Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

Г. Ч. Курінний, О. М. Невмержицька, О. О. Шугайло

ПРЯМА НА ДІЙСНІЙ ПЛОЩИНІ

Навчально-методичний посібник з аналітичної геометрії
для студентів 1-го курсу механіко-математичного факультету

Харків – 2015

Зміст

1 Пряма на афінній площині і в тривимірному просторі

Нагадаємо, що на афінній площині система координат може бути будь-якою (косоугольною) та скалярний добуток не використовується.

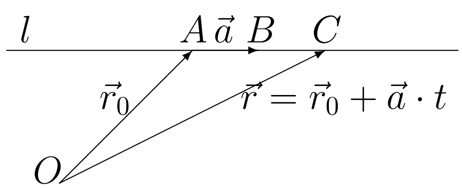
1.1 Векторне рівняння прямої в афінному просторі

Твердження 1.1 *Нехай є точка O (точка відліку), пряма l і точки A, B на цій прямій $A \neq B$. Позначимо*

$$\overrightarrow{OA} = \vec{r}_0, \qquad \overrightarrow{AB} = \vec{a},$$

Точка C з радіусом-вектором $\vec{r} = \overrightarrow{OC}$ лежить на прямій l тоді і тільки тоді, коли

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a} \cdot t, \qquad \vec{a} \neq \vec{0}. \tag{1}$$



Сформульоване твердження доводити не будемо. Будемо вважати, що воно відоме із шкільного курсу геометрії, або може бути доведене з використанням шкільного обсягу знань з аксіоматики площини і тривимірного простору. Ще одна причина відмови від доведення — при узагальненнях дійсної площини, коли шкільна аксіоматика дійсної площини відсутня, рівняння стає означенням прямої, і, таким чином, не вимагає доведення.

Визначення 1.1 *Рівняння (1) називається векторним рівнянням прямої, а вектор $\vec{a}$ в ньому називається напрямним вектором прямої.*

З використання означення векторного рівняння прямої твердження 1.1 може бути переформульоване наступним чином

Твердження 1.2 *Кожна пряма може бути задана векторним рівнянням (1), і кожне векторне рівняння (1) задає пряму.*

1.2 Параметричне рівняння прямої

Твердження 1.3 *Кожна пряма на площині може бути задана рівнянням вигляду*

$$\begin{cases} x = & x_0 + a_1 \cdot t, \\ y = & y_0 + a_2 \cdot t. \end{cases} \tag{2}$$

і кожне рівняння вигляду (2) задає пряму.

Кожна пряма у просторі може бути задана рівнянням вигляду

$$\begin{cases} x = & x_0 + a_1 \cdot t, \\ y = & y_0 + a_2 \cdot t, \\ z = & z_0 + a_3 \cdot t. \end{cases} \tag{3}$$

і кожне рівняння вигляду (3) задає пряму в тривимірному дійсному афінному просторі.

Твердження правильне тому, що рівняння (2) є рівносильним перезаписом векторного рівняння (1) у випадку, коли є афінна система координат на площині — в такому випадку рівняння (1) переписується у вигляді

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot t, \qquad \{a_1, a_2\} \neq \vec{0}. \tag{4}$$

Тепер рівняння (2) є покоординатним записом рівності (4). Так само обґрунтовується тривимірний випадок.

Визначення 1.2 *Рівняння (2) називається параметричним рівнянням прямої на площині, а (3) називається параметричним рівнянням прямої у тривимірному просторі.*

Розглянемо пряму, що проходить через точку $A(2, 5)$ і має напрямний вектор $\vec{a} = \{-1, 3\}$. Тоді $\vec{r}_0 = \{2, 5\}$ і векторним рівнянням цієї прямої буде

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot t.$$

Те ж саме рівняння можна подати в покоординатному записі, тобто у вигляді параметричного рівняння.

$$\begin{cases} x = & 2 - t, \\ y = & 5 + 3t. \end{cases}$$

Якщо пряма проходить через точку $A(2, 5, 0)$ і має напрямний вектор $\vec{a} = \{-1, 0, 3\}$. Тоді $\vec{r}_0 = \{2, 5, 0\}$ і векторним рівнянням цієї прямої буде

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot t.$$

Те ж саме рівняння можна подати в покоординатному записі, тобто у вигляді параметричного рівняння.

$$\begin{cases} x = & 2 - t, \\ y = & 5, \\ z = & 3t. \end{cases}$$

Якщо пряма задана параметричним рівнянням

$$\begin{cases} x = & -t, \\ y = & 3, \\ z = & 0, \end{cases}$$

то переписуємо його із явною вказівкою всіх складових

$$\begin{cases} x = & 0 - 1 \cdot t, \\ y = & 3 + 0 \cdot t, \\ z = & 0 + 0 \cdot t. \end{cases}$$

і тоді переписуємо у вигляді векторного рівняння:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot t.$$

1.3 Канонічне рівняння прямої ("через точку паралельно вектору")

Знаходячи t з усіх рівнянь параметричного рівняння (2) чи (3) і прирівнюючи їх, ми одержуємо рівняння тієї ж прямої у вигляді

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} \tag{5}$$

для площини і у вигляді

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3} \tag{6}$$

для тривимірного простору.

