IV.

РѢШЕНІЕ ОСНОВНЫХЪ УРАВНЕНІЙ

ТЕОРІИ КРИСТАЛЛИЧЕСКОЙ ПОЛЯРИЗАЦІИ.

А. П. Грузинцева.

Въ математической теоріи кристаллической поляризаціи, данной въ первый разъ Ф. Нейманномъ въ 1835 году въ сочиненіи подъ заглавіемъ — «*Ueber den Einfluss der Krystallflächen bei der Reflexion des Lichtes und über die Intensität des gewöhnlichen und ungewöhnlichen Strahls*», основныя уравненія представляютъ систему четырехъ уравненій 1-й степени съ 4-мя неизвѣстными. Уравненія эти на-столько сложны, что рѣшеніе ихъ обычнымъ, непосредственнымъ, если можно такъ выразиться, путемъ представляетъ большія трудности, вслѣдствіе сложности вычисленій; хотя Нейманнъ и рѣшилъ сказанныя уравненія, но путемъ крайне утомительныхъ выкладокъ; чтобы дать понятіе о трудности пріема Неймана, я позволю себѣ привести здѣсь слова извѣстнаго французскаго физика, Корню. Этотъ послѣдній, излагая пріемъ Неймана, говоритъ о немъ въ слѣдующихъ выраженіяхъ: «Il (M. Neumann) osa attaquer de front les pénibles éliminations de sa théorie et son travail restera un chef-d'œuvre de patience analytique». (Annales de chimie et de physique. 4-ème série, tome XI, p. 299).

Макъ-Куллохъ, занимавшійся тѣмъ-же вопросомъ, предложилъ особый способъ для рѣшенія разбираемыхъ уравненій; пріемъ его въ высшей степени искусственный, хотя и проще способа Нейманна, но все-таки представляетъ неудобства, когда приходится находить окончательныя рѣшенія вопроса; за-то онъ очень удобенъ для общаго изслѣдованія окончательныхъ результатовъ,— каковымъ качествомъ не обладаетъ пріемъ Неймана.

Въ настоящей замѣткѣ будетъ изложенъ новый пріемъ для рѣшенія основныхъ уравненій теоріи кристаллической поляризаціи— пріемъ, не имѣющій, какъ мнѣ кажется, тѣхъ недостатковъ, кои присущи упомянутымъ выше пріемамъ Неймана и Макъ-Куллоха; излагаемый здѣсь пріемъ мнѣ кажется полезнымъ еще потому, что другіе авторы[1], занимавшіеся тѣмъ-же вопросомъ, довольствовались лишь выводомъ основныхъ уравненій, не приводя ихъ рѣшенія,—по всей вѣроятности въ силу сложности вычисленій.

§ 1.

Основныя уравненія теоріи кристаллической поляризаціи мы возьмемъ въ слѣдующей формѣ:

$$(\sin\theta - h\sin\theta')\cos i = \left(\frac{g_1\sin\theta_1\cos\sigma_1}{\sin\sigma_1} + \frac{g_2\sin\theta_2\cos\sigma_2}{\sin\sigma_2}\right)\sin i$$

$$\sin\theta + h\sin\theta' = g_1\sin\theta_1 + g_2\sin\theta_2$$

$$\cos\theta + h\cos\theta' = \left(\frac{g_1\cos\theta_1}{\sin\sigma_1} + \frac{g_2\cos\theta_2}{\sin\sigma_2}\right)\sin i$$

$$(\cos\theta - h\cos\theta')\cos i = g_1\cos\sigma_1(\cos\theta_1 + \operatorname{tang} u_1 \operatorname{tg}\sigma_1) + \\ + g_2\cos\sigma_2(\cos\theta_2 + \operatorname{tang} u_2 \operatorname{tang}\sigma_2).$$

Въ этихъ уравненіяхъ буквы имѣютъ слѣдующія значенія:

h, g_1, g_2 амплитуды колебаній отраженнаго и обоихъ преломленныхъ лучей, принимая амплитуду падающаго $=1$;

θ, θ', θ_1, θ_2 азимуты плоскостей поляризаціи падающаго, отраженнаго и обоихъ преломленныхъ лучей;

[1] Кирхгофъ и Кеттелеръ.

i	уголъ паденія луча;
σ_1, σ_2	углы преломленія и
u_1, u_2	углы между преломленными лучами и нормалами соотвѣтствующихъ плоскихъ волнъ.

Замѣтимъ, что здѣсь предполагается перпендикулярность плоскостей поляризаціи (θ, θ', θ_1 и θ_2) къ тѣмъ, кои входятъ въ теоріи Неймана.

