) \in Mizh \Leftrightarrow 1 \leq i < j < k \leq 5, \quad (7)$$

Якщо виконується (5), то позначаємо $E = B_0$, $\{A, B, C, D, E\} = \{B_0, B_1, B_2, B_3, B_4, \}$ і маємо

$$\forall i, j, k \in \{0, 1, 2, 3, 4\} \quad (B_i, B_j, B_k) \in Mizh \Leftrightarrow 0 \leq i < j < k \leq 4, \quad (8)$$

Якщо виконується (6), то позначаємо

$$\{B_2, B_3, E\} = \{A_2, A_3, A_4\}, \quad (A_2, A_3, A_4) \in Mizh,$$

$B_2 = A_i, B_3 = A_j$ при деяких $2 \leq i < j \leq 3$, $B_1 = A_1$, $B_4 = A_5$. Тоді маємо

$$\{A, B, C, D, E\} = \{B_1, B_2, B_3, B_4, E\} = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$$

і

$$\forall i, j, k \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad (A_i, A_j, A_k) \in Mizh \Leftrightarrow 1 \leq i < j < k \leq 5. \quad (9)$$

Виконуваність (7), (8), (9) перевіряється з використанням лем 1.1. 1.2.

Ми перенумерували точки A, B, C, D, E так що виконується одна із умов (7), (8), (9). Викинувши в знайдений нумарації точок точку D одержуємо нумерацію точок A, B, C, E , яка доводить, що $C < E$.

Транзитивність відношення $<$ перевірена. Теорема доведена

■

Визначення 1.2 Кожне з двох відношень порядку на прямій, яке узгоджене з тернарним відношенням “між”, називають напрямком

Отже на кожній прямій є рівно дві напрямки.

Теорема 1.5 Нехай π деяка площина і a — деяка пряма в цій площині. Тоді на множині точок, що не лежать на прямій a можна ввести бінарне відношення $\sim$ правилами:

- Для будь-якої точки A , що не лежить на a , $a \sim a$.
- Якщо A, B дві різні точки, що не лежать на прямій a , то $A \sim B$ в тому і тільки тому разі, коли одна точка прямої a не лежить між точками A та B (відрізок $[A, B]$ не перетинає пряму a).

відношення $\sim$ є відношенням еквівалентності (симетричне, рефлексивне та транзитивне) з двома класами еквівалентності.

Доведення. Рефлексивність відношення $\sim$ вказана в означенні, а симетричність випливає з того, що відрізок у нас не орієнтований, відрізки $[A, B]$ і $[B, A]$.

Транзитивність випливає із аксіоми М-7, яку можна переформулювати так “Якщо є три різні точки A, B, C , що не лежать на прямій a , і пряма a не має спільних точок з відрізками $[A, B], [B, C]$, то пряма a не має спільних точок з відрізком $[A, C]$,”

■

Класи введеної еквівалентності, що породжена прямою a , називають півплощинами. В цій термінології говорять, що кожна пряма ділить площину на дві півплощини, і дві точки, що не лежать на прямій a , лежать в одній півплощині, коли вони або збігаються, або відрізок, що їх з’єднує, не перетинає пряму a .

Альтернативні аксіоми порядку.

Якщо на кожній прямій a площини π ввести дві взаємно обернені відношення лінійного порядку $<_a$ (“менше”) та $>_a$ (“більше”), то на всій площині виникає узгоджене з ними тернарне відношення *Mizh* (“лежати між” або знаходяться у від просто “між”): $(A, B, C) \in Mizh$ тоді і тільки тоді, коли вони різні, лежать на одній прямій (назвемо її a) і виконується одна із умов $A <_a B <_a C$ або $A >_a B >_a C$.

Також кожна пряма a породжує на множині $\pi \setminus a$ бінарне відношення $\sim_a$ (“лежати по одну сторону від a ”); для $A, B \in \pi \setminus a$ можна записати $A \sim_a B$ в тому і тільки тому випадку, коли жодна точка $C \in a$ не лежить між A і B .

Аксіома L. На всіх прямих площини можна ввести два взаємно обернені відношення лінійного порядку (напрямки) $<_a$ (“менше”) та $>_a$ (“більше”) так, що виконуються дві умови

- На жодній прямій немає ні найбільшого ні найменшого елементів.
- Відношення “лежати по одну сторону від заданої прямої a ” є відношенням еквівалентності з двома класами еквівалентності (їх називають півплощинами).

Аксіома L, як показано вище, де окремі її положення доведені як теореми, є наслідком аксіом М-1 — М-7. В той же час можна переконувати, що аксіоми М-1 — М-7 є наслідком аксіоми L. В цьому розумінні аксіома L рівносильна системі аксіом М-1 — М-7.

Аксіома L стисліша (хоч і за рахунок явних попередніх означень) і комусь видасться більш очевидною. Також комусь видасться більш простим доведення того, що аксіоми М-1 — М-7 є наслідком аксіоми L, в

порівняння з доведенням того, що аксіома L є наслідком системи аксіом $M-1 — M-7$. В цьому розумінні аксіома L “краща” від системи аксіом $M-1 — M-7$.

В той же час аксіома L “гірша” від системи аксіом $M-1 — M-7$, якщо дивитися на них зі сторони використання актуальної та потенційної нескінченності. Так в системі аксіом $M-1 — M-7$ ми для будь-яких двох із них точок A, B можемо побудувати третю точку C таку, що B лежить між A та C . Отже ми можемо будувати все нові і нові точки — хоч їх весь час скінченна кількість, але ця кількість не обмежена, тобто є потенційною нескінченністю. В той же час аксіома L вимагає одномиттєвого введення відношення лінійного порядку на всіх точках всіх прямих, — в цьому розумінні тут використовується актуальна нескінченність. Використання актуальної нескінченності суттєво “погіршує” аксіому L . Надалі будемо користуватися аксіомою L і системою аксіом $M-1 — M-7$ як івносильними — будемо вважати, що всі вони виконані.

1.5 Промені, кути, тикутники.

Визначення 1.3 *Сукупність (множина) що складається із трьох різних неколінеарних точок і трьох відрізків, кінцями яких є ці точки, називаємо трикутником. Вибрані три точки називаємо вершинами трикутника, а відрізки називаємо сторонами трикутника.*

Визначення 1.4 *Кожне з двох відношень порядку на прямій, яке узгоджене з тернарним відношенням “між”, називають напрямком*

Отже на кожній прямій є рівно дві напрямки.

Визначення 1.5 *Нехай a деяка пряма площини, A точка на цій площині і $<, >$ два напрямки на цій прямій. Тоді множини*

$$\{B \in a | B < A\}, \quad \{B \in a | B > A\}$$

називаються півпрямими або променями з початком в точці A (також будемо говорити, що промені виходять з точки A). Кожен із вказаних променів вважають доповнювальним один до другого.

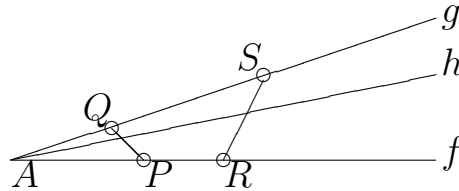
Теорема 1.6 *Нехай a деяка пряма площини і b інша пряма, чи півпряма, чи відрізок. Тоді із того, що b не перетинається із a випливає, що всі точки b лежать в одній півплощині по відношенню до a .*

Доведення. Твердження теореми випливає з того, що всі точки відрізка з кінцями на b знову лежать на b — це випливає із властивостей лінійного порядку на прямій, що містить b .

■

Теорема 1.7 *Нехай є три різні промені f, g, h , що виходять із однієї точки A і не лежать на одній прямій. Тоді, якщо h перетинає певний відрізок з кінцями на променях f, g , то він перетинає будь-який відрізок з кінцями на променях f, g .*

Доведення. Нехай три різні промені f, g, h виходять із однієї точки A і не лежать на одній прямій, промінь h перетинає відрізок $[P, Q]$ з кінцями $P \in f, Q \in g$, і є відрізок $[R, S]$ з кінцями $R \in f, S \in g$ як на рисунку нижче.



Потрібно довести, що на відрізку $[R, S]$ є внутрішня точка, яка лежить на промені h .

Випадок, коли $Q = S, P = S$ вважатимемо очевидним і розглядати не будемо. Отже, можна вважати, що $Q \neq S$ і застосовувати лему М-7 до трьох неколінеарних точок P, Q, S і прямої

$$l = h \cup \{A\} \cup \bar{h},$$

де $\bar{h}$ це доповнювальний промінь до променя h . Ця аксіома забезпечить нам існування внутрішньої точки B відрізка $[P, S]$, яка лежить на прямій l .

