по определению всегда равна c, если время синхронизуется вдоль данной замкнутой линии. Поэтому искомое время равно

$$t = \frac{L}{c} \pm \frac{2\Omega}{c^2} S,$$

где L — длина контура. Соответственно этому скорость света, измеренная как отношение L/t, оказывается равной

$$c \mp 2\Omega \frac{S}{L}.$$

Эту формулу можно легко вывести, как и формулу для первого приближения эффекта Допплера, и чисто классическим путем.

ГЛАВА X

УРАВНЕНИЯ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

§ 87. Тензор кривизны

Вернемся опять к понятию параллельного переноса вектора. Как было сказано в § 80, в общем случае неэвклидова пространства бесконечно малый параллельный перенос вектора определяется как перенос, при котором компоненты вектора не меняются в системе координат, декартовой в данном бесконечно малом элементе объема.

Если $x^i = x^i(s)$ есть параметрическое уравнение некоторой кривой (s — длина дуги, отсчитываемая от некоторой точки), то вектор $u^i = \frac{du^i}{ds}$ есть единичный вектор, касательный к кривой. Если рассматриваемая кривая является геодезической, то, как мы видели в § 74, вдоль нее $Du^i = 0$ [см. (82,2)]. Это значит, что если вектор u^i подвергнуть параллельному переносу из точки x^i на геодезической линии в точку $x^i + dx^i$ на той же линии, то он совпадет с вектором $u^i + du^i$, касательным к линии в точке $x^i + dx^i$. Таким образом, при передвижении касательной к геодезической линии вдоль этой самой линии она передвигается параллельно самой себе.

Благодаря этому свойству геодезических линий мы можем сказать, что при параллельном переносе любого вектора его составляющие по геодезическим линиям во всех точках пути должны быть неизменны; другими словами, при параллельном переносе вектор должен сохранять все время один и тот же угол с геодезическими линиями.

Весьма существенным является то обстоятельство, что в неэвклидовом пространстве параллельный перенос вектора из одной заданной точки в другую дает разные результаты, если перенос совершается по разным путям. В частности, отсюда следует, что если переносить вектор параллельно самому себе по некоторому замкнутому контуру, то он, возвратившись в первоначальную точку, не совпадет с самим собой.

Для того, чтобы уяснить это, рассмотрим неэвклидово двухмерное пространство, т. е. какую-нибудь кривую поверхность. На рис. 15 изображен кусок такой поверхности, ограниченный тремя геодезическими линиями. Подвергнем вектор *1* параллельному переносу вдоль контура, образованного этими линиями. При передвижении вдоль линии AB вектор *1*, сохраняя все время одинаковый угол с этой линией, перейдет в вектор *2*. При передвижении вдоль BC он таким же образом перейдет в *3*. Наконец, при движении из C в A вдоль кривой CA, сохраняя постоянный угол с этой кривой, рассматриваемый вектор перейдет в *1'*, не совпадающий с вектором *1*.

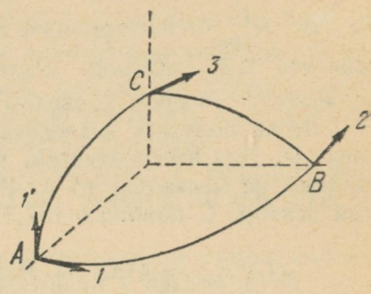

Рис. 15.

Выведем общую формулу, определяющую изменение вектора при параллельном переносе по некоторому бесконечно малому замкнутому контуру. Это изменение ΔA_k можно, очевидно, написать в виде $\oint \delta A_k$, где интеграл берется по данному контуру. Подставляя вместо δA_k выражение (80,5), мы имеем

$$\Delta A_k = \oint \Gamma^i_{kl} A_i dx^l$$

(стоящий под интегралом вектор A_i меняется по мере его переноса вдоль контура). Этот криволинейный интеграл мы можем преобразовать с помощью теоремы Стокса (6,14) в интеграл по поверхности, огибаемой данным контуром. Тогда

$$\Delta A_k = \frac{1}{2}\int \left[\frac{\partial(\Gamma^i_{km} A_i)}{\partial x^l} - \frac{\partial(\Gamma^i_{kl} A_i)}{\partial x^m}\right] df^{lm} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \left[\frac{\partial \Gamma^i_{km}}{\partial x^l} A_i - \frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial x^m} A_i + \Gamma^i_{km}\frac{\partial A_i}{\partial x^l} - \Gamma^i_{kl}\frac{\partial A_i}{\partial x^m}\right] df^{lm}.$$

Но изменение вектора A_i вдоль контура есть его изменение благодаря параллельному переносу; поэтому производные от A_i мы можем определить прямо из $\delta A_i = \Gamma^n_{il} A_n dx^l$, т. е. $\frac{\partial A_i}{\partial x^l} = \Gamma^n_{il} A_n$. Подставляя это и меняя обозначение индексов в двух последних членах под интегралом, находим:

$$\Delta A_k = \frac{1}{2}\int \left\{\frac{\partial \Gamma^i_{km}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial x^m} + \Gamma^i_{nl}\Gamma^n_{km} - \Gamma^i_{nm}\Gamma^n_{kl}\right\} A_i df^{lm}.$$

В виду бесконечной малости замкнутого контура мы можем заменить подинтегральное выражение его значением в некоторой точке внутри контура и вынести из-под знака интеграла. Оставшийся интеграл даст тогда просто площадь Δf^{lm} поверхности, огибаемой контуром, и мы получаем окончательно

$$\Delta A_k = \frac{1}{2} R^i_{klm} A_i \Delta f^{lm}, \tag{87,1}$$

1130

где R^i_{klm} — тензор 4-го ранга:

$$R^i_{klm} = \frac{\partial \Gamma^i_{km}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial x^m} + \Gamma^i_{nl}\Gamma^n_{km} - \Gamma^i_{nm}\Gamma^n_{kl}. \tag{87,2}$$

То, что R^i_{klm} — тензор, видно из того, что в (87,1) слева стоит вектор — разность ΔA_k значений вектора в одной и той же точке. Тензор R^i_{klm} называется тензором кривизны или тензором Римана-Кристоффеля.

Легко получить аналогичную формулу для контравариантного вектора A^k. Для этого заметим, что поскольку при параллельном переносе скаляры не меняются, то $\Delta(A^k B_k) = 0$, где B_k — некоторый ковариантный вектор. С помощью (87,1) имеем отсюда

$$\Delta(A^k B_k) = A^k \Delta B_k + B_k \Delta A^k = \frac{1}{2} A^k B_i R^i_{klm} \Delta f^{lm} + B_k \Delta A^k =$$

$$= B_k \left(\Delta A^k + \frac{1}{2} A^i R^k_{ilm} \Delta f^{lm}\right) = 0,$$

или, в виду произвольности вектора B_k:

$$\Delta A^k = -\frac{1}{2} R^k_{ilm} A^i \Delta f^{lm}. \tag{87,3}$$

Если дважды ковариантно продифференцировать вектор A_i по x^k и по x^l, то результат зависит, вообще говоря, от порядка дифференцирования, в противоположность тому, что имеет место для обычных производных. Оказывается, что разность $A_{i;k;l} - A_{i;l;k}$ определяется тем же тензором кривизны, который мы ввели выше. А именно, имеет место формула

$$A_{i;k;l} - A_{i;l;k} = A_m R^m_{ikl}, \tag{87,4}$$

которую легко проверить непосредственным вычислением (это вычисление мы здесь для краткости опускаем). Аналогично, для контравариантного вектора

$$A^i_{;k;l} - A^i_{;l;k} = -A^m R^i_{mkl}. \tag{87,5}$$

Наконец, легко получить аналогичные формулы для вторых производных от тензоров [это проще всего сделать, рассматривая, например, вместо тензора A_{ik} частный случай тензора вида $A_i B_k$ и пользуясь при этом формулами (87,4), (87,5); полученные таким образом формулы в силу их линейности имеют место для любого тензора].

Очевидно, что в эвклидовом пространстве тензор кривизны равен нулю. Действительно, в эвклидовом пространстве можно выбрать координаты, в которых во всем пространстве все $\Gamma^i_{kl} = 0$, а потому и $R^i_{klm} = 0$. В силу тензорного характера R^i_{klm}, он равен тогда нулю и в любой другой системе координат. Это связано с тем, что в эвклидовом пространстве параллельный перенос вектора из одной точки в другую есть однозначная операция, а при обходе замкнутого контура вектор не меняется. В эвклидовом пространстве можно, очевидно, менять порядок ковариантного дифференцирования.

Имеет место и обратная теорема: если $R^i_{klm}=0$, то пространство эвклидово. Действительно, во всяком пространстве можно выбрать систему координат, декартову в данном бесконечно малом участке. Если же $R^i_{klm}=0$, то параллельный перенос есть однозначная операция, и при помощи параллельного переноса декартовой системы из данного бесконечно малого участка во все остальные можно построить декартову систему во всем пространстве, т. е. пространство эвклидово.

Таким образом, равенство или неравенство нулю тензора кривизны является критерием, позволяющим определить, является ли пространство эвклидовым или нет.

Заметим, что хотя в неэвклидовом пространстве и можно выбрать систему координат, которая была бы декартовой в данной точке, т. е. такую, чтобы в данной точке все Γ^i_{kl} обратились в нуль, но при этом тензор кривизны в этой точке не обращается в нуль (так как производные от Γ^i_{kl} не обращаются в нуль вместе с Γ^i_{kl}).

§ 88. Свойства тензора кривизны

Из выражения (87,2) для тензора R^i_{klm} непосредственно следует, что тензор кривизны антисимметричен по индексам l и m:

$$R^i_{klm}=-R^i_{kml}. \tag{88,1}$$

Далее, легко проверить, что имеет место следующее тождество:

$$R^i_{klm}+R^i_{mkl}+R^i_{lmk}=0. \tag{88,2}$$

Наряду со смешанным тензором кривизны R^i_{klm} употребляют также ковариантный тензор кривизны

$$R_{iklm}=g_{in}R^n_{klm}. \tag{88,3}$$

С помощью простых преобразований легко получить следующее выражение для R_{iklm}:

$$R_{iklm}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{im}}{\partial x^k\partial x^l}+\frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x^i\partial x^m}-\frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^k\partial x^m}-\frac{\partial^2 g_{km}}{\partial x^i\partial x^l}\right)+$$
$$+g_{np}(\Gamma^n_{kl}\Gamma^p_{im}-\Gamma^n_{km}\Gamma^p_{il}). \tag{88,4}$$

Из этого выражения непосредственно вытекают следующие свойства симметрии:

$$R_{iklm}=-R_{kilm}, \tag{88,5}$$
$$R_{iklm}=-R_{ikml}, \tag{88,6}$$
$$R_{iklm}=R_{lmik}. \tag{88,7}$$

Из этих формул следует, в частности, что все компоненты R_{iklm}, у когде R^i_{klm} — тензор 4-го ранга:

$$R^i_{klm} = \frac{\partial \Gamma^i_{km}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial x^m} + \Gamma^i_{nl}\Gamma^n_{km} - \Gamma^i_{nm}\Gamma^n_{kl}. \qquad (87,2)$$

То, что R^i_{klm} — тензор, видно из того, что в (87,1) слева стоит вектор — разность ΔA_k значений вектора в одной и той же точке. Тензор R^i_{klm} называется тензором кривизны или тензором Римана-Кристоффеля.

Легко получить аналогичную формулу для контравариантного вектора A^k. Для этого заметим, что поскольку при параллельном переносе скаляры не меняются, то $\Delta(A^kB_k) = 0$, где B_k — некоторый ковариантный вектор. С помощью (87,1) имеем отсюда

$$\Delta(A^kB_k) = A^k\Delta B_k + B_k\Delta A^k = \frac{1}{2} A^kB_iR^i_{klm}\Delta f^{lm} + B_k\Delta A^k =$$
$$= B_k\left(\Delta A^k + \frac{1}{2} A^iR^k_{ilm}\Delta f^{lm}\right) = 0,$$

или, в виду произвольности вектора B_k:

$$\Delta A^k = -\frac{1}{2} R^k_{ilm}A^i\Delta f^{lm}. \qquad (87,3)$$

Если дважды ковариантно продифференцировать вектор A_i по x^k и по x^l, то результат зависит, вообще говоря, от порядка дифференцирования, в противоположность тому, что имеет место для обычных производных. Оказывается, что разность $A_{i;k;l} - A_{i;l;k}$ определяется тем же тензором кривизны, который мы ввели выше. А именно, имеет место формула

$$A_{i;k;l} - A_{i;l;k} = A_mR^m_{ikl}, \qquad (87,4)$$

которую легко проверить непосредственным вычислением (это вычисление мы здесь для краткости опускаем). Аналогично, для контравариантного вектора

$$A^i_{;k;l} - A^i_{;l;k} = -A^mR^i_{mkl}. \qquad (87,5)$$

Наконец, легко получить аналогичные формулы для вторых производных от тензоров [это проще всего сделать, рассматривая, например, вместо тензора A_{ik} частный случай тензора вида A_iB_k и пользуясь при этом формулами (87,4), (87,5); полученные таким образом формулы в силу их линейности имеют место для любого тензора].

Очевидно, что в эвклидовом пространстве тензор кривизны равен нулю. Действительно, в эвклидовом пространстве можно выбрать координаты, в которых во всем пространстве все $\Gamma^i_{kl} = 0$, а потому и $R^i_{klm} = 0$. В силу тензорного характера R^i_{klm}, он равен тогда нулю и в любой другой системе координат. Это связано с тем, что в эвклидовом пространстве параллельный перенос вектора из одной точки в другую есть однозначная операция, а при обходе замкнутого контура вектор не меняется. В эвклидовом пространстве можно, очевидно, менять порядок ковариантного дифференцирования.

Имеет место и обратная теорема: если $R^i_{klm}=0$, то пространство эвклидово. Действительно, во всяком пространстве можно выбрать систему координат, декартову в данном бесконечно малом участке. Если же $R^i_{klm}=0$, то параллельный перенос есть однозначная операция, и при помощи параллельного переноса декартовой системы из данного бесконечно малого участка во все остальные можно построить декартову систему во всем пространстве, т. е. пространство эвклидово.

Таким образом, равенство или неравенство нулю тензора кривизны является критерием, позволяющим определить, является ли пространство эвклидовым или нет.

Заметим, что хотя в неэвклидовом пространстве и можно выбрать систему координат, которая была бы декартовой в данной точке, т. е. такую, чтобы в данной точке все Γ^i_{kl} обратились в нуль, но при этом тензор кривизны в этой точке не обращается в нуль (так как производные от Γ^i_{kl} не обращаются в нуль вместе с Γ^i_{kl}).

§ 88. Свойства тензора кривизны

Из выражения (87,2) для тензора R^i_{klm} непосредственно следует, что тензор кривизны антисимметричен по индексам l и m:

$$R^i_{klm}=-R^i_{kml}. \tag{88,1}$$

Далее, легко проверить, что имеет место следующее тождество:

$$R^i_{klm}+R^i_{mkl}+R^i_{lmk}=0. \tag{88,2}$$

Наряду со смешанным тензором кривизны R^i_{klm} употребляют также ковариантный тензор кривизны

$$R_{iklm}=g_{in}R^n_{klm}. \tag{88,3}$$

С помощью простых преобразований легко получить следующее выражение для R_{iklm}:

$$R_{iklm}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{im}}{\partial x^k\partial x^l}+\frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x^i\partial x^m}-\frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^k\partial x^m}-\frac{\partial^2 g_{km}}{\partial x^i\partial x^l}\right)+ \\ +g_{np}\left(\Gamma^n_{kl}\Gamma^p_{im}-\Gamma^n_{km}\Gamma^p_{il}\right). \tag{88,4}$$

Из этого выражения непосредственно вытекают следующие свойства симметрии:

$$R_{iklm}=-R_{kilm}, \tag{88,5}$$
$$R_{iklm}=-R_{ikml}, \tag{88,6}$$
$$R_{iklm}=R_{lmik}. \tag{88,7}$$

Из этих формул следует, в частности, что все компоненты R_{iklm}, у которых одна или обе из пар индексов i, k и l, m одинаковы, равны нулю.

Наконец, для R_{iklm}, как и для $R^i_{\ klm}$, имеет место тождество (88,2)

$$R_{iklm}+R_{imkl}+R_{ilmk}=0. \tag{88,8}$$

Больше того, в силу соотношений (88,5—7) отсюда следует, что если в R_{iklm} произвести одну и ту же циклическую перестановку над любыми тремя индексами и полученные три компоненты сложить, то результат будет равен нулю.

Наконец, докажем еще следующее тождество:

$$R^n_{\ ikl;m}+R^n_{\ imk;l}+R^n_{\ ilm;k}=0. \tag{88,9}$$

Его удобно проверить, воспользовавшись системой координат, декартовой в данной точке. В силу тензорного характера соотношение (88,9) будет тогда иметь место в любой системе координат. Дифференцируя выражение (88,2) и полагая потом в нем $\Gamma^i_{kl}=0$, находим в рассматриваемой точке

$$R^n_{\ ikl;m}=\frac{\partial R^n_{\ ikl}}{\partial x^m}=\frac{\partial^2\Gamma^n_{il}}{\partial x^m\partial x^k}-\frac{\partial^2\Gamma^n_{ik}}{\partial x^m\partial x^l}.$$

С помощью этого выражения легко убедиться в том, что (88,9) действительно имеет место.

Из тензора кривизны можно путем упрощения построить тензор 2-го ранга. Такое упрощение можно произвести только одним способом. Действительно, если мы упростим $R^m_{\ ikl}$ по индексам m и i, то получим нуль:

$$R^m_{\ mkl}=g^{im}R_{imkl}=0$$

в силу антисимметричности R_{imkl} по индексам i и m. Упрощение по m и l (упрощение по m и k даст, очевидно, то же самое с обратным знаком) дает тензор 2-го ранга

$$R_{ik}=R^l_{\ ikl}=\frac{\partial\Gamma^l_{il}}{\partial x^k}-\frac{\partial\Gamma^l_{ik}}{\partial x^l}+\Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km}-\Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm}. \tag{88,10}$$

Этот тензор, очевидно, симметричен:

$$R_{ik}=R_{ki}. \tag{88,11}$$

Наконец, упрощая R_{ik}, получим инвариант

$$R=g^{ik}R_{ik}=g^{im}g^{kl}R_{iklm}, \tag{88,12}$$

называемый скалярной кривизной пространства.

В силу соотношений (88,5—8), не все компоненты тензора кривизны независимы. Определим число независимых компонент тензора R_{iklm}. Рассмотрим сначала случай пространства с двумя измерениями, т. е. обычную поверхность; индексы i, k, l, m могут при этом иметь значения 1, 2. Компоненты, у которых одновременно i и k или l и m равны 1 или 2, равны нулю. Все же не равные нулю компоненты либо равны друг другу, либо отличаются знаком; таким образом, тензор кривизны имеет в этом случае только одну независимую компоненту, например R_{1212}. Легко найти, что скалярная кривизна $R = g^{im}g^{kl}R_{iklm}$ в этом случае равна $R = 2R_{1212}/g^2$ (g — детерминант, составленный из величин g_{ik}). R при этом оказывается равным известной гауссовой кривизне поверхности, т. е. единице, деленной на произведение главных радиусов кривизны.

Определим теперь число независимых компонент тензора кривизны в трехмерном пространстве. Рассмотрим те компоненты, у которых есть только два различных индекса, т. е. компоненты вида R_{abab}. Пару значений a и b можно выбрать из значений 1, 2, 3 тремя способами. Каждая пара a и b дает в силу соотношений (88,5 — 7) только одну независимую компоненту; таким образом, компонент такого типа будет всего три. Компонент с тремя разными индексами, т. е. компонент вида R_{abac}, тоже будет всего три: R_{1213}, R_{2123}, R_{3231}; все остальные равны этим или отличаются от них только знаком. Таким образом, в трехмерном пространстве тензор кривизны имеет шесть независимых компонент. Столько же компонент имеет симметрический тензор R_{ik}. Поэтому из линейных соотношений $R_{ik} = g^{ml}R_{likm}$ все компоненты тензора R_{iklm} могут быть выражены через R_{ik} и метрический тензор g_{ik}. Соответствующим выбором системы координат всегда можно добиться того, чтобы три компоненты тензора кривизны обратились в данной точке в нуль; в частности, можно привести тензор R_{ik} к главным осям. Таким образом, кривизна трехмерного пространства в каждой точке определяется тремя величинами.