Въ написанныхъ уравненіяхъ неизвѣстныя суть:

$$h,\ g_1,\ g_2 \text{ и } \theta',$$

остальныя количества суть данныя.

§ 2.

Разсмотримъ сначала случай, когда падающій лучъ поляризованъ въ такъ-называемомъ первомъ азимутѣ. Введемъ *четыре вспомогательныя количества:*

$$g,\ \varphi,\ \sigma \text{ и } u,$$

полагая сначала:

$$(\sin\theta - h\sin\theta')\cos i = \frac{g\sin\varphi\cos\sigma\sin i}{\sin\sigma} \qquad (a)$$

$$\sin\theta + h\sin\theta' = g\sin\varphi \qquad (b)$$

а за-тѣмъ будемъ имѣть:

$$\frac{g\sin\varphi\cos\sigma}{\sin\sigma} = \frac{g_1\sin\theta_1\cos\sigma_1}{\sin\sigma_1} + \frac{g_2\sin\theta_2\cos\sigma_2}{\sin\sigma_2} \qquad (\alpha)$$

$$g\sin\varphi = g_1\sin\theta_1 + g_2\sin\theta_2. \qquad (\beta)$$

Изъ уравненій (a) и (b) находимъ:

$$h\sin\theta' = -\frac{\sin(i-\sigma)}{\sin(i+\sigma)}\sin\theta \qquad (\mathrm{I})$$

$$g\sin\varphi = \frac{2\cos i\sin\sigma}{\sin(i+\sigma)}\sin\theta. \qquad (1)$$

§ 3.

Для случая, когда падающій лучъ поляризованъ во второмъ азимутѣ, полагаемъ:

$$\cos\theta + h\cos\theta' = \frac{g\cos\varphi\sin i}{\sin\sigma} \qquad (c)$$

$$(\cos\theta - h\cos\theta')\cos i = g\cos\sigma(\cos\varphi + \operatorname{tang} u \operatorname{tang}\sigma). \qquad (d)$$

Кромѣ того будемъ имѣть:

$$\frac{g\cos\varphi}{\sin\sigma} = \frac{g_1\cos\theta_1}{\sin\sigma_1} + \frac{g_2\cos\theta_2}{\sin\sigma_2} \qquad (\gamma)$$

$$g\cos\sigma(\cos\varphi + \operatorname{tang} u \operatorname{tang}\sigma) = g_1\cos\sigma_1(\cos\theta_1 + $$
$$+ \operatorname{tang} u_1 \operatorname{tang}\sigma_1) + g_2\cos\sigma_2(\cos\theta_2 + \operatorname{tang} u_2 \operatorname{tang}\sigma_2). \qquad (\delta)$$

Понятно, что здѣсь величины g, φ, σ и u тѣ-же, что и въ предыдущемъ параграфѣ.

Уравненія (c) и (d) даютъ:

$$h\cos\theta' = \frac{\sin(i-\sigma)\cos(i+\sigma)\cos\varphi - \sin^2\sigma\operatorname{tang} u}{\sin(i+\sigma)\cos(i-\sigma)\cos\varphi + \sin^2\sigma\operatorname{tang} u}\cos\theta,$$

$$g = \frac{2\cos i\sin\sigma\cos\theta}{\sin(i+\sigma)\cos(i-\sigma)\cos\varphi + \sin^2\sigma\operatorname{tang} u}.$$

Если для симметріи и удобствъ вычисленій положимъ:

$$\operatorname{tang} u = \cos\varphi\operatorname{tang}\tau,$$

причемъ τ будетъ вспомогательное перемѣнное, замѣняющее прежнее u, то двѣ послѣднія формулы обратятся въ слѣдующія:

$$h\cos\theta' = \frac{\sin(i-\sigma)\cos(i+\sigma) - \sin^2\sigma\operatorname{tang}\tau}{\sin(i+\sigma)\cos(i-\sigma) + \sin^2\sigma\operatorname{tang}\tau}\cos\theta. \qquad (\text{II})$$

$$g\cos\varphi = \frac{2\cos i\sin\sigma\cos\theta}{\sin(i+\sigma)\cos(i-\sigma) + \sin^2\sigma\operatorname{tang}\tau}. \qquad (2)$$

Итакъ знаемъ:

$$h\sin\theta' = \text{функ.}\ (\sigma)\quad,\quad h\cos\theta' = \text{функ.}\ (\sigma,\tau)$$

$$g\sin\varphi = \text{функ.}\ (\sigma)\quad,\quad g\cos\varphi = \text{функ.}\ (\sigma,\tau).$$

§ 4.

Обратимся теперь къ преломленнымъ лучамъ.