Але нам потрібно, щоб точка B лежала не просто на прямій l а саме на промені h . для цього розглядаємо дві півплощини π_1, π_2 , на які розбивається площина прямою f . Позначимо π_1 саме ту півплощину, якій належать відрізок $[Q, S]$ і внутрішні точки відрізків $[P, Q], [P, S]$. Те, що $B \in \pi_1$, і, за теоремою 1.6, весь промінь h повністю лежить в одній із півплощин π_1, π_2 , забезпечує $h \in \pi_1$, і те, що перетин $[P, S]$ з l лежить на промені h .

Подібні міркування, застосовані до прямої l і трьох точок P, S, R доводять існування точки перетину відрізка $[R, S]$ і променя h .

■

Теорема 1.7 дозволяє ввести тернарне відношення $Mizh$ (“між”) на множині променів площини.

Визначення 1.6 Промінь h знаходиться між променями f, g ($(f, h, g) \in Mizh$) тоді і тільки тоді, коли всі ці промені різні, виходять із однієї точки, і промінь h перетинає будь-який відрізок, кінці якого лежать на променях f, g .

Зрозуміло, що для трьох променів f, g, h

$$(f, h, g) \in Mizh \Leftrightarrow (g, h, f) \in Mizh.$$

Теорема 1.8 Припустимо, що в площині π три різні промені h, k, l виходять із однієї точки O і розташовані в одній півплощині π_1 , що визначається прямою $h \cup \{O\} \cup \bar{h}$ ($\bar{h}$ позначено доповнювальний до h промінь). Тоді або k знаходиться між h і l , або l знаходиться між h і k ,

Доведення. Нехай маємо три промені і точку O як в умові теореми. Виберемо три точки $A \in \bar{h}$, $B \in h$, $C \in k$. Можливі два випадки — перший, коли промінь l перетинає відрізок $[A, C]$, і другий, коли промінь l не перетинає відрізок $[A, C]$. В першому випадку, коли промінь l перетинає відрізок $[A, C]$ в точці E (див. рис. 8), позачаємо через D довільну внутрішню точку відрізка $[A, E]$. Далі застосовуємо аксіому М-7 до трьох точок A, E, O і прямої $B + D$, одержуємо внутрішню точку K відрізка $[E, O]$. $K \in k$. Наступним кроком застосовуємо аксіому М-7 до трьох точок E, C, O і прямої $B + D$, одержуємо внутрішню точку L відрізка $[E, O]$, $L \in l$. Ми одержали три точки $K \in k, L \in l, B \in h$, що лежать на одній прямій $D + B$. Одна з них лежить між двома іншими. Точка B не може лежати між K і L , оскільки K і L лежать в одній півплощині відносно прямої $h \cup \{O\} \cup \bar{h}$. Отже, виконується одна із умов: або k знаходиться між h і l , або l знаходиться між h і k , В першому випадку теорема доведена.

В другому випадку, коли промінь l не перетинає відрізок $[A, C]$ (див. рис. 7), позачаємо через D довільну внутрішню точку відрізка $[A, C]$. Застосовуємо аксіому М-7 до трьох точок A, D, B і променів k, l , Одержуємо точки $K \in k, L \in l$, $K, L \in B + D$. Далі використовуємо ті ж міркування, що і в першому випадку, і переконуємося що і в другому випадку теорема правильна.

■

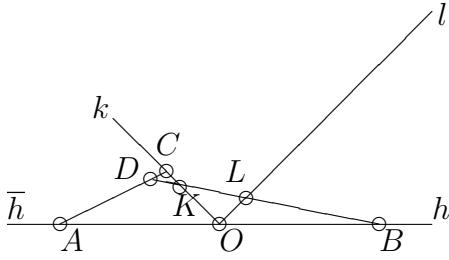


Рис. 7: Один промінь знаходиться між двома іншими - випадок 1.

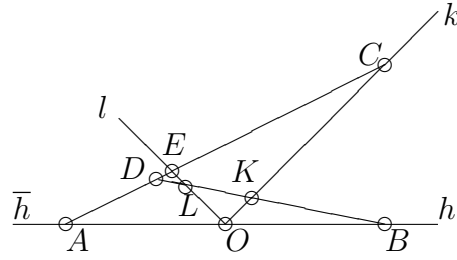
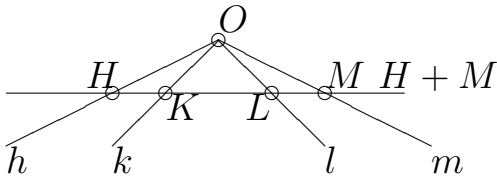


Рис. 8: Один промінь знаходиться між двома іншими - випадок 2.

Теорема 1.9 Нехай маємо чотири різні промені h, k, l, t , що виходять із однієї точки O . Коли промінь l знаходиться між променями h і t , а промінь k знаходиться між h і l , то промінь k знаходиться між h і t . Також, якщо промені k, l знаходяться між променями h і t , то промінь k знаходиться або між l і h , або між l і t .

Доведення. Нехай маємо чотири промені h, k, l, t , що виходять із однієї точки O .



■

Виберемо на промені h точку H , а на промені t точку M і проведемо пряму $H + M$. В будь-якому разі умови теореми забезпечують існування точок перетину $H + M$ з k (позначимо її K) і з l (позначимо її L). Впорядковуємо чотири точки H, K, L, M так, як дозволяє теорема 1.3. Далі теорема впливає із означення відношення “між” для променів.

Визначення 1.7 Нехай є два промені h і k , що виходять із точки O і не належать одній прямій. Сукупність променів, які лежать між h і k будемо називати кутом з вершиною O і сторонами H, k і позначати (h, k) .

Теорема 1.10 Нехай O певна точка площини; h, l — два промені, що виходять із O і не лежать на одній прямій; $\bar{h}, \bar{l}$ — доповнювальні промені до h, l відповідно; α — півплощина відносно прямої $h \cup \{O\} \cup \bar{h}$ в якій лежить промінь l ; β — півплощина відносно прямої $l \cup \{O\} \cup \bar{l}$ в якій лежить промінь h .

Промінь k , що виходить із точки O належить куту (h, l) тоді і тільки тоді коли він належить $\alpha \cap \beta$.

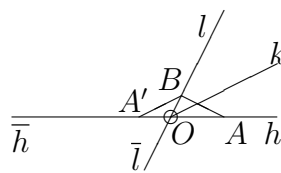
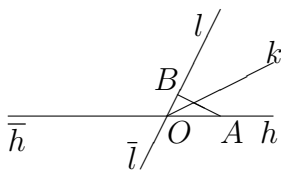
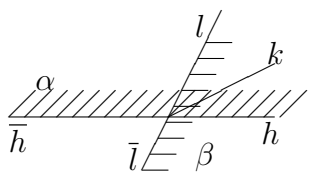


Рис. 9: Креслення до умови теорема 1.10.

Рис. 10: Теорема 1.10, $k \in (h, l)$.

Рис. 11: Теорема 1.10, $k \in \alpha \cap \beta$.

Доведення.

Беремо відрізок $[A, B]$ з кінцями $A \in h$, $B \in l$ (див. рис. 10)

Припускаємо, що промінь k належить куту (h, l) . потрібно довести, що $k \in \alpha \cap \beta$. Дійсно, Оскільки внутрішні точки відрізка $[A, B]$ не лежать ні на l ні на h , то вони лежать в одній півплощині і відносно прямої $h \cup \{O\} \cup \bar{h}$ і відносно прямої $l \cup \{O\} \cup \bar{l}$. Враховуючи, що $A \in \beta$, $B \in \alpha$ одержуємо, що всі внутрішні точки відрізка $[A, B]$ (в тому числі точка перетину $[A, B]$ з k) лежать в $\alpha \cap \beta$. Коли одна точка променя k лежать в $\alpha \cap \beta$, тоді і всі точки променя k лежать в $\alpha \cap \beta$. Перша частина теореми доведена.

Припустимо тепер, що $k \in \alpha \cap \beta$. Потрібно довести, що промінь k перетинає побудований відрізок $[A, B]$. Для цього будуємо точку $A' \in \bar{h}$ і застосовуємо аксіому М-7 до трьох точок A, B, C і прямої $k \cup \{O\} \cup \bar{k}$. Те, що точка перетину прямої $k \cup \{O\} \cup \bar{k}$ з відрізком $[A, B]$ збігається з точкою перетину променя k з відрізком $[A, B]$, випливає з того, що і відрізок і промінь лежать в $\alpha \cap \beta$.

Теорема доведена.