Наконец, перейдем к четырехмерному пространству. Компонент тензора кривизны с двумя разными индексами (т. е. типа R_{abab}) всего шесть: индексы a и b можно выбрать из четырех значений 1, 2, 3, 4 шестью способами, а каждая пара значений дает одну независимую компоненту. Компонент с тремя разными индексами всего 12: три различных индекса из 1, 2, 3, 4 можно выбрать четырьмя способами, а каждая тройка значений дает три независимые компоненты (например, R_{1213}, R_{2123}, R_{3132}). Наконец, компонент, у которых все четыре индекса различны, имеется три: R_{1234}, R_{1423}, R_{1342}; остальные равны этим или отличаются только знаком. Но и из этих трех компонент только две независимы, так как все три связаны друг с другом одним тождеством (88,2) $R_{1234} + R_{1423} + R_{1342} = 0$. Таким образом, в четырехмерном пространстве тензор кривизны имеет всего 20 независимых компонент [1]). Соответствующим выбором системы координат можно добиться того,

[1]) Выпишем комбинации индексов i, k, l, m, дающие независимые компоненты

1212	1223	1313	1324	1423	2323	2424
1213	1224	1314	1334	1424	2324	2434
1214	1234	1323	1414	1434	2334	3434

причем $R_{1234} - R_{1324} + R_{1423} = 0$.

чтобы шесть компонент тензора кривизны обратились в нуль. (Шесть есть число возможных независимых поворотов четырехмерной системы координат.) Таким образом, кривизна четырехмерного пространства в каждой точке определяется 14 величинами.

§ 89. Действие для гравитационного поля

Для нахождения уравнений, определяющих гравитационное поле, необходимо предварительно определить действие S_g этого поля. Искомые уравнения получатся тогда путем варьирования суммы действий поля и материальных частиц.

Действие S_g, как и действие для электромагнитного поля, должно быть выражено в виде интеграла по всему полю, т. е. по всему пространству и по временной координате x^0 между двумя заданными ее значениями. Поскольку S_g должно быть инвариантом, то оно имеет вид

$$\int G\sqrt{-g}\,d\Omega,$$

где G — некоторый скаляр. Для определения этого скаляра мы будем исходить из того, что уравнения гравитационного поля должны содержать производные от „потенциалов“ поля не выше второго порядка (подобно тому, как это имеет место для уравнений электромагнитного поля). Поскольку уравнения поля получаются путем варьирования действия, то для этого необходимо, чтобы скаляр G содержал производные от g_{ik} не выше первого порядка; таким образом, G должно содержать только тензор g_{ik} и величины Γ^i_{kl}.

Однако, из одних только величин g_{ik} и Γ^i_{kl} невозможно построить инварианта. Это видно непосредственно из того обстоятельства, что посредством соответствующего выбора системы координат можно всегда обратить все величины Γ^i_{kl} в данной точке в нуль. Существует, однако, скаляр R — кривизна 4-пространства, — содержащий наряду с тензором g_{ik} и его первыми производными еще и вторые производные от g_{ik}, причем последние входят только линейно. Благодаря этой линейности инвариантный интеграл $\int R\sqrt{-g}\,d\Omega$ можно преобразовать с помощью теоремы Гаусса в интеграл от выражения, не содержащего вторых производных. Именно, $\int R\sqrt{-g}\,d\Omega$ можно представить в виде

$$\int R\sqrt{-g}\,d\Omega=\int G\sqrt{-g}\,d\Omega+\int\frac{\partial(\sqrt{-g}\,w^i)}{\partial x^i}\,d\Omega,$$

где G содержит только тензор g_{ik} и его первые производные, а подинтегральное выражение во втором интеграле имеет вид дивергенции некоторой величины w^i (подробное вычисление произведено в конце настоящего параграфа). Согласно теореме Гаусса этот второй интеграл можно преобразовать в интеграл по гиперповерхности, охватывающей 4-объем, по которому производится интегрирование в двух других интегралах. При варьировании действия вариация второго члена справа, следовательно, исчезает, так как по смыслу принципа наименьшего действия на границах интегрирования вариация поля равна нулю. Следовательно, мы можем написать

$$\delta\int R\sqrt{-g}\,d\Omega=\delta\int G\sqrt{-g}\,d\Omega.$$

Слева стоит скаляр; поэтому скаляром является и стоящее справа выражение (сам же интеграл $\int G\sqrt{-g}\,d\Omega$ скаляром, конечно, не является).

Величина G удовлетворяет поставленному выше требованию, так как содержит только g_{ik} и его первые производные. Поскольку, как видно из предыдущего, $\delta\int G\sqrt{-g}\,d\Omega$ является единственным таким инвариантом, то мы можем написать

$$\delta S_g=\frac{1}{2\varkappa c}\delta\int G\sqrt{-g}\,d\Omega=\frac{1}{2\varkappa c}\delta\int R\sqrt{-g}\,d\Omega, \tag{89,1}$$

где $\varkappa$ — новая универсальная постоянная. Аналогично тому, как это было сделано в § 27 для действия электромагнитного поля (но путем более сложных вычислений, которые мы не будем здесь производить), можно видеть, что постоянная $\varkappa$ должна быть положительна, — в противном случае S_g могло бы неограниченно уменьшаться (принимая сколь угодно большие по абсолютной величине отрицательные значения), т. е. не имело бы минимума.

Постоянная $\varkappa$ определенным образом связана с так называемой гравитационной постоянной; эта связь будет выяснена в § 92. Размерность $\varkappa$ следует непосредственно из (89,1). Действие имеет размерность $г\cdot см^2\cdot сек^{-1}$; все координаты можно считать имеющими размерность $см$, а g_{ik} — безразмерными, и, следовательно, R имеет размерность $см^{-2}$. В результате находим, что $\varkappa$ имеет размерность $см^{-1}\cdot г^{-1}\cdot сек^2$. Ее численное значение равно

$$\varkappa=2{,}073\cdot10^{-48}\ см^{-1}\cdot г^{-1}\cdot сек^2. \tag{89,2}$$

Заметим, что мы могли бы положить $\varkappa$ равной единице (или другому произвольному безразмерному числу). При этом, однако, определился бы выбор единицы для измерения массы, которая совпадала бы в этом случае с единицей измерения длины [1]).

Вычислим, наконец, величину G в (89,1). Из выражения (88,10) для R_{ik} имеем:

$$\sqrt{-g}R=\sqrt{-g}\,g^{ik}R_{ik}=$$

$$=\sqrt{-g}\left\{g^{ik}\frac{\partial\Gamma^l_{il}}{\partial x^k}-g^{ik}\frac{\partial\Gamma^l_{ik}}{\partial x^l}+g^{ik}\Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km}-g^{ik}\Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm}\right\}.$$

---

[1]) Иногда полагают $\varkappa c^2=8\pi$; тогда масса измеряется в $см$, причем 1 $см=1{,}35\cdot10^{28}$ $г$. Массу, измеренную в этих единицах, называют гравитационным радиусом тела.

В первых двух членах справа имеем

$$\sqrt{-g}\,g^{ik}\frac{\partial\Gamma^l_{ik}}{\partial x^l}=\frac{\partial}{\partial x^l}(\sqrt{-g}\,g^{ik}\Gamma^l_{ik})-\Gamma^l_{ik}\frac{\partial}{\partial x^l}(\sqrt{-g}\,g^{ik}),$$

$$\sqrt{-g}\,g^{ik}\frac{\partial\Gamma^l_{il}}{\partial x^k}=\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{-g}\,g^{ik}\Gamma^l_{il})-\Gamma^l_{il}\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{-g}\,g^{ik}).$$

Опуская полные производные, находим

$$\sqrt{-g}\,G=\Gamma^l_{ik}\frac{\partial}{\partial x^l}(\sqrt{-g}\,g^{ik})-\Gamma^m_{im}\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{-g}\,g^{ik})+$$
$$+(\Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km}-\Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm})\,g^{ik}\sqrt{-g}.$$

С помощью формул (81,6) и (81,7) находим, что первые два члена справа равны $\sqrt{-g}$, помноженному на

$$\Gamma^m_{im}\Gamma^i_{kl}g^{kl}-2\Gamma^l_{ik}\Gamma^i_{lm}g^{mk}+\Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm}g^{ik}=g^{ik}(\Gamma^m_{lm}\Gamma^l_{ik}-2\Gamma^l_{mk}\Gamma^m_{li}+$$
$$+\Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm})=2g^{ik}(\Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm}-\Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km}).$$

Окончательно имеем

$$G=g^{ik}(\Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm}-\Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km}). \qquad (89,3)$$

§ 90. Тензор энергии-импульса

В § 32 было получено общее правило для выражения тензора энергии-импульса любой физической системы, действие которой представлено в виде интеграла (32,1) по 4-пространству. В криволинейных координатах этот интеграл должен быть написан в виде

$$S=\frac{1}{c}\int\Lambda\sqrt{-g}\,d\Omega \qquad (90,1)$$

(в галилеевых координатах $-g=c^2$ и S переходит в $\int\Lambda\,dV\,dt$). Интегрирование производится по всему (трехмерному) пространству и по времени между двумя заданными моментами, т. е. по бесконечной области 4-пространства, заключенной между двумя гиперповерхностями.

Как уже было указано в § 32, тензор энергии-импульса, определенный по формуле (32,5), не является, вообще говоря, симметричным, каким он должен быть. Для того, чтобы сделать его симметричным, необходимо было прибавить к выражению (32,5) надлежащим образом подобранный член вида $\frac{\partial}{\partial x^l}\psi_{ikl}$, где ψ_{ikl} антисимметрично по индексам k и l. Мы дадим теперь другой способ вычисления тензора энергии-импульса, обладающей тем преимуществом, что он сразу приводит к правильному выражению.

Произведем в (90,1) преобразование от координат x^i к координатам $x'^i=x^i+\xi^i$, где ξ^i — малые величины. При этом преобразовании компоненты g^{ik} преобразуются согласно общим формулам как

$$g^{ik}(x^l) = g'^{lm}(x'^l)\frac{\partial x^i}{\partial x'^l}\frac{\partial x^k}{\partial x'^m} = g'^{lm}\left(\delta^i_l - \frac{\partial \xi^i}{\partial x^l}\right)\left(\delta^k_m - \frac{\partial \xi^k}{\partial x^m}\right) \approx$$

$$\approx g'^{ik}(x'^l) - g'^{im}\frac{\partial \xi^k}{\partial x^m} - g'^{kl}\frac{\partial \xi^i}{\partial x^l}.$$

Тензор g'^{ik} является здесь функцией от x'^l, а тензор g^{ik} — функцией прежних координат x^l. Для того, чтобы представить все члены в виде функций от одних и тех же переменных, подставим в g'^{ik} $x'^l = x^l + \xi^l$ и разложим $g'^{ik}(x^l + \xi^l)$ по степеням ξ^l. Далее, пренебрегая членами высшего порядка по ξ^l, мы можем во всех членах, содержащих ξ^l, написать g^{ik} вместо g'^{ik}. Таким образом, находим

$$g^{ik}(x^l) = g'^{ik}(x^l) + \xi^l\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} - g^{il}\frac{\partial \xi^k}{\partial x^l} - g^{kl}\frac{\partial \xi^i}{\partial x^l}.$$

Легко убедиться путем непосредственной проверки, что последние три члена справа могут быть написаны в виде суммы $-\xi^{i;k} - \xi^{k;i}$ контравариантных производных от ξ^i. Таким образом, находим окончательно преобразование g^{ik} в виде

$$g'^{ik} = g^{ik} + \delta g^{ik}, \quad \delta g^{ik} = \xi^{i;k} + \xi^{k;i}. \tag{90,2}$$

Поскольку действие S есть скаляр, то при преобразовании координат оно не меняется. С другой стороны, изменение δS действия при преобразовании координат можно написать в следующем виде. Пусть, как и в § 32, q обозначают величины, определяющие ту физическую систему, к которой относится действие S. При преобразовании координат величины q меняются на δq. При вычислении δS можно, однако, не писать членов, связанных с изменениями q. Все эти члены все равно взаимно сокращаются в силу „уравнений движения“ физической системы, поскольку эти уравнения как раз и получаются путем приравнивания нулю вариации S по величинам q. Поэтому достаточно писать только члены, связанные с изменением g_{ik}. Воспользовавшись, как обычно, теоремой Гаусса и полагая на границах интегрирования $\delta g^{ik} = 0$, находим δS в виде

$$\delta S = \frac{1}{c}\int\left\{\frac{\partial\sqrt{-g}\Lambda}{\partial g^{ik}}\delta g^{ik} + \frac{\partial\sqrt{-g}\Lambda}{\partial\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}}\delta\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}\right\}d\Omega =$$

$$= \frac{1}{c}\int\left\{\frac{\partial\sqrt{-g}\Lambda}{\partial g^{ik}} - \frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\partial\sqrt{-g}\Lambda}{\partial\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}}\right\}\delta g^{ik}\,d\Omega.$$

Введем теперь обозначение

$$\frac{1}{2}\sqrt{-g}T_{ik} = \frac{\partial\sqrt{-g}\Lambda}{\partial g^{ik}} - \frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\partial\sqrt{-g}\Lambda}{\partial\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}}; \tag{90,3}$$

тогда δS примет вид [1]):

$$\delta S = \frac{1}{2c}\int T_{ik}\delta g^{ik}\sqrt{-g}\,d\Omega = -\frac{1}{2c}\int T^{ik}\delta g_{ik}\sqrt{-g}\,d\Omega \qquad (90,4)$$

(замечаем, что $g^{ik}\delta g_{ik} = -g_{ik}\delta g^{ik}$ и потому $T^{ik}\delta g_{ik} = -T_{ik}\delta g^{ik}$). Подставляя сюда для δg^{ik} выражение (90,2), имеем, воспользовавшись симметрией тензора T_{ik},

$$\delta S = \frac{1}{2c}\int T_{ik}(\xi^{i;k}+\xi^{k;i})\sqrt{-g}\,d\Omega = \frac{1}{c}\int T_{ik}\xi^{i;k}\sqrt{-g}\,d\Omega.$$

Далее, преобразуем это выражение следующим образом:

$$\delta S = \frac{1}{c}\int (T_i^k\xi^i)_{;k}\sqrt{-g}\,d\Omega - \frac{1}{c}\int T^k_{i;k}\xi^i\sqrt{-g}\,d\Omega. \qquad (90,5)$$

Первый интеграл с помощью (81,8) может быть написан в виде

$$\frac{1}{c}\int\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{-g}\,T_i^k\xi^i)\,d\Omega$$

и преобразован в интеграл на гиперповерхности. Поскольку на границах интегрирования ξ^i обращаются в нуль, то этот интеграл исчезает.

Таким образом, приравнивая δS нулю, находим:

$$\delta S = -\frac{1}{c}\int T^k_{i;k}\xi^i\sqrt{-g}\,d\Omega = 0.$$

В виду произвольности ξ^i отсюда следует, что

$$T^k_{i;k} = 0. \qquad (90,6)$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (32,4) $\frac{\partial T_{ik}}{\partial x^k} = 0$, имевшим место в галилеевых координатах, мы видим, что тензор T_{ik}, определяемый формулой (90,3), должен быть отождествлен с тензором энергии-импульса, — по крайней мере с точностью до постоянного множителя.

Покажем, что этот множитель равен единице, т. е. что T_{ik} из (90,3) есть в точности тензор энергии-импульса. Для этого вычислим вариацию δS действия при смещении одного из пределов интегрирования по времени, т. е. при бесконечно малом смещении одной из гиперповерхностей $x^0 = \mathrm{const}$. Такое смещение эквивалентно преобразованию координат $x^i = x'^i - \xi^i$ с не исчезающими на границе интегрирования (т. е. на гиперповерхности $x^0 = \mathrm{const}$.) величинами ξ^i. В выражении (90,5) для δS второй член теперь исчезает в силу уравнений (90,6). Первый же член, будучи преобразован по теореме Гаусса в интеграл по гиперповерхности, дает

$$\delta S = \frac{1}{c}\int T_i^k\sqrt{-g}\,\xi^i\,dS_k. \qquad (90,7)$$

---

[1]) Обращаем внимание на то, что в рассматриваемом случае величины δg_{ik} не независимы, так как являются результатом преобразования координат, которых имеется всего четыре. Поэтому из равенства δS нулю отнюдь не следует, что $T_{ik} = 0$. Заметим также, что выражение (90,4) для δS справедливо при любом варьировании g_{ik}.

С другой стороны, производные от действия связаны с 4-импульсом P_i посредством (см. § 82) соотношения

$$\delta S = -P_i \delta x^i.$$

В (90,7) ξ^i играют роль вариации координат. Мы видим, следовательно, из (90,7), что $\frac{1}{c} T_i^k \sqrt{-g}$ играет роль „плотности 4-импульса", приходящегося на единицу „площади гиперповерхности". Но это есть как раз то соотношение, которое должно связывать 4-импульс с тензором энергии-импульса (см. § 32) [1]).

Таким образом, формула (90,3) дает возможность вычислить тензор энергии-импульса путем дифференцирования Λ по компонентам метрического тензора (и их производных). При этом тензор T_{ik}, определенный по (90,3), является, очевидно, симметричным. Формула (90,3) удобна для вычисления тензора энергии-импульса не только в случае наличия гравитационного поля, но и при его отсутствии, когда метрический тензор не имеет самостоятельно смысла и переход к криволинейным координатам производится формально как промежуточный этап при вычислении T_{ik}. Так, с помощью (90,3) легко получить выражение (33,1) тензора энергии-импульса электромагнитного поля.

§ 91. Уравнения гравитационного поля

Мы можем теперь перейти к выводу уравнений гравитационного поля. Эти уравнения получаются из принципа наименьшего действия $\delta(S_m + S_g) = 0$, где S_g и S_m — действия, соответственно, для гравитационного поля и материи. Варьированию подвергается теперь гравитационное поле, т. е. величины g_{ik}.

Вычислим вариацию δS_g. Мы имеем:

$$\delta \int R\sqrt{-g}\, d\Omega = \delta \int g^{ik} R_{ik} \sqrt{-g}\, d\Omega =$$
$$= \int \left\{ R_{ik}\sqrt{-g}\, \delta g^{ik} + R_{ik} g^{ik} \delta\sqrt{-g} + g^{ik}\sqrt{-g}\, \delta R_{ik} \right\} d\Omega.$$

Из формулы (81,4) имеем

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\delta g = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\, g_{ik}\, \delta g^{ik};$$

подставляя это, находим

$$\delta \int R\sqrt{-g}\, d\Omega = \int \left(R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R\right) \delta g^{ik} \sqrt{-g}\, d\Omega +$$
$$+ \int g^{ik} \delta R_{ik} \sqrt{-g}\, d\Omega. \qquad (91,1)$$

---

[1]) В криволинейных координатах, т. е. в гравитационном поле, не существует вектора полного 4-импульса материи, так как интеграл $\int T_i^k \sqrt{-g}\, dS_k$ отнюдь не является вектором, поскольку закон преобразования вектора различен в разных точках пространства, так что сумма векторов, взятых в разных точках, не есть вектор (см. § 78). Подробнее о 4-импульсе материи в гравитационном поле см. § 97.

Для вычисления δR_{ik} заметим, что хотя величины Γ^i_{kl} и не составляют тензора, но их вариации $\delta\Gamma^i_{kl}$ есть тензор. Действительно, $\Gamma^k_{il}A_k\,dx^l$ есть изменение вектора при параллельном переносе [см. (80,5)] из некоторой точки P в бесконечно близкую к ней P'. Поэтому $\delta\Gamma^k_{il}A_k\,dx^l$ есть разность двух векторов, получающихся, соответственно, при двух параллельных переносах (с неварьированными и варьированными Γ^i_{kl}) из точки P в одну и ту же P'. Разность же двух векторов в одной и той же точке есть вектор, а потому $\delta\Gamma^i_{kl}$ есть тензор.