Визначення 1.3 *Рівняння (5) називається канонічним рівнянням прямої, що проходить через точку* (x_0, y_0) *в напрямку вектора* $\{a_1, a_2\}$ *на площині, а рівняння (6) називаються канонічним рівнянням прямої, що проходить через точку* (x_0, y_0, z_0) *в напрямку вектора* $\{a_1, a_2, a_3\}$ *у тривимірному просторі.*

В рівняннях (5), (6) немає нічого незвичного, коли вектори $\{a_1, a_2\}$ та $\{a_1, a_2, a_3\}$ не мають нульових координат. Якщо ж нульові координати є, то ці рівняння стають умовними — дріб з 0 у знаменнику коректний, коли і чисельник дорівнює нулю.

Наведемо приклади. Нехай є точка $A = (2, 5, 0)$. Пряма, що проходить через точку A в напрямку вектора $\vec{a} = \{2, 3, 1\}$ має звичайне канонічне рівняння:

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-0}{1}.$$

Якщо ж напрямний вектор $\vec{a}$ має нульові координати $\vec{a} = \{0, 2, 3\}$, то канонічне рівняння приймає вигляд

$$\frac{x-2}{0} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-0}{3},$$

яке за домовленістю розуміється як система

$$x = 2, \quad \frac{y-5}{2} = \frac{z-0}{3}.$$

А якщо напрямний вектор $\vec{a}$ має дві нульові координати, наприклад, $\vec{a} = \{0, 1, 0\}$, то рівняння

$$\frac{x-2}{0} = \frac{y-5}{1} = \frac{z-0}{0}.$$

за домовленістю розуміється як система

$$x = 2, \quad z = 0.$$

В даному випадку змінна y може приймати будь-яке значення. Тобто це пряма, яка проходить через точку $(2, 5, 0)$ паралельно осі Oy.

1.4 Рівняння прямої "через дві точки"

Розглянемо випадок, коли потрібно написати рівняння прямої, що проходить через дві різні задані точки $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ (на площині) чи $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ (у тривимірному просторі). В цьому випадку ми можемо вважати, що пряма проходить через точку A у напрямку вектора $\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1,\ y_2 - y_1\}$ (на площині) чи $\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1\}$ (у просторі), і переписати рівняння (5) чи (6) у вигляді

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \tag{7}$$

чи у вигляді

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \tag{8}$$

Визначення 1.4 *Рівняння (7), (8) називаютьс рівняннями прямої "через дві точки"*

Приклад. Записати рівняння сторін (прямих, на яких лежать сторони) трикутника із вершинами $A(2,-2,1)$, $B(3,3,0)$, $C(-1,7,2)$.

Скористаємося формулами (8): для сторони AB

$$\frac{x-2}{3-2}=\frac{y+2}{3+2}=\frac{z-1}{0-1}, \qquad \frac{x-2}{1}=\frac{y+2}{5}=\frac{z-1}{-1};$$

для сторони AC

$$\frac{x-2}{-1-2}=\frac{y+2}{7+2}=\frac{z-1}{2-1}, \qquad \frac{x-2}{-3}=\frac{y+2}{9}=\frac{z-1}{1};$$

для сторони BC

$$\frac{x-3}{-1-3}=\frac{y-3}{7-3}=\frac{z-0}{2-0}, \qquad \frac{x-3}{-4}=\frac{y-3}{4}=\frac{z}{2}.$$

1.5 Рівняння відрізка. Поділ відрізка у даному відношенні

За означенням множення вектора на число точка M лежит на відрізку AB тоді і тільки тоді, коли

$$\overrightarrow{AM}=t\cdot\overrightarrow{AB}, \qquad 0<t<1.$$

Записшемо цю рівність в координатному вигляді, якщо $A(x_1,y_1,z_1), B(x_2,y_2,z_2)$ і отримаємо *рівняння відрізка* AB:

$$\begin{cases} x = & x_1+t(x_2-x_1),\\ y = & y_1+t(y_2-y_1),\\ z = & z_1+t(z_2-z_1). \end{cases} \qquad 0<t<1 \tag{9}$$

Якщо $\overrightarrow{AM}=t\cdot\overrightarrow{AB}$, то відповідно, $\overrightarrow{MB}=(1-t)\cdot\overrightarrow{AB}$. Число

$$\lambda=\frac{|AM|}{|MB|}=\frac{t}{1-t}, \quad 0<\lambda<\infty$$

називають *відношенням, в якому точка M ділить відрізок AB.* Віддаючи данину традиції, говорять про поділ відрізка, але насправді мова йде про напрямлений відрізок, в якому важливим є те, яка точка є початком, а яка кінцем відрізка.

Твердження 1.4 *Точка $M(x,y,z)$ ділить відрізок AB, $A(x_1,y_1,z_1), B(x_2,y_2,z_2)$ у відношенні λ $(0<\lambda<\infty)$ тоді і тільки тоді, коли*

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \qquad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}, \qquad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}. \tag{10}$$

Доведення. Розглядати будемо лише тривимірний випадок — нехтуючи третьою координатою ми одержимо двовимірний випадок.