■

2 Рухи та конгруентність фігур

Якщо два відрізки $[A, B]$, $[A, C]$ мають спільний кінець A і $B \in [A, C]$, то ми можемо сказати, що відрізок $[A, B]$ менше відрізка $[A, C]$. Проте, таких випадків, коли ми можемо сказати, що один із відрізків дорівнює, менше або більше другого мало. Нагадаємо,

Два предмети A, B рівні (тотожні), якщо кожна властивість, яку має A є властивістю B , а кожна властивість предмета B є властивістю предмета A .

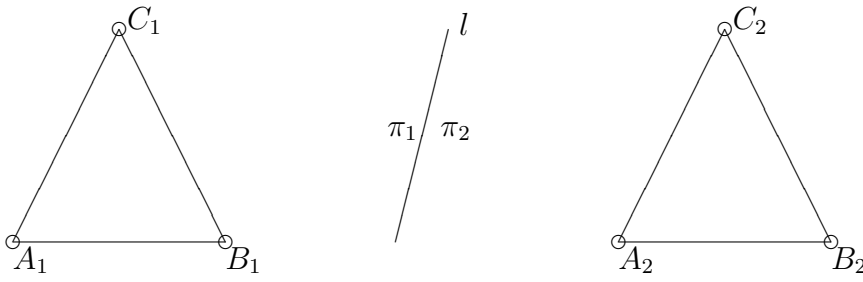


Рис. 12: Трикутник A_1, B_1, C_1 кожна стоона якого дорівнює одиниці, не рівний трикутнику A_2, B_2, C_2 , кожна стоона якого також дорівнює одиниці, оскільки трикутник A_1, B_1, C_1 лежить в півплощині π_1 , а трикутник A_2, B_2, C_2 лежить в півплощині π_2 .

На рис. 12 зображені два рівносторонні трикутники, в яких кожна сторона дорівнює одиниці. Ці трикутники не рівні, оскільки трикутник A_1, B_1, C_1 лежить в одній півплощині відносно прямої l , а трикутник A_2, B_2, C_2 в іншій.

Ослабленим варіантом відношення “рівність” чи “тотожність” є “еквівалентність” або “конгруентність”. У радянські часи шкільна освіта на прохання математиків перейшла у викладанні геометрії від теорміну “рівні” до терміну “конгруентні”. Але батьківська громадськість вирішила, що новий термін занадто складний, і на сьогодні, в школі про трикутники на рис. 12 кажуть, що вони рівні. Нижче будмо вважати, що кожен відрізок доівнює (тотожний) лише сам собі і для двох відрізків $[A, B]$, $[C, D]$ писати

$$[A, B] = [C, D] \Leftrightarrow \{A, B\} = \{C, D\}.$$

Конгруентність відрізків, тобто рефлексивне симетричне і транзитивне бінарне відношення, можна виокремити аксіомами, а можна із бієктивних колінеацій виокремити рухи, а далі за допомогою рухів дати означення конгруентності відрізків і інших геометричних утворень.

Підемо другим шляхом.

2.1 Аксіоми групи рухів

Аксіома R-1. Кожний рух є бієктивною колінеацією площини в себе.

Аксіома R-2. Кожний рух узгоджений із тернарним відношенням $Mizh$, тобто для будь-яких трьох різних точок A, B, C площини π і для будь-якої колінеації $f : \pi \rightarrow \pi$

$$(A, B, C) \in Mizh \Leftrightarrow (f(A), f(B), f(C)) \in Mizh..$$

Аксіома R-3. Рухи утворюють групу, тобто тотожне відображення площини в себе є рухом, обернене відображення до руху є рухом, і добуток двох рухів є рухом.

Аксіома R-4. Нехай h означає промінь, що виходить з точки A , і f — рух площини такий, що $f(A) = A$, і $B \in h \Rightarrow f(B) \in h$.
Тоді

$$\forall B \in h \ f(B) = B.$$

Аксіома R-5. Для будь-яких двох різних точок A, B існує рух f , який ці точки міняє місцями, тобто

$$f(A) = B, \quad f(B) = A.$$

Аксіома R-6. Для будь-яких двох різних променів h, l , що виходять із однієї точки A , існує рух f , який ці промені міняє місцями, тобто

$$f(A) = A, \quad \forall B \in h \ f(B) \in l, \quad \forall C \in l \ f(C) \in h.$$

Аксіома R-7. Нехай в площині π є два промені — h , що виходить з точки A , дповнювальним до якого є $\bar{h}$, та l , що виходить з точки B , дповнювальним до якого є $\bar{l}$, і дві півплощини — півплощина α , що визначається прямою $h \cup \{A\} \cup \bar{h}$, і β , що визначається прямою $l \cup \{B\} \cup \bar{l}$. Тоді існує і до того ж єдиний рух $f : \pi \rightarrow \pi$ такий, що

$$f(A) = B;$$

$$f(h) = l, \text{ тобто } C \in h \Rightarrow f(C) \in l;$$

$$f(\alpha) = \beta, \text{ тобто } C \in \alpha \Rightarrow f(C) \in \beta.$$

Безпосереднім наслідком аксіоми R-7 є

Теорема 2.1 *Тотожне відображення і тільки воно є тим рухом, що лишає промінь (як ціле) і одну із заданих ним півплощин (як ціле) на місці.*

Теорема 2.2 *Нехай h промінь, що виходить із точки O , π_1, π_2 — півплощини, на які ділить площину пряма $a = h \cup \{O\} \cup \bar{h}$, f — такий рух площини, що*

$$f(O) = O, \quad f(h) = \pi_1, \quad f(\pi_1) = \pi_2.$$

Тоді $f(\pi_2) = \pi_1$, і рух f є інволютивним, тобто його квадрат є тотожним відображенням $id - f^2 = id$.

Доведення. Нехай h, O, a, π_1, π_2, f такі як в умові теореми. і $A \in \pi_1, B \in \pi_2$ деякі точки. Тоді відрізок $[A, B]$ перетинається із прямою a . Оскільки рухи зберігають відношення *Mizh*, то $[f(A), f(B)]$ перетинає пряму a і $f(B) \in \pi_1$. Ми довели, що $f(\pi_2) = \pi_1$.

Тепер можна стверджувати, що

$$f^2(O) = O, \quad f^2(h) = h, \quad f^2(\pi_1) = \pi_1.$$

і теорема 2.1 забезпечує рівність $f^2 = \text{id}$.

■

Говорячи “як ціле” маємо на увазі, що всі точки променя переходять в точки цього ж променя, а всі точки півплощини переходять в точки цієї ж півплощини.

Звернемо увагу, що знаючи певну колінеацію ми не можемо сказати, є вона рухом чи ні — аксіома R-3 вимагає одномоментне знання всіх колінеацій, які є рухами. Із сказаного випливає, що не виключається ситуація, коли площина має кілька груп рухів. Щоб уявити собі таку ситуацію, розглянемо звичайну “шкільну” площину із системою координат OXY . Рухами назовемо ті колінеції, які зберігають відстань між точками. Відстань d між точками $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ можна підраховувати за формулою

$$d = (x_2 - x_1)^2 + (y_1 - y_2)^2,$$

а можна підраховувати за формулою

$$d = (x_2 - x_1)^2 + 2(y_1 - y_2)^2,$$

І з’являють рухи першої групи, які не є рухами другої групи і навпаки.

Ще одне, звернемо увагу, що при побудові групи рухів не використовується аксіома паралельності, в той час як при побудові гомотетій ця аксіома використовувалася.

2.2 Фігури та їх конгруентність

Далі вважаємо, що в площині існує вибрана група рухів, і вона не змінюється.

Визначення 2.1 Підмножини множини точок площини будемо називати *фігурами*.

Найчастіше нас будуть цікавити такі фігури як пряма, півпряма, відрізок, півплощина. Рухи дозволяють на множині фігур ввести бінарне відношення конгруентності.

Визначення 2.2 *Фігура F_1 площини π конгруентна фігурі F_2 тоді і тільки тоді, коли існує рух, який бієктивно переводить всі точки F_1 в точки F_2 . Якщо фігура F_1 конгруентна фігурі F_2 , то пишемо*

$$F_1 \cong F_2.$$

Теорема 2.3 *Введене за допомогою групи рухів бінарне відношення конгруентності є відношенням еквівалентності, тобто воно рефлексивне, симетричне і транзитивне.*

Доведення. Рефлексивність випливає із існування тотожного руху. Симетричність випливає із існування руху, оберненого до даного. Транзитивність випливає із того, що добуток рухів знову є рухом.

■

Теорема 2.4 *Для будь-яких двох точок A, B рух, який міняє ці точки місцями, переводить відрізок $[A, B]$ в себе. Для будь-яких двох променів h, l рух, який міняє ці промені місцями, переводить кут (h, l) в себе.*

Доведення. Твердження теореми випливає із аксіоми R-5 та R-6 і того, що рухи зберігають відношення $Mizh$.