Уравненія (α) и (β) § 2 даютъ:

$$g_1\sin\theta_1 = \frac{\sin(\sigma-\sigma_2)\sin\sigma_1}{\sin(\sigma_1-\sigma_2)\sin\sigma}\,g\sin\varphi\,,$$

$$g_2\sin\theta_2 = -\frac{\sin(\sigma-\sigma_1)\sin\sigma_2}{\sin(\sigma_1-\sigma_2)\sin\sigma}\,g\sin\varphi\,;$$

подставляя сюда значеніе $g\sin\varphi$ изъ равенства (1), получимъ:

$$g_1\sin\theta_1 = \frac{2\sin(\sigma-\sigma_2)\sin\sigma_1\cos i}{\sin(i+\sigma)\sin(\sigma_1-\sigma_2)}\sin\theta\,. \qquad \text{(III)}$$

$$g_2\sin\theta_2 = -\frac{2\sin(\sigma-\sigma_1)\sin\sigma_2\cos i}{\sin(i+\sigma)\sin(\sigma_1-\sigma_2)}\sin\theta. \qquad \text{(IV)}$$

Итакъ знаемъ:

$$g_1\sin\theta_1 = \text{функ.}\ (\sigma),\ g_2\sin\theta_2 = \text{функ.}\ (\sigma)\,.$$

§ 5.

Разрѣшимъ теперь уравненія (γ) и (δ), полагая предварительно для симметріи и удобствъ вычисленія:

$$\operatorname{tang} u_1 = \cos\theta_1 \operatorname{tang}\tau_1,\ \operatorname{tang} u_2 = \cos\theta_2\operatorname{tang}\tau_2\,,$$

причемъ τ_1 и τ_2, подобно τ, будутъ играть роль угловъ u_1 и u_2; они имѣютъ простое и очевидное геометрическое значеніе.

Послѣ легкихъ преобразованій, найдемъ:

$$g_1\cos\theta_1 = \left\{\frac{\begin{array}{c}[\sin(\sigma-\sigma_2)\cos(\sigma+\sigma_2)+\sin^2\sigma\operatorname{tang}\tau-\\ -\sin^2\sigma_2\operatorname{tang}\tau_2]\sin\sigma_1\end{array}}{\begin{array}{c}[\sin(\sigma_1-\sigma_2)\cos(\sigma_1+\sigma_2)+\sin^2\sigma_1\operatorname{tang}\tau_1-\\ -\sin^2\sigma_2\operatorname{tang}\tau_2]\sin\sigma\end{array}}\right\} g\cos\varphi,$$

$$g_2\cos\theta_2 = -\frac{\left\{\begin{matrix}[\sin(\sigma-\sigma_1)\cos(\sigma+\sigma_1)+\sin^2\sigma\,\mathrm{tang}\,\tau- \\ -\sin^2\sigma_1\,\mathrm{tang}\,\tau_1]\sin\sigma_2\end{matrix}\right\}}{\left\{\begin{matrix}[\sin(\sigma_1-\sigma_2)\cos(\sigma_1+\sigma_2)+\sin^2\sigma_1\,\mathrm{tang}\,\tau_1- \\ -\sin^2\sigma_2\,\mathrm{tang}\,\tau_2]\sin\sigma\end{matrix}\right\}}\,g\cos\varphi.$$

Подставляя сюда значеніе $g\cos\varphi$ изъ равенства (2), найдемъ:

$$g_1\cos\theta_1 = \frac{\left\{\begin{matrix}2[\sin(\sigma-\sigma_2)\cos(\sigma+\sigma_2)+\sin^2\sigma\,\mathrm{tang}\,\tau-\sin^2\sigma_2\,\mathrm{tang}\,\tau_2] \\ \sin\sigma_1\cos i\cos\theta\end{matrix}\right\}}{\left\{\begin{matrix}[\sin(\sigma_1-\sigma_2)\cos(\sigma_1+\sigma_2)+\sin^2\sigma_1\,\mathrm{tang}\,\tau_1-\sin^2\sigma_2\,\mathrm{tang}\,\tau_2] \\ [\sin(i+\sigma)\cos(i-\sigma)+\sin^2\sigma\,\mathrm{tang}\,\tau]\end{matrix}\right\}}. \quad (\mathrm{V})$$

$$g_2\cos\theta_2 = -\frac{\left\{\begin{matrix}2[\sin(\sigma-\sigma_1)\cos(\sigma+\sigma_1)+\sin^2\sigma\,\mathrm{tang}\,\tau-\sin^2\sigma_1\,\mathrm{tang}\,\tau_1] \\ \sin\sigma_2\cos i\cos\theta\end{matrix}\right\}}{\left\{\begin{matrix}[\sin(\sigma_1-\sigma_2)\cos(\sigma_1+\sigma_2)+\sin^2\sigma_1\,\mathrm{tang}\,\tau_1-\sin^2\sigma_2\,\mathrm{tang}\,\tau_2] \\ [\sin(i+\sigma)\cos(i-\sigma)+\sin^2\sigma\,\mathrm{tang}\,\tau]\end{matrix}\right\}}. \quad (\mathrm{VI})$$

Итакъ знаемъ:

$$g_1\cos\theta_1 = \text{функ.}\ (\sigma,\ \tau) \ \text{ и } \ g_2\cos\theta_2 = \text{функ.}\ (\sigma,\ \tau).$$

§ 6.

