ЗАПИСКИ
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ХАРЬКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА им. А. М. ГОРЬКОГО И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

1949 Том XXI

ОБ ОДНОМ ТИПЕ АЛГЕБР БЕСКОНЕЧНЫХ МАТРИЦ

А. К. Сушкевич

(Харьков)

§ 1. Пусть **А** — совокупность бесконечных матриц (с элементами некоторого поля **Р**) следующего типа: в каждой матрице А из **А** имеется только конечное число m строк и конечное число n колонн, содержащих элементы, неравные нулю; все же остальные элементы в А равны нулю. При этом числа m и n вообще различны для различных матриц из **А** и, будучи конечными, неограниченны в своей совокупности. Очевидно, что сумма и произведение (всегда существующее) двух матриц из **А** — тоже матрицы из **А**; т. е. **А** есть алгебра, и при этом бесконечная.

Легко видеть, что если в матрице А k-я колонна состоит из нулей, а $X \in$ **А** — любая матрица, то и в XA k-я колонна состоит из нулей. Подобно же, если в матрице B k-я строка состоит из нулей, то и в BX k-я строка состоит из нулей.

Обозначим через $A_{k_1, k_2 \ldots k_m}^{l_1 l_2 \ldots l_n}$ матрицу, в которой равны нулю все элементы, не принадлежащие к строкам с номерами $k_1, k_2, \ldots k_m$ и к колоннам с номерами $l_1, l_2, \ldots l_n$; при этом обозначении мы всегда будем брать $k_1 < k_2 < \ldots < k_m$, $l_1 < l_2 < \ldots < l_n$. Тогда вообще

$$A_{k_1 k_2 \ldots k_m}^{l_1 l_2 \ldots l_n} B_{p_1 p_2 \ldots p_r}^{q_1 q_2 \ldots q_s} = C_{k_1 k_2 \ldots k_r}^{q_1 q_2 \ldots q_s} \tag{1}$$

Отсюда видно, что если в сомножителях номера „неравных нулю" строк и колонн все меньше (или равны) M, то и в произведении эти номера тоже $\leqslant M$. Таким образом, взяв несколько (даже бесчисленное множество) таких матриц, мы породим ими некоторую алгебру матриц M-го порядка[1]. Следовательно, любое конечное число любых матриц из **А** порождает некоторую алгебру матриц конечного порядка; т. е. она и сама „конечна". Такую алгебру **А** можно назвать „локально-конечной".

§ 2. В алгебре **А** всякая матрица является нулевым делителем (и правым, и левым).

Действительно, в формуле (1) произведение:
$C_{k_1 k_2 \ldots k_m}^{q_1 q_2 \ldots q_s} = 0$ всякий раз, если среди номеров $l_1, l_2, \ldots l_n$ и $p_1, p_2, \ldots p_r$ нет общих номеров (т. е., если „пересечение" этих двух рядов номеров — пустое).

[1] Бесконечные матрицы, у которых все элементы, стоящие не на пересечении первых M строк и M колонн, равны нулю, сводятся по существу на матрицы M-го порядка.

Вообще же, если „пересечение" рядов $l_1, l_2, \ldots l_n$ и $p_1, p_2, \ldots p_r$ есть ряд $t_1, t_2, \ldots t_u$ [где $u \leqslant \min(n, r)$], то

$$A^{l_1 l_2 \ldots l_n}_{k_1 k_2 \ldots k_m} B^{q_1 q_2 \ldots q_s}_{p_1 p_2 \ldots p_r} = C^{q_1 q_2 \ldots q_s}_{k_1 k_2 \ldots k_m} = A^{t_1 t_2 \ldots t_u}_{k_1 k_2 \ldots k_m} B^{q_1 q_2 \ldots q_s}_{t_1 t_2 \ldots t_u}, \qquad (2)$$

где матрица $A^{t_1 t_2 \ldots t_u}_{k_1 k_2 \ldots k_m}$ получается из $A^{l_1 l_2 \ldots l_n}_{k_1 k_2 \ldots k_m}$, если в последней оставить только столбцы с номерами $t_1, t_2, \ldots t_u$, а все остальные столбцы составить из нулей. Аналогично, $B^{q_1 q_2 \ldots q_s}_{t_1 t_2 \ldots t_u}$ получается из $B^{q_1 q_2 \ldots q_s}_{p_1 p_2 \ldots p_r}$, если в последней все строки, кроме строк с номерами $t_1, t_2, \ldots t_u$, составить из нулей.

Обозначим через $\mathbf{A}^{l_1 l_2 \ldots l_n}_{k_1 k_2 \ldots k_m}$ совокупность всех матриц из $\mathbf{A}$ вида $A^{l_1 l_2 \ldots l_n}_{k_1 k_2 \ldots k_m}$ с фиксированными номерами $k_1, k_2, \ldots k_m$ и $l_1, l_2, \ldots l_n$. Сумма матриц из $\mathbf{A}^{l_1 l_2 \ldots l_n}_{k_1 k_2 \ldots k_m}$ есть тоже матрица из $\mathbf{A}^{l_1 l_2 \ldots l_n}_{k_1 k_2 \ldots k_m}$, равно как и произведение (которое может и равняться нулю); т. е. $\mathbf{A}^{l_1 l_2 \ldots l_n}_{k_1 k_2 \ldots k_m}$ есть алгебра. Если пересечение рядов $k_1, k_2, \ldots k_m$ и $l_1, l_2, \ldots l_n$ пустое, то алгебра $\mathbf{A}^{l_1 l_2 \ldots l_n}_{k_1 k_2 \ldots k_m}$ „нулевая", т. е. произведение всяких двух её матриц равно нулю. Это бывает, например, всегда, если $k_m < l_1$ или $k_1 > l_n$; в этом случае все неравные нулю элементы матриц из $\mathbf{A}^{l_1, l_2 \ldots l_n}_{k_1 k_2 \ldots k_m}$ лежат по одну сторону от главной диагонали.

Можно сказать, что необходимое и достаточное условие того, чтобы $\mathbf{A}^{l_1 l_2 \ldots l_n}_{k_1 k_2 \ldots k_m}$ не была нулевой алгеброй, состоит в том, чтобы по крайней мере одно k_χ совпадало с одним l_λ, т. е. чтобы по крайней мере одна из строк с номерами $k_1, k_2 \ldots k_m$ пересекалась с одной из колонн с номерами $l_1, l_2 \ldots l_n$ на главной диагонали. (Отсюда, конечно, не следует, что в каждой из матриц из $\mathbf{A}^{l_1 l_2 \ldots l_n}_{k_1 k_2 \ldots k_m}$ имеется на главной диагонали элемент, неравный нулю).