■

Теорема 2.5 *Нехай e відрізок $[A, B]$ і промінь h , що виходить із точки O . Тоді на промені h існує і до того ж єдина точка P така, що*

$$[O, P] \cong [A, B].$$

Доведення. Існування потрібної точки P забезпечує аксіома R-7.

Єдиність такої точки доводимо методом від протилежного. Припустимо, що є дві такі точки, тобто існують дві точки P_1, P_2 і два рухи f, g такі, що

$$\{O, P_1\} = \{f(A), f(B)\}, \quad \{O, P_2\} = \{g(A), g(B)\}.$$

Домноживши за необхідності рухи f, g на рухи, що міняють місцями дві точки, ми можемо забезпечити

$$O = f(A), \quad P_1 = f(B), \quad O = g(A), \quad P_2 = g(B).$$

Для так вибраних рухів маємо

$$fg^{-1}(O) = O, \quad fg^{-1}(P_2) = P_1.$$

Із того, що рухи зберігають відношення Мізх, випливає, що

$$fg^{-1}(h) = h.$$

Тепер рівність $P_2 = P_1$ випливає із аксіоми R-4.

■

Теорема 2.6 *Нехай (h, k) кут, l промінь, що виходить із точки O і має доповнювальний промінь $\bar{l}$, α одна із півплощин, що визначаються прямою $l \cup \{O\} \cup \bar{l}$. Тоді існує і до того ж єдиний промінь m , що виходить із точки O , такий, що*

$$(h, k) = (l, m).$$

Доведення теорем використовує теорему 2.1 і значною мірою повторює доведення попередньої теореми.

Теорема 2.7 *Нехай $[A, B], [A', B']$ два відрізки і C, C' внутрішні точки цих відрізків. Тоді якщо*

$$[A, B] \cong [A', B'], \quad [A, C] \cong [A', C'], \quad (10)$$

то $[B, C] \cong [B', C']$. Також, коли

$$[A, C] \cong [A', C'], \quad [B, C] \cong [B', C'], \quad (11)$$

то $[A, B] \cong [A', B']$.

Доведення. Нехай точки A, B, C, A', B', C' такі як в умові теореми і виконуються рівності (10). Позначимо через l промінь, який виходить із A і на якому лежить B , а через l' промінь, який виходить із A' і на якому лежить B' ,

$$\begin{array}{ccc} \circ A & \text{---} \circ C \text{---} \circ B & \xrightarrow{l} \\ \circ A' & \text{---} \circ C' \text{---} \circ B' & \xrightarrow{l'} \end{array}$$

Використовуючи означення конгруентності відрізків і, за необхідності, терему 2.4 знаходимо рух f такий, що

$$f(A) = A', \quad f(B) = B', \quad f(C) = C'', \quad f(l) = l'$$

для деякої точки C'' . і рух g , для якого

$$g(A) = A', \quad g(C) = C', \quad g(l) = l'$$

Для так вибраних рухів буде

$$fg^{-1}(A') = A, \quad fg^{-1}(C') = C, \quad fg^{-1}(l') = l.$$

Аксіома R-4 забезпечує рівність $C'' = C'$, звідки випливає, що $[B, C] \cong [B', C']$.

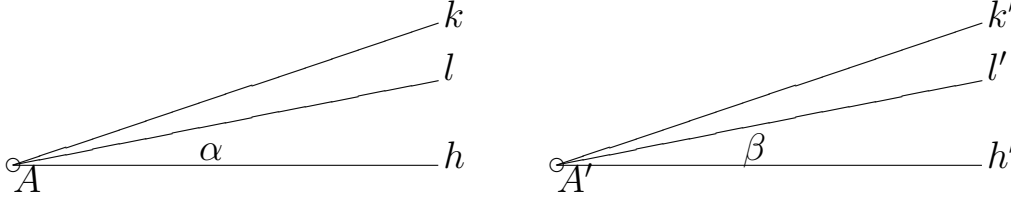
Доведення першої частини теореми завершена. Доведення другої частини проводиться подібним чином.

■

Теорема 2.8 Нехай (h, k) і (h', k') два кути і l, l' промені цих кутів — $l \in (h, k)$, $l' \in (h', k')$. Тоді

- якщо $(h, k) \cong (h', k')$ і $(h, l) \cong (h', l')$, то $(l, k) \cong (l', k')$;
- якщо $(h, l) \cong (h', l')$ і $(l, k) \cong (l', k')$, то $(h, k) \cong (h', k')$

Доведення. Нехай h, k, l промені, що виходять із точки A як в умові теореми.



Припустимо, що $(h, k) \cong (h', k')$ і $(h, l) \cong (h', l')$, і відповідно, промені k, l лежать в одній півплощині (позначимо її α) і $h \cup \{A\} \cup \bar{h}$, а через β позначимо ту півплощину відносно прямої $h' \cup \{A'\} \cup \bar{h}'$, в якій лежать промені k, l . Оскільки існує єдиний рух f , що переводить промінь h в промінь h' і півплощину α в півплощину β , то $f(k) = k', f(l) = l'$ і $(l, k) \cong (l', k')$.

Подібним чиним обґрунтовується друга половина теореми.

■

2.3 Прямі кути, суміжні кути, вертикальні кути

Визначення 2.3 Два кути називаються суміжними якщо вони мають одну і ту ж вершину, мають спільну сторону (промінь) а дві другі сторони взаємно доповнювальні. (див рис. 13)

Два кути називаються вертикальними, якщо вони мають одну і ту ж вершину, а сторони одного кута є доповнювальними променями до сторін другого кута (див рис. 13).

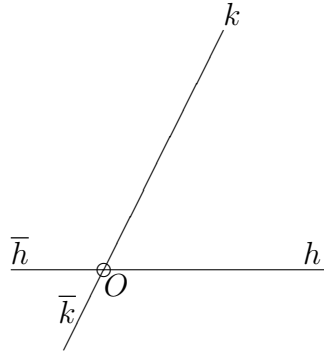


Рис. 13: Кути (h, k) і $(h, \bar{k})$ суміжні; також кути $(\bar{h}, k)$ і (h, k) суміжні. Кути $(\bar{h}, \bar{k})$ і (h, k) вертикальні.

Теорема 2.9 *Кути, що суміжні до конгруентних кутів, конгруентні.*

Доведення. Нехай (h, k) і (h', k') два конгруентні кути. Позначимо сторони кутів так, щоб суміжні кути, рівність яких потрібно довести, були $(h, \bar{k})$, $(h', \bar{k}')$. Згідно з теоремою

Використовуюч означення конгруентності двох кутів і, за необхідності, теорему 2.4 знаходимо рух f , для якого

$$f(h) = h', \quad f(k) = k'.$$

Оскільки рух зберігає відношення $Mizh$, то

$$f(\bar{h}) = \bar{h}', \quad f(\bar{k}) = \bar{k}'.$$

Одержані рівності доводять $(h, \bar{k}) \cong (h', \bar{k}')$

■

Теорема 2.10 *Вертикальні кути конгруентні.*

Доведення. Ця теорема є безпосереднім наслідком теореми 2.9, оскільки вертикальні кути є суміжними до одного і того ж кута, а кожен кут сам собі конгруентний.

■

Визначення 2.4 *Кут, що дорівнює своєму суміжному, називається прямим.*

Теорема 2.11 *Прямі кути існують*

Доведення. Нехай h промінь, що виходить із точки O , π_1, π_2 — півплощини, на які ділить площину пряма $a = h \cup \{O\} \cup \bar{h}$, f — такий рух площини, що

$$f(O) = O, \quad f(h) = h, \quad f(\pi_1) = \pi_2.$$

Вибираємо точку $A \in \pi_1$ і позначаємо $B = f(A)$, $C = [A, B] \cap a$. Далі позначаємо $k, \bar{k}$ промені, що виходять із точки C і лежать на прямій a , а через l той промінь на прямій $A + B$, на якому лежить A . Відповідно, той промінь прямої $A + B$, на якому лежить B буде $\bar{l}$.

Згідно з теоремою 2.2 $f(B) = A$ і

$$f(k) = k, \quad f(l) = \bar{l},$$

тобто суміжні кути $(k, l), (k, \bar{l})$ суміжні і конгруентні, отже, прямі.