Раздѣляя (III) и (IV) соотвѣтственно на (V) и (VI), найдемъ два уравненія:

$$\mathrm{tang}\,\theta_1 = \text{функц.}\ (\sigma,\ \tau) \ \text{ и } \ \mathrm{tang}\,\theta_2 = \text{функц.}\ (\sigma,\ \tau).$$

Изъ этихъ уравненій найдемъ σ и τ въ функціи данныхъ и извѣстныхъ: i, θ, σ_1, σ_2, θ_1, θ_2, τ_1 и τ_2; первыя два количества суть непосредственно данныя, а остальныя находятся по извѣстнымъ законамъ двойнаго преломленія.

Зная σ и τ, опредѣлимъ $h\sin\theta'$, $h\cos\theta'$ [1], g_1 и g_2 въ функціи данныхъ и извѣстныхъ, т. е. рѣшимъ предложенную себѣ задачу окончательно; можно опредѣлить также $g\sin\varphi$ и $g\cos\varphi$, т. е. g и φ по уравненіямъ (1) и (2).

[1] Зная $h\sin\theta'$ и $h\cos\theta'$, мы опредѣлимъ h и θ'.

§ 7.

Займемся развитіемъ сейчасъ сказаннаго. Раздѣливъ $\tan g\,\theta_1$ и $\mathrm{tang}\,\theta_2$ на $\mathrm{tang}\,\theta$, имѣемъ:

$$\frac{\mathrm{tang}\,\theta_1}{\mathrm{tang}\,\theta}=\left\{\frac{\sin(\sigma-\sigma_2)\,\{\sin(i+\sigma)\cos(i-\sigma)+\sin^2\sigma\,\mathrm{tang}\,\tau\}\,\{\sin(\sigma_1-\sigma_2)\cos(\sigma_1+\sigma_2)+\sin^2\sigma_1\,\mathrm{tang}\,\tau_1-\sin^2\sigma_2\,\mathrm{tang}\,\tau_2\}}{\sin(i+\sigma)\sin(\sigma_1-\sigma_2)\,\{\sin(\sigma-\sigma_2)\cos(\sigma+\sigma_2)+\sin^2\sigma\,\mathrm{tang}\,\tau-\sin^2\sigma\,\mathrm{tang}\,\tau_2\}}\right\}$$

$$\frac{\mathrm{tang}\,\theta_2}{\mathrm{tang}\,\theta}=\left\{\frac{\sin(\sigma-\sigma_1)\,\{\sin(i+\sigma)\cos(i-\sigma)+\sin^2\sigma\,\mathrm{tang}\,\tau\}\,\{\sin^2(\sigma-\sigma_2)\cos(\sigma_1+\sigma_2)+\sin^2\sigma_1\,\mathrm{tang}\,\tau_1-\sin^2\sigma_2\,\mathrm{tang}\,\tau_2\}}{\sin(i+\sigma)\sin(\sigma_1-\sigma_2)\,\{\sin(\sigma-\sigma_1)\cos(\sigma+\sigma_1)+\sin^2\sigma\,\mathrm{tang}\,\tau-\sin^2\sigma_1\,\mathrm{tang}\,\tau_1\}}\right\}$$

Раздѣляя одно уравненіе на другое и сокращая, найдемъ:

$$\frac{\mathrm{tang}\,\theta_1}{\mathrm{tang}\,\theta_2}=\frac{\sin(\sigma-\sigma_2)\,\{\sin(\sigma-\sigma_1)\cos(\sigma+\sigma_1)+\sin^2\sigma\,\mathrm{tang}\,\tau-\sin^2\sigma_1\,\mathrm{tang}\,\tau_1\}}{\sin(\sigma-\sigma_1)\,\{\sin(\sigma-\sigma_2)\cos(\sigma+\sigma_2)+\sin^2\sigma\,\mathrm{tang}\,\tau-\sin^2\sigma_2\,\mathrm{tang}\,\tau_2\}}. \qquad \text{(A)}$$