Воспользуемся системой координат, галилеевой в данной точке. Тогда в этой точке все $\Gamma^i_{kl}=0$. С помощью выражения (88,10) для R_{ik} имеем (помня, что первые производные от g^{ik} равны теперь нулю):

$$g^{ik}\delta R_{ik}=g^{ik}\left\{\frac{\partial}{\partial x^k}\delta\Gamma^l_{il}-\frac{\partial}{\partial x^l}\delta\Gamma^l_{ik}\right\}=g^{il}\frac{\partial}{\partial x^l}\delta\Gamma^k_{ik}-g^{ik}\frac{\partial}{\partial x^l}\delta\Gamma^l_{ik}=\frac{\partial w^l}{\partial x^l},$$

где

$$w^l=g^{il}\delta\Gamma^k_{ik}-g^{ik}\delta\Gamma^l_{ik}.$$

Поскольку w^l есть вектор, то мы можем написать полученное соотношение в произвольной системе координат в виде

$$g^{ik}\delta R_{ik}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^l}(\sqrt{-g}\,w^l)$$

[заменяя $\frac{\partial w^l}{\partial x^l}$ на $w^l_{;l}$ и пользуясь (81,8)]. Следовательно, второй интеграл справа в (91,1) равен

$$\int g^{ik}\delta R_{ik}\sqrt{-g}\,d\Omega=\int\frac{\partial\sqrt{-g}\,w^l}{\partial x^l}\,d\Omega$$

и по теореме Гаусса может быть преобразован в интеграл от w^l по гиперповерхности, охватывающей весь 4-объем. Поскольку на пределах интегрирования вариация поля равна нулю, то этот член исчезает. Таким образом, вариация δS_g равна

$$\delta S_g=\frac{1}{2c\varkappa}\int\left(R_{ik}-\frac{1}{2}g_{ik}R\right)\delta g^{ik}\sqrt{-g}\,d\Omega. \tag{91,2}$$

Заметим, что если бы мы исходили из выражения

$$S_g=\frac{1}{2c\varkappa}\int G\sqrt{-g}\,d\Omega$$

для действия поля, то мы получили бы, как легко убедиться,

$$\delta S_g=\frac{1}{2c\varkappa}\int\left\{\frac{\partial(G\sqrt{-g})}{\partial g^{ik}}-\frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\partial(G\sqrt{-g})}{\partial\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}}\right\}\delta g^{ik}\,d\Omega.$$

Сравнивая это с (91,2), находим следующее соотношение:

$$R_{ik}-\frac{1}{2}g_{ik}R=\frac{1}{\sqrt{-g}}\left\{\frac{\partial(G\sqrt{-g})}{\partial g^{ik}}-\frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\partial(G\sqrt{-g})}{\partial\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}}\right\}. \tag{91,3}$$

Для вариации действия материи мы можем написать непосредственно на основании (90,4):

$$\delta S_m = \frac{1}{2c}\int T_{ik}\delta g^{ik}\sqrt{-g}\,d\Omega, \tag{91,4}$$

где T_{ik} — тензор энергии-импульса материи (включая электромагнитное поле). Гравитационное взаимодействие играет роль только для тел с достаточно большой массой (благодаря малости гравитационной постоянной). Поэтому при исследовании гравитационного поля нам приходится обычно иметь дело с макроскопическими телами. Соответственно этому для T_{ik} надо обычно писать выражение (34,6). Благодаря тому, что мы теперь пользуемся координатой x^0 вместо x^4, и благодаря тому, что при принятом нами определении g_{ik} квадрат $u_i u^i = 1$, а не -1, то это выражение нужно теперь писать в виде

$$T_i^k = (p + \rho c^2)\,u_i\,u^k - \delta_i^k p. \tag{91,5}$$

Если же гравитационное поле создается электромагнитным излучением в пустоте, то для T_i^k надо было бы воспользоваться выражением (33,1): $T_i^k = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{4}F_{lm}^2\,\delta_i^k - F_{il}F^{kl}\right)$. Необходимо, однако, иметь в виду, что плотность энергии существующего в природе свободного излучения очень мала по сравнению с плотностями энергии материальных тел, включающими в себя их энергию покоя. Поэтому рассмотрение гравитационного поля, создаваемого электромагнитным полем в отсутствии масс, не представляет интереса.

Таким образом, из принципа наименьшего действия $\delta S_m + \delta S_g = 0$ мы находим с помощью соотношений (91,2) и (91,4):

$$\frac{1}{2\varkappa c}\int\left(R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R + \varkappa T_{ik}\right)\delta g^{ik}\sqrt{-g}\,d\Omega,$$

откуда, в виду произвольности δg^{ik}:

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R = -\varkappa T_{ik}, \tag{91,6}$$

или в смешанных компонентах

$$R_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k R = -\varkappa T_i^k. \tag{91,7}$$

Это и есть искомые уравнения гравитационного поля — основные уравнения общей теории относительности.

Упрощая (91,7) по индексам i и k, находим $R = \varkappa T$ $(T = T_i^i)$. Поэтому уравнения поля можно написать так же в виде

$$R_{ik} = -\varkappa\left(T_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}T\right). \tag{91,8}$$

Отметим, что уравнения гравитационного поля являются уравнениями нелинейными. Поэтому для гравитационных полей в отличие от электромагнитных (§ 27) не имеет места принцип суперпозиции.

В пустом пространстве $T_{ik}=0$, и уравнения гравитационного поля сводятся к уравнениям

$$R_{ik}=0. \qquad (91,9)$$

Напоминаем, что это отнюдь не значит, что пустое 4-пространство является плоским, — для этого требовалось бы, чтобы $R^i_{klm}=0$.

Тензор энергии-импульса электромагнитного поля обладает тем свойством, что $T^i_i=0$ [см. (33,2)]. Поскольку, с другой стороны, $R=\varkappa T$, то, следовательно, при наличии одного только электромагнитного поля без каких-либо масс скалярная кривизна пространства-времени равна нулю ($R=0$).

Как мы знаем, дивергенция $T^k_{i;k}$ тензора T^k_i равна нулю (§ 90); поэтому должна быть равной нулю и дивергенция левой части уравнения (91,7). Легко убедиться в том, что действительно имеет место тождество

$$R^k_{i;k}-\frac{1}{2}(\delta^k_i R)_{;k}=R^k_{i;k}-\frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial x^i}=0. \qquad (91,10)$$

Оно вытекает непосредственно из тождества (88,9) при умножении последнего на $g^{ik}\delta^l_n$ и последующем упрощении.

Таким образом, уравнения $T^k_{i;k}=0$ по существу содержатся в уравнениях поля (91,7). С другой стороны, из уравнений $T^k_{i;k}=0$ вытекают (см. §§ 33, 35) уравнения движения материальных частиц и вторая пара уравнений Максвелла. Таким образом, уравнения гравитационного поля содержат в себе также и уравнения для самой материи (материальных частиц и электромагнитного поля), которая создает это поле. В противоположность этому, уравнения электромагнитного поля (уравнения Максвелла) содержат в себе только уравнение сохранения полного заряда (уравнение непрерывности), но не уравнения движения этих создающих поле зарядов.

Поэтому в случае электромагнитного поля распределение и движение зарядов могут быть заданы произвольным образом, лишь бы полный заряд был постоянным; заданием этого распределения зарядов определяется тогда посредством уравнений Максвелла создаваемое ими поле. В гравитационном же поле распределение и движение создающей его материи отнюдь не могут быть заданы произвольным образом, — напротив, они должны быть определены (посредством решения уравнений поля при заданных начальных условиях) одновременно с самим создаваемым этой материей полем.

Необходимо, однако, отметить, что уравнения гравитационного поля не определяют распределения и движения материи целиком. Именно, эти уравнения не содержат в себе уравнение состояния вещества, т. е. уравнение, связывающее между собой давление и плотность. Это уравнение должно быть задано наряду с уравнениями поля.

Четыре координаты x^i могут быть подвергнуты произвольному преобразованию. Посредством этого преобразования можно произвольным образом выбрать четыре из десяти компонент тензора g_{ik}. Поэтому независимыми являются только шесть величин g_{ik}. Далее, четыре компоненты входящей в тензор энергии-импульса материи 4-скорости u^i связаны друг с другом соотношением $u^i u_i = 1$, так что независимыми являются только три из них. Таким образом, десять уравнений поля (91,6) действительно определяют десять неизвестных величин, именно, шесть компонент g_{ik}, три компоненты u^i и плотность ρ материи (или ее давление p).

Исключая из уравнений (91,6) четыре неизвестных, — скорость и плотность, — можно получить шесть уравнений, определяющих шесть величин g_{ik}. То, что для g_{ik} имеется всего шесть уравнений, видно и непосредственно из того, что 10 уравнений (91,6) связаны друг с другом четырьмя тождествами $T^k_{i;k} = 0$.

§ 92. Закон Ньютона

Произведем в полученных нами уравнениях гравитационного поля предельный переход к нерелятивистской механике, т. е. к $c \to \infty$. Как было указано в § 83, предположение о малости скоростей всех частиц требует одновременно, чтобы само гравитационное поле было слабым.

Выражения для компонент метрического тензора в рассматриваемом предельном случае были найдены в § 83:

$$g_{\alpha\beta} = -\delta_{\alpha\beta}, \quad g_{00} = c^2 + 2\varphi.$$

Далее, для компонент тензора энергии-импульса мы можем воспользоваться выражением (34,7) $T^k_i = \mu c^2 u_i u^k$ (мы меняем в нем знак по причинам, указанным уже в § 91), где μ — плотность массы тела (сумма масс частиц в единице объема). Что касается 4-скорости u^i, то поскольку макроскопическое движение тоже, конечно, считается медленным, то мы должны пренебречь всеми ее пространственными компонентами, оставив только временную, т. е. должны положить $u^\alpha = 0$, $u^0 = \frac{u_0}{c^2} = \frac{1}{c}$. Из всех компонент T^k_i останется, таким образом, только

$$T^0_0 = \mu c^2. \tag{92,1}$$

Скаляр $T = T^i_i$ будет равен тому же μc^2.

Уравнения поля мы напишем в форме (91,8):

$$R^k_i = -\varkappa\left(T^k_i - \frac{1}{2}\delta^k_i T\right);$$

при $i = k = 0$

$$R^0_0 = -\frac{\varkappa}{2}\mu c^2.$$

Все остальные уравнения, как легко убедиться, в рассматриваемом приближении тождественно обращаются в нуль.

Для вычисления R_0^0 замечаем, что из всех компонент Γ^i_{kl} отличны от нуля только компоненты $\Gamma^\alpha_{00} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha}$ (83,3). При подстановке этого значения в общее выражение (88,10) для R_{ik} получаем:

$$R_{00} = c^2 R_0^0 = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\alpha^2} \equiv -\Delta\varphi.$$

Таким образом, уравнения поля переходят в

$$\Delta\varphi = 4\pi k \mu, \qquad (92,2)$$

где

$$k = \frac{\varkappa c^4}{8\pi} = 6{,}664 \cdot 10^{-8}\ см^3 \cdot г^{-1} \cdot сек^{-2} \qquad (92,3)$$

называется ньютоновской гравитационной постоянной.

Уравнение (92,2) является уравнением гравитационного поля в нерелятивистской механике. Обращаем внимание на то, что оно полностью аналогично уравнению Пуассона (36,4) для электрического потенциала, в котором теперь вместо плотности заряда стоит плотность массы, умноженная на $-k$. Поэтому мы можем сразу написать общее решение уравнения (92,2) по аналогии с (36,8) в виде

$$\varphi = -k \int \frac{\mu\, dV}{R}. \qquad (92,4)$$

Эта формула определяет потенциал гравитационного поля любого распределения масс.

В частности, для потенциала поля одной частицы с массой m имеем

$$\varphi = -\frac{km}{R} \qquad (92,5)$$

и, следовательно, сила $F = -m' \frac{\partial \varphi}{\partial R}$, действующая в этом поле на другую частицу (массы m'), равна

$$F = -\frac{kmm'}{R^2}. \qquad (92,6)$$

Это — известный закон тяготения Ньютона [1]).

Потенциальная энергия частицы в гравитационном поле равна ее массе, умноженной на потенциал поля (§ 85), аналогично тому, что потенциальная энергия в электрическом поле равна произведению заряда на потенциал этого поля. Поэтому мы можем написать по аналогии с (37,1) для потенциальной энергии любого распределения масс выражение

$$U = -\frac{k}{2} \int \rho\varphi\, dV. \qquad (92,7)$$

---

[1]) Из (92,6) видно, что отношение гравитационных сил к электромагнитным у элементарных частиц весьма ничтожно. Так, для двух электронов $\frac{km^2}{e^2} = 2 \cdot 10^{-43}$, а для двух протонов $7 \cdot 10^{-37}$.

Наконец, напишем принцип наименьшего действия для гравитационного поля в нерелятивистской механике. Для интеграла действия частицы в гравитационном поле имеем теперь с помощью (76,1)

$$S_m = \int \left(\frac{mv^2}{2} - m\varphi \right) dt.$$

Для масс, распределенных в пространстве с плотностью μ, можно написать действие в виде

$$S_m = \int \left(\frac{\mu v^2}{2} - \mu\varphi \right) dV\, dt.$$

Что касается действия поля S_g, то его можно вычислить с помощью общего выражения (89,3) для G. При этом, однако, предельные значения g_{ik}, которыми мы до сих пор пользовались, оказываются недостаточными, — при подстановке их G обращается тождественно в нуль.

Поэтому для вычисления G необходимо предварительно вычислить g_{ik} с точностью для членов следующего порядка малости. Мы не будем приводить здесь этих вычислений и напишем только их окончательный результат:

$$S_g = -\frac{1}{4\pi k} \int (\nabla\varphi)^2 dV\, dt.$$

Таким образом, полное действие для гравитационного поля и материи имеет вид

$$S = \int \left[\frac{\mu v^2}{2} - \mu\varphi - \frac{1}{4\pi k} (\nabla\varphi)^2 \right] dV\, dt. \tag{92,8}$$

Легко убедиться, что варьирование по φ действительно приводит к уравнению Пуассона (92,2).

§ 93. Центрально-симметрическое гравитационное поле

Рассмотрим гравитационное поле, обладающее центральной симметрией. Такое поле может создаваться любым центрально-симметрическим распределением вещества; при этом, конечно, центрально-симметрическим должно быть не только распределение вещества, но и его движение, т. е. скорость в каждой точке должна быть направлена по радиусу.

Центральная симметрия поля означает, что метрика пространства-времени, т. е. выражение для интервала ds, должно быть одинаковым во всех точках, находящихся на одинаковом расстоянии от центра. В эвклидовом пространстве это расстояние равно радиусу-вектору; в неэвклидовом же пространстве, каким оно является при наличии гравитационного поля, нет величины, которая обладала бы всеми свойствами эвклидова радиуса-вектора (например, одновременно равной расстоянию до центра и деленной на 2π длине окружности). Поэтому выбор „радиуса-вектора" является теперь произвольным.

Если пользоваться „сферическими" пространственными координатами r, θ, φ, то наиболее общим центрально-симметрическим выражением для ds^2 является

$$ds^2 = h(r, t)\, dr^2 + k(r, t)(\sin^2\theta \cdot d\varphi^2 + d\theta^2) + l(r, t)\, dt^2 + a(r, t)\, dr\, dt,$$

где a, h, k, l — некоторые функции от „радиуса-вектора“ r и „времени“ t. Но, в виду произвольности в выборе системы отсчета в общей теории относительности, мы можем еще подвергнуть координаты любому преобразованию, не нарушающему центральной симметрии ds^2; это значит, что мы можем преобразовать координаты r и t посредством формул $r = f_1(r', t')$; $t = f_2(r', t')$, где f_1, f_2 — любые функции от новых координат r', t'. В частности, можно всегда выбрать временную координату таким образом, чтобы коэффициент при $dr\,dt$ в выражении для ds^2 обратился в нуль [1]). Вторым же возможным преобразованием мы пока не воспользуемся, имея в виду получить общие уравнения поля, в которых можно будет затем выбрать координату r различными способами. Величины h, k, l нам будет ниже удобнее писать в экспоненциальном виде, соответственно, как $-e^{\lambda}$, $-e^{\mu}$, e^{ν}, где λ, μ, ν — некоторые функции от r и t. Таким образом, мы будем пользоваться выражением для ds^2 в виде

$$ds^2 = e^{\nu}dt^2 - e^{\mu}(\sin^2\theta \cdot d\varphi^2 + d\theta^2) - e^{\lambda}dr^2. \tag{93,1}$$

Подразумевая под x^1, x^2, x^3, x^0, соответственно, координаты r, θ, φ, t, мы имеем, следовательно, для отличных от нуля компонент метрического тензора

$$g_{11} = -e^{\lambda}, \quad g_{22} = -e^{\mu}, \quad g_{33} = -\sin^2\theta \cdot e^{\mu}, \quad g_{00} = e^{\nu}. \tag{93,2}$$

С помощью этих значений легко определить по общей формуле (81,3) величины Γ^i_{kl}. Вычисление приводит к следующим выражениям (штрих означает дифференцирование по r, а точка над буквой — дифференцирование по t):

$$\left.\begin{array}{lll}
\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}\lambda', & \Gamma^1_{22} = -\frac{1}{2}e^{\mu-\lambda}\mu', & \Gamma^1_{33} = -\frac{1}{2}e^{\mu-\lambda}\sin^2\theta\cdot\mu', \\
\Gamma^0_{11} = -\frac{1}{2}e^{\lambda-\nu}\dot{\lambda}, & \Gamma^0_{22} = \Gamma^0_{33} = -\frac{1}{2}e^{\mu-\nu}\dot{\mu}, & \Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta, \\
\Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = \frac{1}{2}\mu', & \Gamma^3_{23} = \operatorname{ctg}\theta, & \Gamma^1_{00} = -\frac{1}{2}e^{\nu-\lambda}\nu', \\
\Gamma^1_{10} = \frac{1}{2}\dot{\lambda}, & \Gamma^2_{02} = \Gamma^3_{03} = \frac{1}{2}\dot{\mu}, & \Gamma^0_{00} = \frac{1}{2}\dot{\nu}. \\
\Gamma^0_{10} = \frac{1}{2}\nu', & &
\end{array}\right\} \tag{93,3}$$

Все остальные компоненты Γ^i_{kl} (кроме тех, которые отличаются от написанных перестановкой индексов k и l) равны нулю.

Далее, мы вычислим компоненты тензора $T^k_i = (p + \rho c^2)u_i u^k - \delta^k_i p$. Поскольку скорость вещества направлена везде по радиусу-вектору,

[1]) Надо отметить, что это условие не определяет выбор временной координаты однозначным образом. Именно, она может еще быть подвергнута любому преобразованию вида $t = f(t')$, не содержащему r.

то для компонент 4-скорости $u^i = \frac{dx^i}{ds}$ имеем (замечая, что $ds = dt\sqrt{e^\nu - e^\lambda \dot{r}^2}$):

$$\left.\begin{aligned} u^1 &= -e^{-\lambda} u_1 = \frac{\dot{r}}{\sqrt{e^\nu - e^\lambda \dot{r}^2}}, \quad u^2 = u^3 = 0, \\ u^0 &= e^{-\nu} u_0 = \frac{1}{\sqrt{e^\nu - e^\lambda \dot{r}^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{93,4}$$

Для компонент тензора T_i^k находим теперь

$$\left.\begin{aligned} T_1^1 &= -\frac{\rho c^2 \dot{r}^2 e^\lambda + p e^\nu}{e^\nu - e^\lambda \dot{r}^2}, \quad T_2^2 = T_3^3 = -p, \quad T_0^0 = \frac{\rho c^2 e^\nu + p \dot{r}^2 e^\lambda}{e^\nu - e^\lambda \dot{r}^2}, \\ T_0^1 &= -T_1^0 e^{\nu-\lambda} = (p + \rho c^2)\frac{\dot{r} e^\nu}{e^\nu - e^\lambda \dot{r}^2}. \end{aligned}\right\} \tag{93,5}$$

Остальные компоненты T_i^k равны нулю.