■

Теорема 2.12 *Будь-які два прямі кути конгруентні*

Доведення. Нехай $(h, k), (h', k')$ два прямі кути з вершинами O, O' відповідно. Потібно довести, що вони конгруентні. Згідно з теоремою 2.6 ми можемо знайти кут (h, l) з вершиною в точці O , що конгруентний куту (h', k') , причому промінь l лежить в тій же півплощині відносно прямої $h \cup \{O\} \cup \bar{h}$ що і k . Отже нам потрібно довести конгруентність двох прямих кутів $(h, k), (h, l)$ із спільною вершиною O , в яких сторони k, l лежать в одній півплощині π_1 відносно прямої $h \cup \{O\} \cup \bar{h}$.

У випадку, коли $k = l$, теорема очевидна. Далі будемо вважати, що $k \neq l$. Теорема 1.8 дозволяє вважати, що промінь k знаходиться h і l .

За означенням прямого кута і означення конгруентності кутів існують рухи f, g такі, що

$$f(h) = \bar{h}, \quad f(k) = k, \quad f(\pi_1) = \pi_1,$$

$$g(h) = \bar{h}, \quad g(l) = l, \quad g(\pi_1) = \pi_1,$$

$$fg^{-1}(h) = h, \quad fg^{-1}(\pi_1) = \pi_1.$$

Останні рівності згідно з аксіомою R-7 забезпечуть нам $fg^{-1} = \text{id}$,

$$f = g. \tag{12}$$

Рівність (12) неможлива, оскільки образ променя k лежить між h і l , а образ $f(k)$ цього променя під дією f лежить між l і $\bar{h}$.

■

Визначення 2.5 Дві прямі називаються перпендикулярними одна до одної, якщо вони перетинаються і якісь дві півпрямі цих прямих, що виходять із точки перетину, утворюють прямий кут. Якщо пряма a перпендикулярна прямій b , то пишемо

$$a \perp b.$$

Звернемо увагу, що в точці перетину двох прямих півпрямі цих прямих утворюють чотири кути. І якщо один із цих кутів прямий, то решта три також прямі, — два як суміжні і один як вертикальний. Отже перпендикулярні прямі в точці перетину утворюють чотири прямі кути.

Визначення 2.6 Елемент групи називається інволютивним, або інволюцією, якщо він не дорівнює одиниці групи, а в квадраті дорівнює одиниці.

Теорема 2.13 Дві прямі перпендикулярні одна одній (взаємно перпендикулярні), якщо вони різні і існує інволютивний рух, який на одній із них діє як тотожне відображення, а точки другої переводить в точки цієї ж прямої.

Доведення. Припустимо, що маємо дві прямі a, b і $a \perp b$. За означенням перпендикулярності $a \neq b$, існує точка перетину A цих прямих, і промінь $h \subset a$ та промінь $k \subset b$, які виходять із точки A утворюють прямий кут. Тоді рух f , для якого $f(h) = h, f(k) = \bar{k}$ лишає точки прямої a на місці, а точки прямої b переводить в точки прямої b .

Припустимо, що маємо дві прямі $a, b, a \neq b$ і інволютивний рух f такі, що

$$x \in a \Rightarrow f(x) = x, \quad (13)$$

$$x \in b \Rightarrow f(x) \in b, \quad (14)$$

Позначимо через π_1, π_2 дві півплощини, на які ділить площину пряма a . Оскільки f не є тотожним відображенням, то пряма b не може лежати повністю в одній із півплощин π_1, π_2 і існує точка A перетину прямих a, b . Позначимо h один із променів прямої a , що виходять із точки A . Знову скориставшись тим, що f не є тотожним відображенням, запишемо

$$f(\pi_1) = \pi_2, \quad f(\pi_2) = \pi_1.$$

Для променів $k = b \cap \pi_1, \bar{k} = b \cap \pi_2$, що виходять із точки A ми можемо записати $f(k) = \bar{k}$. Отже під дією руху f кут (h, k) переходить

в суміжний кут $(h, \bar{k})$, кут (h, k) прямий, а прямі a, b перпендикулярні одна до одної.

■

Теорема 2.14 *Через кожну точку площини проходить і до того ж єдиний перпендикуляр до заданої прямої.*

Доведення. Нехай a деяка пряма, A — точка на цій прямій. h — один із променів прямої a , що виходить із точки A , (h, k) — прямий кут. і B — довільна точка площини. Потрібно довести, що через точку B можна провести пряму b , що перпендикулярна прямій a .

Якщо точка B лежить на прямій a , то можна вважати $A = B$ і потрібною прямою буде та пряма, на якій лежить промінь k ,

Якщо $B \notin a$, то беремо інволютивний рух, для якого $f(h) = h, f(k) = \bar{k}$, і потрібною прямою буде пряма $b = B + f(B)$.

■

2.4 Трикутники та їх властивості

Нижче нас буде цікавити така фігура як трикутник. Трикутник складається із трьох неколінеарних точок (вершин) і трьох відрізків, кінцями яких є ці точки (сторін). Також у трикутника є три кути — кут утворюється двома променями, що виходять із певної вершини і на яких лежать відповідно дві інші вершини. Якщо A, B, C три неколінеарні точки, то трикутник з вершинами A, B, C позначаємо $\triangle ABC$, Кут з вершиною A позначаємо $\angle A$, Може бути так, що одна точка є вершиною кількох кутів в кількох трикутниках. Щоб підкреслити, що розглядається кут $\angle A$ саме в трикутнику $\triangle ABC$, позначаємо його $\angle BAC$, Сторони $[A, B], [A, C]$ прилеглі до кута $\angle A$, а кут $\angle A$ прилеглий до сторін $[A, B], [A, C]$, сторона $[B, C]$ протилежна до цього кута.

Два трикутники конгруентні, якщо існує рух, який переводить вершини одного трикутника у вершини другого трикутника. Факт конгруентності двох трикутників $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$ позначаємо

$$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$$

Трикутник є фігурою.

Теорема 2.15 *Якщо кут і дві прилеглі сторони цього кута трикутника конгруентні відповідно куту і прилеглим сторонам другого трикутника, то ці два трикутники конгруентні.*

Доведення. Нехай $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ два трикутники; h, h' — промені, що виходять відповідно із A та A' і для яких $B \in h, B' \in h'$; k, k' — промені, що виходять відповідно із A та A' і для яких $C \in k, C' \in k'$; π, π' півплощини, що визначаються прямими $h \cup \{A\} \cup \bar{h}$, $h' \cup \{A'\} \cup \bar{h}'$, і для яких $C \in \pi, C' \in \pi'$,

Відомо, що існує рух f , для якого $f(h) = h', f(k) = k'$. Зрозуміло, $f(A) = A', f(\pi) = \pi'$. Відомо також, що існує рух g , для якого $g(A) = A', g(B) = B'$. зрозуміло, що $g(h) = h'$. Домноживши за потреби рух g на рух, що змінює півплощини, забезпечуємо виконання умови $g(\pi) = \pi'$. оскільки рух, що переводить промінь h в промінь h' і півплощину π півплощину π' єдиний, то $f = g \ f(B) = B'$.

Подібним чином перевіряється, що $f(C) = C$.

■

Визначення 2.7 Трикутник називається рівнобедреним, якщо він має дві конгруентні сторони. Конгруентні сторони рівнобедреного трикутника називають бічними сторонами, а третя сторона — основа цього рівнобедреного трикутника.

Теорема 2.16 В рівнобедреному трикутнику кути при основі рівні.

Доведення. Нехай $\triangle ABC$ рівнобедрений трикутник з вершиною C і бічними сторонами $[A, C], [B, C]$. Перепозначимо вершини

$$A = B', \quad B = A', \quad C = C'.$$

Оскільки $\angle C$ і $\angle C'$ це один і той же кут, і $[A, C] \cong [A', C']$, $[B, C] \cong [B', C']$ як бічні сторони рівнобедреного трикутника то можна застосувати попередню теорему та її доведення, де доведено, що існує рух f такий, що $f(A) = A', f(B) = B', f(C) = C'$. Існування такого руху доводить, що $\angle A \cong \angle A' = \angle B$.

■

Теорема 2.17 Нехай є два трикутники, де одна сторона першого трикутника конгруентна стороні другого трикутника, і прилеглі до цієї сторони кути першого трикутника конгруентні відповідним кутам другого трикутника, Тоді ці трикутники конгруентні.

Доведення. Позначимо трикутники, що задовольняють умові теореми $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$. і нехай

$$[A, B] \cong [A', B'], \quad \angle A \cong \angle A', \quad \angle B \cong \angle B'.$$

Потрібно побудувати рух f , для якого $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$.

Позначимо через π півплощину, яку визначає пряма $A + B$ і в якій лежить точка C , а через π' півплощину, яку визначає пряма $A' + B'$ і в якій лежить точка C' . Нехай f рух, який переводить точку A в точку A' , пряму $A + B$ в пряму $A' + B'$ і півплощину π в півплощину π' . Такий рух єдиний.