Положимъ:

$$\sin(\sigma-\sigma_1)\cos(\sigma+\sigma_1)-\sin^2\sigma_1\,\mathrm{tang}\,\tau_1=\lambda_1\sin^2\sigma$$

$$\sin(\sigma-\sigma_2)\cos(\sigma+\sigma_2)-\sin^2\sigma_2\,\mathrm{tang}\,\tau_2=\lambda_2\sin^2\sigma.$$

и

$$\frac{\mathrm{tang}\,\theta_1\sin(\sigma-\sigma_1)}{\mathrm{tang}\,\theta_2\sin(\sigma-\sigma_2)}=m,$$

тогда равенство (A) превратится въ слѣдующее:

$$m=\frac{\lambda_1+\mathrm{tang}\,\tau}{\lambda_2+\mathrm{tang}\,\tau},$$

откуда:

$$\mathrm{tang}\,\tau=\frac{\lambda_1-m\lambda_2}{m-1}. \qquad \text{(B)}$$

Положимъ на-время:

$$\sin(\sigma_1-\sigma_2)\cos(\sigma_1+\sigma_2)+\sin^2\sigma_1\operatorname{tang}\tau_1-\sin^2\sigma_2\operatorname{tang}\tau_2=\alpha$$

$$\sin\sigma_1\cos\sigma_1+\sin^2\sigma_1\operatorname{tang}\tau_1-m\,\{\sin\sigma_2\cos\sigma_2+\sin^2\sigma_2\operatorname{tang}\tau_2\}=\beta$$

$$\operatorname{tang}\theta_1=n_1\operatorname{tang}\theta\,,\ \operatorname{tang}\theta_2=n_2\operatorname{tang}\theta.$$

Подставляя значеніе $\operatorname{tang}\tau$ изъ равенства (B) въ уравненіе для $\operatorname{tang}\theta_1$, найдемъ:

$$n_1\sin(i+\sigma)\sin(\sigma_1-\sigma_2)-\beta\sin(\sigma-\sigma_2)+$$
$$+(m-1)\sin i\cos i\sin(\sigma-\sigma_2)=0. \qquad (C)$$

замѣтивъ предварительно, что

$$(\lambda_1-\lambda_2)\sin^2\sigma=-\alpha,$$

и потомъ

$$(m\lambda_2-\lambda_1)\sin^2\sigma=(m-1)\sin\sigma\cos\sigma+\beta\,.$$

Если-бы пользовались уравненіемъ для $\operatorname{tang}\theta_2$, то нашли бы:

$$n_2\sin(i+\sigma)\sin(\sigma_1-\sigma_2)\,m-\beta\sin(\sigma-\sigma_1)+$$
$$+(m-1)\sin i\cos i\sin(\sigma-\sigma_1)=0\,. \qquad (D)$$

Это уравненіе, разумѣется, тождественно[1] съ (C).

Изъ уравненія (C) находимъ:

$$\operatorname{tang}\sigma=-\frac{\left\{\begin{array}{l}n_1\sin i\sin(\sigma_1-\sigma_2)+\beta\sin\sigma_2-\\ \quad-(m-1)\sin i\cos i\sin\sigma_2\end{array}\right\}}{\left\{\begin{array}{l}n_1\cos i\sin(\sigma_1-\sigma_2)-\beta\cos\sigma_2+\\ \quad+(m-1)\sin i\cos i\cos\sigma_2\end{array}\right\}}\,. \qquad (E)$$

Разовьемъ теперь это уравненіе.

Положимъ для краткости письма:

$$p_1=\sin\sigma_1\cos\sigma_1+\sin^2\sigma_1\operatorname{tang}\tau_1\,,\ p_2=\sin\sigma_2\cos\sigma_2+\sin^2\sigma_2\operatorname{tang}\tau_2$$

$$q_1=p_1+\sin i\cos i\ \ ,\ q_2=p_2+\sin i\cos i$$

$$a=n_1\sin(\sigma_1-\sigma_2)\ \ ,\ b=n_2\sin(\sigma_1-\sigma_2);$$

---

[1] Вслѣдствіе соотношеній между σ_1, σ_2, θ_1, θ_2, τ_1 и τ_2, обусловливаемыхъ двойнымъ преломленіемъ.