В частном случае мы имеем алгебру $\mathbf{A}^{k_1 k_2 \ldots k_m}_{k_1 k_2 \ldots k_m}$; по существу это — алгебра всех конечных матриц m-го порядка над полем $\mathbf{P}_{12\ldots m}$. Не нарушая общности, мы можем рассмотреть алгебру $\mathbf{A}_{12\ldots m}$.

Обозначим единичную матрицу из алгебры $\mathbf{A}^{k_1 k_2 \ldots k_m}_{k_1 k_2 \ldots k_m}$ через $E_{k_1 k_2 \ldots k_m}$; это — матрица, у которой на $k_1^{\text{м}}, k_2^{\text{м}}, \ldots k_m^{\text{м}}$ местах главной диагонали стоят единицы, а остальные элементы равны нулю.

§ 3. Если $X \in \mathbf{A}$, а $A^{l_1 l_2 \ldots l_n}_{k_1 k_2 \ldots k_m} \in \mathbf{A}^{l_1 l_2 \ldots l_n}_{k_1 k_2 \ldots k_m}$, то в $A^{l_1 l_2 \ldots l_n}_{k_1 k_2 \ldots k_m} X$ все строки, кроме строк с номерами $k_1, k_2, \ldots k_m$, состоят из нулей, а в $XA^{l_1 l_2 \ldots l_n}_{k_1 k_2 \ldots k_m}$ все колонны, кроме колонн с номерами $l_1, l_2, \ldots l_n$, состоят из нулей.

Обозначим через $\mathbf{A}_{k_1 k_2 \ldots k_m}$ совокупность матриц из $\mathbf{A}$, у которых все строки, кроме строк с номерами $k_1, k_2, \ldots k_m$, состоят из нулей, а через $\mathbf{A}^{l_1 l_2 \ldots l_n}$ совокупность матриц из $\mathbf{A}$, у которых все колонны, кроме колонн с номерами $l_1, l_2, \ldots l_n$, состоят из нулей. Тогда

$$A_{k_1 k_2 \ldots k_m}^{l_1 l_2 \ldots l_n} X \in \mathbf{A}_{k_1 k_2 \ldots k_m} ; \tag{3}$$

$$X A_{k_1 k_2 \ldots k_m}^{l_1 l_2 \ldots l_n} \in \mathbf{A}^{l_1 l_2 \ldots l_n} . \tag{4}$$

Но при произвольных $n, l_1, l_2, \ldots l_n$ $A_{k_1 k_2 \ldots k_m}^{l_1 l_2 \ldots l_n}$ — любая матрица из $\mathbf{A}_{k_1 k_2 \ldots k_m}$, а при произвольных $m, k_1, k_2, \ldots k_m$ $A_{k_1 k_2 \ldots k_m}^{l_1 l_2 \ldots l_n}$ — любая матрица из $\mathbf{A}^{l_1 l_2 \ldots l_n}$.

Отсюда и из (3), (4) следует: $\mathbf{A}_{k_1 k_2 \ldots k_m}$ и $\mathbf{A}^{l_1 l_2 \ldots l_n}$ — алгебры; алгебра $\mathbf{A}_{k_1 k_2 \ldots k_m}$ — правый идеал, а алгебра $\mathbf{A}^{l_1 l_2 \ldots l_n}$ — левый идеал для $\mathbf{A}$;

$$\mathbf{A}_{k_1 k_2 \ldots k_m}^{l_1 l_2 \ldots l_n} = \mathbf{A}_{k_1 k_2 \ldots k_m} \cap \mathbf{A}^{l_1 l_2 \ldots l_n} = \mathbf{A}_{k_1 k_2 \ldots k_m} \mathbf{A}^{l_1 l_2 \ldots l_n} . \tag{5}$$

$\mathbf{A}_{k_1 k_2 \ldots k_m}^{l_1 l_2 \ldots l_n}$ — левый идеал для $\mathbf{A}_{k_1 k_2 \ldots k_m}$ и правый идеал для $\mathbf{A}^{l_1 l_2 \ldots l_n}$.

§ 4. Рассмотрим алгебру $\mathbf{A}^{12 \ldots m}$; в матрицах этой алгебры элементы, неравные нулю, стоят в первых m колоннах (назовём такие матрицы „m-кратными колоннами").

Обозначим через $\mathbf{A}_{(12 \ldots m)}^{12 \ldots m}$ совокупность матриц из $\mathbf{A}^{12 \ldots m}$, в которых первые m строк состоят из нулей; $\mathbf{A}_{(12 \ldots m)}^{12 \ldots m}$ тоже алгебра, и при этом нулевая (см. § 2); она — инвариантная субалгебра для $\mathbf{A}^{12 \ldots m}$.

Легко видеть, что

$$\mathbf{A}_{(12 \ldots m)}^{12 \ldots m} \mathbf{A}_{12 \ldots m}^{12 \ldots m} \subset \mathbf{A}_{(12 \ldots m)}^{12 \ldots m} ;$$

$$\mathbf{A}_{12 \ldots m}^{12 \ldots m} \mathbf{A}_{(12 \ldots m)}^{12 \ldots m} = \mathbf{A}_{12 \ldots m}^{12 \ldots m} \cap \mathbf{A}_{(12 \ldots m)}^{12 \ldots m} = 0.$$

С другой стороны, всякая матрица A из $\mathbf{A}^{12 \ldots m}$ однозначно представляется в виде

$$A = X + Y,$$

где

$$X \in \mathbf{A}_{12 \ldots m}^{12 \ldots m}, \qquad Y \in \mathbf{A}_{(12 \ldots m)}^{12 \ldots m} .$$

Следовательно, $\mathbf{A}^{12 \ldots m}$ есть сумма алгебр $\mathbf{A}_{12 \ldots m}^{12 \ldots m}$ и $\mathbf{A}_{(12 \ldots m)}^{12 \ldots m}$; но эта сумма не прямая.

$$\mathbf{A}^{12 \ldots m} = \mathbf{A}_{12 \ldots m}^{12 \ldots m} \dot{+} \mathbf{A}_{(12 \ldots m)}^{12 \ldots m} . \tag{6}$$

Так как алгебра $\mathbf{A}_{12\ldots m}^{12\ldots m}$ всех матриц конечного порядка m над полем P — полупростая (даже простая), то, следовательно, $\mathbf{A}_{(12\ldots m)}^{12\ldots m}$ есть радикал для алгебры $\mathbf{A}^{12\ldots m}$.