Позначимо h промінь на прямій $A + B$, який виходить із A і на якому лежить B . а через h' промінь на прямій $A' + B'$, який виходить із A' і на якому лежить B' . Оскільки відрізки $[A, B]$ і $[A', B']$ конгруентні, то можна знайти рух f_1 для якого

$$f_1(A) = A', \quad f_1(B) = B', \quad f_1(h) = h', \quad f_1(\pi) = \pi'.$$

І оскільки такий рух єдиний, то $f = f_1$ і $f(B) = B'$.

Позначимо k промінь на прямій $A + C$, який виходить із A і на якому лежить C . а через k' промінь на прямій $A' + C'$, який виходить із A' і на якому лежить C' . Оскільки кути (h, k) і (h', k') конгруентні, то можна знайти рух f_2 для якого

$$f_2(A) = A', \quad f_2(k) = k', \quad f_2(h) = h', \quad f_2(\pi) = \pi'.$$

І оскільки такий рух єдиний, то $f = f_1$ і $f(k) = k'$.

Подібним чином позначаємо через l промінь, який виходить із B і на якому лежить C . а через l' позначаємо промінь на прямій $B' + C'$, який виходить із B' і на якому лежить C' . Далі як і вище переконуємося що $f(l) = l'$.

Точка C лежить на перетині променів k і l , отже її образ лежить на перетині променів k' і l' . Звідси випливає, що $f(C) = C'$.

Теорема доведена

■

Теорема 2.18 *Трикутники з відповідно конгруентними сторонами конгруентні.*

Доведення. Нехай $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ два трикутники і нехай

$$[A, B] \cong [A', B'], \quad [A, C] \cong [A', C'], \quad [B, C] \cong [B', C'].$$

Потрібно побудувати рух f , для якого $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$.

Позначимо через π півплощину, яку визначає пряма $A + B$ і в якій лежить точка C , а через ρ_1, ρ_2 півплощини, які визначаються прямою $A' + B'$ і для яких $C' \in \rho_1$, $C' \notin \rho_2$. Нехай f рух, який переводить точку A в точку A' , пряму $A + B$ в пряму $A' + B'$ і півплощину π в півплощину ρ_2 . Такий рух переводить B в B' , а точку C в якусь точку C'' .

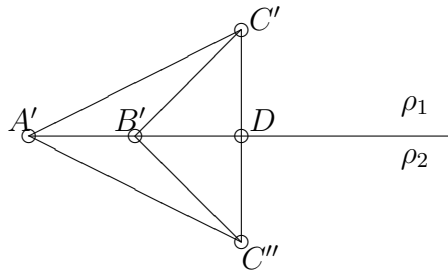
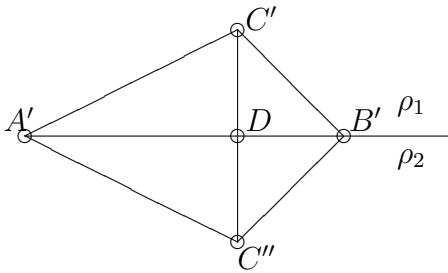


Рис. 14: Конгруентність двох трикутників за трьома сторонами - 1

Рис. 15: Конгруентність двох трикутників за трьома сторонами - 2

Будуємо відрізок $[C', C'']$, який перетинає пряму $A' + B'$ в точці D . Для точки D є три можливості — або вона є одним із кінців відрізка $[A', B']$, або вона є внутрішньою точкою відрізка $[A'B']$ (див. рис. 14), або вона не є точкою відрізка $[A'B']$ (див. рис. 15).

Розглянемо перший випадок, нехай $D = A'$. Тоді трикутник $\triangle C'C''B'$ рівнобедрений, і його кутами при основі є $\angle C'$, $\angle C''$. В такому випадку за теоремою 2.15 трикутники $\triangle A'C'B'$ і $\triangle A'C''B'$ конгруентні, отже конгруентними є також трикутники $\triangle A'C'B'$ і $\triangle ACB$.

В другому і третьому випадках розглядаємо рівнобедрені трикутники $\triangle A'C'C'$, $\triangle C'C''B'$ і ствердуємо конгруентність кутів при їх основах

$$\angle A'C'C'' \cong \angle A'C'C', \quad \angle B'C'C'' \cong \angle B'C'C'$$

В будь-якому разі одна з точок A', B', D лежить між двома іншими і можна застосувати теорему 2.8, яка забезпечує конгруентність

$$\angle A'C'B' \cong \angle A'B'C''.$$

І в наших випадках за теоремою 2.15 трикутники $\triangle A'C'B'$ і $\triangle A'C''B'$ конгруентні, отже конгруентними є також трикутники $\triangle A'C'B'$ і $\triangle ACB$

Теорема доведена.

■

2.5 Порівняння, додавання та віднімання відрізків та кутів.

2.5.1 Факторизація

Відношення конгруентності є відношенням еквівалентності і на множині відрізків і на множині кутів, отже на цих множинах можна утворити фактормножину по відношенню конгруентності. Нагадаємо, що елементами фактормножини $M/\sim$ множини M по відношенню еквівалентності $\sim$ є класи еквівалентності $\bar{a}$ елементів $a \in M$, де

$$\bar{a} = \{b \in M | b \sim a\}.$$

Іншими словами, всі відрізки, що конгруентні даному відрізку, і всі кути, що конгруентні даному куту, є факторкласами множини відрізків чи фактормножину множини кутів по відношенню конгруентності. Подібним чином, коли взяти множину $\mathbb{Z}$ цілих чисел і відношення еквівалентності $\sim$: для $m, n \in \mathbb{Z}$

$$m \sim n \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} (m - n = 2k),$$

тоді фактормножина $\mathbb{Z}/\sim = \{\bar{0}, \bar{1}\}$, де

$$\bar{0} = \{0, \pm 2, \pm 4, \dots, \pm 2n, \dots\},$$

$$\bar{1} = \{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm 2n + 1, \dots\},$$

Існує канонічна (природна) проекція, канонічне сюр'єктивне відображення із множини у фактормножину, що ставить у відповідність кожному елементу його клас еквівалентності. Так елементу $7 \in \mathbb{Z}$ канонічна проекція ставить у відповідність $\bar{7} = \bar{1} \in \mathbb{Z}/\sim$. Мовна практика дозволяє для елемента множини і для відповідного (образа при канонічному проектуванні) елемента фактормножини використовувати одне і те ж позначення. Наприклад, можна писати $\mathbb{Z}/\sim = \{0, 1\}$. а клас векторів, що мають один і той же напрям і одну і ту ж довжину також називати вектором.

По можливості будемо уникати такої розкутості в термінології, однак не будемо занадто правовірними, особливо коли пуританство призводить до корчакумакуватих мовних конструкцій.

2.5.2 Порівняння відрізків

Визначення 2.8 Нехай B, C дві різні точки променя h , що виходить із точки A . Тоді у випадку, коли точка B лежить між точками A і C , кажемо, що відрізок $[A, B]$ менше відрізка $[A, C]$ і пишемо $[A, B] < [A, C]$.

Зрозуміло, що введене бінарне відношення не є відношенням порядку, тому що воно не транзитивне. На рис. 2.5.2 зображена три відрізки $[A, B]$, $[A, C]$, $[B, D]$, де $[A, B]$ менше відрізка $[A, C]$, відрізок $[B, D]$ менше відрізка $[A, B]$, але відрізок $[B, D]$ не менше відрізка $[A, C]$,

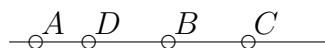


Рис. 16: Відрізок $[A, B]$ менше відрізка $[A, C]$, відрізок $[B, D]$ менше відрізка $[A, B]$, але відрізок $[B, D]$ не менше відрізка $[A, C]$, оскільки не мають спільного кінця.

Нижче клас відрізків, що конгруентні відрізку $[A, B]$ будемо позначати $\overline{[A, B]}$

Визначення 2.9 На множині класів конгруентних відрізків введемо бінарне відношення $\prec$ правилом; для двох класів u, v конгруентних відрізків введемо $u \prec v$ тоді і тільки тоді, коли для деяких точок A, B, C, D $u = [A, B]$, $v = [C, D]$ і $[A, B] < [C, D]$. Обернене відношення до $\prec$ позначаємо $>$, а обернене відношення до $\prec$ позначаємо $\succ$. Знак $\prec$ будемо називати “менше”

Теорема 2.19 Відношення “менше” на множині класів конгруентних відрізків є відношенням лінійного порядку

Доведення. Перевіряємо антисиметричність введеного відношення. Потрібно довести, що для двох класів конгруентних відрізків u, v неможливо, щоб виконувалися дві співвідношення — $u \prec v$ і $v \prec u$. Припустимо, що для деяких класів u, v $u \prec v$ і $v \prec u$. Це означає, що в цих класах є відрізки $[A_1, B_1], [A_2, B_2] \in u$, $[C_1, D_1], [C_2, D_2] \in v$ такі, що $[A_1, B_1] < [C_1, D_1]$, $[A_2, B_2] > [C_2, D_2]$. Будемо вважати, що $A_1 = C_1, A_2 = C_2$ (див рис. 2.5.2)



Рис. 17: Відношення “менше” антисиметричне

і $(C_1, B_1, D_1) \in Mizh$, $(A_2, D_2, B_2) \in Mizh$.