С помощью выражений (93,3) для Γ^i_{kl} можно теперь вычислить тензор R_{ik} по общей формуле (88,10) и затем написать уравнения гравитационного поля (91,7) $R_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k R = -\varkappa T_i^k$. Простые, но довольно длинные вычисления приводят в результате к следующим уравнениям:

$$-\varkappa T_1^1 = \varkappa \frac{\rho c^2 \dot{r}^2 e^\lambda + p e^\nu}{e^\nu - e^\lambda \dot{r}^2} = \frac{1}{2} e^{-\lambda}\left(\frac{\mu'^2}{2} + \mu'\nu'\right) - \\ - e^{-\nu}\left(\ddot{\mu} - \frac{1}{2}\dot{\mu}\dot{\nu} + \frac{3}{4}\dot{\mu}^2\right) - e^{-\mu}, \tag{93,6}$$

$$-\varkappa T_2^2 = \varkappa p = \frac{1}{4} e^{-\lambda}(2\nu'' + \nu'^2 + 2\mu'' + \mu'^2 - \mu'\lambda' - \nu'\lambda' + \mu'\nu') + \\ + \frac{1}{4} e^{-\nu}(\dot{\lambda}\dot{\nu} + \dot{\mu}\dot{\nu} - \dot{\lambda}\dot{\mu} - 2\ddot{\lambda} - \dot{\lambda}^2 - 2\ddot{\mu} - \dot{\mu}^2), \tag{93,7}$$

$$-\varkappa T_0^0 = -\varkappa \frac{\rho c^2 e^\nu + p \dot{r}^2 e^\lambda}{e^\nu - e^\lambda \dot{r}^2} = e^{-\lambda}\left(\mu'' + \frac{3}{4}\mu'^2 - \frac{\mu'\lambda'}{2}\right) - \\ - \frac{1}{2} e^{-\nu}\left(\dot{\lambda}\dot{\mu} + \frac{\dot{\mu}^2}{2}\right) - e^{-\mu}, \tag{93,8}$$

$$-\varkappa T_0^1 = -\varkappa \frac{(p + \rho c^2)\dot{r} e^\nu}{e^\nu - e^\lambda \dot{r}^2} = \frac{1}{2} e^{-\lambda}\left(-2\dot{\mu}' - \dot{\mu}\mu' + \dot{\lambda}\mu' + \nu'\dot{\mu}\right). \tag{93,9}$$

Воспользуемся теперь оставшейся у нас возможностью для выбора „радиус-вектора“ r. Часто бывает удобным выбирать r таким образом, чтобы длина окружности (с центром в начале координат) была равна $2\pi r$. Для этого необходимо, чтобы $e^\mu = r^2$ (тогда элемент дуги окружности в плоскости $\theta=\pi/2$ будет $dl=r\,d\varphi$ и длина всей окружности $\int dl=2\pi r$). Интервал ds^2 (93,1) принимает теперь вид:

$$ds^2=e^{\nu}dt^2-e^{\lambda}dr^2-r^2(\sin^2\theta\,d\varphi^2+d\theta^2), \tag{93,10}$$

а уравнения гравитационного поля [подставляя $\mu=2\ln r$ в (93,6—9)]:

$$\varkappa\frac{\rho c^2\dot{r}^2e^{\lambda}+pe^{\nu}}{e^{\nu}-e^{\lambda}\dot{r}^2}=e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{r}+\frac{1}{r^2}\right)-\frac{1}{r^2}, \tag{93,11}$$

$$\varkappa p=\frac{1}{2}e^{-\lambda}\left(\nu''+\frac{\nu'^2}{2}+\frac{\nu'-\lambda'}{r}-\frac{\nu'\lambda'}{2}\right)-\frac{1}{2}e^{-\nu}\left(\ddot{\lambda}+\frac{\dot{\lambda}^2}{2}-\frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{2}\right), \tag{93,12}$$

$$-\varkappa\frac{\rho c^2e^{\nu}+pe^{\lambda}\dot{r}^2}{e^{\nu}-e^{\lambda}\dot{r}^2}=e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2}-\frac{\lambda'}{r}\right)-\frac{1}{r^2}, \tag{93,13}$$

$$-\varkappa\frac{(p+\rho c^2)\dot{r}e^{\nu}}{e^{\nu}-e^{\lambda}\dot{r}^2}=e^{-\lambda}\frac{\dot{\lambda}}{r}. \tag{93,14}$$

Из этих уравнений можно, не решая их, вывести некоторые неравенства, которым должны удовлетворять λ и ν [при выборе ds^2 в виде (93,10)]. Из (93,13) видно, что при $r\to 0$ λ должно тоже обращаться в нуль, по крайней мере, как r^2; в противном случае правая часть (93,13) обратилась бы при $r=0$ в бесконечность, т. е. и T_0^0 имело бы в $r=0$ особую точку. С другой стороны, воспользовавшись тем, что $\lambda_{r=0}=0$, можно проинтегрировать (93,13) в виде

$$\lambda=-\ln\left\{1-\frac{\varkappa}{r}\int_0^r T_0^0\,r^2dr\right\}. \tag{93,15}$$

Поскольку, как видно из (93,5), всегда $T_0^0\geqslant 0$ (напоминаем, что $\dot{r}$ не может быть больше $e^{\nu-\lambda}$, — это соответствовало бы скорости, превышающей скорость света), то из (93,15) видно, что $\lambda\geqslant 0$, т. е.

$$e^{\lambda}\geqslant 1. \tag{93,16}$$

Далее, поскольку $-T_1^1\geqslant 0$ [как видно из (93,5)], то из уравнения (93,11) вместе с (93,16) следует, что $\nu'\geqslant 0$. С другой стороны, поскольку на бесконечном расстоянии от создающих поле масс метрика должна переходить в эвклидову (т. е. g_{ik} должны быть галилеевыми), то при $r\to\infty$ должно быть $e^{\nu}=c^2$ (при этом в бесконечности t совпадает с истинным временем). Из этих предельных условий и неравенства $\nu'\geqslant 0$ мы находим, что

$$e^{\nu}\leqslant c^2. \tag{93,17}$$

Расстояние от какой-либо точки поля до центра будет равно $\int\sqrt{-g_{11}}\,dr=\int e^{\lambda/2}\,dr\geqslant r$, а длина соответствующей окружности равна $2\pi r$. Таким образом, неравенство (93,16) показывает, что пространственная геометрия в центрально-симметрическом гравитационном поле такова, что отношение длины окружности к радиусу меньше, чем 2π.

Неравенство (93,17) $g_{00} \leqslant c^2$ в связи с формулой (79,1):

$$d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{g_{00}}\,dt,$$

определяющей истинное время, показывает, что в гравитационном поле происходит „замедление“ времени по сравнению со временем на больших расстояниях от масс, где поле исчезает (на бесконечности t есть истинное время). Иначе говоря, смещение спектральных линий в гравитационном поле (§ 85) происходит всегда в красную сторону[1]).

§ 94. Центрально-симметрическое гравитационное поле в пустоте

Рассмотрим центрально-симметрическое поле в пустоте, т. е. вне тех масс, которые создают это поле. Интервал ds^2 выберем в виде (93,10). В пустоте $\rho = 0$, $p = 0$ и уравнения поля (93,11), (93,13) и (93,14) принимают вид

$$e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) - \frac{1}{r^2} = 0, \tag{94,1}$$

$$e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2} = 0, \tag{94,2}$$

$$\dot{\lambda} = 0. \tag{94,3}$$

Четвертое уравнение [уравнение (93,12)] мы не пишем, так как оно оказывается следствием написанных уравнений.

Из (94,3) мы сразу видим, что λ не зависит от времени. Далее, складывая уравнения (94,1) и (94,2), находим $\lambda' + \nu' = 0$, т. е. $\lambda + \nu = \text{const}$. Поскольку при $r \to \infty$ должно быть $e^{\lambda} = 1$, $e^{\nu} = c^2$, то отсюда следует, что $e^{\nu} = c^2 e^{-\lambda}$. Таким образом, ν тоже не зависит от времени.

Уравнение (94,1) или (94,2) легко интегрируется, давая для λ выражение

$$e^{-\lambda} = \frac{1}{c^2}e^{\nu} = 1 + \frac{\text{const.}}{r}.$$

Входящую сюда постоянную легко определить из условия, что на больших расстояниях от масс, где поле слабо, имеет место закон Ньютона, и g_{00} должен иметь вид (83,2): $g_{00} = c^2 + 2\varphi$, где потенциал φ равен своему ньютоновскому выражению (92,5): $\varphi = -\frac{\varkappa c^4}{8\pi}\frac{m}{r} = -\frac{km}{r}$ (m — полная масса создающего поле тела). Отсюда видно, что $\text{const.} = 2km/c^2$.

Таким образом, мы находим окончательно для интервала

$$ds^2 = \left(c^2 - \frac{2km}{r}\right)dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{2km}{c^2}\frac{1}{r}}\,dr^2 + r^2(\sin^2\theta\,d\varphi^2 + d\theta^2). \tag{94,4}$$

---

[1]) Оба эти результата имеют место только при условии обращения метрики на бесконечности в галилееву.

Это выражение полностью определяет гравитационное поле в пустоте, создаваемое любым центрально-симметрическим распределением масс. Решение уравнений поля в таком виде было найдено впервые Шварцшильдом. Подчеркиваем, что это решение имеет место не только для покоящихся масс, но и для движущихся, если только это движение тоже обладает центральной симметрией (например, центрально-симметрические пульсации). Гравитационное поле, таким образом, и в этом случае не зависит от времени.

Компонента g_{00}, как мы знаем, всегда положительна. Из (94,4) мы видим поэтому, что „радиус-вектор“ r не может принимать значений меньших, чем $2km/c^2$. Соответствующая минимальная длина окружности равна $2\pi \cdot 2km/c^2 = 4\pi km/c^2$. Это значит, что материальное тело не может обладать размером, меньшим некоторого определенного нижнего предела. Именно, тело с массой m не может иметь в окружности длину меньше, чем $4\pi km/c^2$ [1]).

Наконец приведем еще приближенное выражение для ds^2 на больших расстояниях от начала координат:

$$ds^2 = ds_0^2 + \frac{2km}{c^2}(dr^2 - c^2dt^2). \tag{94,5}$$

Второй член представляет собой малую поправку к галилеевской метрике ds_0^2. На больших расстояниях от создающих поле масс всякое поле является центрально-симметрическим. Поэтому (94,5) определяет метрику на больших расстояниях от любой системы тел.

§ 95. Движение в гравитационном поле с центральной симметрией

Рассмотрим движение тела в центрально-симметрическом гравитационном поле. Как и во всяком центрально-симметрическом поле, движение будет происходить в одной „плоскости“, проходящей через начало координат; выберем эту площадь в качестве плоскости $\theta = \pi/2$.

Для определения траектории тела (с массой m) воспользуемся уравнением Гамильтона-Якоби:

$$g^{ik}\frac{\partial S}{\partial x^i}\frac{\partial S}{\partial x^k} = m^2c^2.$$

С помощью g^{ik}, определяемых выражением (94,4) для интервала, находим следующее уравнение:

$$e^{-\nu}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - \frac{e^{\nu}}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 = m^2c^2, \tag{95,1}$$

где $e^{\nu} = c^2 - 2km'/r$ (m' — масса тела, создающего поле). По общим правилам решения уравнения Гамильтона-Якоби, ищем S в виде

$$S = \mathcal{E}_0 t - M\varphi + f(r)$$

[1]) Обращаем внимание на то, что этот результат не имеет смысла в применении к элементарным частицам. По отношению к этим частицам вся излагаемая в этой книге теория поля благодаря квантовым явлениям теряет свою применимость уже для размеров, в огромное количество раз (порядка 10^{40}) превышающих km/c^2.

с постоянными энергией $\mathcal{E}_0$ и моментом импульса M. Подставляя это в (95,1), находим уравнение

$$e^{-\nu}\mathcal{E}_0^2 - \frac{M^2}{r^2} - \frac{e^{\nu}}{c^2}\left(\frac{df}{dr}\right)^2 = m^2c^2,$$

откуда

$$\frac{df}{dr} = ce^{-\frac{\nu}{2}}\sqrt{\mathcal{E}_0^2 e^{-\nu} - m^2c^2 - \frac{M^2}{r^2}}.$$

Таким образом, действие равно

$$S = \mathcal{E}_0 t - M\varphi + \int ce^{-\frac{\nu}{2}}\sqrt{\mathcal{E}_0^2 e^{-\nu} - m^2c^2 - \frac{M^2}{r^2}}\,dr. \qquad (95,2)$$

Траектория определяется, как известно, уравнением $\frac{\partial S}{\partial M} = \text{const.}$, откуда

$$\varphi = -\int \frac{\frac{cM}{r^2}\,dr}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 - m^2c^2e^{\nu} - \frac{M^2}{r^2}e^{\nu}}}. \qquad (95,3)$$

Этот интеграл приводится к эллиптическому.

Примером движения в центрально-симметрическом гравитационном поле является движение планет в поле тяготения солнца. Поскольку скорости планет малы по сравнению со скоростью света, то релятивистская теория тяготения приводит лишь к очень незначительным поправкам для орбит планет по сравнению с теорией Ньютона.

Для приближенного исследования уравнения орбиты (95,3) удобно написать его в виде дифференциального уравнения

$$\left(\frac{Mc}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \mathcal{E}_0^2 - m^2c^2e^{\nu} - \frac{M^2}{r^2}e^{\nu}$$

или, вводя новую переменную $\sigma = 1/r$ и подставляя выражение для e^{ν}:

$$M^2c^2\left(\frac{d\sigma}{d\varphi}\right)^2 = \mathcal{E}_0^2 - m^2c^4 + 2km'm^2c^2\sigma - M^2c^2\sigma^2 + 2km'M^2\sigma^3.$$

Дифференцируя это уравнение по φ, получаем

$$\frac{d^2\sigma}{d\varphi^2} = \frac{1}{p} - \sigma + \alpha\sigma^2, \qquad (95,4)$$

где введены постоянные $p = \frac{M^2}{km'm^2}$, $\alpha = \frac{3km'}{c^2}$.

Это уравнение отличается от того, которое получилось бы в ньютоновской теории, малым членом $\alpha\sigma^2$. Будем решать его методом последовательных приближений. В нулевом приближении опускаем член $\alpha\sigma^2$. Оставшееся уравнение имеет, как известно, в качестве решения ньютоновскую орбиту

$$\sigma = \frac{1}{r} = \frac{1}{p}(1 + e\cos\varphi),$$

где p — параметр орбиты, а e — ее эксцентриситет; большая полуось равна $a = p/(1 - e^2)$, а перигелий орбиты соответствует значению угла $\varphi = \pi$.

В следующем приближении мы ищем σ в виде $\sigma = \sigma_0 + \sigma_1$, где σ_0 — нулевое приближение. Подставляя $\sigma = \sigma_0 + \sigma_1$ в (95,4), находим для σ_1 уравнение

$$\frac{d^2\sigma_1}{d\varphi^2} + \sigma_1 = \alpha\sigma_0^2 = \frac{\alpha}{p^2}(1 + e\cos\varphi)^2 = \frac{\alpha}{p^2}\left[\left(1 + \frac{e^2}{2}\right) + 2e\cos\varphi + \frac{e^2}{2}\cos 2\varphi\right].$$

Из всех членов в скобке справа к наблюдаемому изменению орбиты приводит только второй, — благодаря резонансу (с решением однородного уравнения $\frac{d^2\sigma_1}{d\varphi^2} + \sigma_1 = 0$) он приводит к непрерывно растущему эффекту. Оставляя только этот член, находим для σ_1 частный интеграл неоднородного уравнения

$$\sigma_1 = \frac{\alpha e}{p^2}\varphi\sin\varphi.$$

Таким образом, в искомом приближении

$$\sigma = \frac{1}{r} = \frac{1}{p}\left(1 + e\cos\varphi + \frac{\alpha e}{p}\varphi\sin\varphi\right) \approx \frac{1}{p}\left[1 + e\cos\varphi\left(1 - \frac{\alpha}{p}\right)\right]. \quad (95,5)$$

Мы видим отсюда, что ньютоновский эллипс вращается; за время одного оборота планеты перигелий ее орбиты смещается [1]) на

$$\delta\varphi = \frac{2\pi\alpha}{p} = \frac{6\pi k m'}{c^2 a(1 - e^2)}. \quad (95,6)$$

Далее, рассмотрим путь светового луча в центрально-симметрическом гравитационном поле. Этот путь определяется уравнением эйконала (82,10)

$$g^{ik}\frac{\partial\psi}{\partial x^i}\frac{\partial\psi}{\partial x^k} = 0,$$

отличающимся от уравнения Гамильтона-Якоби только тем, что в последнем надо положить $m = 0$. Поэтому для траектории луча мы можем сразу написать, полагая в (95,3) $m = 0$:

$$\varphi = -\int \frac{dr}{r^2\sqrt{\frac{\omega_0^2}{c^2 M^2} - \frac{e^\nu}{c^2 r^2}}} \quad (95,7)$$

(вместо энергии частицы $\mathcal{E}_0 = \frac{\partial S}{\partial t}$ мы пишем теперь частоту света $\omega_0 = \frac{\partial\psi}{\partial t}$).

Для исследования этой траектории, как и в предыдущем случае, напишем (95,7) в виде дифференциального уравнения

$$\left(\frac{d\sigma}{d\varphi}\right)^2 = \frac{\omega_0^2}{c^2 M^2} - \sigma^2 + \frac{2km'}{c^2}\sigma^3$$

---

[1]) Численное значение этого смещения наиболее велико для Меркурия, у которого оно равно 42,9″ в сто лет.

или, дифференцируя по φ и вводя опять постоянную $\alpha = 3km'/c^2$:

$$\frac{d^2\sigma}{d\varphi^2} = -\sigma + \alpha\sigma^2. \tag{95,8}$$

Пренебрегая малым членом αc^2, находим в нулевом приближении

$$\sigma = \frac{\cos\varphi}{R}$$

(мы обозначили $R = \omega_0/cM$), т. е. прямую $r = \frac{R}{\cos\varphi}$, проходящую на расстоянии R от начала координат. Для определения следующего приближения подставляем в (95,8) $\sigma = \sigma_0 + \sigma_1$. Тогда для σ_1 мы находим уравнение:

$$\frac{d^2\sigma_1}{d\varphi^2} + \sigma_1 = \alpha\sigma_0^2 = \frac{\alpha}{R^2}\cos^2\varphi.$$

Частный интеграл этого уравнения есть $\sigma_1 = \frac{\alpha}{3R^2}(1 + \sin^2\varphi)$ и, следовательно, для траектории луча мы получаем уравнение:

$$\sigma = \frac{1}{r} = \frac{\cos\varphi}{R} + \frac{\alpha}{3R^2}(1 + \sin^2\varphi). \tag{95,9}$$

Определим направление этой кривой на больших расстояниях от центра. Для этого полагаем $r = \infty$, или $\sigma = 0$, и из полученного таким образом уравнения ищем φ в виде $\varphi = \pm\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\Delta\varphi$ с малым $\Delta\varphi$ [имея в виду, что в (95,9) второй член слева мал]. Это дает с точностью до величин высшего порядка

$$\frac{1}{2}\Delta\varphi = \pm\frac{\alpha}{3R}.$$

Таким образом, траектория луча представляет собой кривую с асимптотами, угол между которыми равен

$$\Delta\varphi = \frac{2\alpha}{3R} = \frac{2km'}{c^2R}. \tag{95,10}$$

Луч света, проходящий через центрально-симметрическое гравитационное поле на расстоянии R от центра, испытывает, следовательно, отклонение, определяемое этой формулой [1]).

§ 96. Уравнения поля в „собственной“ системе отсчета

Общие уравнения (93,6—9) центрально-симметрического гравитационного поля заметно упрощаются, если воспользоваться системой отсчета, движущейся в каждой точке вместе с веществом, находящимся в этой же точке. Другими словами, системой отсчета является само создающее поле вещество. Такую систему отсчета можно назвать „собственной“. Поскольку в этой системе вещество неподвижно, то мы имеем теперь $\dot{r} = 0$ (остальные компоненты скорости вообще отсутствуют в силу центральной симметрии). Заметим, что выбор „радиуса-

[1]) Для луча, проходящего мимо края солнца, $\Delta\varphi = 1{,}75''$.

вектора" определяется этим условием не вполне однозначным образом: r может быть еще подвергнуто любому преобразованию вида $r = f(r')$, не содержащему t.

Воспользуемся содержащимися в уравнениях поля (см. § 91) соотношениями (90,6):

$$T^k_{i;k} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}\, T^k_i}{\partial x^k} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} T^{kl} = 0.$$

Полагая в (93,5) $\dot{r} = 0$, находим для отличных от нуля компонент T^k_i:

$$T^1_1 = T^2_2 = T^3_3 = -p, \quad T^0_0 = \rho c^2. \tag{96,1}$$

Подставляя эти выражения и значения g_{ik} из (93,2) в уравнения $T^k_{i;k} = 0$, находим путем простого вычисления следующие два уравнения:

$$\dot{\lambda} + 2\dot{\mu} = -2\frac{\dot{\rho}c^2}{p + \rho c^2}, \quad \nu' = -2\frac{p'}{p + \rho c^2}. \tag{96,2}$$

Если известна зависимость между p и ρ, то эти уравнения непосредственно интегрируются в виде:

$$\lambda + 2\mu = -2\int \frac{c^2 d\rho}{p + \rho c^2} + f_1(r), \tag{96,3}$$

$$\nu = -2\int \frac{dp}{p + \rho c^2} + f_2(t), \tag{96,4}$$

где $f_1(r)$ и $f_2(t)$ — функции, соответственно, от „радиуса-вектора" и времени, которые могут быть выбраны произвольно, в виду указанной выше возможности произвольных преобразований вида $r = r(r')$ и $t = t(t')$.