Заметим, что нильпотентами алгебры $\mathbf{A}^{12\ldots m}$ являются не только все матрицы из $\mathbf{A}_{(12\ldots m)}^{12\ldots m}$. Пусть N—нильпотентная матрица m-го порядка (т. е. такая, все характеристические корни которой равны нулю), т. е. $N \in \mathbf{A}_{12\ldots m}^{12\ldots m}$, а X — любая матрица из $\mathbf{A}_{(12\ldots m)}^{12\ldots m}$; тогда $N+X$ — нильпотентная матрица; и обратно: всякая нильпотентная матрица из $\mathbf{A}^{12\ldots m}$ представляется в таком виде.

Действительно, пусть α — наименьший показатель, для которого $N^{\alpha}=0$; найдём: $(N+X)^2=N^2+Y$, где $Y=XN \in \mathbf{A}_{(12\ldots m)}^{12\ldots m}$; подобно же: $(N^2+Y)^2=(N+X)^4=N^4+Z$, где $Z \in \mathbf{A}_{(12\ldots m)}^{12\ldots m}$ и т. д.; если $2^{\beta} \geqslant \alpha$, то $(N+X)^{2^{\beta}}=U$, где $U \in \mathbf{A}_{(12\ldots m)}^{12\ldots m}$; наконец, $(N+X)^{2^{\beta}+1}=U^2=0$.

Обратно, если $M=N+X$, $N \in \mathbf{A}_{12\ldots m}^{12\ldots m}$, $X \in \mathbf{A}_{(12\ldots m)}^{12\ldots m}$ и $M^{\alpha}=0$, то ведь $N=M+(-X)$; $-X \in \mathbf{A}_{(12\ldots m)}^{12\ldots m}$, и мы так же найдём: $N^{\gamma}=0$, где $\gamma \geqslant \alpha$.

Если A матрица из $\mathbf{A}^{12\ldots m}$, и $A=A'+A''$, где $A' \in \mathbf{A}_{12\ldots m}^{12\ldots m}$, $A'' \in \mathbf{A}_{(12\ldots m)}^{12\ldots m}$, а $X \in \mathbf{A}^{12\ldots m}$ — любая матрица, то

$$XA=XA'. \tag{7}$$

Найдём теперь все идемпотенты алгебры $\mathbf{A}^{12\ldots m}$. Конечно, единичная матрица m-го порядка $E_{12\ldots m}$ $\left(\text{единица для алгебры } \mathbf{A}_{12\ldots m}^{12\ldots m}\right)$ идемпотентна. Заметим, что $E_{12\ldots m}$ — правая единица для $\mathbf{A}^{12\ldots m}$. Но правых единиц в алгебре $\mathbf{A}^{12\ldots m}$ бесчисленное множество; все они представляются в виде

$$E_{12\ldots m}+X, \tag{8}$$

где X—любая матрица из $\mathbf{A}_{(12\ldots m)}^{12\ldots m}$. Действительно, если $Y \in \mathbf{A}^{12\ldots m}$ любая матрица, то по (7):

$$Y(E_{12\ldots m}+X)=YE_{12\ldots m}=Y;$$

с другой стороны, пусть F какая-нибудь правая единица для $\mathbf{A}^{12\ldots m}$;

$$F=F'+F'',\quad F' \in \mathbf{A}_{12\ldots m}^{12\ldots m},\quad F'' \in \mathbf{A}_{(12\ldots m)}^{12\ldots m};$$

тогда [по (7)]

$$YF=YF'=Y,$$

т. е. F' — правая единица для $\mathbf{A}^{12\ldots m}_{12\ldots m}$; но тогда

$$E_{12\ldots m}F' = E_{12\ldots m} = F',$$

т. е. F имеет вид (8).

Левых единиц в алгебре $\mathbf{A}^{12\ldots m}$ нет.

Но матрицы вида (8) ещё не исчерпывают всех идемпотентов алгебры $\mathbf{A}^{12\ldots m}$. Ведь и алгебра $\mathbf{A}^{12\ldots m}_{12\ldots m}$ матриц конечного порядка имеет бесчисленное множество идемпотентов кроме $E_{12\ldots m}$.

Пусть $F = F' + F''$ некоторый идемпотент из $\mathbf{A}^{12\ldots m}$;

$$F' \in \mathbf{A}^{12\ldots m}_{12\ldots m}, \qquad F'' \in \mathbf{A}^{12\ldots m}_{(12\ldots m)};$$

тогда

$$F^2 = (F' + F'')(F' + F'') = F'^2 + F''F' = F = F' + F''.$$

Отсюда

$$F'^2 = F', \qquad F''F' = F''.$$

Обратно, пусть F' — любой идемпотент из $\mathbf{A}^{12\ldots m}_{12\ldots m}$, а F'' такая матрица из $\mathbf{A}^{12\ldots m}_{(12\ldots m)}$, что $F''F' = F''$ (чтобы найти такую матрицу F'' из $\mathbf{A}^{12\ldots m}_{(12\ldots m)}$, достаточно взять любую матрицу $X \in \mathbf{A}^{12\ldots m}_{(12\ldots m)}$ и положить $F'' = XF'$); тогда $(F' + F'')^2 = F' + F''$, т. е. $F = F' + F''$ есть идемпотент.

§ 5. Разберём вопрос о разрешимости линейных уравнений

$$AX = B, \qquad YA = B \tag{9}$$

в алгебре $\mathbf{A}^{12\ldots m}$. Обозначим: $A = A' + A''$, $B = B' + B''$, $X = X' + X''$, $Y = Y' + Y''$, где матрицы, обозначенные буквами с одним штрихом, принадлежат алгебре $\mathbf{A}^{12\ldots m}_{12\ldots m}$, а матрицы, обозначенные буквами с двумя штрихами, принадлежат алгебре $\mathbf{A}^{12\ldots m}_{(12\ldots m)}$.