Для вибраного числа λ, $\quad 0<\lambda<\infty$ шукаємо число t для якого $\lambda=\dfrac{t}{1-t}$:

$$\lambda(1-t)=t, \quad t=\frac{\lambda}{1+\lambda}, \quad 0<t<1,$$

Підставляємо $t=\dfrac{\lambda}{1+\lambda}$ в (9) і робимо перетворення

$$x=x_1+\frac{\lambda}{1+\lambda}(x_2-x_1)=\frac{(\lambda+1)x_1+\lambda(x_2-x_1)}{\lambda+1}=\frac{x_1+\lambda x_2}{\lambda+1},$$

$$y=y_1+\frac{\lambda}{1+\lambda}(y_2-y_1)=\frac{(\lambda+1)y_1+\lambda(y_2-y_1)}{\lambda+1}=\frac{y_1+\lambda y_2}{\lambda+1},$$

$$z=z_1+\frac{\lambda}{1+\lambda}(z_2-z_1)=\frac{(\lambda+1)z_1+\lambda(z_2-z_1)}{\lambda+1}=\frac{z_1+\lambda z_2}{\lambda+1},$$

Твердження доведене.

■

Застосуємо цю формулу до випадку, коли відрізок ділиться навпіл — коли точка M є серединою відрізка AB. Тоді $t=0.5, \quad \lambda=1$ і ми одержуємо відому формулу для координат середини відрізка:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}, \qquad y=\frac{y_1+y_2}{2}, \qquad z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

Буває зручно говорити про поділ відрізка у відношенні $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}$, тобто точка M ділить відрізок у відношенні $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}$, якщо

$$\frac{|AM|}{|MB|}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2},$$

знову ж розрізняємо початок і кінець відрізка AB. В такому випадку підставляємо $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}$, замість λ і перетворюємо формули (10) в

$$x=\frac{\lambda_2x_1+\lambda_1x_2}{\lambda_1+\lambda_2}, \quad y=\frac{\lambda_2y_1+\lambda_1y_2}{\lambda_1+\lambda_2}, \quad z=\frac{\lambda_2z_1+\lambda_1z_2}{\lambda_1+\lambda_2}. \tag{11}$$

Формули (11) є формулами координат точки, що ділить заданий відрізок у заданому відношенні $\lambda_1:\lambda_2$ $(\lambda_1,\lambda_2>0)$.

Приклад. Знайти координати точки $M(x_0,y_0,z_0)$ перетину медіан трикутника з вершинами $A(2,4,-1), B(0,1,1), C(3,4,6)$.

Для цього спочатку знайдемо средину $N(x_1, y_1, z_1)$ відрізка AB:

$$x_1 = \frac{2+0}{2} = 1, \qquad y_1 = \frac{4+1}{2} = \frac{5}{2}, \qquad z_1 = \frac{-1+1}{2} = 0.$$

Далі скористаємося тим, що точка M ділить відрізок CN у відношенні 2:1. Тепер знайдемо координати $M(x_0, y_0, z_0)$ за формулами (11)

$$x_0 = \frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot 1}{3} = \frac{5}{3}, \qquad y_0 = \frac{1 \cdot 4 + 2 \cdot \frac{5}{2}}{3} = 3, \qquad z_0 = \frac{1 \cdot 6 + 2 \cdot 0}{3} = 2.$$

1.6 Загальне рівняння прямої на площині

Маємо параметричне рівняння прямої:

$$\begin{cases} x = & x_0 + a_1 \cdot t, \\ y = & y_0 + a_2 \cdot t. \end{cases}$$

Оскільки напрямний вектор прямої ненульовий, то із одного з рівнянь в заданні прямої на площині у параметричному вигляді можна знайти t (виразити t через x або y) і підставити в друге. Одержимо рівняння вигляду

$$ax + by + c = 0, \qquad a^2 + b^2 \neq 0. \tag{12}$$

Визначення 1.5 *Рівняння (12) називаєтсья загальним рівнянням прямої на площині.*

Ми можемо перейти до загального рівняння прямої на площині від канонічного рівняння:

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2}.$$

Розкриємо цю пропорцію у вигляді

$$a_2(x - x_0) - a_1(y - y_0) = 0.$$

та позначимо $a = a_2,\ b = -a_1$. Тоді рівняння прямої на площині запишеться у вигляді

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

або

$$ax + by + c = 0,$$

де $c = -(ax_0 + by_0)$.

Вектор з координатами $\{a, b\}$, який зв'язаний з напрямним вектором прямої $\vec{a} = \{a_1, a_2\}$ наступним чином $a = a_2, b = -a_1$ називається *вектором афінної нормали.*

Приклади.

1. Нехай пряма l задана параметричним рівнянннням

$$x = 5 - 7t, \quad y = 2 + 3t.$$

Тоді

$$t = -\frac{x-5}{7}, \quad y = 2 + 3\left(-\frac{x-5}{7}\right) = \frac{14 - 3x + 15}{7},$$

і

$$3x + 7y - 1 = 0$$

є загальним рівнянням цієї прямої.