Позначимо h промінь, що виходить із точки A_1 і на якому лежать точки B_1, D_1 , а k означає промінь, що виходить із точки A_2 і на якому лежать точки B_2, D_2 . Також позначимо α одну із півплощин, на які ділиться площина прямою $h \cup \{A_1\} \cup \bar{h}$, і позначимо β одну із півплощин, на які ділиться площина прямою $k \cup \{A_2\} \cup \bar{k}$.

Оскільки $[A_1, B_1] \cong [A_2, B_2]$, то існує рух f_1 такий, що

$$f_1(h) = k, \quad f_1(\alpha) = \beta, f_1(B_1) = B_2;$$

оскільки $[A_1, B_1] \cong [A_2, B_2]$, то існує рух f_2 такий, що

$$f_2(h) = k, \quad f_2(\alpha) = \beta, f_2(D_1) = D_2;$$

оскільки існує єдиний рух f , для якого

$$f(h) = k, \quad f(\alpha) = \beta,$$

то $f_1 = f_2 = f$ і

$$f(h) = k, f(A_1) = A_2, f(B_1) = B_2, f(D_1) = D_2$$

Рухи зберігають відношення $Mizh$, тому

$$(C_1, B_1, D_1) \in Mizh \Rightarrow (f(C_1), f(B_1), f(D_1)) = (C_2, B_2, D_2) = (A_2, B_2, D_2) \in Mizh,$$

що суперечить припущенню $(A_2, D_2, B_2) \in Mizh$.

Доведемо транзитивність відношення $\prec$. Нехай u, v, w — три класи конгруентних відрізків, $u \prec v, v \prec w$ і $[A_1, B_1], [A_1, B_2]$ такі, що

$$[A_1, B_1] \in u, \quad [A_1, B_2] \in v, \quad (A_1, B_1, B_2) \in Mizh,$$

а $[A_2, C_1], [A_2, C_2]$ такі, що

$$[A_2, C_1] \in v, \quad [A_2, C_2] \in w, \quad (A_2, C_1, C_2) \in Mizh,$$

Розглядаємо промінь h , що виходить із точки A_1 і на якому лежить точка B_2 , позначаємо α одну із площин, на які розділяє площину пряма $h \cup \bar{h}$. Також розглядаємо промінь k , що виходить із точки A_2 і на якому лежить точка C_1 , позначаємо β одну із площин, на які розділяє площину пряма $k \cup \bar{k}$. Позначаємо f той рух, що переводить промінь k в промінь h і півплощину β в півплощину α . Із того, що $[A_1, B_2] \in v, [A_2, C_1] \in v$, тобто $[A_1, B_2] \cong [A_2, C_1]$, випливає, що $f(C_1) = B_2, [A_1, f(C_2)] \in w$. Ми маємо

$$(A_1, B_1, B_2) \in Mizh, \quad (f(A_2), f(C_1), f(C_2)) = (A_1, B_2, f(C_1)) \in Mizh,$$

що дозволяє застосувати теорему 1.3 (точніше, лему 1.2 і записати $(A_1, B_1, f(C_1)) \in Mizh$, і $[A_1, B_1] < [A_1, f(C_2)], u \prec w$.

Ми довели, що введене відношення $\prec$ є відношенням лінійного порядку. Лишилося довести, що введене відношення є відношенням лінійного порядку, тобто що всі класи конгруентних відрізків порівнюювані. Для доведення вибираємо будь-які два різні класи u, v конгруентних відрізків. Вибираємо в цих класах по відрізка: $[A, B] \in u, [C, D] \in v$, вибираємо рух f що переводить промінь з початком в C і на якому лежить D в промінь з початком в A , на якому лежить B . оскільки можливі лише два випадки, або $(A = f(C), f(D), B) \in Mizh$, або $(A = f(C), B, f(D)) \in Mizh$, відповідно, або $u \prec v$ або $v \prec u$.

Теорема доведена.

■

Порівняння кутів

З кутами діємо так же, як із відрізками.

Визначення 2.10 Нехай h, k, l три промені, що виходять із однієї точки, і промінь k розташований між променями h і l . тоді кажемо, що кути $(h, k), (k, l)$ менші кута (h, l) і пишемо

$$(h, k) < (h, l), \quad (k, l) < (h, l).$$

Введене відношення не є відношенням порядку, тому що воно не транзитивне, але воно антисиметричне.

Визначення 2.11 На множині класів конгруентних кутів введемо бінарне відношення $\prec$ правилом; для двох класів u, v конгруентних кутів введемо $u \prec v$ тоді і тільки тоді, коли для деяких променів h, k, l, t $u = (h, k)$, $v = (l, t)$ і $(h, k) < (l, t)$. Обернене відношення до $<$ позначаємо $>$, а обернене відношення до $\prec$ позначаємо $\succ$. Знак $\prec$ будемо називати “менше”

Теорема 2.20 Відношення “менше” на множині класів конгруентних кутів є відношенням лінійного порядку

Доведення теореми подібне до доведення відповідної теореми для відрізків.

Додавання відрізків та кутів.

Визначення 2.12 Суму $w = u + v$ двох класів u, v конгруентних відрізків визначаємо наступним чином. Вибираємо точку O і два промені $h, \bar{h}$, що виходять із точки O , на промені h вибираємо точку A , а на промені $\overline{h}$ вибираємо точку B так, що $[OA] \in u, [OB] \in v$. Тоді w є тим класом, який містить відрізок $[A, B]$.

Стандартна перевірка показує, що додавання класів конгруентних відрізків скрізь визначне (додавати можна будь-які класи), додавання комутативне та асоціативне.

Подібним чином можна визначити додавання кутів та породене ним додавання класів конгруентних кутів.

2.6 Додавання та віднімання кутів та відрізків

Визначення 2.13 *Нехай e три промені a, b, c , що виходять із однієї точки O , причому промінь b знаходиться між променями a та c . Тоді $(a, c) = (a, b) + (b, c)$. тобто кут (a, c) є сумою кутів (a, b) і (b, c) .*

Для класу u конгруентних відрізків і для $n = 1, 2, 3, \dots$ запис $n \cdot u$ означає суму n доданків, кожен із яких дорівнює u

Додавання кутів і додавання класів конгруентних кутів є частковими операціями, Наприклад, сума двох прямих кутів не існує, оскільки ми не ввели поняття розгорнутого кута.

Для потреб пропонованого курсу не потрібні нульові відрізки та нульові кути, не потрібні розгорнуті та повні кути, не потрібні додатні та від’ємні кути. Нам потрібні дослідження аксіом і побудова моделей.

2.7 Ділення відрізків і кутів навпіл

Визначення 2.14 *Точка O називається серединою відрізка $[A, B]$, якщо $[A, O] \cong [O, B]$.*

Теорема 2.21 *Кожен відрізок має середину. Ця середина єдина і є внутрішньою точкою відрізка.*

Доведення. Нехай $[A, B]$ відрізок, точка C не належить прямій $A + B$. α — та півплощина відносно прямої $A + B$ в якій лежить точка C . дріга півплощина відносно прямої $A + B$. Позначимо через h, k промені, що виходять із точки B , $A \in h$, $k \in \beta$. Промінь k проведений так, щоб

$$\angle CAB \cong (h, k).$$

Будуємо на промені k точку D так, щоб $[A, C] \cong [B, D]$ (див. рис. 18). Позначаємо буквою O точку перетину прямої $C + D$ з прямою $A + B$.

За теоремою 2.15

$$[A, C] \cong [B, D], [A, B] \cong [B, A], \angle CAB \cong (h, k) \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle ABD,$$

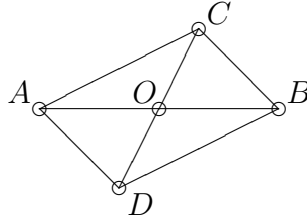


Рис. 18: Побудова середини відрізка

Вибираємо рух f , для якого

$$f(\alpha) = \beta, f(\beta) = \alpha, f(A) = B, f(B) = A.$$

цей рух переведе трикутник $\triangle ABC$ в трикутник $\triangle ABD$. Тому $f(C) = D, f(D) = A$. Оскільки $ff(A + B) = A + B, f(C + D) = C + D$, то $f(O) = O$. Звідси випливає, що $[A, O] \cong [O, B]$, і існування середини відрізка доведено.