Рассмотрим 1-е уравнение (9):

$$(A' + A'')(X' + X'') = B' + B''; \tag{9a}$$

или

$$A'X' + A''X' = B' + B'';$$

следовательно:

$$A'X' = B', \; A''X' = B''. \tag{10}$$

Это даёт для каждой колонны X' систему линейных уравнений с одними и теми же коэфициентами при неизвестных; число уравнений здесь не меньше, чем число неизвестных (m). Эта система (10) может иметь решения или не иметь их (критериум её разрешимости — так называемая теорема Кронекера—Капелли). Отметим случай, когда матрица A', как матрица m-го порядка, неособенная; в таком случае уравнение $A'X' = B'$ имеет единственное решение: $X' = A'^{-1}B'$; если оно удовлетворяет и уравнению $A''X' = B''$, то уравнение (9a) разрешимо, причём матрица $X'' \in \mathbf{A}^{12\ldots m}_{(12\ldots m)}$ может быть любая. То есть в этом случае существует бесчисленное множество решений.

Теперь рассмотрим 2-е уравнение (9):

$$(Y' + Y'')(A' + A'') = B' + B''; \qquad \text{(9b)}$$

или

$$Y'A' + Y''A' = B' + B'';$$

таким образом:

$$Y'A' = B', \quad Y''A' = B''. \qquad (11)$$

Это даёт для каждой строки Y' и Y'' систему m линейных уравнений с m неизвестными, причём коэфициенты у различных систем одни и те же (колонны матрицы A'); критериум разрешимости каждой системы (по той же теореме Кронекера—Капелли) один и тот же. Отметим опять случай, когда A', как матрица m-го порядка, неособенная; в таком случае уравнения (11) имеют единственное решение:

$$Y' = B'A'^{-1}, \quad Y'' = B''A'^{-1}.$$

В частности, если $B = E_{12\ldots m}$ т. е. $B' = E_{12\ldots m}$, $B'' = 0$, то получаем из (10): $A'X' = E_{12\ldots m}$, т. е. A' (как матрица m-го порядка) неособенная, $X' = A'^{-1}$ тоже неособенная; но тогда из 2-го уравнения (10): $A''X' = 0$ следует, что при $A'' \neq 0$ решения не существует. Следовательно, правая обратная матрица существует только при $A = A'$, $A'' = 0$, т. е. $A \in \mathbf{A}^{12\ldots m}_{12\ldots m}$; при этом этих правых обратных матриц бесчисленное множество; они выражаются в виде: $A'^{-1} + X''$, где $X'' \in \mathbf{A}^{12\ldots m}_{(12\ldots m)}$ — произвольна.

Далее, из (11) получаем при $B' = E_{12\ldots m}$: $Y'A' = E_{12\ldots m}$, $Y''A' = B'' = 0$; отсюда следует: A' должна быть неособенная, $Y' = A'^{-1}$, $Y'' = 0$ (так как A' неособенная); т. е. левая обратная матрица имеется у всякой матрицы $A = A' + A''$, где A' неособенная, и только одна: A'^{-1}.

§ 6. Рассмотрим ещё частный случай, когда $m = 1$, т. е. алгебру $\mathbf{A}^1$. Это алгебра всех матриц из $\mathbf{A}$, в которых все элементы, кроме элементов 1-й колонны, равны нулю (такие матрицы назовём „простыми колоннами"). Обозначим через e_0 матрицу, состоящую из нулей кроме 1-го элемента 1-й колонны, который $= 1$; подобно же, обозначим через u_λ матрицу, состоящую из нулей, кроме $(\lambda + 1)$-го элемента 1-й колонны, который $= 1$. ($\lambda = 1, 2, \ldots$ in inf.). Эти матрицы $e_0, u_1, u_2, \ldots$ являются „основными единицами" для алгебры $\mathbf{A}^1$; всякая матрица из $\mathbf{A}^1$ представляется в виде

$$A = ae_0 + a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots + a_n u_n, \qquad (12)$$

где $a, a_1, a_2, \ldots a_n$ — числа из $\mathbf{P}$, а n — произвольное натуральное число. Основные единицы перемножаются по следующим формулам:

$$e_0^2 = e_0; \quad u_\lambda e_0 = u_\lambda; \quad e_0 u_\lambda = 0; \quad u_\varkappa u_\lambda = 0 \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots \text{ in inf.}).$$

Алгебра $\mathbf{A}_1^1$ состоит из элементов: ae_0, где $a \in \mathbf{P}$; она изоморфна полю $\mathbf{P}$. Алгебра $\mathbf{A}_{(1)}^1$ состоит из элементов: $a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots + a_n u_n$; это — нулевая алгебра.

Если A — матрица (12), а X — любая матрица из $\mathbf{A}^1$, то $XA = Xa$, т. е. умножение здесь сводится к умножению на скаляр. Отсюда легко следует, что всякая матрица A из $\mathbf{A}^1$ удовлетворяет алгебраическому уравнению

$$x^2 - ax = 0, \tag{13}$$

где a — число из $\mathbf{P}$. В частности, матрица из $\mathbf{A}_{(1)}^1$ удовлетворяет уравнению $x^2 = 0$.

Идемпотентами алгебры $\mathbf{A}^1$ являются матрицы вида:

$$F = e_0 + c_1 u_1 + c_2 u_2 + \cdots + c_n u_n,$$

где n — произвольное натуральное число, а $c_1, c_2, \ldots c_n$ — произвольные числа из $\mathbf{P}$. В частности, идемпотентами являются матрицы:

$$e_\lambda = e_0 + u_\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots \text{in inf.}).$$

Если заменить в (12) u_λ через $e_\lambda - e_0$, то получим:

$$A = (a - a_1 - a_2 - \cdots - a_n) e_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_n e_n =$$
$$= a_0 e_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_n e_n,$$

где $a_0 = a - a_1 - a_2 - \cdots - a_n$. Можно вместо u_λ ввести e_λ ($\lambda = 1, 2, \ldots$ in inf.), как „основные единицы“ алгебры $\mathbf{A}^1$; все эти „единицы“ идемпотентны, причём их произведения определяются формулой:

$$e_\lambda e_\mu = e_\lambda \qquad (\lambda, \mu = 0, 1, 2, \ldots \text{in inf.});$$

это — новое определение алгебры $\mathbf{A}^1$.