2. Нехай пряма l задана загальним рівнянням

$$-x + 3y + 9 = 0.$$

Тоді одну змінну позначаємо через t, а другу знаходимо як функцію від t. В нашому випадку позначаємо

$$y = t, \quad x = 3t + 9,$$

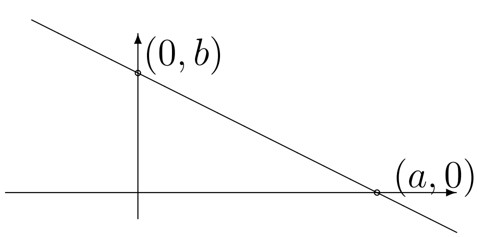
і записуємо параметричне раіняння цієї прямої

$$\begin{cases} x = 9 + 3t, \\ y = t. \end{cases}$$

Від останнього параметричного рівняння перейдемо до векторного

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot t.$$

1.7 Рівняння прямої у відрізках



Нехай пряма l відтинає на осі Ox відрізок a, а на осі Oy відрізок b, причому a, b можуть бути від'ємними, тобто точки перетину прямої l з осями координат $(a, 0)$ і $(0, b)$, тоді рівняння

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \tag{13}$$

називається рівнянням прямої у відрізках.

1.8 Взаємне розташування двох прямих на афінній площині

Пряма на площині завжди може бути задана своїм загальним рівнянням (так само як і канонічним або параметричним). У зв'язку з цим, задачу про взаємне розташування двох прямих на площині можна вирішувати з використанням найбільш зручних рівнянь. Для даної задачі використовуємо саме загальні рівняння.

Твердження 1.5 *Нехай l_1, l_2 дві прямі на площині задані рівняннями:*

$$l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$
$$l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Прямі l_1 та l_2

а) мають одну спільну точку, якщо $\dfrac{A}{A_1} \neq \dfrac{B}{B_1}$;

б) не мають жодної спільної точки, тобто паралельні, якщо $\dfrac{A}{A_1} = \dfrac{B}{B_1} \neq \dfrac{C}{C_1}$;

в) співпадають, якщо $\dfrac{A}{A_1} = \dfrac{B}{B_1} = \dfrac{C}{C_1}$.

Доведення. Прямі паралельні або збігаються тоді і тільки тоді, коли координати напрямних векторів пропорційні. Якщо $\vec{N}_1 = \{A_1, B_1\}$ і $\vec{N}_2 = \{A_2, B_2\}$ вектори афінних нормалей даних прямих, то їх направляючі вектори легко знаходяться: $\vec{a}_1 = \{B_1, -A_1\}$, $\vec{a}_2 = \{B_2, -A_2\}$. Колінеарність напрямних векторів, таким чином, еквівалентна колінеарності афінних нормалей:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2},$$

тобто $A_1 = \mu A_2, \quad B_1 = \mu B_2$.

Спільна точка двох даних прямих може бути знайдена як рішення системи

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{cases}$$

Якщо афінні нормалі колінеарні, то

$$\begin{cases} \mu A_2x + \mu B_2y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{cases}$$

Помножимо другий рядок на $(-\mu)$ і додамо до першого рядка, отримаємо: $C_1 - \mu C_2 = 0$. Отже, якщо $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = \mu$, то прямі співпадають. А якщо $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$, то прямі не мають спільних точок (паралельні і не співпадають).

Якщо афінні нормалі не колінеарні $\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$, тобто прямі не паралельні, то система рівнянь

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = -C_1, \\ A_2x + B_2y = -C_2 \end{cases}$$

має єдиний розв'язок, знайти який можна за методом Крамера.

$$x = \frac{-C_1B_2 + B_1C_2}{A_1B_2 - B_1A_2}.$$

$$y = \frac{-A_1C_2 + C_1A_2}{A_1B_2 - B_1A_2}.$$

$\blacksquare$

Вправа 1.1 *Нехай прямі l_1 та l_2 задані параметричними рівняннями:*

$$l_1 : \vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{a}t, \quad l_2 : \vec{\rho} = \vec{r}_2 + \vec{b}t.$$

Довести, що

а) $l_1 \cap l_2 = \{$единa точка$\}$ тоді і тільки тоді, коли $\vec{a} \nparallel \vec{b}$

б) $l_1 \parallel l_2$ тоді і тільки тоді, коли $\vec{a} \parallel \vec{b} \nparallel (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$;

в) $l_1 \equiv l_2$ тоді і тільки тоді, коли $\vec{a} \parallel \vec{b} \parallel (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$.

Вправа 1.2 *Нехай пряма l_1 задана векторним (або параметричним) рівнянням, а пряма l_2 – загальним рівнянням:*

$$l_1 : \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}t, \quad l_2 : Ax + By + C = 0,$$

де $\vec{r}_0 = \{x_0, y_0\}$ и $\vec{a} = \{a_1, a_2\}$. Довести, що

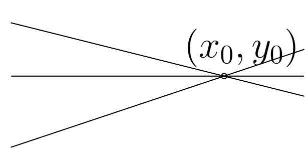
а) $l_1 \cap l_2 = \{$единa точка$\}$ тоді і тільки тоді, коли $Aa_1 + Ba_2 \neq 0$;

б) $l_1 \parallel l_2$ тоді і тільки тоді, коли $Aa_1 + Ba_2 = 0$ і $Ax_0 + By_0 + C \neq 0$;

в) $l_1 \equiv l_2$ тоді і тільки тоді, коли $Aa_1 + Ba_2 = 0$ і $Ax_0 + By_0 + C = 0$.

1.9 В'язка прямих

Визначення 1.6 *Множину всіх прямих, що проходять через задану точку, називають*
в'язкою прямих.