Общие уравнения поля (93,6—9) в „собственной" системе отсчета принимают вид [1]):

$$\varkappa p = \frac{1}{2} e^{-\lambda}\left(\frac{\mu'^2}{2} + \mu'\nu'\right) - e^{-\nu}\left(\ddot{\mu} - \frac{1}{2}\dot{\mu}\dot{\nu} + \frac{3}{4}\dot{\mu}^2\right) - e^{-\mu}, \tag{96,5}$$

$$\begin{aligned}\varkappa p = {}& \frac{1}{4} e^{-\lambda}(2\nu'' + \nu'^2 + 2\mu'' + \mu'^2 - \mu'\lambda' - \nu'\lambda' + \mu'\nu') + \\ & + \frac{1}{4} e^{-\nu}(\dot{\lambda}\dot{\nu} + \dot{\mu}\dot{\nu} - \dot{\lambda}\dot{\mu} - 2\ddot{\lambda} - \dot{\lambda}^2 - 2\ddot{\mu} - \dot{\mu}^2),\end{aligned} \tag{96,6}$$

$$-\varkappa\rho c^2 = e^{-\lambda}\left(\mu'' + \frac{3}{4}\mu'^2 - \frac{\mu'\lambda'}{2}\right) - \frac{1}{2} e^{-\nu}\left(\dot{\lambda}\dot{\mu} + \frac{\dot{\mu}^2}{2}\right) - e^{-\mu}, \tag{96,7}$$

$$0 = \nu'\dot{\mu} + \dot{\lambda}\mu' - \dot{\mu}\mu' - 2\dot{\mu}'. \tag{96,8}$$

Мы видели в § 94, что центрально-симметрическое гравитационное поле в пустоте всегда оказывается постоянным. Если вещество непо-

---

[1]) Эти уравнения могут быть полностью проинтегрированы в случае, когда давлением можно пренебречь, т. е. можно положить $p = 0$. Из (96,4) мы видим, что в этом случае можно положить $\nu = 0$. Уравнение (96,8) тогда непосредственно интегрируется по времени в виде $e^{\lambda} = e^{\mu}\dfrac{\mu'^2}{f(r)}$, где $f(r)$ — произвольная положительная функция. Подставляя это в (96,5), получаем легко интегрирующееся уравнение для μ, а подстановка найденных таким образом λ и μ в (96,7) определяет плотность ρ.

движно, то поле будет постоянным и внутри создающего его тела. В постоянном гравитационном поле всякая статическая система отсчета является, конечно, „собственной“, так как вещество в ней неподвижно. Поскольку все величины λ, μ, ν являются теперь функциями только от r, то надлежащим выбором r мы можем превратить λ или μ в любую, наперед заданную функцию. Мы выберем r таким образом, чтобы $e^{\mu} = r^2$, т. е. чтобы ds^2 имело вид (93,10), т. е.

$$ds^2 = e^{\nu(r)}\,dt^2 - e^{\lambda(r)}\,dr^2 - r^2(\sin^2\theta\,d\varphi^2 + d\theta^2). \tag{96,9}$$

Уравнение (96,3) не имеет теперь места, так как оно является результатом интегрирования первого из уравнений (96,2), обращающегося теперь тождественно в нуль. Из остальных уравнений (96,4—8) мы выберем в качестве полной системы уравнений постоянного поля (96,3), (96,5) и (96,7). Опуская в них все производные по времени и полагая $e^{\mu} = r^2$, находим

$$\varkappa p = e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) - \frac{1}{r^2}, \tag{96,10}$$

$$\varkappa \rho c^2 = e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2}, \tag{96,11}$$

$$\nu = -2\int \frac{dp}{p + \rho c^2} + f(r) \tag{96,12}$$

(произвольную функцию $f(r)$ проще всего выбрать постоянной).

Если тело находится в состоянии статистического равновесия, то уравнение (96,12) следует из условий этого равновесия. Действительно, в § 85 было показано, что условиями статистического равновесия в гравитационном поле являются

$$\zeta\sqrt{g_{00}} = \zeta e^{\frac{\nu}{2}} = \text{const.}, \qquad T\sqrt{g_{00}} = Te^{\frac{\nu}{2}} = \text{const.},$$

где T — температура, а ζ — химический потенциал тела. Дифференцируя эти соотношения, находим

$$d\zeta + \frac{1}{2}\zeta\,d\nu = 0, \quad dT + \frac{1}{2}T\,d\nu = 0. \tag{96,13}$$

Как известно, химический потенциал равен $\zeta = \varepsilon - T\sigma + pV$, где $V, \sigma, \varepsilon = \rho c^2 V$ суть объем, энтропия и энергия, приходящиеся на одну молекулу тела. Дифференциал же $d\zeta$ равен, как известно, $d\zeta = V\,dp - \sigma\,dT$. Подставляя эти выражения для ζ и $d\zeta$ в первое из уравнений (96,13), а dT — из второго уравнения, получаем соотношение $dp + \frac{1}{2}(p + \rho c^2)\,dV = 0$, эквивалентное (96,12).

§ 97. Псевдотензор энергии-импульса

При отсутствии гравитационного поля закон сохранения энергии и импульса материи (вместе с электромагнитным полем) выражается уравнением (32,4) $\frac{\partial T_{ik}}{\partial x^k} = 0$. Обобщением этого уравнения на случай наличия гравитационного поля является уравнение (90,6)

$$T^k_{i;k} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial (T^k_i \sqrt{-g})}{\partial x^k} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} T^{kl} = 0. \qquad (97,1)$$

В таком виде, однако, это уравнение, вообще говоря, не выражает закона сохранения чего бы то ни было [1]). Это обстоятельство связано с тем, что в гравитационном поле должен сохраняться не 4-импульс одной лишь материи, а 4-импульс материи вместе с гравитационным полем; последний же не учтен в выражении для T^k_i.

Для определения сохраняющегося полного 4-импульса гравитационного поля вместе с находящейся в нем материей мы должны, следовательно, вычислить тензор энергии-импульса гравитационного поля. Для этого воспользуемся общей формулой (32,5), принимающей в криволинейных координатах вид

$$T^k_i = \sum_l \frac{\partial q^{(l)}}{\partial x^i} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}\Lambda}{\partial \frac{\partial q^{(l)}}{\partial x^k}} - \delta^k_i \Lambda, \qquad (97,2)$$

где Λ — скаляр, входящий в действие $S = \frac{1}{c} \int \Lambda \sqrt{-g}\, d\Omega$, а $q^{(l)}$ — величины, определяющие рассматриваемую физическую систему. В гравитационном поле величинами $q^{(l)}$ являются компоненты g_{ik} метрического тензора, а роль Λ играет величина $\frac{1}{2\varkappa} G$ (см. § 89). Обозначая T^k_i гравитационного поля посредством t^k_i, находим, следовательно,

$$\sqrt{-g}\, t^k_i = \frac{1}{2\varkappa} \left\{ \frac{\partial G \sqrt{-g}}{\partial \frac{\partial g^{lm}}{\partial x^k}} \frac{\partial g^{lm}}{\partial x^i} - \delta^k_i G \sqrt{-g} \right\}. \qquad (97,3)$$

Воспользовавшись выражением (89,3) для G, можно выразить t^k_i непосредственно через g_{ik} и Γ^i_{kl}. Вычисление приводит к результату

$$\sqrt{-g}\, t^k_i = \frac{1}{2\varkappa} \left\{ \Gamma^k_{lm} \frac{\partial (g^{lm} \sqrt{-g})}{\partial x^i} - \Gamma^l_{ml} \frac{\partial (g^{mk} \sqrt{-g})}{\partial x^i} - G \sqrt{-g}\, \delta^k_i \right\}. \qquad (97,4)$$

Существенным свойством величин t^k_i является то, что они не составляют тензора, — это видно уже непосредственно из того, что G не является скаляром. G, однако, является инвариантом по отношению

---

[1]) Действительно, интеграл $\int T^k_i \sqrt{-g}\, dS_k$, т. е. 4-импульс, сохраняется лишь при выполнении условия $\frac{\partial \sqrt{-g}\, T^k_i}{\partial x^k} = 0$, а не (97,1). В этом легко убедиться, произведя в криволинейных координатах те же вычисления, которые были проделаны в § 29 в декартовых координатах. Достаточно, впрочем, просто заметить, что эти вычисления имеют чисто формальный характер, не связанный с тензорными свойствами соответствующих величин, — как и доказательство теоремы Гаусса, имеющей в криволинейных координатах тот же вид (78,19), что и в декартовых.

к линейным преобразованиям координат, — поскольку G выражается согласно (89,3) через Γ^i_{kl}, а величины Γ^i_{kl} ведут себя как тензор по отношению к линейным преобразованиям (см. § 80). Следовательно, величины t_i^k ведут себя как тензор при линейных преобразованиях координат.

Совокупность величин t_i^k называют псевдотензором энергии-импульса гравитационного поля. Отметим, что, поскольку компоненты суммы $T_i^k + t_i^k$ не симметричны по индексам i и k (это относится даже к одному T_i^k, поскольку здесь речь идет о симметрии смешанных компонент), в гравитационном поле не существует закона сохранения полного момента импульса поля и материи (см. § 32).

Для суммы $T_i^k + t_i^k$ имеет место уравнение

$$\frac{\partial (T_i^k + t_i^k)\sqrt{-g}}{\partial x^k} = 0, \tag{97,5}$$

выражающее закон сохранения полного 4-импульса поля и материи

$$P_i = \frac{1}{c}\int (T_i^k + t_i^k)\sqrt{-g}\, dS_k. \tag{97,6}$$

Как было в свое время указано (см. §§ 29, 32), интегрирование может производиться здесь по любой бесконечной гиперповерхности, включающей в себя все трехмерное пространство. Если выбрать в качестве нее гиперповерхность $x^0 = \text{const.}$, то P_i можно написать в виде трехмерного пространственного интеграла:

$$P_i = \frac{1}{c}\int (T_i^0 + t_i^0)\sqrt{-g}\, dV. \tag{97,7}$$

Как обычно (см. § 32), компоненту $\frac{1}{c}(T_0^0 + t_0^0)\sqrt{-g}$ можно назвать „плотностью" полной энергии материи и поля, а компоненты $-\frac{1}{c}(T_\alpha^0 + t_\alpha^0)\sqrt{-g}$ — „плотностью импульса". Далее „плотность потока энергии" равна $\frac{1}{c}(T_0^\alpha + t_0^\alpha)\sqrt{-g}$, а „плотность потока импульса" есть $\frac{1}{c}(T_\alpha^\beta + t_\alpha^\beta)\sqrt{-g}$. Поскольку псевдотензор t_{ik} не симметричен, то при наличии гравитационного поля плотность потока энергии уже не равна плотности импульса (умноженной на c^2).

В § 91 было указано, что движение и распределение материи, а потому и тензор T_{ik}, определяются из самых уравнений тяготения (91,6) как $-\frac{1}{\varkappa}\left(R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R\right)$. Но при подстановке этого выражения сумма $T_{ik} + t_{ik}$ оказывается выраженной только через метрический тензор g_{ik}, и уравнение (97,5) удовлетворяется тождественно [в этом легко убедиться с помощью (91,5) и (97,3)]. Таким образом, в то время как при отсутствии гравитационного поля закон сохранения энергии и импульса налагает ограничение на изменение характеризующих систему величин, при наличии гравитационного поля уравнение (97,5) является по существу тождеством и потому в значительной степени лишено физического содержания.

Выбирая систему координат, галилееву в данном элементе объема, можно обратить все t_i^k в любой точке пространства-времени в нуль (так как при этом обращаются в нуль все Γ^i_{kl}). С другой стороны, можно получить отличные от нуля t_i^k в эвклидовом пространстве, т. е. в отсутствие гравитационного поля, если просто пользоваться криволинейными координатами вместо декартовых. Таким образом, во всяком случае не имеет смысла говорить об определенной локализации энергии гравитационного поля в пространстве. Если тензор $T_{ik}=0$ в некоторой мировой точке, то это имеет место и в любой другой системе отсчета, так что мы можем сказать, что в этой точке нет материи или электромагнитного поля. Напротив, из равенства нулю псевдотензора в некоторой точке в одной системе отсчета отнюдь не следует того же самого для другой системы отсчета, и поэтому не имеет смысла говорить о том, имеется или нет гравитационная энергия в данном месте. Это вполне соответствует тому, что подходящим выбором координат можно „уничтожить“ гравитационное поле в данном элементе объема, причем согласно сказанному выше одновременно исчезает и псевдотензор t_i^k в этом элементе.

Величины же P_i — 4-импульс поля и материи — имеют вполне определенный смысл, оказываясь не зависящими от выбора системы отсчета как раз в такой степени, как это необходимо на основании физических соображений. Выделим вокруг рассматриваемых масс область пространства, настолько большую, чтобы вне ее можно было считать гравитационное поле отсутствующим. В четырехмерном пространстве-времени эта область с течением времени прорезывает „канал“. Вне этого „канала“ поле отсутствует, так что 4-пространство — плоское. В связи с этим при вычислении энергии и импульса поля надо, очевидно, выбрать четырехмерную систему координат таким образом, чтобы вне „канала“ она переходила в галилееву систему и все t_i^k исчезали бы. Этим требованием система отсчета, конечно, отнюдь не определяется однозначно, — внутри канала она может быть еще произвольно выбрана. В полном согласии с физическим смыслом величин P_i они оказываются, однако, совершенно не зависящими от выбора системы координат внутри канала. Действительно, рассмотрим две системы координат, различные внутри канала, но переходящие вне его в одну и ту же галилееву систему, и сравним значения 4-импульса P_i и P'_i в этих двух системах в определенные моменты „времени“ x^0 и x'^0. Введем третью систему координат, совпадающую внутри канала в момент x^0 с первой системой, в момент x'^0 — со второй, а вне канала — с той же галилеевой. Но в силу закона сохранения энергии и импульса величины P_i постоянны $\left(\frac{dP_i}{dx^0}=0\right)$. Это имеет место в третьей системе координат, как и в первых двух. Отсюда следует $P_i=P'_i$, что и требовалось доказать.

Выше было отмечено, что величины t_i^k являются тензором по отношению к линейным преобразованиям координат. Поэтому P_i образуют вектор по отношению к таким преобразованиям, в частности по отношению к преобразованиям Лоренца.

Сумму $(T_i^k + t_i^k)\sqrt{-g}$ можно написать в форме, из которой непосредственно видно, что тождественно имеет место уравнение (97,5). Именно

$$(T_i^k + t_i^k)\sqrt{-g} = \frac{\partial h_i^{kl}}{\partial x^l}, \tag{97,8}$$

где величины h_i^{kl} антисимметричны по индексам k и l. Вычисление, которое мы не будем здесь производить, дает для h_i^{kl} следующее выражение:

$$2h_i^{kl} = \delta_i^l \frac{\partial \sqrt{-g}g^{km}}{\partial x^m} - \delta_i^k \frac{\partial \sqrt{-g}g^{lm}}{\partial x^m} + \\ + g^{km}g_{in}\frac{\partial \sqrt{-g}g^{nl}}{\partial x^m} - g^{lm}g_{in}\frac{\partial \sqrt{-g}g^{nk}}{\partial x^m}. \tag{97,9}$$

Подставляя (97,8) в (97,6), находим

$$P_i = \frac{1}{c}\int \frac{\partial h_i^{kl}}{\partial x^l} dS_k = \frac{1}{2c}\int \left(dS_k \frac{\partial}{\partial x^l} - dS_l \frac{\partial}{\partial x^k}\right) h_i^{kl}.$$

Этот интеграл можно преобразовать в интеграл по обычной поверхности с помощью (6,12)

$$P_i = \frac{1}{c}\oint h_i^{kl} d\overset{*}{f}_{kl}. \tag{97,10}$$

Если в качестве поверхности интегрирования в (97,6) выбирается гиперповерхность $x^0 = \text{const.}$, то в (97,10) поверхность интегрирования оказывается чисто пространственной обычной поверхностью [1]). Таким образом, мы находим выражение для 4-импульса материи и гравитационного поля в некоторой области трехмерного пространства в виде интеграла по поверхности, охватывающей этот объем

$$P_i = \frac{1}{c}\oint h_i^{0\alpha} df_\alpha. \tag{97,11}$$

Применяя эту формулу к любой изолированной системе, постоянно находящейся в начале координат, мы можем выбрать достаточно удаленную поверхность интегрирования в (97,11) и воспользоваться на ней выражением (94,6) для поля. Как и следовало ожидать, вычисление приводит к результату $P_\alpha = 0$, $P_0 = mc^2$, где m — полная масса системы.

---

[1]) $d\overset{*}{f}_{kl}$ есть „нормальный" элемент поверхности, связанный с „тангенциальным" элементом df^{ik} посредством (6,9): $d\overset{*}{f}_{ik} = \frac{1}{2}e_{iklm}df^{lm}$. На поверхности, охватывающей гиперповерхность, перпендикулярную к оси x^0, отличны от нуля только компоненты df^{lm} с $l, m = 1, 2, 3,$ и следовательно $d\overset{*}{f}_{ik}$ имеет только компоненты с одним из i или k, равным 0. Компоненты $d\overset{*}{f}_{0\alpha}$ являются не чем иным, как компонентами трехмерного элемента обычной поверхности.

В случае постоянного гравитационного поля оказывается возможным вывести простое выражение для полной энергии материи вместе с полем в виде интеграла только по пространству, занятому материей. Мы видели в § 89, что при варьировании действия гравитационного поля безразлично, писать ли в подинтегральном выражении величину G или скаляр R. Если бы мы писали в действии S_g скаляр R вместо G и при выводе закона сохранения, то мы получили бы закон сохранения величины $\frac{1}{c}\int (T_i^k + t_i^k)\sqrt{-g}\,dS_k$, где t_i^k определялось бы формулой (97,2), в которой надо было бы положить $\Lambda = R/2\varkappa$, а под величинами $q^{(l)}$ нужно было бы понимать компоненты g_{ik} и Γ_{kl}^i (последнее необходимо по той причине, что R содержит также и вторые производные от g_{ik}, выражающиеся через первые производные от Γ_{kl}^i). Но поскольку варьирование действия, написанного в таком виде, приводит к верным уравнениям поля, то такой 4-вектор может отличаться от верного 4-импульса только постоянным множителем. Далее, в постоянном поле все величины не зависят от времени. Поэтому в компоненте t_0^0 первый член в (97,2), содержащий производные по x^0 от g_{ik} и Γ_{kl}^i, обращается в нуль. Написав во втором члене $R/2\varkappa$, вместо Λ, мы получим для t_0^0 выражение $-R/2\varkappa$.

Таким образом, должна сохраняться величина

$$\frac{1}{c}\int\left(T_0^0 - \frac{1}{2\varkappa}R\right)\sqrt{-g}\,dV.$$

Из уравнений поля (91,7) следует, что $R/\varkappa = T$; подставляя это, находим

$$\frac{1}{2c}\int (T_0^0 - T_1^1 - T_2^2 - T_3^3)\sqrt{-g}\,dV.$$

В предельном случае малых скоростей и слабого поля энергия должна оказаться в первом приближении равной $\int \rho c^2\,dV$. Но, подставляя в найденное выражение предельные значения (92,1) тензора T_i^k, мы получим всего $\frac{1}{2}\int \rho c^2 dV$. Поэтому для того, чтобы получить верное значение для полной энергии P_0, надо удвоить это выражение, т. е.

$$P_0 = \frac{1}{c}\int (T_0^0 - T_1^1 - T_2^2 - T_3^3)\sqrt{-g}\,dV. \qquad (97,12)$$

Эта формула и определяет полную энергию материи и постоянного гравитационного поля через тензор энергии-импульса одной только материи [1]).

Подставим в (97,12) выражение (91,5) $T_i^k = (p + \rho c^2)u^k u_i - \delta_i^k p$ для тензора энергии-импульса макроскопических тел и воспользуемся

[1]) Формула (97,12) взята нами из работы: R. Tolman, *Phys. Rev.*, **35**, 875, 1930.