тогда получимъ сначала

$$\beta = p_1 - m\, p_2\,,$$

а потомъ

$$\operatorname{tang}\sigma = -\frac{a\sin i + q_1\sin\sigma_2 - m q_2 \sin\sigma_2}{a\cos i - q_1\cos\sigma_2 + m q_2\cos\sigma_2}.$$

Если-бы пользовались уравненіемъ (D), то получили бы сначала

$$\operatorname{tang}\sigma = -\frac{\left\{\begin{matrix} n_2 m \sin i \sin(\sigma_1 - \sigma_2) + \beta\sin\sigma_1 - \\ -(m-1)\sin i\cos i\sin\sigma_1 \end{matrix}\right\}}{\left\{\begin{matrix} n_2 m \cos i \sin(\sigma_1 - \sigma_2) - \beta\cos\sigma_1 + \\ +(m-1)\sin i\cos i\cos\sigma_1 \end{matrix}\right\}} \qquad (F)$$

и потомъ

$$\operatorname{tang}\sigma = -\frac{b\sin i + q_1\sin\sigma_1 - m q_2\sin\sigma_1}{b\cos i - q_1\cos\sigma_1 + m q_2\cos\sigma_1}.$$

Такъ-какъ m заключаетъ въ себѣ σ, то надо послѣднія выраженія для $\operatorname{tang}\sigma$ раскрыть и затѣмъ опредѣлить σ; но этотъ пріемъ не удобенъ, ибо приводитъ къ большимъ сложностямъ, поэтому мы будемъ дѣйствовать иначе.

Зная, что

$$\operatorname{tang}\sigma = \frac{\sin\sigma}{\cos\sigma},$$

составимъ выраженія:

$$-\frac{\sin\sigma}{\cos\sigma}\cos\sigma_1 + \sin\sigma_1 = -\frac{\sin(\sigma-\sigma_1)}{\cos\sigma}$$

и

$$-\frac{\sin\sigma}{\cos\sigma}\cos\sigma_2 + \sin\sigma_2 = -\frac{\sin(\sigma-\sigma_2)}{\cos\sigma}.$$

По первой формулѣ для $\operatorname{tang}\sigma$ имѣемъ:

$$-\frac{\sin(\sigma-\sigma_1)}{\cos\sigma} = \frac{a\sin(i+\sigma_1) - q_1\sin(\sigma_1-\sigma_2) + m q_2\sin(\sigma_1-\sigma_2)}{a\cos i - q_1\cos\sigma_2 + m q_2\cos\sigma_2},$$

$$-\frac{\sin(\sigma-\sigma_2)}{\cos\sigma}=\frac{a\sin(i+\sigma_2)}{a\cos i-q_1\cos\sigma_2+mq_2\cos\sigma_2}.$$

Раздѣляя одно изъ этихъ выраженій на другое и замѣчая, что

$$\frac{\sin(\sigma-\sigma_1)}{\sin(\sigma-\sigma_2)}=m\frac{n_2}{n_1},$$

найдемъ:

$$m\frac{n_2}{n_1}=\frac{a\sin(i+\sigma_1)-q_1\sin(\sigma_1-\sigma_2)+mq_2\sin(\sigma_1-\sigma_2)}{a\sin(i+\sigma_2)}$$

или, подставивъ значеніе a и сокративъ на общаго множителя: $\sin\,(\sigma_1-\sigma_2)$, получимъ:

$$m\frac{n_2}{n_1}=\frac{n_1\sin(i+\sigma_1)-q_1+mq_2}{n_1\sin(i+\sigma_2)}.$$

Отсюда

$$m=\frac{n_1\sin(i+\sigma_1)-q_1}{n_2\sin(i+\sigma_2)-q_2}, \tag{G}$$

Это уравненіе весьма простаго вида, изъ него найдемъ $\operatorname{tang}\sigma$ въ функціи данныхъ и извѣстныхъ величинъ. Зная, что

$$m=\frac{n_1}{n_2}\;\frac{\cos\sigma_1\operatorname{tang}\sigma-\sin\sigma_1}{\cos\sigma_2\operatorname{tang}\sigma-\sin\sigma_2},$$

имѣемъ

$$\operatorname{tang}\sigma=-\frac{n_1n_2\sin i\sin(\sigma_1-\sigma_2)+q_1n_2\sin\sigma_2-q_2n_1\sin\sigma_1}{n_1n_2\cos i\sin(\sigma_1-\sigma_2)-q_1n_2\cos\sigma_2+q_2n_1\cos\sigma_1}. \tag{H}$$

Итакъ, σ найдено, хотя выраженіе для $\operatorname{tang}\sigma$ довольно сложно, но подстановка его значенія въ тѣ формулы, изъ коихъ опредѣляются другія неизвѣстныя, оказывается менѣе сложною вслѣдствіе многихъ сокращеній. Мы можемъ дать $\operatorname{tang}\sigma$ другой видъ, вводя значенія n_1 и n_2 и полагая для краткости:

$$\sin(\sigma_1 - \sigma_2) \operatorname{tang}\theta_1 \operatorname{tang}\theta_2 = P,$$

$$\sin i P = A\,,\ \cos i P = A_1 \quad .$$

$$q_1 \sin\sigma_2 \operatorname{tang}\theta_2 - q_2 \sin\sigma_1 \operatorname{tang}\theta_1 = B\,,$$
$$-q_1 \cos\sigma_2 \operatorname{tang}\theta_2 + q_2 \cos\sigma_1 \operatorname{tang}\theta_1 = B_1\,;$$

подставляя все это въ значеніе $\operatorname{tang}\sigma$, найдемъ:

$$\operatorname{tang}\sigma = -\frac{A\cos\theta + B\sin\theta}{A_1\cos\theta + B_1\sin\theta}.$$

§ 8.