Кожна пряма, що має рівняння вигляду

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0. \tag{14}$$

проходить через точку з координатами (x_0, y_0). Навпаки, якщо пряма l має загальне рівняння $ax+by+c=0$ і проходить через точку (x_0, y_0), то $ax_0+by_0+c=0, \quad c=-ax_0-by_0$. Тому рівняння цієї прямої l можна записати у вигляді (14).

Сказане доводить наступне твердження.

Твердження 1.6 *Рівняння (14) є рівнянням в'язки прямих.*

2 Пряма на евклідовій площині із прямокутною декартовою системою координат.

Нижче розглядаємо випадок, коли на евклідовій площині задана прямокутна декартова система координат і, таким чином, ми можемо шукати скалярний добуток векторів, шукати довжину вектора чи відрізка, шукати кут між векторами.

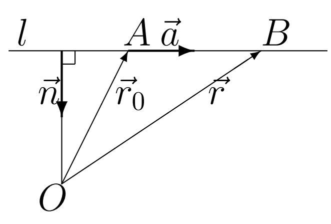
Вектор, що перпендикулярний прямій, називають *вектором нормалі* цієї прямої.

2.1 Векторне рівняння, вектор нормалі.

Твердження 2.1 *Нехай $\vec{n}$ ненульовий вектор і d — число. Тоді рівняння*

$$\langle \vec{n}, \vec{r} \rangle = d. \tag{15}$$

задає пряму, що перпеникулярна вектору $\vec{n}$, і будь-яка пряма, для якої $\vec{n}$ є вектором нормалі, може бути задана таким рівнянням (з відповідним d).



Доведення. Твердження випливає з того, що для прямої з векторним рівнянням $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}t$ і ненульового вектора $\vec{n}$ число

$$\langle \vec{n}, \vec{r} \rangle = \langle \vec{n}, \vec{r} + t\vec{a} \rangle = \langle \vec{n}, \vec{r}_0 \rangle + t \cdot \langle \vec{n}, \vec{a} \rangle$$

є сталим тоді і тільки тоді, коли $\langle \vec{n}, \vec{a} \rangle$ дорівнює нулю, тобто $\vec{n} \perp \vec{a}$.

■

Ми маємо рівняння

$$\langle \vec{n}, \vec{r} \rangle = \langle \vec{n}, \vec{r}_0 \rangle \tag{16}$$

прямої, що проходить через точку з радіусом-вектором $\vec{r}_0$ перпеникулярно вектору $\vec{n}$. Якщо вектор $\vec{n}$ має координати $\{a, b\}$, то позначивши $\langle \vec{n}, \vec{r}_0 \rangle = -c$ перетворимо рівняння (16) в загальне рівняння $ax + by + c = 0$. Таким чином ми довели наступне

Твердження 2.2 *Якщо система координат прямокутна декартова, то коефіцієнти a, b в загальному рівнянні $ax + by + c = 0$ прямої є координатами вектора нормалі цієї прямої. Рівнянням прямої, що проходить через точку (x_0, y_0) перпендикулярно вектору $\{a, b\}$ є*

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0.$$

Приклади.

1. Написати рівняння висоти трикутника ΔABC $A(1, 2), B(5, -1), C(-2, -4)$, що проходить через вершинуA.

Обчислюємо вектор $\overrightarrow{BC} = \{-7, -3\}$, який є вектором нормалі до цієї сторони, і пишемо потрібне рівняння

$$-7(x - 1) - 3(y - 2) = 0, \text{ або } \ 7x + 3y - 13 = 0.$$

2. Написати рівняння прямої, що проходить через точку $(1, 2)$ і перпендикулярна прямій l:

$$\frac{x - 7}{1} = \frac{y + 2}{-4}.$$

Напрямний вектор прямої l має координати $\{1, -4\}$ і він повинен бути вектором нормалі до потрібної прямої. Отже пишемо відповідь

$$1 \cdot (x - 1) - 4(y - 2) = 0, \text{ або } \ x - 4y + 7 = 0.$$

Дві прямі на площині перпендикулярні одна одній, коли їх вектори нормалей ортогональні, тобто прямі $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ і $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ перетинаються під прямим кутом тоді і тільки тоді, коли

$$a_1a_2 + b_1b_2 = 0.$$

2.2 Рівняння з кутовим коефіцієнтом.

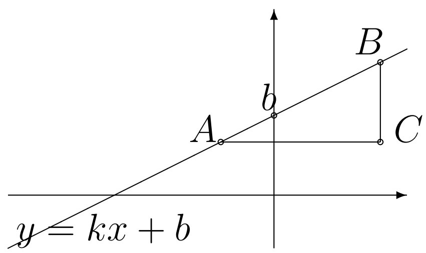
Прямі, що паралельні осі Oy, мають рівняння $x = c$. Нехай пряма не паралельна осі Oy. Тоді вона має загальне рівняння $ax+by+c = 0$ в якому $b \neq 0$. Це загальне рівняння можна розв'язати відносно y і одержати рівняння вигляду

$$y = kx + b \tag{17}$$

Визначення 2.1 *Рівняння називається рівнянням прямої, що розв'язане відносно y, або рівнянням з кутовим коефіцієнтом.*

Остання назва пов'язана з тим, що числа k і b в (17) мають геометричний зміст. Число b є ординатою точки перетину прямої із віссю Oy, а k є тангенсом кута α, утвореного прямою з додатним напрямком осі Ox. Вибираємо додатний напрямок обертання площини — звичайно його обирають так, щоб обертання на $\frac{\pi}{2}$ переводило вісь Ox у вісь Oy. Тепер можна сказати, що k є тангенсом кута, на який потрібно обертати вісь Ox в додатному напрямку до суміщення із прямою. Обертаючи у від'ємному напрямку ми одержуємо від'ємний кут.