§ 7. Возвращаясь к общему случаю алгебры $\mathbf{A}^{12\ldots m}$, сделаем некоторые обобщения.

Можно вместо алгебры $\mathbf{A}^{12\ldots m}$ рассматривать алгебру $\mathbf{A}^{k_1 k_2 \ldots k_m}$ матриц, каждая из которых состоит из нулей, кроме её колонн с номерами $k_1, k_2, \ldots k_m$. Здесь субалгебрам $\mathbf{A}_{12\ldots m}^{12\ldots m}$ и $\mathbf{A}_{(12\ldots m)}^{12\ldots m}$ соответствуют субалгебры $\mathbf{A}_{k_1 k_2 \ldots k_m}^{k_1 k_2 \ldots k_m}$ и $\mathbf{A}_{(k_1 k_2 \ldots k_m)}^{k_1 k_2 \ldots k_m}$; первая из них изоморфна алгебре конечных матриц m-го порядка (над $\mathbf{P}$), вторая — нулевая алгебра, при этом инвариантная субалгебра для $\mathbf{A}^{k_1 k_2 \ldots k_m}$; и здесь $\mathbf{A}^{k_1 k_2 \ldots k_m}$ есть сумма (но не прямая) этих двух субалгебр;

$$\mathbf{A}_{k_1 k_2 \ldots k_m}^{k_1 k_2 \ldots k_m} \mathbf{A}_{(k_1 k_2 \ldots k_m)}^{k_1 k_2 \ldots k_m} = \mathbf{A}_{k_1 k_2 \ldots k_m}^{k_1 k_2 \ldots k_m} \cap \mathbf{A}_{(k_1 k_2 \ldots k_m)}^{k_1 k_2 \ldots k_m} = 0,$$

но

$$\mathbf{A}_{(k_1 k_2 \ldots k_m)}^{k_1 k_2 \ldots k_m} \mathbf{A}_{k_1 k_2 \ldots k_m}^{k_1 k_2 \ldots k_m} \subset \mathbf{A}_{(k_1 k_2 \ldots k_m)}^{k_1 k_2 \ldots k_m}$$

(даже вместо знака $\subset$ можно взять знак $=$, поскольку единица из

$A^{k_1 k_2 \dots k_m}_{k_1 k_2 \dots k_m}$ — правая единица и для $A^{k_1 k_2 \dots k_m}_{(k_1 k_2 \dots k_m)}$). Алгебра $A^{k_1 k_2 \dots k_m}_{(k_1 k_2 \dots k_m)}$ — радикал для $A^{k_1 k_2 \dots k_m}$.

Можно рассматривать алгебры $A_{12\dots m}$ и $A_{k_1 k_2 \dots k_m}$ (алгебры „m-кратных строк"). Их свойства такие же, как и алгебр $A^{12\dots m}$ и $A^{k_1 k_2 \dots k_m}$, только „повёрнуты в другую сторону". Так, например, алгебра $A_{12\dots m}$ представляется как сумма (не прямая)

$$A_{12\dots m} = A^{12\dots m}_{12\dots m} + A^{(12\dots m)}_{12\dots m};$$

$A^{12\dots m}_{12\dots m}$, как и раньше, алгебра всех конечные матриц m-го порядка над полем P, а $A^{(12\dots m)}_{12\dots m}$ — алгебра всех матриц из $A_{12\dots m}$, в которых элементы первых m колонн равны нулю; $A^{(12\dots m)}_{12\dots m}$ — нулевзя алгебра, радикал алгебры $A_{12\dots m}$.

Здесь

$$A^{(12\dots m)}_{12\dots m} A^{12\dots m}_{12\dots m} = A^{(12\dots m)}_{12\dots m} \cap A^{12\dots m}_{12\dots m} = 0;$$

$$A^{12\dots m}_{12\dots m} A^{(12\dots m)}_{12\dots m} = A^{(12\dots m)}_{12\dots m}.$$

Единица $E_{12\dots m}$ алгебры $A^{12\dots m}_{12\dots m}$ является левой единицей для всей алгебры $A_{12\dots m}$; кроме $E_{12\dots m}$, все суммы $E_{12\dots m} + X$, где $X \in A^{(12\dots m)}_{12\dots m}$, являются левыми единицами для $A_{12\dots m}$. Правых единиц алгебра $A_{12\dots m}$ не имеет.

Теоремы, относящиеся к разрешимости линейных уравнений или к существсванию обратных матриц, для алгебры $A_{12\dots m}$ такие же, как и в § 5 для алгебры $A^{12\dots m}$, только каждый раз надо переставить слова „правый" и „левый".

Возможны и дальнейшие обобщения. Из двух слагаемых $A^{12\dots m}_{12\dots m}$ и $A^{12\dots m}_{(12\dots m)}$ алгебры $A^{12\dots m}$ первое — алгебра конечного порядка, второе же — нулевая, локально-конечная алгебра. Но выведенные выше свойства алгебры $A^{12\dots m}$ совсем не основаны на том, что алгебра $A^{12\dots m}_{(12\dots m)}$ именно локально-конечна. Поэтому все выведенные свойства остаются в силе, если это условие отбросить и заменить другими. А именно:

Можно рассматривать алгебру $A^{12\dots m}_{12\dots m+n}$ прямоугольных матриц, состоящих из $m+n$ строк и m колонн; здесь

$$A^{12\dots m}_{12\dots m+n} = A^{12\dots m}_{12\dots m} + A^{12\dots m}_{m+1,\dots m+n};$$

первое слагаемое — алгебра всех квадратных матриц m-го порядка (над P), а второе слагаемое — нулевая алгебра конечного порядка, радикал алгебры $\mathbf{A}^{12\ldots m}_{12\ldots m+n}$. Аналогично можно рассмотреть алгебру $\mathbf{A}^{12\ldots m+n}_{12\ldots m}$ прямоугольных матриц, состоящих из m строк и $m+n$ колонн.

Можно, наконец, рассмотреть бесконечную алгебру $\breve{\mathbf{A}}^{12\ldots m}$, состоящую из матриц, имеющих m колонн и бесчисленное множество строк („все" строки) с элементами, отличными от нуля. Здесь тоже

$$\breve{\mathbf{A}}^{12\ldots m} = \mathbf{A}^{12\ldots m}_{12\ldots m} + \breve{\mathbf{A}}^{12\ldots m}_{(12\ldots m)},$$

где $\breve{\mathbf{A}}^{12\ldots m}_{(12\ldots m)}$ — радикал для $\breve{\mathbf{A}}^{12\ldots m}$, нулевая алгебра матриц, в которых в первых m колоннах может быть бесчисленное множество элементов, отличных от нуля. Аналогично можно рассмотреть бесконечную алгебру $\breve{\mathbf{A}}_{12\ldots m}$ матриц, где первые m строк могут иметь бесчисленное множество элементов, отличных от нуля.