Опредѣлимъ теперь τ. Такъ-какъ во всѣ формулы количество σ входитъ или одно или вмѣстѣ съ τ и въ послѣднемъ случаѣ всегда въ видѣ выраженія

$$\sin\sigma\cos\sigma + \sin^2\sigma \operatorname{tang}\tau\,,$$

поэтому вмѣсто $\operatorname{tang}\tau$ опредѣлимъ количество

$$Q = \sin\sigma\cos\sigma + \sin^2\sigma \operatorname{tang}\tau\,.$$

Пользуясь формулой (B), имѣемъ:

$$Q - \sin\sigma\cos\sigma = \frac{\lambda_1 \sin^2\sigma - m\lambda_2 \sin^2\sigma}{m-1}\,.$$

Подставляя сюда значеніе m изъ формулы (G) и значеніе $\lambda_1 \sin^2\sigma$, $\lambda \sin^2\sigma$ изъ формулъ § 7, найдемъ послѣ нѣкоторыхъ простыхъ и очевидныхъ упрощеній количество Q. Дѣйствительно, сначала найдемъ:

$$Q = \frac{mp_2 - p_1}{m-1}\,,$$

а потомъ

$$Q = \frac{p_2\{n_1\sin(i+\sigma_1) - q_1\} - p_1\{n_2\sin(i+\sigma_2) - q_2\}}{n_1\sin(i+\sigma_1) - n_2\sin(i+\sigma_2) - q_1 + q_2}\,.$$

Полагая же:

$$p_2 \operatorname{tang}\theta_1 \sin(i+\sigma_1) - p_1 \operatorname{tang}\theta_2 \sin(i+\sigma_2) = C,\ p_1 q_2 - p_2 q_1 = D,$$

$$\operatorname{tang}\theta_1 \sin(i+\sigma_1) - \operatorname{tang}\theta_2 \sin(i+\sigma_2) = C_1,\ q_2 - q_1 = D_1,$$

имѣемъ:

$$Q = \frac{C\cos\theta + D\sin\theta}{C_1\cos\theta + D_1\sin\theta}. \qquad \text{(K)}$$

§ 9.

Найдемъ теперь $h\sin\theta'$, $h\cos\theta'$ и т. д.

Подставляя значенiе $\operatorname{tang}\sigma$ въ выраженiе для $h\sin\theta'$ и замѣтивъ, что

$$A_1\sin i - A\cos i = 0,$$

найдемъ:

$$h\sin\theta' = \frac{B_1\sin i + B\cos i}{B\cos i - B_1\sin i}\sin\theta + \frac{A_1\sin i + A\cos i}{B\cos i - B_1\sin i}\cos\theta$$

или

$$h\sin\theta' = h_1\sin\theta + h'_1\cos\theta, \qquad (1)$$

гдѣ

$$h_1 = \frac{B\cos i + B_1\sin i}{B\cos i - B_1\sin i},\ h_1' = \frac{A\cos i + A_1\sin i}{B\cos i - B_1\sin i}$$

Далѣе найдемъ подобнымъ же путемъ:

$$h\cos\theta' = h_2\sin\theta + h'_2\cos\theta, \qquad (2)$$

гдѣ

$$h_2 = \frac{D - D_1\sin i\cos i}{B\cos i - B_1\sin i},\ h'_2 = \frac{C - C_1\sin i\cos i}{B\cos i - B_1\sin i}$$

Потомъ найдемъ:

$$g_1\sin\theta_1 = k_1\sin\theta + k'_1\cos\theta, \qquad (3)$$

гдѣ

$$k_1 = \frac{B\cos\sigma_2 + B_1\sin\sigma_2}{B\cos i - B_1\sin i} \cdot \frac{2\sin\sigma_1\cos i}{\sin(\sigma_1 - \sigma_2)},$$

$$k'_1 = \frac{A\cos\sigma_2 + A_1\sin\sigma_2}{B\cos i - B_1\sin i} \cdot \frac{2\sin\sigma_1\cos i}{\sin(\sigma_1 - \sigma_2)}.$$