Єдиність середини відрізка випливає з єдиності руху, який переводить півплощину α в себе, а точки A, B міняє місцями.

Припущення, що обидві точки A, B лежать на прямій $A + B$ по одну сторону від O , приводить до рівності $A = B$. Отже O внутрішня точка відрізка $[A, B]$.

Теорема доведена.

■

Якщо O середина відрізка $[AB]$, і u клас відрізків, що конгруентні $[A, B]$, запис $\frac{1}{2}u$ означає клас відрізків, що конгруентні відрізку $[AO]$.

Подібно до середини відрізка вводиться поняття бісектиси кута, формулюється і доводиться теорема про існування і єдиність бісектриси кута.

2.8 Аксиома неперервності

Аксиома неперервності. Якщо точки деякої прямої розбиті на дві непорожні підмножини $M, N \subseteq a$ так, що

$$a = M \cup N, \quad M \cap N = \emptyset, \quad (15)$$

і жодна точка однієї множини не лежить між точками другої множини, то існує промінь $h \subset a$ на прямій a , що виходить з деякої точки $\in A$, такий, що

$$h \subseteq M, \quad \bar{h} \subseteq N.$$

Теорема 2.22 *Нехай є така нескінченна послідовність $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ точок прямої a , що для $i = 0, 1, 2, \dots$ $(A_i, A_{i+1}, A_{i+2}) \in Mizh$, причому $[A_i, A_{i+1}] = [A_0, A_1]$ для $i = 0, 1, 2, \dots$. Тоді для будь-якої точки $B \in a$ знайдеться номер $i = 0, 1, 2, \dots$ такий, що $(B, A_i, A_{i+1}) \in Mizh$.*

Доведення. Нехай $K = \{A_0, A_1, A_2, \dots, A_n, \dots\}$ така послідовність точок, як в умові теореми. Доводимо теорему методом від протилежного, отже позначаємо B — довільну точку тієї прямої, на якій лежать точки послідовності, і для якої

$$\forall i = 0, 1, 2, \dots (B, A_i, A_{i+1}) \notin Mizh.$$

. Утворимо дві множини M, N точок прямої наступним чином. До першої множини M віднесемо всі ті точки X , для яких

$$\exists i = 0, 1, 2, \dots (X, A_i, A_{i+1}) \in Mizh. \quad (16)$$

До другої множини N віднесемо всі ті точки X , для яких

$$\forall i = 0, 1, 2, \dots (X, A_i, A_{i+1}) \notin Mizh. \quad (17)$$

Побудовані множини не порожні, оскільки $B \in N, A_0, A_1, \dots \in M$. Форми записів умов (16) та (17) за законами несуперечності та виключеного третього показують, що виконуються умови (15).

Введемо на прямій відношення порядку $<$, що узгоджене з відношенням $Mizh$, так, що

$$A_0 < A_1 < A_2 < \dots$$

В цих позначеннях умова (17) може бути переписана у вигляді

$$\forall i = 0, 1, 2, \dots (A_i < A_{i+1} < X). \quad (18)$$

тобто точка X більша будь-якої точки із послідовності $A_0, A_1, \dots$. Якщо тепер точка X знаходиться між двома точками Y, Z і $Y < X < Z$, то один із цих елементів Y, Z (у вибраному розташуванні Z) також більше будь-якого елемента послідовності $A_0, A_1, \dots$, відповідно $Z \in N$. Ми довели, що жоден елемент із N не лежить між двома елементами із M . Подібним чином, якщо $X \in M, X < A_i < A_{i+1}$ і точка X знаходиться між двома точками Y, Z і $Y < X < Z$, то для одного із цих елементів Y (у вибраному розташуванні Z) також $Y < A_i < A_{i+1}$ і, відповідно $Y \in M$. Ми довели, що жоден елемент із N не лежить між двома елементами із M ,

Сказане вищеозначає, що до побудованих множин M, N можна застосувати аксіому неперервності. Згідно з цією аксіомою існує промінь $h \subset a$ на прямій a , що виходить з деякої точки $\in A$, такий, що

$$h \subseteq M, \quad \bar{h} \subseteq N.$$

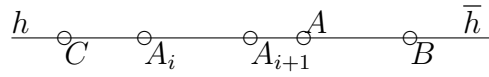


Рис. 19: Умови $[A_i, A_{i+1}] < [A_i, A] < [A, C]$ роблять неможливим $[A, C] \cong [A_i, A_{i+1}]$

Відмічаємо на промені h точку C так, щоб $[A, C] \cong [A_0, A_1]$. Зауважуємо, що $A \notin K$, оскільки протилежне — $A = A_i \in K$ приводить до того, що $A_{i+1} \in N$. Також $C \notin K$, оскільки протилежне — $C = A_i \in K$ приводить до того, що $A_{i+1} = A$.

Маємо чотири різні точки C, A_i, A_{i+1}, A (див. рис. 19), для яких $C < A_i < A_{i+1} < A$ і $[A_i, A_{i+1}] < [A, C]$, що суперечить $[A, C] \cong [A_0, A_1] \cong [A_i, A_{i+1}]$.

Одержана сцперечність доводить неможливість існування вибраної нами точки B

Теорема доведена.

Теорема 2.22 в інших аксіоматричних системах виступає як аксіома, її називають аксіомою Архімеда. До Архімеда цю аксіому формулював і використовував грек Евдокс Кнідський.

■

Щодо повноти та несуперечності введеної системи аксіом Несуперечність введеної системи аксіом зводиться до несуперечності поля дійсних чисел, оскільки моделлю для цієї систми є дійсна площина $\mathbb{R}^2$.

Система аксіом повна, оскільки в кожній моделі можна ввести систему координат з координатизуючим полем дійсних чисел. При цьому суттєво використовується аксіома паралельності. Геометрія, яка розвивається без використання аксіоми паралельності називається абсолютною геометрією.

Неможливість доведення тієї чи іншої аксіоми доводиться побудовою відповідної моделі, моделі, де та чи інша аксіома не виконується. Оскільки систему координат ми ввели з використанням гомотетій, і, відповідно, з використанням аксіоми паралельності, то моделі де не виконується та чи інша аксіома, можна будувати серед площин F^2 із доречно вибраним полем F . Такими полями можна брати поля ненульові характеристики, поле раціональних чисел, розширення поля раціональних чисел, в якому існують корені квадратні із будь-якого додатнього числа (в цьому полі два кола, у яких відстань між центрами і радіуси утворюють трикутник, перетинаються), неархімедові поля.

Література

[1] А. В. Погорелов “Лекции по основаниям геометрии” — Харьков:ХГУ, 1959.

- [2] А.Д. Александров “Основания геометрии” — М:Наука, 1987.
- [3] Р. Хартсхорн “Основы проективной геометрии” — Современная математика, популярная серия. — Москва:Мир, 1970 (переклад з “Foundation of projective geometry“ by Robin Hartshorn — Harvard University, Lecture notes, — New York:W.A.Benjamin, 1967)
- [4] Ф.Картеси “Введение в конечные геометрии” — М:Наука, 198. (Переклад з F.Kárteszi, “Introduction to Finite Geometries“ — Budapest:Akadémiai Kiadó, 1976)
- [5] Ф. Бахман “Построение геометрии на основе симметрии” — М:Наука, 1969 (Переклад з Friedrich Bahmann “Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff“ — Berlin:Spiegel-Verlag, 1959)
- [6] Gerard A Venema “Foundation of geometry“ — Boston:Pearson Education. 2012

Показчик

додавання	часткового порядку, 7
кутів, 34	порядку, 7
відрізків, 34	відрізок, 2, 3
елемент	нульовий, 2, 34
інволютивний, 25	середина, 34
інволюція, 25	внутрішні точки
кінці	відрізка, 3
кут	
бісектриса, 35	
нульовий, 34	
позначення, 26	
прилеглий, 26	
прямий, 23	
розгорнутий, 34	
суміжний, 22, 23	
трикутника, 26	
вертикальний, 23	
кути	
додавання, 34	
вертикальні, 22	
прямі	
перпендикулярні, 24	
сторона	
прилегла до кута, 26	
протилежна до кута, 26	
трикутника, 26	
трикутник, 26	
рівнобедрений, 27	
основа, 27	
трикутники	
конгруентні, 26	
вершина	
трикутника, 26	
відноєшння	
лінійного порядку, 7	
відношення	