§ 8. Найдём теперь алгебраическое уравнение с коэфициентами из $\mathbf{P}$, которому удовлетворяет матрица $A = A' + A''$ из $\mathbf{A}^{12\ldots m}$; здесь $A' \in \mathbf{A}^{12\ldots m}_{12\ldots m}$, $A'' \in \mathbf{A}^{12\ldots m}_{(12\ldots m)}$. Имеем: $A^2 = A'^2 + A''A'$; $A^3 = A'^3 + A''A'^2$; вообще $A^k = A'^k + A''A'^{k-1} = (A' + A'')A'^{k-1} = AA'^{k-1}$. Так как в алгебре $\mathbf{A}^{12\ldots m}$ нет общей единицы, то следует брать только целые рациональные функции без свободного члена, т. е. вида:

$$F(t) = t^{k+1} + c_1 t^k + \cdots + c_{k-1} t^2 + c_k t;$$

но тогда

$$F(A) = (A' + A'')(A'^k + c_1 A'^{k-1} + \cdots + c_{k-1} A' + c_k E_{12\ldots m}) =$$

$$= F(A') + A'' \left[\frac{F(t)}{t}\right]_{t = A'}.$$

Если $F(A) = 0$, то должно быть:

$$F(A') = 0; \quad A'' \left[\frac{F(t)}{t}\right]_{t = A} = 0.$$

Отсюда заключаем:

Необходимым условием для того, чтобы было $F(A) = 0$, является делимость полинома $F(t)$ на $t\psi(t)$ (где $\psi(t)$ минимальный полином для A'), если A' — неособенная (как матрица m-го порядка), или на $\psi(t)$, если A' — особенная матрица (ибо тогда $\psi(t)$ имеет множителем t). Достаточным условием в обоих случаях является делимость полинома $F(t)$ на $t\psi(t)$.

Таким образом, всякая матрица алгебры $\mathbf{A}^{12\ldots m}$ удовлетворяет алгебраическому уравнению в поле $\mathbf{P}$ степени не выше $(m+1)$-ой.

Тот же результат получим и для алгебр $\mathbf{A}_{12\ldots m}$, $\mathbf{A}^{12\ldots m}_{12\ldots m+n}$, $\breve{\mathbf{A}}^{12\ldots m}$, $\mathbf{A}^{12\ldots m+n}_{12\ldots m}$, $\breve{\mathbf{A}}_{12\ldots m}$, $\mathbf{A}^{k_1 k_2 \ldots k_m}$ и т. д.

Если матрица A принадлежит к радикалу соответствующей алгебры, то для неё минимальное уравнение: $A^2=0$ (если только A — не нулевая матрица).

§ 9. Мы должны рассмотреть ещё алгебру $\mathbf{A}_{k_1 k_2 \ldots k_m}^{l_1 l_2 \ldots l_n}$ с любыми номерами $k_1, k_2, \ldots k_m$ и $l_1, l_2, \ldots l_n$. Если ни одно k_λ не совпадает ни с одним l_μ, то алгебра $\mathbf{A}_{k_1 k_2 \ldots k_m}^{l_1 l_2 \ldots l_n}$, очевидно, нулевая. Если же ряды номеров $k_1, k_2, \ldots k_m$ и $l_1, l_2, \ldots l_n$ имеют непустое пересечение, то, не нарушая общности, можно положить, что эти общие номера — первые. То есть, мы можем рассмотреть такую алгебру:

$$\mathbf{B}=\mathbf{A}_{12\ldots m\, k_1 k_2 \ldots k_r}^{12\ldots m\, l_1 l_2 \ldots l_s};$$

здесь m, r, s — произвольные натуральные числа; ни одно k_λ не равно ни одному l_μ; каждое k_λ и $l_\mu > m$.

Очевидно, что

$$\mathbf{B}=\mathbf{A}_{12\ldots m}^{12\ldots m}+\mathbf{A}_{k_1 k_2 \ldots k_r}^{12\ldots m}+\mathbf{A}_{12\ldots m}^{l_1 l_2 \ldots l_s}+\mathbf{A}_{k_1 k_2 \ldots k_r}^{l_1 l_2 \ldots l_s}; \tag{16}$$

мы обозначим:

$$\mathbf{B}_1=\mathbf{A}_{12\ldots m}^{12\ldots m};\ \mathbf{B}_2=\mathbf{A}_{k_1 k_2 \ldots k_r}^{12\ldots m};\ \mathbf{B}_3=\mathbf{A}_{12\ldots m}^{l_1 l_2 \ldots l_s};\ \mathbf{B}_4=\mathbf{A}_{k_1 k_2 \ldots k_r}^{l_1 l_2 \ldots l_s}.$$

Здесь $\mathbf{B}_1=\mathbf{A}_{12\ldots m}^{12\ldots m}$ (как и раньше) алгебра всех матриц m-го порядка над полем $\mathbf{P}$; 3 остальные алгебры в правой части (16) нулевые. Затем:

$$\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2=\mathbf{B}_3\mathbf{B}_1=\mathbf{B}_1\mathbf{B}_4=\mathbf{B}_4\mathbf{B}_1=\mathbf{B}_2\mathbf{B}_4=\mathbf{B}_4\mathbf{B}_2=\mathbf{B}_3\mathbf{B}_4=\mathbf{B}_4\mathbf{B}_3=\mathbf{B}_3\mathbf{B}_2=0;$$

$$\mathbf{B}_2\mathbf{B}_1=\mathbf{B}_2;\quad \mathbf{B}_1\mathbf{B}_3=\mathbf{B}_3;\quad \mathbf{B}_2\mathbf{B}_3\subset\mathbf{B}_4.$$

Таким образом, если A и B две матрицы из алгебры $\mathbf{B}$, и если, согласно (16), мы имеем однозначные разложения:

$$A=A_1+A_2+A_3+A_4;\qquad B=B_1+B_2+B_3+B_4,$$

то

$$AB=A_1B_1+A_2B_1+A_1B_3+A_2B_3=(A_1+A_2)(B_1+B_3); \tag{17}$$

здесь

$$A_1B_1\in\mathbf{B}_1,\quad A_2B_1\in\mathbf{B}_2,\quad A_1B_3\in\mathbf{B}_3,\quad A_2B_3\in\mathbf{B}_4.$$

Таким образом, „четвёртые компоненты“ A_4, B_4 наших матриц совсем не участвуют в умножении.