„собственной“ системой отсчета (см. § 96), в которой вся материя неподвижна, т. е. пространственные компоненты 4-скорости $u^\alpha = 0$, а временная $u^0 = 1$. Тогда мы получим полную энергию в виде

$$P_0 = \int (\rho c^2 + 3p)\sqrt{-g}\,dV. \tag{97,13}$$

§ 98. Гравитационные волны

Рассмотрим слабое (каким оно почти всегда и бывает) гравитационное поле в пустоте. В слабом поле метрика пространства-времени „почти эвклидова“, т. е. можно выбрать такую систему отсчета, в которой компоненты метрического тензора g_{ik} почти равны своим галилеевым значениям, которые мы обозначим посредством

$$g^{(0)}_{\alpha\beta} = -\delta_{\alpha\beta}, \quad g^{(0)}_{\alpha 0} = 0, \quad g_{00} = c^2. \tag{98,1}$$

Мы можем, следовательно, написать g_{ik} в виде

$$g_{ik} = g^{(0)}_{ik} + h_{ik}, \tag{98,2}$$

где h_{ik} — малая поправка, определяющая гравитационное поле.

При малых h_{ik} компоненты гравитационного поля Γ^i_{kl}, выражающиеся через производные от g_{ik}, тоже малы. Пренебрегая степенями h_{ik} выше первой, мы можем оставить в тензоре R_{iklm} (88,4) только члены в первой скобке:

$$R_{iklm} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 h_{im}}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial^2 h_{kl}}{\partial x^i \partial x^m} - \frac{\partial^2 h_{km}}{\partial x^i \partial x^l} - \frac{\partial^2 h_{il}}{\partial x^k \partial x^m}\right). \tag{98,3}$$

Для упрощенного тензора R_{ik} имеем с той же точностью

$$R_{ik} = g^{lm} R_{likm} \approx g^{(0)\,lm} R_{likm},$$

или

$$R_{ik} = \frac{1}{2}\left(g^{(0)\,lm}\frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial x^l \partial x^m} - \frac{\partial^2 h^l_i}{\partial x^k \partial x^l} - \frac{\partial^2 h^l_k}{\partial x^i \partial x^l} + \frac{\partial^2 h}{\partial x^i \partial x^k}\right), \tag{98,4}$$

где $h^k_i = g^{(0)\,lk} h_{il}$, $h = h^i_i$.

Мы выбрали систему отсчета таким образом, чтобы g_{ik} мало отличались от $g^{(0)}_{ik}$. Но это условие сохраняется и при любом бесконечно малом преобразовании координат, так что мы можем наложить на h_{ik} еще четыре (по числу координат) условия, не нарушая при этом условия их малости.

Выберем в качестве этих дополнительных условий уравнения [1])

$$\frac{\partial \psi^k_i}{\partial x^k} = 0, \quad \psi^k_i = h^k_i - \frac{1}{2}\delta^k_i h. \tag{98,5}$$

---

[1]) Если искать преобразование, приводящее к h^k_i, удовлетворяющим этим условиям, в виде $x'^i = x^i + \xi^i$ (ξ^i — малые того же порядка, что и h^k_i), то легко

Тогда последние три члена в R_{ik} взаимно сокращаются, и мы находим

$$R_{ik} = \frac{1}{2} g^{(0)lm} \frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial x^l \partial x^m}.$$

Таким образом, уравнения (91,9) гравитационного поля в пустоте приобретают вид

$$\square h_i^k = 0, \tag{98,6}$$

где $\square$ есть оператор д'Аламбера:

$$\square = -g^{(0)lm} \frac{\partial^2}{\partial x^l \partial x^m} = \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

Это — обычное волновое уравнение. Таким образом, гравитационные поля, как и электромагнитные, распространяются в пустоте со скоростью света.

Рассмотрим плоскую гравитационную волну. В такой волне поле меняется только вдоль одного направления в пространстве; в качестве этого направления мы выберем ось $x^1 = x$. Уравнения (98,6) тогда превращаются в

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) h_i^k = 0, \tag{98,7}$$

решением которых является любая функция от $x \pm ct$ (§ 46).

Рассмотрим волну, распространяющуюся в положительном направлении оси X. Все величины h_i^k в ней являются функциями от $x - ct$. Дополнительные условия (98,5) дают в этом случае $\dot{\psi}_i^1 - c\dot{\psi}_i^0 = 0$, где точка над буквой означает дифференцирование по t. Эти равенства можно проинтегрировать, просто вычеркнув знак дифференцирования, — постоянные интегрирования можно положить равными нулю, так как мы интересуемся здесь (как и в случае электромагнитных волн) только переменной частью поля. Таким образом, между отдельными компонентами ψ_i^k имеются соотношения:

$$\psi_1^1 = \psi_1^0, \quad \psi_2^1 = \psi_2^0, \quad \psi_3^1 = \psi_3^0, \quad \psi_0^1 = \psi_0^0. \tag{98,8}$$

Как было отмечено в сноске на стр. 255, условия (98,5) еще не определяют однозначно системы отсчета. Именно, мы можем еще подвергнуть координаты преобразованию вида $x'^i = x^i + \xi^i (x - ct)$; такое преобразование не нарушает условий (98,5), так как ξ^i удовлетворяют

убедиться в том, что функции ξ^i этого преобразования должны удовлетворять уравнениям

$$\square \xi_i = \frac{\partial}{\partial x^k}\left(h_i^k - \frac{1}{2} \delta_i^k h\right),$$

где $\xi_i = g_{ik}^{(0)} \xi^k$. Отсюда видно, в частности, что система координат, удовлетворяющая условию (98,5), может еще быть подвергнута любому малому преобразованию $x'^i = x^i + \xi^i$, где для ξ^i имеет место уравнение $\square \xi_i = 0$. Кроме того, система координат может, очевидно, быть подвергнута любому преобразованию Лоренца.

уравнению $\square \xi_i = 0$ (см. ту же сноску). Этими преобразованиями можно воспользоваться для того, чтобы обратить в нуль четыре величины ψ_1^0, ψ_2^0, ψ_3^0, $\psi_2^2 + \psi_3^3$; из равенств (98,8) следует, что при этом обратятся в нуль также и компоненты ψ_1^1, ψ_2^1, ψ_3^1, ψ_0^0. Что же касается остающихся величин ψ_2^3, $\psi_2^2 - \psi_3^3$, то их нельзя обратить в нуль никаким выбором системы отсчета, поскольку, как легко убедиться, при преобразовании $x'^i = x^i + \xi^i(x - ct)$ эти компоненты вообще не меняются. Заметим, что таким образом обращается в нуль и $\psi = \psi_i^i$, а потому $\psi_i^k = h_i^k$.

Таким образом, плоская гравитационная волна определяется двумя величинами, а именно h_{23}, $h_{22} - h_{33}$. Другими словами, гравитационные волны являются поперечными волнами, поляризация которых определяется тензором 2-го ранга в плоскости YZ, сумма диагональных членов которого $h_{22} + h_{33}$ равна нулю.

Гравитационные волны обладают некоторой энергией, „плотность" которой равна $t_0^0 \sqrt{-g}$. Как и всякая энергия, она в свою очередь создает некоторое гравитационное поле. Таким образом, гравитационная волна сама создает вокруг себя некоторое дополнительное гравитационное поле. Это поле более высокого (именно второго) порядка малости по сравнению с полем самой волны, поскольку создающая ее энергия второго порядка [производные $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}$ первого порядка по h_{ik}, а потому согласно (97,2) t^k — второго порядка].

Вычислим поток энергии в плоской гравитационной волне. Мы видели в предыдущем параграфе, что поток энергии гравитационного поля определяется компонентами $\frac{1}{c} t_0^\alpha \sqrt{-g}$ псевдотензора энергии-импульса. В волне, распространяющейся вдоль оси x^1, очевидно, отлична от нуля только компонента t_0^1.

Как было указано, псевдотензор t_i^k второго порядка малости; мы должны вычислить t_0^1 только с этой точностью. Детерминант g, составленный из компонент $g_{ik} = g_{ik}^{(0)} + h_{ik}$, с точностью до величин первого порядка, равен $g = -c^2 - h_{11} - h_{22} - h_{33} - h_{00}$. Поскольку в плоской гравитационной волне, как мы видели, $h_{11} = h_{00} = 0$, $h_{22} + h_{33} = 0$, то $g = -c^2$. Замечая, что поэтому и $\Gamma_{ml}^l = \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^m} = 0$, имеем для t_0^1 согласно общему выражению (97,2) просто

$$2\varkappa t_0^1 = \Gamma_{ml}^1 \frac{\partial g^{ml}}{\partial t}.$$

Помня, что от нуля отличны только компоненты h_{23}, h_{22}, h_{33}, мы находим с достаточной точностью

$$\Gamma_{ml}^1 = \frac{1}{2} g^{(0)11} \left(\frac{\partial h_{1m}}{\partial x^l} + \frac{\partial h_{1l}}{\partial x^m} - \frac{\partial h_{lm}}{\partial x^1} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial h_{lm}}{\partial x^1}.$$

Замечая, что $g^{ik} = g^{(0)\,ik} - h^{ik}$, имеем

$$4\varkappa t_0^1 = \frac{\partial h_{lm}}{\partial x^1}\frac{\partial h^{lm}}{\partial t} = -\frac{1}{c}\dot{h}_{lm}\dot{h}^{lm} = \frac{1}{c}\dot{h}^2_{lm},$$

или окончательно:

$$t_0^1 = \frac{1}{2\varkappa c}\left[\left(\frac{\dot{h}_{22} - \dot{h}_{33}}{2}\right)^2 + \dot{h}^2_{23}\right]. \tag{98,9}$$

§ 99. Излучение гравитационных волн

Система движущихся тел излучает гравитационные волны. Вычислим энергию, уносимую этими волнами, т. е. энергию, теряемую системой путем излучения. Скорости всех тел в системе мы будем считать малыми по сравнению со скоростью света.

Благодаря наличию материи уравнения излучаемых волн не будут уже иметь простого вида (98,6): $\Box h_i^k = 0$. Этот вид сохранится только на больших расстояниях от системы тел. Вблизи же нее уравнения поля будут иметь вид

$$\frac{1}{2}\Box\psi_i^k = \varkappa\tau_i^k, \tag{99,1}$$

где мы ввели вместо h_i^k более для нас удобные здесь величины: $\psi_i^k = h_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k h$, а τ_i^k обозначает дополнительные выражения, получающиеся при переходе в точных уравнениях $R_{ik} - \frac{1}{2}\delta_i^k R = -\varkappa T_i^k$ к случаю слабых полей в рассматриваемом приближении. Легко убедиться в том, что компоненты τ_0^0 и τ_α^0 получаются непосредственно из соответствующих компонент T_i^k посредством выделения из них величин интересующего нас порядка малости; что же касается компонент τ_β^α, то они содержат наряду с членами, получающимися из T_β^α, также и члены второго порядка малости из $R_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k R$.

Величины ψ_i^k удовлетворяют условию (98,5) $\frac{\partial\psi_i^k}{\partial x^k} = 0$. Из (99,1) следует, что такое же уравнение имеет место и для τ_i^k:

$$\frac{\partial\tau_i^k}{\partial x^k} = 0. \tag{99,2}$$

Это уравнение заменяет здесь общее соотношение $T^k_{i;k} = 0$.

Уравнение (99,1) по форме совпадает с уравнением запаздывающих потенциалов (§ 64). Мы можем поэтому сразу написать их решение в виде

$$\psi_i^k = -\frac{\varkappa}{2\pi}\int\frac{\left(\tau_i^k\right)_{t-\frac{R}{c}}}{R}\,dV.$$

Поскольку скорости всех тел в системе малы, то для поля на больших расстояниях от системы можно написать (см. §§ 66, 67)

$$\psi_i^k = -\frac{\varkappa}{2\pi R_0}\int (\tau_i^k)_{t-\frac{R_0}{c}}\, dV, \qquad (99,3)$$

где R_0 — расстояние от начала координат, расположенного где-нибудь внутри системы; индекс $t-\frac{R_0}{c}$ в подинтегральных выражениях мы будем ниже, для краткости, опускать.

Для вычисления этих интегралов воспользуемся уравнениями (99,2). Опуская индексы у τ_i^k и выделяя пространственные и временные компоненты, пишем (99,2) в виде

$$\frac{\partial\tau_{\alpha\gamma}}{\partial x^\gamma} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial\tau_{\alpha 0}}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial\tau_{0\gamma}}{\partial x^\gamma} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial\tau_{00}}{\partial t} = 0. \qquad (99,4)$$

Умножив первое уравнение на x^β, проинтегрируем по всему пространству

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int \tau_{\alpha 0}x^\beta dV = \int \frac{\partial\tau_{\alpha\gamma}}{\partial x^\gamma}x^\beta dV = \int \frac{\partial(\tau_{\alpha\gamma}x^\beta)}{\partial x^\gamma}dV - \int \tau_{\alpha\beta}dV.$$

Поскольку на бесконечности $\tau_{ik}=0$, то первый интеграл правой части, будучи преобразован по теореме Гаусса, исчезает. Взяв полусумму оставшегося равенства и его же с переставленными индексами, находим

$$\int \tau_{\alpha\beta}dV = -\frac{1}{2c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int (\tau_{\alpha 0}x^\beta + \tau_{\beta 0}x^\alpha)\, dV.$$

Далее, умножим второе из уравнений (99,4) на $x^\alpha x^\beta$ и опять проинтегрируем по всему пространству. Аналогичное преобразование приводит к

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int \tau_{00}x^\alpha x^\beta dV = -\int (\tau_{\alpha 0}x^\beta + \tau_{\beta 0}x^\alpha)\, dV.$$

Сравнивая оба полученных результата, находим

$$\int \tau_{\alpha\beta}dV = \frac{1}{2c^4}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int \tau_{00}x^\alpha x^\beta dV. \qquad (99,5)$$

Таким образом, интегралы от всех $\tau_{\alpha\beta}$ оказываются выраженными через интегралы, содержащие только компоненту τ_{00}. Но эта компонента равна в данном приближении (как было выше указано) просто соответствующей компоненте T_{00} тензора T_{ik}. Воспользовавшись для нее выражением (92,1), имеем

$$\tau_{00} = c^2\tau_0^0 = \mu c^4. \qquad (99,6)$$

Подставляя это в (99,5) и вводя гравитационную постоянную k вместо $\varkappa$, находим (99,3) в виде

$$\psi_{\alpha\beta} = -\frac{2k}{c^4 R_0}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int \mu x^\alpha x^\beta\, dV. \qquad (99,7)$$

На больших расстояниях от системы зарядов можно рассматривать волну (в небольших участках пространства) как плоскую. Поэтому можно вычислить поток энергии, излучаемой системой, скажем, в направлении оси x^1, воспользовавшись формулой (98,9).

В формулу (98,9) входят компоненты $h_{23}=\psi_{23}$ и $h_{22}-h_{33}=\psi_{22}-\psi_{33}$. Из (99,7) находим для них выражение

$$h_{23}=-\frac{2k}{c^4R_0}\ddot{J}_{23},\qquad h_{22}-h_{33}=-\frac{2k}{c^4R_0}(\ddot{J}_{22}-\ddot{J}_{33})$$

(точка означает дифференцирование по времени), где мы ввели тензор

$$J_{\alpha\beta}=\int\mu\left(x^\alpha x^\beta-\frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}x_\gamma^2\right)dV, \tag{99,8}$$

характеризующий распределение масс в системе [1]). В результате мы получаем поток энергии вдоль оси x^1 в виде

$$t_0^1=\frac{k}{4\pi c^5R_0^2}\left[\left(\frac{\dddot{J}_{22}-\dddot{J}_{33}}{2}\right)^2+\dddot{J}_{23}^2\right]. \tag{99,9}$$

Зная излучение в направлении оси x^1, легко определить излучение в произвольном направлении, единичный вектор вдоль которого обозначим посредством $\mathbf{n}$. Для этого надо составить из компонент тензора $\dddot{J}_{\alpha\beta}$ и вектора n_α скаляр, квадратичный по $\dddot{J}_{\alpha\beta}$, который при $n_1=1$, $n_2=n_3=0$ переходил бы в $\dddot{J}_{23}^2+\left(\frac{\dddot{J}_{22}-\dddot{J}_{33}}{2}\right)^2$.

В результате излучение энергии в данном направлении (отнесенное на единицу телесного угла) оказывается равным

$$\frac{k}{4\pi c^5R_0^2}\left[\frac{1}{4}(\dddot{J}_{\alpha\beta}n_\alpha n_\beta)^2+\frac{1}{2}\dddot{J}_{\alpha\beta}^2-\dddot{J}_{\alpha\beta}\dddot{J}_{\alpha\gamma}n_\beta n_\gamma\right]. \tag{99,10}$$

Полное излучение по всем направлениям, т. е. потерю энергии системой в единицу времени $\left(-\frac{d\mathscr{E}}{dt}\right)$, можно найти, усредняя этот поток по направлениям и умножая полученное среднее значение на $4\pi R_0^2$. Усреднение легко производить с помощью формул, произведенных в сноске к стр. 171, и оно приводит к следующему выражению для потери энергии:

$$-\frac{d\mathscr{E}}{dt}=\frac{k}{5c^5}\dddot{J}_{\alpha\beta}^2. \tag{99,11}$$

Необходимо отметить, что численное значение этой потери энергии, даже для астрономических объектов, настолько мало, что его влияние на движение, даже за космические промежутки времени, совершенно ничтожно (так, для двойных звезд потеря энергии гравитационным

[1]) Этот тензор связан с тензором инерции системы $K_{\alpha\beta}$ посредством соотношения:

$$J_{\alpha\beta}=-K_{\alpha\beta}+\frac{1}{3}K_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}.$$

излучением оказывается порядка 10^{-12}-ой части их полной энергии в год).

Выражение для $\frac{d\mathcal{E}}{dt}$ содержит $\frac{1}{c^5}$. Это значит, что потеря энергии изолированной системой появляется только в пятом приближении по $1/c$. В первых же четырех приближениях энергия системы остается постоянной. Отсюда следует, что система тел в гравитационном поле может быть описана с помощью функции Лагранжа с точностью до членов порядка v^4/c^4, в отличие от электромагнитного поля, где функция Лагранжа существует только с точностью до членов второго порядка (последнее связано с тем, что потеря энергии путем электромагнитного излучения содержит $1/c^3$). Эффекты, вызываемые этими дополнительными членами в функции Лагранжа, однако, совершенно ничтожны; поэтому вычисление их не представляет интереса и мы не станем заниматься здесь этим вопросом подробнее [1]).

§ 100. Формулирование уравнений поля в однородных пятимерных координатах

Уравнения гравитационного и электромагнитного полей можно вывести и формулировать единым образом. Это достигается с помощью математического аппарата так называемых однородных координат, применяемых в проективной геометрии [2]).

Точку в 4-пространстве мы будем определять пятью координатами X^ν ($\nu = 1, 2, 3, 4, 5$), причем все значения координат, которые отличаются только общим множителем, относятся к одной и той же точке. Другими словами, точка в 4-пространстве определяется четырьмя независимыми отношениями пяти величин X^ν, называемых однородными координатами. Условимся в этом и в следующем параграфах обозначать греческими буквами индексы, пробегающие пять значений 1, 2, 3, 4, 5, а латинскими буквами, как и раньше, индексы, пробегающие четыре значения 0, 1, 2, 3.

Очевидно, что при описании 4-пространства пятью однородными координатами допускаются только такие преобразования этих последних, при которых новые координаты X'^ν являются однородными функциями

---

[1]) Приведем лишь, без вывода, выражение для функции Лагранжа системы гравитационным образом взаимодействующих друг с другом частиц, во втором приближении:

$$L = \sum_A \frac{m_A v_A^2}{2}\left(1 - 3\sum_{B \neq A} \frac{k m_B}{c^2 R_{AB}}\right) + \sum_A \frac{m_A v_A^4}{8c^2} + \sum_{A \neq B} \frac{k m_A m_B}{2R_{AB}} +$$

$$+ \sum_{A \neq B \neq C} \frac{k^2 m_A m_B m_C}{2c^2 R_{AB} R_{AC}} + \sum_{A \neq B} \frac{k m_A m_B}{2c^2 R_{AB}} (7\mathbf{v}_A \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_A \mathbf{n}_{AB} \cdot \mathbf{v}_B \mathbf{n}_{AB}),$$

где $\mathbf{n}_{AB}$ — единичный вектор в направлении радиуса-вектора $\mathbf{R}_{AB}$ между частицами m_A и m_B.

[2]) Изложение этого параграфа основано на статье W. Pauli, *Ann. d. Physik*, **18**, 305, 1933.