Обгрунтуємо сказане. Нехай $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ - дві точки на прямій



і $x_2 > x_1$, $C(x_2, y_1)$. Оскільки точки $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ лежать на прямій, то

$$y_1 = kx_1 + b, \quad y_2 = kx_2 + b, \quad y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1), \quad k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Остання рівність переконує, що k є тангесом кута $\angle BAC$ в трикутнику $\triangle\ ABC$ із належним знаком.

Рівняння прямої, що проходить через точку (x_0, y_0) з кутовим коефіцієнтом k:

$$y = k(x - x_0) + y_0.$$

2.3 Взаємне розташування двох прямих на евклідовій площині. Кут між прямими.

На евклідовій площині взаємне розташування двох прямих (прямі перетинаються в єдиній точці, паралельні, або співпадають) визначається тими ж умовами, як і на афінний площині. Але на евклідовій площині ми ще маємо змогу вирахувати під яким кутом перетинаються прямі. Кут φ між прямими — це гострий кут між напрямними векторами, або між нормалями.

$$\cos\varphi = |\cos(\vec{a}_1 \widehat{\ } \vec{a}_2)| = |\cos(\vec{n}_1 \widehat{\ } \vec{n}_2)|.$$

Тобто

$$\cos\varphi = \frac{|\langle \vec{a}_1,\, \vec{a}_2 \rangle|}{|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2|} = \frac{|\langle \vec{n}_1,\, \vec{n}_2 \rangle|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}.$$

Якщо ж для однієї прямої відомий напрямний вектор, а для другої — вектор нормалі, то

$$\sin\varphi = |\cos(\vec{a}_1 \widehat{\ } \vec{n}_2)| = \frac{|\langle \vec{a}_1,\, \vec{n}_2\rangle|}{|\vec{a}_1| \cdot |\vec{n}_2|}.$$

Приклади. 1. Знайти кут між прямими $3x + 5y + 1 = 0,\ 4x + y - 2 = 0.$

Вектори нормалей цих прямих: $\vec{n}_1 = \{3, 5\},\ \vec{n}_2 = \{4, 1\}$. Отже,

$$\cos\varphi = \frac{|\langle \vec{n}_1, \vec{n}_2\rangle|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|3 \cdot 4 + 5 \cdot 1|}{\sqrt{9 + 25}\sqrt{16 + 1}} = \frac{17}{\sqrt{34}\sqrt{17}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Прямі перетинаються під кутом 45 градусів.

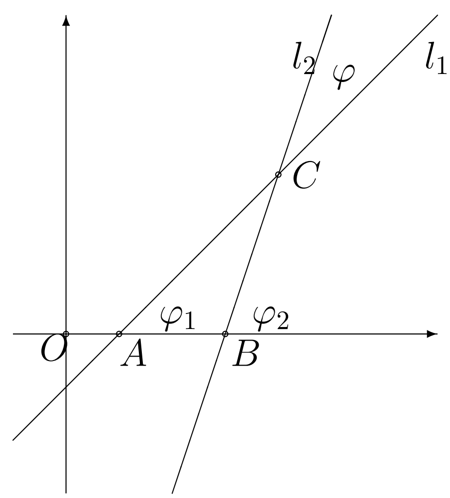
2. Знайти кут між прямими $3x + 5y + 1 = 0,\ 5x - 3y - 2 = 0.$

Ці прямі перпендикулярні одна одній, тому що $\langle \vec{n}_1, \vec{n}_2\rangle = 3\cdot(5) + 5\cdot(-3) = 0.$

Нехай на евклідовій площині задана прямокутна декартова система координат і задані дві прямі рівняннями з кутовими коефіцієнтами

$$l_1 :\ y = k_1 x + b_1,\ l_2 :\ y = k_2 x + b_2.$$

Нехай пряма l_1 перетинає вісь Ox в точці A під кутом φ_1, $k_1 = \operatorname{tg}\varphi_1$, пряма l_2 перетинає вісь Ox в точці B під кутом φ_2, $k_2 = \operatorname{tg}\varphi_2$.



Прямі l_1 та l_2 перетинаються в точці C під кутом φ. Перевірте, що $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$. Тоді

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\operatorname{tg}\varphi_2 - \operatorname{tg}\varphi_1}{1 + \operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \tag{18}$$

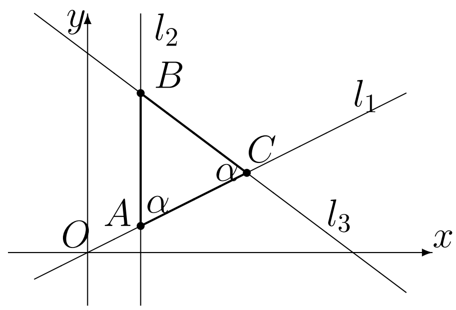
Важливо, що в даному випадку кут φ рахується від прямої l_1 до прямої l_2 проти годинникової стрілки.