Такъ-же найдемъ:

$$g_2\sin\theta_2 = k_2\sin\theta + k'_2\cos\theta, \tag{4}$$

гдѣ

$$k_2 = -\frac{B.\cos\sigma_1 + B_1\sin\sigma_1}{B\cos i - B_1\sin i} \cdot \frac{2\sin\sigma_2.\cos i}{\sin(\sigma_1 - \sigma_2)},$$

$$k'_2 = -\frac{A\cos\sigma_1 + A_1\sin\sigma_1}{B\cos i - B_1\sin i} \cdot \frac{2\sin\sigma_2\cos i}{\sin(\sigma_1 - \sigma_2)}.$$

Наконецъ найдемъ:

$$g_1\cos\theta_1 = l_1\sin\theta + l'_1\cos\theta \tag{5}$$

$$g_2\cos\theta_2 = l_2\sin\theta + l'_2\cos\theta, \tag{6}$$

гдѣ

$$l_1 = \frac{2\sin\sigma_1\cos i}{\alpha} \cdot \frac{D - D_1 p_2}{B\cos i - B_1\sin i},$$

$$l'_1 = -\frac{C - C_1 p_2}{B\cos i - B_1\sin i} \cdot \frac{2\sin\sigma_1\cos i}{\alpha}.$$

$$l_2 = \frac{2\sin\sigma_2\cos i}{\alpha} \; \frac{D - D_1 p_1}{B\cos i - B_1\sin i},$$

$$l'_2 = \frac{C - C_1 p_1}{B\cos i - B_1\sin i} \cdot \frac{2\sin\sigma_2\cos i}{\alpha}.$$

Такимъ образомъ задача рѣшена.

§ 10.

Въ заключеніе покажемъ выводъ нѣкоторыхъ слѣдствій, найденныхъ Макъ-Куллохомъ.

Умножая (1) уравненіе предыдущаго параграфа на $\cos\delta$, а (2) на $-\sin\delta$; а потомъ на $\sin\delta$ и $\cos\delta$ по сложеніи результатовъ, найдемъ:

$$h\sin(\theta'-\delta)=(h_1\cos\delta-h_2\sin\delta)\sin\theta+(h'_1\cos\delta-h'_2\sin\delta)\cos\theta$$

$$h\cos(\theta'-\delta)=(h_1\sin\delta+h_2\cos\delta)\sin\theta+(h'_1\sin\delta+h'_2\cos\delta)\cos\theta,$$

при этомъ δ есть какой-нибудь уголъ.

Если желаемъ, чтобы отраженный лучъ былъ поляризованъ въ плоскости, азимутъ которой есть δ, то необходимое и достаточное для этого условіе будетъ:

$$h\cos(\theta'-\delta)=0.$$

Такъ-какъ это равенство должно существовать при всякомъ θ, то заключаемъ, что необходимо, чтобы

$$h_1\sin\delta+h_2\cos\delta=0$$

$$h'_1\cos\delta+h'_2\sin\delta=0.$$

Откуда:

$$\operatorname{tang}\delta=-\frac{h_2}{h_1}=-\frac{h'_2}{h'_1}. \qquad (1)$$

Для опредѣленія угла паденія i, при которомъ существуетъ полная поляризація въ азимутѣ δ, имѣемъ уравненіе:

$$h_1h'_2+h'_1h_2=0. \qquad (2)$$

Изъ тѣхъ же формулъ § 9, находимъ:

$$\operatorname{tang}\theta'=\frac{h'_1+h_1\operatorname{tang}\theta}{h'_2+h'_2\operatorname{tang}\theta}.$$

Для maximum'а отклоненія плоскости поляризаціи отраженнаго луча необходимое условіе:

$$\frac{d\theta'}{d\theta} = 0$$

даетъ:

$$h_1 h'_2 - h'_1 h_2 = 0. \qquad (3)$$

Слѣдовательно, наибольшее отклоненіе плоскости поляризаціи отраженнаго луча опредѣлится изъ уравненія:

$$\operatorname{tang}\eta = \frac{h_1}{h^2} = \frac{h'_1}{h'_2}, \qquad (4)$$

если буквою η назовемъ это отклоненіе.

Сравнивая эту формулу съ (1), находимъ:

$$\operatorname{tang}\delta \operatorname{tang}\eta = -1.$$

Это равенство представляетъ извѣстную теорему, найденную Макъ-Куллохомъ.

Подобнымъ же образомъ можемъ вывести и другія любопытныя свойства отраженныхъ или преломленныхъ лучей относительно ихъ поляризаціи; но это выходитъ изъ предѣловъ назначенныхъ нами для этой замѣтки; прибавимъ только, что предварительныя выраженія для неизвѣстныхъ вопроса въ функціи отъ σ, τ, g и u (§§ 2 — 6) очень удобны для вывода и изслѣдованія различнаго рода соотношеній, существующихъ между ними.