первого порядка от старых координат X^ν. Согласно теореме Эйлера это значит, что

$$X^\mu \frac{\partial X'^\nu}{\partial X^\mu} = X'^\nu. \tag{100,1}$$

Ковариантные и контравариантные векторы и тензоры в однородных координатах определяются, как и в обычных координатах, как величины, преобразующиеся по законам:

$$A'^\nu = \frac{\partial X'^\nu}{\partial X^\mu} A^\mu, \quad A'_\nu = \frac{\partial X^\mu}{\partial X'^\nu} A_\mu, \text{ и т. д.} \tag{100,2}$$

На векторы и тензоры в однородных координатах налагается, однако, еще одно условие. Именно, мы будем требовать, чтобы их компоненты были однородными функциями координат. При этом компоненты контравариантного вектора должны быть однородными функциями первого порядка, компоненты ковариантного вектора — порядка -1, а скаляры — нулевого порядка. Вообще, компоненты тензора, контравариантного по r_1-индексам и ковариантного по r_2-индексам, суть однородные функции порядка $r_1 - r_2$. Это правило находится, очевидно, в согласии с правилом умножения и упрощения тензора. Заметим также, что в силу условия (100,1) о допускаемых преобразованиях координат порядок однородности компонент тензора не меняется при этих преобразованиях. Мы будем называть однородные векторы и тензоры в пятимерном пространстве X^ν коротко 5-векторами и 5-тензорами [1]).

Таким образом, мы можем написать согласно теореме Эйлера

$$X^\mu \frac{\partial A^\nu}{\partial X^\mu} = A^\nu, \quad X^\mu \frac{\partial A_\nu}{\partial X^\mu} = -A_\nu, \quad X^\mu \frac{\partial \varphi}{\partial X^\mu} = 0 \tag{100,3}$$

(φ — скаляр).

Для однородных координат характерно, что в них самих координаты X^ν образуют контравариантный вектор, так как согласно условию (100,1) они удовлетворяют требованию (100,3) [а (100,2) при этом удовлетворяется тождественно]. Напротив, дифференциалы dX^ν не составляют теперь вектора, так как они не удовлетворяют условию однородности.

Пятимерный „метрический тензор" $g_{\mu\nu}$ мы подчиним условию

$$g_{\mu\nu} X^\mu X^\nu = 1. \tag{100,4}$$

Обратный $g_{\mu\nu}$ тензор $g^{\mu\nu}$ определяется, как обычно, тем, что $g_{\mu\sigma} g^{\sigma\nu} = \delta^\nu_\mu$ (δ^ν_μ — единичный 5-тензор). При помощи тензоров $g_{\mu\nu}$ и $g^{\mu\nu}$ определяется, как и раньше, операция поднятия и опускания индексов.

---

[1]) Тензоры и векторы, удовлетворяющие условию однородности, называют также „проекторами".

Необходимо еще ввести правило, позволяющее сопоставлять 5-тензорам в пространстве X^ν обычные 4-тензоры в 4-пространстве x^i. Это делается следующим образом.

Координаты x^k являются, по определению однородных координат, однородными функциями нулевого порядка от пяти координат X^ν. Поэтому мы имеем

$$\gamma^k_\nu X^\nu = 0, \tag{100,5}$$

где символы γ^k_ν обозначают производные

$$\gamma^k_\nu = \frac{\partial x^k}{\partial X^\nu}. \tag{100,6}$$

Величины γ^k_ν преобразуются при любых преобразованиях координат x^k как обычный контравариантный 4-вектор, а при однородных преобразованиях X^ν — как ковариантный 5-вектор. Наряду с величинами γ^k_ν введем также и обратные величины γ^ν_k согласно

$$\gamma^k_\nu \gamma^\nu_l = \delta^k_l \tag{100,7}$$

(δ^k_l — единичный 4-тензор). Этим, однако, величины γ^ν_k определены только с точностью до произвольного вектора вида ρX^ν, где ρ — любая функция [в силу условия (100,5) при прибавлении такого вектора равенство (100,7) не нарушается]. Для однозначного определения γ^ν_k подчиним их условию, аналогичному (100,5):

$$\gamma^\nu_l X_\nu \equiv \gamma^\nu_l g_{\nu\mu} X^\mu = 0. \tag{100,8}$$

Вычислим произведение $\gamma^k_\nu \gamma^\mu_k$, в котором суммирование производится по четырехмерным индексам k. Для этого умножаем равенство (100,7) $\gamma^l_\mu \gamma^\mu_k - \delta^l_k = 0$ на γ^k_ν:

$$\gamma^l_\mu \gamma^\mu_k \gamma^k_\nu - \delta^l_k \gamma^k_\nu = \gamma^l_\mu \gamma^\mu_k \gamma^k_\nu - \gamma^l_\nu = \gamma^l_\mu (\gamma^\mu_k \gamma^k_\nu - \delta^k_\nu) = 0.$$

Сравнивая это с (100,5), мы видим, что

$$\gamma^\mu_k \gamma^k_\nu - \delta^\mu_\nu = X^\mu A_\nu,$$

где A_ν — некоторый вектор; этот вектор легко определить, умножая обе части на X_μ. Это дает в силу (100,4) и (100,8) $A_\nu = -X_\nu$. Таким образом,

$$\gamma^\mu_k \gamma^k_\nu = \delta^\mu_\nu - X_\nu X^\mu. \tag{100,9}$$

Всякому 5-вектору A^ν (или A_ν) мы приведем в соответствие „сопряженный" с ним 4-вектор

$$A^k = \gamma^k_\nu A^\nu, \quad A_k = \gamma^\nu_k A_\nu \tag{100,10}$$

и скаляр

$$A = A^\nu X_\nu. \tag{100,11}$$

С помощью (100,9) легко проверить, что

$$A_\nu = \overline{A}_\nu + AX_\nu, \quad A^\nu = \overline{A}^\nu + AX^\nu, \tag{100,12}$$

где

$$\overline{A}_\nu = \gamma_\nu^k A_k, \quad \overline{A}^\nu = \gamma_k^\nu A^k. \tag{100,13}$$

Эти векторы, в силу (100,5) и (100,8), „перпендикулярны" к вектору X^ν, т. е.

$$\overline{A}_\nu X^\nu = 0, \quad \overline{A}^\nu X_\nu = 0. \tag{100,14}$$

Приведенные формулы полностью устанавливают однозначное соответствие между 5-векторами в пространстве X^ν и обычными 4-векторами.

Аналогично всякий 5-тензор $A_{\mu\nu}$ характеризуется четырьмя четырехмерными величинами: 4-тензором $A_{ik} = \gamma_i^\mu \gamma_k^\nu A_{\mu\nu}$, 4-векторами $A_{i(0)} = \gamma_i^\mu X^\nu A_{\mu\nu}$ и $A_{(0)i} = \gamma_i^\nu X^\mu A_{\mu\nu}$ и скаляром $A_{(0)(0)} = X^\mu X^\nu A_{\mu\nu}$. В частности, если $A_{\mu\nu} = A_{\nu\mu}$, то $A_{(0)i} = A_{i(0)}$; если $A_{\mu\nu} = -A_{\nu\mu}$, то $A_{(0)(0)} = 0$.

В частности, для метрического тензора $g_{\mu\nu}$ инвариант $g_{(0)(0)} = 1$, а вектор $g_{(0)i}$ в силу (100,8) равен нулю. Поэтому для связи $g_{\mu\nu}$ с четырехмерным метрическим тензором g_{ik} мы получаем формулы

$$g_{ik} = \gamma_i^\mu \gamma_k^\nu g_{\mu\nu}, \quad \overline{g}_{\mu\nu} = g_{ik} \gamma_\mu^i \gamma_\nu^k, \quad g_{\mu\nu} = \overline{g}_{\mu\nu} + X_\mu X_\nu. \tag{100,15}$$

Легко проверить, что при этом из соотношения $g_{\mu\nu} A^\nu = A_\mu$ вытекает такое же соотношение для сопряженного 4-вектора, $-g_{ik} A^k = A_i$.

Дифференциалы dX^ν, как уже было отмечено, не составляют вектора. Можно, однако, ввести вектор $\overline{d}X^\nu$, сопряженный вектору dx^k:

$$\overline{d}X^\nu = \gamma_k^\nu dx^k. \tag{100,16}$$

С помощью $\overline{d}X^\nu$ можно определить бесконечно малый параллельный перенос по формулам, совершенно аналогичным тем, которые мы имели в неоднородных координатах x^k. Именно, ковариантные дифференциалы

$$DA^\nu = \overline{d}X^\mu A^\nu_{;\mu}, \quad DA_\nu = \overline{d}X^\mu A_{\nu;\mu}, \tag{100,17}$$

где ковариантные производные $A^\nu_{;\mu}$, $A_{\nu;\mu}$ определяются через величины $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ по формулам того же вида, что и прежде:

$$A^\nu_{;\mu} = \frac{\partial A^\nu}{\partial X^\mu} + \Gamma^\nu_{\lambda\mu} A^\lambda, \quad A_{\nu;\mu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial X^\mu} - \Gamma^\lambda_{\nu\mu} A_\lambda. \tag{100,18}$$

При этом ковариантная производная от скаляра φ опять сводится к простой производной $\left(\varphi_{;\nu} = \frac{\partial \varphi}{\partial X^\nu}\right)$ и, согласно условию однородности,

$$X^\nu \varphi_{;\nu} = 0. \tag{100,19}$$

Сами же величины $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ выражаются через $g_{\mu\nu}$ так же, как Γ^i_{kl} выражались через g_{ik}.

Легко проверить (воспользовавшись выражением для $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ через $g_{\mu\nu}$ и свойствами однородности вектора X^{ν} и тензора $g_{\mu\nu}$), что ковариантная производная от X_{μ}:

$$X_{\mu;\nu}=\frac{\partial X_{\mu}}{\partial X^{\nu}}-\Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}X_{\lambda}$$

антисимметрична по индексам μ и ν $(X_{\mu;\nu}+X_{\nu;\mu}=0)$. Тензор $X_{\mu;\nu}$, который мы будем обозначать просто как $X_{\mu\nu}$, играет основную роль для физических применений. Напишем его в явно антисимметричном виде:

$$X_{\mu\nu}=\frac{1}{2}(X_{\mu;\nu}-X_{\nu;\mu})=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial X_{\mu}}{\partial X^{\nu}}-\frac{\partial X_{\nu}}{\partial X^{\mu}}\right). \qquad (100,20)$$

Отметим некоторые свойства $X_{\mu\nu}$. Из $X_{\mu}X^{\mu}=1$ имеем

$$X_{\mu\nu}X^{\mu}=0. \qquad (100,21)$$

Отсюда следует, что из четырех величин в пространстве x^k, которыми характеризуется тензор 2-го ранга (см. выше), для тензора $X_{\mu\nu}$ остается только тензор X_{ik}, так что

$$X_{ik}=-X_{ki}=\gamma^{\mu}_{i}\gamma^{\nu}_{k}X_{\mu\nu}, \quad X_{\mu\nu}=\gamma^{i}_{\mu}\gamma^{k}_{\nu}X_{ik}. \qquad (100,22)$$

Умножая (100,18) на X^{μ}, имеем

$$X^{\mu}A^{\nu}_{;\mu}=X^{\mu}\left(\frac{\partial A^{\nu}}{\partial X^{\mu}}+\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}A^{\lambda}\right)=A^{\nu}+\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}X^{\mu}A^{\lambda},$$

и, замечая, что ковариантная производная от X^{ν} равна

$$X^{\nu}_{\mu}=\delta^{\nu}_{\mu}+\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}X^{\lambda},$$

находим

$$X^{\mu}A^{\nu}_{;\mu}=A^{\mu}X^{\nu}_{\mu}, \quad X^{\mu}A_{\nu;\mu}=-A_{\mu}X^{\mu}_{\nu}. \qquad (100,23)$$

Из (100,20) следует, что

$$\frac{\partial X_{\mu\nu}}{\partial X^{\rho}}+\frac{\partial X_{\rho\mu}}{\partial X^{\nu}}+\frac{\partial X_{\nu\rho}}{\partial X^{\mu}}=0. \qquad (100,24)$$

С помощью (100,22) отсюда можно получить аналогичные соотношения для X_{ik}:

$$\frac{\partial X_{ik}}{\partial x^{l}}+\frac{\partial X_{li}}{\partial x^{k}}+\frac{\partial X_{kl}}{\partial x^{i}}=0. \qquad (100,25)$$

Далее, можно показать, что между 5-мерными и 4-мерными ковариантными производными имеется, в соответствии с общими правилами, связь

$$\gamma^{\mu}_{i}\gamma^{k}_{\nu}\overline{A^{\nu}_{;\mu}}=A^{k}_{;i}. \qquad (100,26)$$

С помощью этого соотношения и формул (100,12), (100,21) и (100,23) можно получить

$$A^{\nu}_{;\mu}=\gamma^{\nu}_{i}\gamma^{k}_{\mu}A^{i}_{;k}+X_{\mu}\gamma^{\nu}_{i}X^{i}_{k}A^{k}+X^{\nu}\left(\frac{\partial A}{\partial X^{\mu}}-\gamma^{i}_{\mu}X_{ki}A^{k}\right)+AX^{\nu}_{\mu} \qquad (100,27)$$

и аналогичное соотношение для ковариантного вектора. Наконец для ковариантного дифференциала (100,17) можно получить отсюда

$$\left.\begin{aligned} DA^{\nu} &= \gamma^{\nu}_{i}(DA^{i} + AX^{i}_{k}\,dx^{k}) + X^{\nu}dA, \\ DA_{\nu} &= \gamma^{i}_{\nu}(DA_{i} + AX_{ik}dx^{k}) + X_{\nu}dA, \end{aligned}\right\} \tag{100,28}$$

где $DA^{i} = A^{i}_{;k}dx^{k}$ — четырехмерный ковариантный дифференциал.

5-тензор „кривизны" $P^{\nu}_{\mu\rho\sigma}$ мы определим через $\Gamma^{\nu}_{\mu\lambda}$ так же, как 4-тензор R^{i}_{klm} определяется через Γ^{i}_{kl}. Тензор $P^{\nu}_{\mu\rho\sigma}$ можно выразить через тензор R^{i}_{klm} и тензор $X_{\mu\nu}$. Приведем результат вычисления для упрощенного тензора кривизны

$$\begin{aligned} P_{\mu\nu} = P^{\sigma}_{\mu\nu\sigma} = \gamma^{i}_{\mu}\gamma^{k}_{\nu}R_{ik} + 2X^{\sigma}{}_{\mu}X_{\sigma\nu} - (X_{\mu}X^{\sigma}{}_{\nu;\sigma} + \\ + X_{\nu}X^{\sigma}{}_{\mu;\sigma}) + X_{\mu}X_{\nu}X_{\sigma\rho}X^{\sigma\rho}. \end{aligned} \tag{100,29}$$

Скалярная кривизна

$$P = g^{\mu\nu}P_{\mu\nu} = R + X_{\rho\sigma}X^{\rho\sigma} = R + X_{ik}X^{ik}, \tag{100,30}$$

а сопряженные с $P_{\mu\nu}$ 4-тензор, 4-вектор и скаляр:

$$\left.\begin{aligned} P_{ik} &= \gamma^{\mu}_{i}\gamma^{\nu}_{k}P_{\mu\nu} = R_{ik} + 2X^{l}_{i}X_{lk}, \\ P_{(0)i} &= \gamma^{\mu}_{i}X^{\nu}P_{\mu\nu} = -X^{k}_{i;k}, \\ P_{(0)(0)} &= X^{\mu}X^{\nu}P_{\mu\nu} = -X_{ik}X^{ik}. \end{aligned}\right\} \tag{100,31}$$

Приведенные соотношения показывают, что метрика пространства X^{ν} (при заданных γ^{k}_{ν}) определяется 4-тензорами g_{ik} и X_{ik}. Оказывается, что если отождествить тензор X_{ik} с тензором F_{ik} электромагнитного поля (тензор же g_{ik} попрежнему определяет гравитационное поле), то можно вывести и формулировать единым образом уравнения гравитационного и электромагнитного полей, сливающихся при этом вместе в уравнения, выраженные через тензоры и векторы в однородных координатах. То же самое относится к уравнениям движения заряженных частиц [1]).

Положим

$$X_{ik} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varkappa}{2\pi}}\,F_{ik}. \tag{100,32}$$

Прежде всего заметим, что первая пара уравнений Максвелла (76,2) оказывается автоматически выполненной [совпадая с (100,25) в силу метрических свойств самого пространства X^{ν}].

---

[1]) Подчеркнем, однако, то обстоятельство, что речь идет при этом отнюдь не о каком-либо сведении электромагнитного поля к метрическим свойствам пространства-времени, как это имеет место для гравитационного поля. Метрика реальных пространства и времени (4-пространства x^{k}) остается такой же, как и раньше.

Аналогично тому, как траектория частицы в гравитационном поле является геодезической линией в 4-пространстве x^k, определим траекторию заряженной частицы в гравитационном и электромагнитном полях вместе, как геодезическую линию в пятимерном пространстве X^ν.

Пусть $x^k = x^k(s)$ есть параметрическое уравнение кривой в 4-пространстве, так что $u^k = \frac{dx^k}{ds}$ есть 4-вектор скорости частицы, движущейся по этой кривой. Введем 5-вектор скорости u_ν так, чтобы $u^k = \gamma^k_\nu u^\nu$ в соответствии с общими правилами, изложенными в предыдущем параграфе. Согласно (100,12) имеем тогда

$$u^\nu = \gamma^\nu_k u^k + uX^\nu.$$

Аналогично уравнению геодезической кривой в 4-пространстве $\left(\frac{Du^k}{ds} = 0,\right.$ см. § 82$\left.\right)$ определим пятимерную геодезическую кривую уравнением

$$\frac{Du^\nu}{ds} = \frac{\overline{d}X^\mu}{ds} u^\nu_{;\mu} = 0. \tag{100,33}$$

Согласно (100,22) это уравнение при переходе к четырехмерным величинам распадается на два:

$$\frac{du}{ds} = 0, \quad u = \text{const.},$$

$$\frac{Du^l}{ds} + 2uX^l_k \frac{dx^k}{ds} = 0$$

или

$$\frac{d^2x^l}{ds^2} + \Gamma^l_{ik} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{ds} = \frac{e}{mc} F^l_k \frac{dx^k}{ds},$$

причем мы подставили выражение для четырехмерной ковариантной производной, а для постоянной интегрирования $u = u^\nu X_\nu$ выбрали значение

$$u^\nu X_\nu = -\frac{e}{mc^2}\sqrt{\frac{2\pi}{\varkappa}}, \tag{100,34}$$

так что 5-скорость частицы есть

$$u^\nu = \frac{\overline{d}X^\nu}{ds} - \frac{e}{mc^2}\sqrt{\frac{2\pi}{\varkappa}}X^\nu. \tag{100,35}$$

Полученное уравнение совпадает с уравнением движения (84,6) частицы в гравитационном и электромагнитном полях, так что пятимерное уравнение (100,33) действительно является уравнением движения.

Перейдем теперь к уравнениям поля. Будем исходить из того, что уравнения гравитационного и электромагнитного полей в пустоте должны являться результатом „принципа наименьшего действия“ в пятимерном пространстве, аналогичным тому, который был написан в § 89:

$$\delta \int \mathrm{P}\sqrt{|g_{\mu\nu}|}\,dX^1 \ldots dX^5 = 0, \tag{100,36}$$

где $\mathrm{P} = g^{\mu\nu}\mathrm{P}_{\mu\nu}$ — скалярная „кривизна“, а $|g_{\mu\nu}|$ — детерминант, составленный из $g_{\mu\nu}$. Варьирование производится по $g_{\mu\nu}$ с дополнительным условием

$$\delta(g_{\mu\nu}X^{\mu}X^{\nu}) = X^{\mu}X^{\nu}\delta g_{\mu\nu} = 0, \tag{100,37}$$

являющимся результатом того, что всегда должно быть $g_{\mu\nu}X^{\mu}X^{\nu} = 1$.

Подставляя (100,32) в выражение (100,30) для Р, находим

$$\mathrm{P} = R + \frac{\varkappa}{8\pi} F_{ik}F^{ik}. \tag{100,38}$$

Это есть как раз то выражение, которое стоит под интегралом в сумме действий гравитационного и электромагнитного полей.

Варьирование интеграла (100,36) производится точно так же, как при выводе уравнений гравитационного поля в § 91, и дает

$$\int \left(\mathrm{P}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\mathrm{P}\right) \delta g^{\mu\nu} \sqrt{|g_{\rho\sigma}|}\, dX^1 \ldots dX^5.$$

Для того, чтобы этот интеграл был равен нулю при условии (100,37), необходимо, очевидно, чтобы

$$\mathrm{P}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\mathrm{P} = FX_{\mu}X_{\nu}, \tag{100,39}$$

где F — скаляр, который можно определить, умножая обе части уравнений (100,39) на $X^{\mu}X^{\nu}$.