Приклад. Відомі координати вершин $A(2, 1),\ C(6, 3)$ при основі рівнобедреного трикутника та тангенс кута при основі $\operatorname{tg}\alpha = 2$. Знайти рівняння сторін трикутника та третю його вершину, якщо відомо, що вона знаходиться у верхній півплощині відносно прямої, яка містить основу.

Розв'язування. Нехай сторона AC лежить на прямій l_1, сторона AB на l_2, BC на l_3. Скористаємось формулою для прямої через дві точки (7):

$$\frac{x-2}{6-2}=\frac{y-1}{3-1}, \;\Rightarrow\; \frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{1}.$$

Отже, сторона AC лежить на $y=\frac{1}{2}x$, кутовий коефіцієнт прямої l_1: $k_1=\frac{1}{2}$. Нехай кутові коефіцієнти прямих l_2 та l_3 відповідно k_2 та k_3. Оскільки трикутник рівнобедрений, то $\angle BAC=\angle BCA=\alpha$. Оскільки точка B знаходиться у верхній півплощині відносно l_1, то оберт *проти годинникової стрілки* на кут α здійснюється від прямої l_1 до l_2 і від прямої l_3 до l_1.



Тобто формули (18) виконуються у вигляді:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2},\; \operatorname{tg}\alpha=\frac{k_1-k_3}{1+k_1k_3}.$$

Знайдемо кутовий коефіцієнт k_2:

$$2=\frac{k_2-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}k_2}, \;\Rightarrow\quad 2+k_2=k_2-\frac{1}{2}$$

Остання рівність не має розв'язків, але така пряма існує. Як це можна пояснити? Кут, який утворює l_2 з віссю Ox, дорівнює $\pi/2$, $k_2=\infty$. Отже, рівняння прямої $x=\mathrm{const}$, а оскільки вона проходить через точку $A(2,1)$, то маємо рівняння l_2: $x=2$.

Знайдемо кутовий коефіцієнт k_3:

$$2=\frac{\frac{1}{2}-k_3}{1+\frac{1}{2}k_3}, \;\Rightarrow\quad 2+k_3=\frac{1}{2}-k_3, \;\Rightarrow\quad 2k_3=-\frac{3}{2}$$

Отже, пряма l_3 має кутовий коефіцієнт $k_3=-\frac{3}{4}$ та проходить через точку $C(6,3)$, її рівняння:

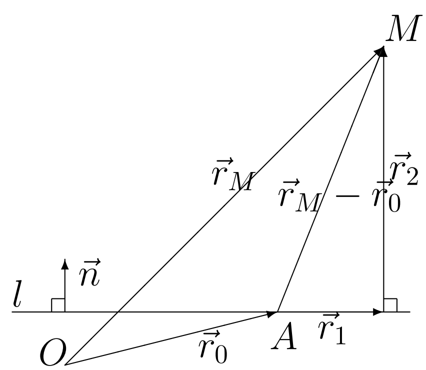
$$y = -\frac{3}{4}(x-6)+3, \ \Rightarrow \ 3x+4y-30=0.$$

Знайдемо координати точки B, як перетин прямих l_2 та l_3: $x = 2$, $y = -\frac{3}{4}(-4)+3 = 6$. Отже, $B(2,6)$.

Відповідь: рівняння сторін: $y = \dfrac{1}{2}x$ (AC), $x = 2$ (AB), $3x+4y-30 = 0$ (BC), координати точки $B(2,6)$.

2.4 Нормальне рівняння. Відхилення точки від прямої. Відстань від точки до прямої

Нехай є пряма l, одиничний вектор нормалі $\vec{n}$, точка A на прямій з радіусом-вектором $\vec{r}_0$, і довільна точка M з радіусом-вектором $\vec{r}_M$. Розкладемо вектор $\vec{r}_M - \vec{r}_0$ в суму $\vec{r}_M - \vec{r}_0 = \vec{r}_1 + \vec{r}_2$ так, щоб вектор $\vec{r}_1$ був паралельний прямій l, а вектор $\vec{r}_2$ був перпендикулярний цій прямій (отже, паралельний вектору нормалі $\vec{n}$).



Тоді
$$\langle \vec{n}, \vec{r}_M - \vec{r}_0 \rangle = \langle \vec{n}, \vec{r}_1 + \vec{r}_2 \rangle = \langle \vec{n}, \vec{r}_2 \rangle,$$
а число $\langle \vec{n}, \vec{r}_2 \rangle$ дорівнює відстані від M до l , якщо M лежить в одній півплощині, що визначається прямою l, або дорівнює відстані із знаком мінус, якщо точка лежить в іншій півплощині.

Визначення 2.2 *Нехай задана пряма. Функція, яка ставить у відповідність кожній точці однієї півплощини відстань від цієї точки до прямої, а кожній точці другої півплощини ставить у відповідність відстань із знаком мінус, називається відхиленням точки від прямої.*

Кут φ між векторами $\vec{n}$ та $\vec{r}_2$ може приймати два значення 0 і π. Якщо $\varphi = 0$, то точка M і кінець вектора нормалі $\vec{n}$, відкладеного від прямої l лежать в одній півплощині і відхилення $\delta(M) > 0$, а якщо $\varphi = \pi$, то в різних півплощинах і $\delta(M) < 0$.