Если $B_1=0$, то $AB=A_1B_3+A_2B_3\in\mathbf{B}_3+\mathbf{B}_4$. Если же $A_1=0$, то $AB=A_2B_1+A_2B_3\in\mathbf{B}_2+\mathbf{B}_4$. Наконец, если $A_1=B_1=0$, то $AB=A_2B_3\in\mathbf{B}_4$.

Отсюда следует, что $\Omega=\mathbf{B}_2+\mathbf{B}_3+\mathbf{B}_4$ — нильпотентная алгебра индекса 3 (ибо $\Omega^2\neq0$, тогда как $\Omega^3=0$), при этом инвариантная субалгебра, и именно, радикал для $\mathbf{B}$.

§ 10. Пусть снова $A=A_1+A_2+A_3+A_4\in\mathbf{B}$; $A_1\in\mathbf{B}_1$, $A_2\in\mathbf{B}_2$, $A_3\in\mathbf{B}_3$, $A_4\in\mathbf{B}_4$. (Будем называть A_1, A_2, A_3, A_4 — „компонентами“ A; A_1 — 1-й, A_2 — 2-й и т. д. компонент).

По (17) имеем:

$$A^2 = (A_1 + A_2)(A_1 + A_3) = A_1^2 + A_2 A_1 + A_1 A_3 + A_2 A_3;$$

здесь A_1^2, $A_2 A_1$, $A_1 A_3$, $A_2 A_3$ — компоненты A^2 (с номерами в том же порядке, как они стоят).

Далее:

$$A^3 = (A_1^2 + A_2 A_1)(A_1 + A_3) = A_1^3 + A_2 A_1^2 + A_1^2 A_3 + A_2 A_1 A_3$$

и т. д.; методом полной индукции легко найдём:

$$A^k = A_1^k + A_2 A_1^{k-1} + A_1^{k-1} A_3 + A_2 A_1^{k-2} A_3, \tag{18}$$

где в правой части 4 компонента A^k с номерами в том же порядке, как они стоят.

Пусть $A_1 = 0$; тогда: $A = A_2 + A_3 + A_4$; $A^2 = A_2 A_3$; $A^3 = 0$; т. е. всякая матрица из Ω нильпотентна индекса 3 (или ниже); это нам было известно.

Пусть теперь A — любой нильпотент из **B** индекса α; тогда, следовательно, по (18)

$$A^\alpha = A_1^\alpha + A_2 A_1^{\alpha-1} + A_1^{\alpha-1} A_3 + A_2 A_1^{\alpha-2} A_3 = 0; \tag{19}$$

но так как разложение на 4 компонента однозначно, то

$$A_1^\alpha = 0, \quad A_2 A_1^{\alpha-1} = 0, \quad A_1^{\alpha-1} A_3 = 0, \quad A_2 A_1^{\alpha-2} A_3 = 0.$$

Отсюда видно, что для равенства (19) достаточно, чтобы $A_1^{\alpha-2} = 0$ и необходимо, чтобы $A_1^\alpha = 0$. Итак, если A_1 — нильпотентная матрица m-го порядка индекса $\varkappa$, то $A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$ нильпотентная матрица нашей алгебры **B** индекса $\leqslant \varkappa + 2$ и $\geqslant \varkappa$. При этом компоненты A_2, A_3, A_4 могут быть взяты произвольно из соответствующих алгебр. Всякий нильпотент из **B** представляется в таком виде (или принадлежит к Ω).

Найдём теперь идемпотенты алгебры **B**; пусть $F = F_1 + F_2 + F_3 + F_4$ такой идемпотент, разложенный на компоненты. Имеем:

$$F^2 = F_1^2 + F_2 F_1 + F_1 F_3 + F_2 F_3 = F = F_1 + F_2 + F_3 + F_4;$$

следовательно:

$$F_1^2 = F_1, \; F_2 F_1 = F_2, \; F_1 F_3 = F_3, \; F_2 F_3 = F_4 \tag{20}$$

Эти условия необходимы и достаточны для того, чтобы F был идемпотент. Первое условие (20) говорит, что F_1 — один из идемпотентов алгебры $\mathbf{B}_1$; 2-е и 3-е условия легко осуществить, взяв любые матрицы: $X_2 \in \mathbf{B}_2$, $X_3 \in \mathbf{B}_3$ и положив: $X_2 F_1 = F_2$, $F_1 X_3 = F_3$; 4-е условие (20) определяет F_4. Таким образом, алгебра **B** имеет бесчисленное множество идемпотентов, получающихся таким образом из идемпотентов алгебры $\mathbf{B}_1$. Заметим, что за F_1 можно взять единичную матрицу $E_{12\ldots m}$; тогда F_2 и F_3 можно выбрать произвольно из $\mathbf{B}_2$ и $\mathbf{B}_3$ (ибо $E_{12\ldots m}$ — правая единица для $\mathbf{B}_2$ и левая единица для $\mathbf{B}_3$).

Общей правой или общей левой единицы алгебра **B** не имеет.

§ 11. Рассмотрим теперь линейное уравнение вида

$$AX = B, \tag{21}$$

где $X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$ — неизвестная матрица. Разложив, как и раньше, A и B на компоненты, мы найдём из (21)

$$(A_1 + A_2)(X_1 + X_3) = B_1 + B_2 + B_3 + B_4.$$

Отсюда

$$A_1 X_1 = B_1, \quad A_2 X_1 = B_2, \quad A_1 X_3 = B_3, \quad A_2 X_3 = B_4. \tag{22}$$

Первые 2 равенства (22) заменяют m систем $m + r$ линейных уравнений с m неизвестными (для каждой колонны в X_1); вторые 2 равенства (22) заменяют s систем $m + r$ линейных уравнений с m неизвестными (для каждой колонны в X_3); если все эти системы имеют решения, то мы определим X_1 и X_3; X_2 и X_4 остаются произвольными. Следовательно, если система (21) имеет решения, то их — бесчисленное множество. Аналогично можно рассмотреть уравнение:

$$YA = B, \tag{21a}$$

где $Y = Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4$ — неизвестная матрица. Здесь Y_1 и Y_2 определяются из (21a), причём решений может и не существовать; Y_3 и Y_4 остаются произвольными.