У підсумку ми маємо наступне твердження.

Твердження 2.3 *Нехай $\langle \vec{n}, \vec{r} - \vec{r}_0 \rangle = 0$, де $\vec{n}$ — одиничний вектор, рівняння прямої через точку $\vec{r}_0$ перпеникулярно вектору $\vec{n}$ (див. (16)). Тоді функція $\delta(M)$, яка ставить у відповідність кожній точці M площини з радіусом-вектором $\vec{r}_M$ число $\langle \vec{n}, \vec{r}_M - \vec{r}_0 \rangle$ є відхиленням точки M від заданої прямої.*

$$\delta(M) = \langle \vec{n}, \vec{r}_M - \vec{r}_0 \rangle$$

Щоб обчислити відстань від точки до прямої, потрібно взяти модуль відхилення цієї точки від прямої.

$$d(M, l) = |\langle \vec{n}, \vec{r}_M - \vec{r}_0 \rangle|$$

Нехай $\vec{n} = \{a, b\}, a^2 + b^2 = 1$ Тоді $\langle \vec{n}, \vec{r} - \vec{r}_0 \rangle = ax + by + c$.

Визначення 2.3 *Рівняння*

$$ax + by + c = 0, \qquad a^2 + b^2 = 1. \tag{19}$$

називаєтьcя нормальним рівнянням прямої.

Тепер одержане вище твердження можна сформулювати так:

Твердження 2.4 *Якщо $ax + by + c = 0$ — нормальне рівняння прямої, то для будь-якої точки $M(x_M, y_M)$ площини $\delta(M) = ax_M + by_M + c$ буде відхиленням цієї точки від прямої.*

Якщо пряма l задана ненормованим загальним рівнянням $Ax + By + C = 0$, тоді відхилення точки M від прямої l:

$$\delta(M) = \frac{Ax_M + By_M + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Для відстані від точки M до прямої l отримуємо формулу

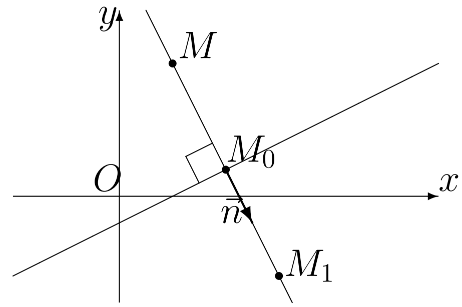
$$d(M, l) = |\delta(M)| = \frac{|Ax_M + By_M + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Приклад. Знайти точку $M_1(x_1, y_1)$, яка симетрична точці $M(2, 5)$ відносно прямої $x - 2y - 2 = 0$.

Розв'язування. Перший спосіб. Знайдемо відхилення точки M від прямої.

$$\delta(M) = \frac{1 \cdot 2 - 2 \cdot 5 - 2}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{-10}{\sqrt{5}} = -2\sqrt{5}$$

Оскільки відхилення відємне, то точка M і кінець вектора нормалі $\vec{n} = \{1, -2\}$ знаходяться в різних півплощинах відносно прямої. Отже, вектори $\overrightarrow{MM_1}$ та $\vec{n}$ колінеарні і мають однакові напрямки. Довжина вектора $\overrightarrow{MM_1}$ доівнює $2d(M)$, де $d(M) = |\delta(M)|$ – відстань від M до прямої.



Отже,

$$\overrightarrow{MM_1} = 2\frac{d(M)}{|\vec{n}|}\vec{n} = 2\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\vec{n} = 4\vec{n} = \{4, -8\}$$

Таким чином, ми знаємо початок вектора $\overrightarrow{MM_1}$ точку $M(2,5)$ та його координати $\overrightarrow{MM_1} = \{4, -8\}$, знайдемо кінцеву точку вектора: $M_1(2+4, 5-8) = (6, -3)$.

Другий спосіб. Через точку M проведемо пряму, яка перпендикулярна заданій прямій, тобто має напрямок вектора нормалі нашої прямої $\{1, -2\}$:

$$\begin{cases} x = & 2 + t, \\ y = & 5 - 2t. \end{cases}$$

Тепер знайдемо точку $M_0(x_0, y_0)$ перетину прямої та перпердикуляра, для цього підставимо параметричне рівняння перпендикуляра в загальне рівняння прямої:

$$2 + t - 2(5 - 2t) - 2 = 0, \;\Rightarrow\; 2 + t - 10 + 4t - 2 = 0, \;\Rightarrow\; 5t = 10, \;\Rightarrow\; t = 2.$$

Отже, перетин відбувається при значенні параметру $t = 2$, тобто $x_0 = 2 + 2 = 4$, $y_0 = 5 - 2 \cdot 2 = 1$ (ми підставили $t = 2$ у параметричне рівняння перпендикуляра). Точка M_0 – це середина відрізка MM_1. Тоді згідно формулам для координат середини відрізка:

$$\begin{cases} \dfrac{2 + x_1}{2} & = & 4, \\ \dfrac{5 + y_1}{2} & = & 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 & = & 6, \\ y_1 & = & -3. \end{cases}$$

Відповідь: координати симетричної точки $M_1(6, -3)$.