При $B = E_{12\ldots m}$ получаем уравнения:

$$AX = E_{12\ldots m}; \quad YA = E_{12\ldots m}. \tag{23}$$

Решения этих уравнений назовём „обратными" к A матрицами — правой и левой. (22) здесь дают:

$$A_1 X_1 = E_{12\ldots m}, \quad A_2 X_1 = 0, \quad A_1 X_3 = 0, \quad A_2 X_3 = 0. \tag{24}$$

Первое из этих равенств говорит о том, что A_1 должна быть неособенной матрицей (как матрица m-го порядка); в этом случае $X_1 = A_1^{-1}$; но тогда остальные равенства (24) дают: $A_2 = 0$, $X_3 = 0$. Таким образом „правые обратные" матрицы существуют только у матриц вида

$$A = A_1 + 0 + A_3 + A_4,$$

где A_1 — неособенная матрица (как матрица m-го порядка), а A_3, A_4 — произвольны (из соответствующих алгебр); в таком случае эти „правые обратные" матрицы имеют вид:

$$X = A_1^{-1} + X_2 + 0 + X_4,$$

где X_2, X_4 — произвольны (из соответствующих алгебр).

Аналогичный результат получим для „левых обратных" матриц; они существуют у матриц вида

$$A = A_1 + A_2 + 0 + A_4,$$

где A_1 — неособенная (как матрица m-го порядка), а A_2 и A_4 — произвольны (из соответствующих алгебр); эти „левые обратные" матрицы таковы:

$$Y = A_1^{-1} + 0 + Y_3 + Y_4,$$

где Y_3 Y_4 — произвольны (из соответствующих алгебр).

§ 12. Наконец, разберём вопрос: каким алгебраическим уравнениям в поле **P** удовлетворяют матрицы из алгебры **B**. Так как в этой алгебре нет общей единицы, то мы должны брать только целые рациональные функции без свободного члена:

$$F(t) = t^{k+1} + c_1 t^k + c_2 t^{k-1} + \cdots + c_{k-1} t^2 + c_k t.$$

Подставив сюда вместо t матрицу $A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$ и приняв во внимание (18), получим:

$$F(A) = F(A_1) + A_2 \left[\frac{F(t)}{t}\right]_{t=A_1} + \left[\frac{F(t)}{t}\right]_{t=A_1} A_3 +$$

$$+ \left\{ A_2 \left[\frac{F(t) - c_k t}{t^2}\right]_{t=A_1} A_3 + c_k A_4 \right\} \cdot$$

Если $F(A) = 0$, то отсюда следует, что $F(A_1) = 0$ и остальные компоненты $F(A)$ равны нулю. Таким образом, необходимым условием для этого является: $F(t)$ должно делиться на $t\psi(t)$, где $\psi(t)$ — минимальный полином для A_1; это в том случае, если A_1 — неособенная (как матрица m-го порядка); если же A_1 особенная, то $F(t)$ должно делиться на $\psi(t)$ (ибо $\psi(t)$ имеет в таком случае множителем t).

Достаточным условием для того, чтобы $F(A) = 0$, является то, чтобы $F(t)$ делилось на $t^2\psi(t)$; в частности, если $F(t) = t^2\psi(t)$.

Так как степень $\psi(m) \leqslant m$, то, следовательно, всякая матрица из алгебры **B** удовлетворяет алгебраическому уравнению (в поле **P**) степени $\leqslant m+2$. В частности, матрица из Ω удовлетворяет уравнению $t^3 = 0$.

§ 13. Сказанное в предыдущем параграфе об алгебрах **B** непосредственно переносится и на алгебры несколько более общего вида: $\mathbf{A}_{k_1 k_2 \ldots k_m}^{l_1 l_2 \ldots l_n}$, где m и n — произвольные натуральные числа, а ряды $k_1, k_2, \ldots k_m$ и $l_1, l_2, \ldots l_n$ имеют некоторую общую часть: $t_1, t_2, \ldots t_r$; в таком случае алгебра $\mathbf{A}_{k_1 k_2 \ldots k_m}^{l_1 l_2 \ldots l_n}$ представляется в виде суммы:

$$\mathbf{A}_{k_1 k_2 \ldots k_m}^{l_1 l_2 \ldots l_n} = \mathbf{A}_{t_1 t_2 \ldots t_r}^{t_1 t_2 \ldots t_r} + \mathbf{A}_{k_1' k_2' \ldots k'_{m-r}}^{t_1 t_2 \ldots t_r} + \mathbf{A}_{t_1 t_2 \ldots t_r}^{l_1' l_2' \ldots l'_{n-r}} +$$

$$+ \mathbf{A}_{k_1' k_2' \ldots k'_{m-r}}^{l_1' l_2' \ldots l_{n-r}}; \tag{25}$$

здесь $\mathbf{A}_{t_1 t_2 \ldots t_r}^{t_1 t_2 \ldots t_r}$ по существу есть алгебра всех конечных матриц r-го порядка (над **P**); остальные 3 члена в правой части (25) — нулевые алгебры; их сумма — нильпотентная алгебра индекса 3, радикал алгебры $\mathbf{A}_{k_1 k_2 \ldots k_m}^{l_1 l_2 \ldots l_n}$.

Переходя теперь к общей нашей алгебре **A**, получаем такие следствия из предыдущего:

Алгебра **A** не имеет радикала (полупростая). Это следует из того, что ни одна матрица из **A** не является собственно-нильпотентной; ибо всякая матрица из **A** — конечна, а следовательно, принадлежит к некоторой алгебре матриц конечного порядка, а такая алгебра не имеет собственно-нильпотентных матриц.

Всякая матрица из **A** удовлетворяет некоторому алгебраическому уравнению в поле **P**, ибо всякая матрица из **A** принадлежит также некоторой алгебре $\mathbf{A}^{l_1 l_2 \ldots l_n}_{k_1 k_2 \ldots km}$; но только совокупность степеней всех этих уравнений не имеет верхней границы.