Взяв для обеих частей уравнения (100,39) сопряженные 4-тензор и 4-вектор, получаем два четырехмерных уравнения

$$\mathrm{P}_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik}\mathrm{P} = 0, \quad \mathrm{P}_{(0)i} = 0$$

[правая часть (100,39) дает в силу (100,8) нуль]. Подставляя сюда (100,31) и (100,32), мы действительно получаем верные уравнения гравитационного поля (91,6) при наличии электромагнитного, и вторую пару уравнений Максвелла (84,4), которые таким образом оказываются слившимися в одно пятимерное уравнение (100,39).

Для того, чтобы получить уравнение поля при наличии масс и зарядов, надо ввести „5-тензор энергии-импульса“ материальных частиц

$$T_{\mu\nu} = \rho c^2 u_{\mu} u_{\nu}, \tag{100,40}$$

где ρ есть плотность массы, определенная в § 34 [формулой (34,1)]. С помощью (100,35) легко убедиться в том, что сопряженный с $T_{\mu\nu}$ 4-тензор T_{ik} есть 4-тензор энергии-импульса материи, а 4-вектор $T_{(0)i}$ дает 4-вектор тока. Уравнения поля напишутся теперь в виде

$$\mathrm{P}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\mathrm{P} = -\varkappa T_{\mu\nu} + FX_{\mu}X_{\nu} \tag{100,41}$$

(F надо опять определить, умножая обе части на $X^{\mu}X^{\nu}$), и при переходе к четырехмерным величинам действительно дадут полные уравнения гравитационного поля и уравнения Максвелла.

§ 101. Трудности ньютоновской теории тяготения

Вопрос о свойствах мира как целого, в частности, о распределении в нем материи, приводит в ньютоновской механике к весьма существенным противоречиям, которые не могут быть обойдены, если оставаться в пределах нерелятивистской теории.

В ньютоновской теории тяготения потенциал гравитационного поля (см. § 92) равен $\varphi = -k\int\frac{\mu\, dV}{R}$, где μ — плотность масс[1]). Применяя эту формулу к миру как целому, мы видим, что если вещество распределено по всему пространству и поэтому его средняя плотность μ везде конечна, то гравитационный потенциал обращается в бесконечность. Это привело бы к бесконечным силам, действующим на материю, т. е. к абсурду.

Для того, чтобы гравитационный потенциал оставался конечным, материя должна была бы быть распределенной лишь в некоторой конечной области пространства. Вернее, средняя плотность μ должна была бы стремиться к нулю в бесконечности, причем быстрее, чем $1/R^2$ (заметим, что общая масса, т. е. $\int\mu\, dV$, при этом все же могла бы быть бесконечной). Потенциал при таком распределении материи был бы везде конечным, а в бесконечности обращался бы в нуль.

Однако, статистика приводит к результату, что и такого рода вселенная не могла бы существовать. Действительно, существующая бесконечное время вселенная должна была бы находиться в состоянии статистического равновесия. Равновесное же распределение тел в поле определяется, как известно, формулой Больцмана $\mu = \mu_0 e^{-U/kT}$, где k — постоянная Больцмана, T—температура, а U—потенциальная энергия, равная для тела с массой m в гравитационном поле $U = m\varphi$. Из этой формулы видно, что если в бесконечности $\varphi = 0$, то плотность материи в бесконечности остается конечной и равной μ_0. Таким образом, предположение о равенстве нулю плотности материи в бесконечности приводит к $\rho_0 = 0$, т. е. к равенству нулю плотности во всем пространстве.

§ 102. Изотропное пространство

Проблема мира как целого в общей теории относительности сводится к вопросу о пространственно-временной метрике во вселенной, рассматриваемой в большом масштабе. При таком рассмотрении можно пренебречь местными неоднородностями гравитационного поля, т. е. метрики, вызванными скоплением материи в звезды и звездные системы.

Мы будем в дальнейшем предполагать, что метрика пространства полностью однородна и изотропна. Это значит, что можно выбрать такое „мировое“ время, чтобы в каждый данный его момент метрика пространства была одинаковой во всех его точках и по всем направлениям. Другими словами, пространство обладает полной симметрией. При этом,

---

[1]) При рассмотрении мира как целого средняя плотность материи определяется, очевидно, в областях пространства, больших по сравнению с расстоянием между соседними звездными системами (галактиками).

конечно, автоматически предполагается, что плотность ρ материи (в одинаковые моменты „мирового“ времени) постоянна вдоль всего пространства.

Собственно говоря, в настоящее время нет теоретических или астрономических оснований для этого предположения, и вполне возможно, что оно не отвечает действительному положению вещей. Между тем не может, конечно, иметь никакого смысла рассмотрение воображаемых частных случаев несуществующих вселенных. Если мы тем не менее исходим из указанного выше простого предположения, то только для того, чтобы на основании его получить общее представление о стоящей перед нами проблеме, хотя и трудно сказать, насколько совпадают с действительностью даже существенные свойства получающихся таким образом решений.

Прежде всего, построим пространственную метрику изотропного пространства в определенный момент „мирового“ времени. Другими словами, мы должны найти выражение для элемента пространственного расстояния dl через дифференциалы координат, т. е. определить компоненты тензора $\gamma_{\alpha\beta}$ в общем выражении

$$dl^2 = \gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta. \tag{102,1}$$

Трехмерный метрический тензор мы обозначаем посредством $\gamma_{\alpha\beta}$ в отличие от четырехмерного тензора g_{ik}.

Кривизна пространства полностью определяется его трехмерным тензором кривизны, который мы будем обозначать как $P^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}$ в отличие от четырехмерного тензора R^{i}_{klm} (свойства тензора $P^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}$, конечно, в точности аналогичны свойствам тензора R^{i}_{klm}). В случае полной изотропии тензор $P^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}$ должен, очевидно, выражаться только через метрический тензор $\gamma_{\alpha\beta}$. Легко видеть, что в силу свойств симметрии $P^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}$ (см. § 88) он должен, следовательно, иметь вид

$$P^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = \frac{\lambda}{6}\left(\delta^{\alpha}_{\delta}\gamma_{\gamma\beta} - \delta^{\alpha}_{\gamma}\gamma_{\delta\beta}\right), \tag{102,2}$$

где λ есть некоторая постоянная. Тензор 2-го ранга $P_{\alpha\beta} = P^{\gamma}_{\alpha\beta\gamma}$ равен, соответственно,

$$P_{\alpha\beta} = \frac{\lambda}{3}\gamma_{\alpha\beta}, \tag{102,3}$$

а скалярная кривизна

$$P = \lambda. \tag{102,4}$$

Таким образом, мы видим, что свойства кривизны изотропного пространства определяются всего одной постоянной λ. Соответственно этому возможны всего три существенно различные случая пространственной метрики: 1) так называемое пространство постоянной положительной кривизны (соответствующее отрицательным значениям λ), 2) пространство постоянной отрицательной кривизны (соответствующее значениям $\lambda > 0$) и 3) пространство с кривизной, равной нулю ($\lambda = 0$). Из них последнее представляет собой плоское, т. е. эвклидово пространство.

При изучении метрики удобно исходить из геометрической аналогии, рассматривая геометрию изотропного трехмерного пространства как геометрию на заведомо изотропной гиперповерхности (в некотором фиктивном четырехмерном пространстве). Такой поверхностью является гиперсфера; соответствующее ей трехмерное пространство и является пространством положительной постоянной кривизны. Уравнение гиперсферы с радиусом a в четырехмерном пространстве x_1, x_2, x_3, x_4 есть

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = a^2,$$

а элемент длины на ней

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2.$$

Рассматривая координаты x^1, x^2, x^3 как три пространственные координаты и исключая из dl^2 фиктивную координату x^4 с помощью первого уравнения, находим элемент пространственного расстояния в виде

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + \frac{(x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3)^2}{a^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}. \qquad (102,5)$$

Из этого выражения легко вычислить постоянную λ в (102,2). Поскольку нам заранее известно, что $P_{\alpha\beta}$ имеет вид (102,3) во всем пространстве, то достаточно вычислить его только для точек, находящихся вблизи начала координат, где $\gamma_{\alpha\beta}$ равны:

$$\gamma_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \frac{x_\alpha x_\beta}{a^2}.$$

Так как первые производные от $\gamma_{\alpha\beta}$, а значит и величины $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ в начале координат обращаются в нуль, то вычисление по общей формуле (88,10) оказывается очень простым и дает в результате

$$\lambda = -\frac{2}{a^2}. \qquad (102,6)$$

Величину a можно назвать „радиусом кривизны“ пространства. Введем вместо координат x^1, x^2, x^3 соответствующие им „сферические“ координаты r, θ, φ. Тогда элемент длины примет вид

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{a^2}} + r^2(\sin^2\theta\, d\varphi^2 + d\theta^2). \qquad (102,7)$$

Начало координат может быть, конечно, выбрано в любой точке пространства. Длина окружности в этих координатах равна $2\pi r$, а поверхность сферы равна $4\pi r^2$. Длина же „радиуса“ окружности (или сферы) равна $\int\limits_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}}$, т. е. больше r. Таким образом, отношение длины окружности к радиусу в таком пространстве меньше чем 2π.

Другой удобной формой для dl^2 является та, которая получается, если ввести вместо координаты r координату χ согласно $r = a \sin \chi$. Тогда

$$dl^2 = a^2 [d\chi^2 + \sin^2 \chi (\sin^2 \theta \, d\varphi^2 + d\theta^2)]. \qquad (102,8)$$

Координата χ измеряет расстояние от начала координат, равное $a\chi$. Поверхность сферы в этих координатах равна $4\pi a^2 \sin^2 \chi$. Мы видим, что по мере удаления от начала координат величина поверхности сферы увеличивается, пока не достигнет на расстоянии $\pi a/2$ максимального значения, равного $4\pi a^2$. Вслед за этим она начинает уменьшаться, пока не превратится в точку на „противоположном полюсе“ пространства на расстоянии πa, — наибольшем расстоянии, которое вообще может существовать в таком пространстве [все это видно, конечно, и из (102,7), если заметить, что координата r не может принимать значений, бо́льших чем a].

Объем пространства с положительной кривизной равен согласно (102,8):

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} a^3 \sin^2 \chi \sin \theta \, d\chi \, d\theta \, d\varphi,$$

откуда

$$V = 2\pi^2 a^3. \qquad (102,9)$$

Таким образом, пространство положительной кривизны оказывается конечным (но, разумеется, не имеющим границ).

Интересно отметить, что в замкнутом пространстве полный электрический заряд равен нулю. Действительно, всякая замкнутая поверхность в конечном пространстве с обеих своих сторон охватывает конечные же области пространства. Поэтому поток электрического поля через эту поверхность равен, с одной стороны, полному заряду, находящемуся внутри поверхности, а, с другой, — равен находящемуся вне ее заряду, взятому с обратным знаком. Сумма же зарядов с обеих сторон поверхности равна, следовательно, нулю.

Перейдем теперь к рассмотрению геометрии пространства, обладающего постоянной отрицательной кривизной. Из (102,7) мы видим, что постоянная λ делается положительной, если a^2 отрицательно, т. е. a мнимо. Поэтому все формулы для пространства отрицательной кривизны можно непосредственно получить из предыдущих, заменив в них a на ia. Другими словами, геометрия пространства отрицательной кривизны получается математически как геометрия на четырехмерной псевдосфере с мнимым радиусом.

Таким образом, постоянная λ равна теперь

$$\lambda = \frac{2}{a^2}, \qquad (102,10)$$

а элемент длины в пространстве отрицательной кривизны в координатах r, θ, φ есть

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 + \frac{r^2}{a^2}} + r^2 (\sin^2 \theta \, d\varphi^2 + d\theta^2), \qquad (102,11)$$

где координата r может пробегать все значения от 0 до ∞. Отношение длины окружности к радиусу теперь больше, чем 2π. Выражение для dl^2, соответствующее (102,8), получится, если ввести координату χ согласно $r = a\,\mathrm{sh}\,\chi$. Тогда

$$dl^2 = a^2 \{ d\chi^2 + \mathrm{sh}^2\chi (\sin^2\theta\, d\varphi^2 + d\theta^2) \}. \qquad (102,12)$$

Поверхность сферы равна теперь $4\pi a^2 \mathrm{sh}^2\chi$ и при удалении от начала координат (увеличении χ) возрастает неограниченно. Объем пространства отрицательной кривизны, очевидно, бесконечен.

§ 103. Пространственно-временная метрика изотропного мира

Перейдем теперь к отысканию общего вида интервала ds в изотропном мире. Очевидно, что разумным образом выбранная система отсчета непременно должна быть „собственной" (см. § 96) для всей находящейся в пространстве материи, т. е. материя должна быть в ней неподвижна; в противном случае, направленность скоростей материи создавала бы неэквивалентность различных направлений в пространстве. Временная координата должна быть выбрана в такой системе отсчета указанным в начале предыдущего параграфа образом, т. е. так, чтобы в каждый данный момент времени метрика во всем пространстве была одинаковой.

В виду полной эквивалентности всех направлений, компоненты $g_{0\alpha}$ метрического тензора в выбранной нами системе отсчета равны нулю. Действительно, три компоненты $g_{0\alpha}$ можно рассматривать как компоненты трехмерного вектора, который, будучи отличным от нуля, создавал бы неравноценность различных направлений. Таким образом, ds^2 должно иметь вид $ds^2 = g_{00}dx_0^2 - dl^2$. Компонента g_{00} является здесь функцией толькой от x^0. Поэтому можно всегда выбрать временную координату так, чтобы g_{00} обратилось в c^2. Обозначая ее посредством τ, имеем тогда

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - dl^2. \qquad (103,1)$$

Такое время τ является, очевидно, собственным временем в каждой точке пространства.

Начнем с рассмотрения пространства положительной кривизн... Для dl^2 воспользуемся выражением (102,8), в котором „радиус кри... визны" мира a является, вообще говоря, функцией времени. Так... образом, пишем для ds^2:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - a(\tau)^2 \{ d\chi^2 + \sin^2\chi (d\theta^2 + \sin^2\theta \cdot d\varphi^2) \}. \qquad (103...$$

...6)

Функция $a(\tau)$ определяется уравнениями гравитационного поля. ... решения этих уравнений удобно воспользоваться вместо времени ...ом, ...чиной η, определенной согласно соотношению ...ать

$$c\, d\tau = a\, d\eta. \qquad (...$$

...вязи

Тогда ds^2 напишется в виде

...пре-

$$ds^2 = a(\eta)^2 \{ d\eta^2 - d\chi^2 - \sin^2\chi (\sin^2\theta \cdot d\varphi^2 + d\theta^2) \}. \qquad (1...$$

Это выражение имеет такой же вид, как и ds^2 из (93,1), в котором теперь роль r и t играют соответственно координаты χ и η, а величины λ, μ, ν равны

$$\lambda = 2\ln a, \quad \mu = 2\ln a + 2\ln\sin\chi, \quad \nu = 2\ln a.$$

Поэтому уравнения поля мы можем написать, подставив эти выражения для λ, μ, ν в общие уравнения (96,4—8).

Путем простого вычисления находим из (96,7)

$$\varkappa\rho c^2 = \frac{3}{a^4}(\dot{a}^2 + a^2) \tag{103,5}$$

(точка означает дифференцирование по η). В качестве второго уравнения выберем (96,3). Легко сообразить, что в выбранной нами изотропной системе отсчета функция $f_2(\chi)$ в этом уравнении должна как раз компенсировать зависящие от χ члены с левой его стороны, т. е. в $\lambda + 2\mu$. Таким образом, находим

$$3\ln a = -\int \frac{c^2 d\rho}{p + \rho c^2} + \text{const.} \tag{103,6}$$

(нижний предел в этом интеграле постоянен). Если связь между p и ρ известна, то это уравнение определяет ρ как функцию от a. Тогда из (103,5) мы можем определить η в виде

$$\eta = \pm\int \frac{da}{a\sqrt{\frac{\varkappa\rho c^2 a^2}{3} - 1}}. \tag{103,7}$$

Уравнения (103,6), (103,7) решают в общем виде задачу об определении метрики и распределении материи в изотропном пространстве положительной кривизны.

В реальном пространстве давление p мало по сравнению с плотностью энергии ρc^2. Именно, давление излучения мало благодаря тому, что его количество, т. е. плотность энергии в пространстве, относительно мало, а давление материи мало благодаря сравнительно малым скоростям звезд. Полагая, соответственно этому, $p = 0$, мы находим из (103,6):

$$\rho a^3 = \text{const.}\,^{1)} \tag{103,8}$$

Подставляя это в (103,7), получаем

$$a = a_0(1 - \cos\eta), \tag{103,9}$$

где a_0 — некоторая постоянная. Наконец, для связи между τ и η находим из (103,3)

$$\tau = \frac{a_0}{c}(\eta - \sin\eta). \tag{103,10}$$

Мы видим отсюда, что при $\eta = 0,\ 2\pi,\ 4\pi, \ldots$ a обращается в нуль, ρ — в бесконечность. Но при $\rho \to \infty$ давление тоже делается большим,

[1] Уравнение (103,8) можно было бы написать непосредственно на основе закона сохранения числа частиц, поскольку при $p = 0$ ρ непосредственно пропорционально числу частиц в единице объема, а объем пространства пропорционален a^3.

и потому для исследования метрики при η, близких к указанным значениям, надо рассмотреть противоположный предельный случай наибольшего возможного (при данной плотности) давления. В § 34 мы видели, что это максимальное давление равно $p=\rho c^2/3$. Формулы (103,6), (103,7) и (103,3) дают тогда

$$\rho a^4 = \text{const.}\,^{1)}, \quad a = a_0' \sin\eta, \quad \tau = \frac{a_0'}{c}(1-\cos\eta), \qquad (103{,}11)$$

где a_0' — другая постоянная. Это решение тоже приводит к $a=0$, $\rho=\infty$ при $\eta=0,\ 2\pi,\ 4\pi, \ldots$ Таким образом, при этих значениях η метрика действительно имеет особую точку, а плотность обращается в бесконечность. Поэтому надо рассматривать значения η только в интервале от 0 до 2π (или, что то же самое, от 2π до 4π и т. д.), и не имеет физического смысла аналитически продолжать метрику за границы указанного интервала.

Перейдем теперь к изучению пространства с отрицательной кривизной. Вместо (103,4) мы имеем теперь согласно (102,12):

$$ds^2 = [a(\eta)]^2\{d\eta^2 - d\chi^2 - \operatorname{sh}^2\chi(\sin^2\theta\, d\varphi^2 + d\theta^2)\}. \qquad (103{,}12)$$

Это выражение может быть формально получено из (103,4) заменой η, χ, a соответственно на $i\eta$, $i\chi$, ia. Поэтому и уравнения поля можно получить непосредственно путем этой же подстановки в (103,5), (103,6)

$$\varkappa\rho c^2 = \frac{3}{a^4}(\dot{a}^2 - a^2), \quad 3\ln a = -\int\frac{c^2 d\rho}{\rho c^2 + p} + \text{const.}, \qquad (103{,}13)$$

а вместо (103,7) имеем теперь

$$\eta = \pm\int\frac{da}{a\sqrt{\dfrac{\varkappa\rho c^2 a^2}{3}+1}}. \qquad (103{,}14)$$

Для случая малых давлений находим отсюда, полагая $p=0$:

$$\rho a^3 = \text{const.}, \quad a = a_0(\operatorname{ch}\eta - 1), \quad \tau = \frac{a_0}{c}(\operatorname{sh}\eta - \eta). \qquad (103{,}15)$$

В отличие от решения (103,8—10) a обращается в нуль (а ρ в бесконечность) только при одном значении η, а именно при $\eta=0$. Вблизи $\eta=0$ найденное решение неприменимо, и для исследования метрики в этой области опять полагаем $p=\frac{1}{3}\rho c^2$. В результате мы находим

$$\rho a^4 = \text{const.}, \quad a = a_0'\operatorname{sh}\eta, \quad \tau = \frac{a_0'}{c}(\operatorname{ch}\eta - 1). \qquad (103{,}16)$$

Это решение тоже приводит к $a=0$, $\rho=\infty$ при $\eta=0$. Таким образом, в случае пространства с отрицательной кривизной надо рассматривать все функции только при значениях $\eta>0$ или только при $\eta<0$.

---

1) Это соотношение, как и (103,8), получается непосредственно из связи между ρ и числом частиц в единице объема, которая в случае $p=\frac{1}{3}\rho c^2$ определяется формулой (34,13).

Наконец, рассмотрим плоское пространство. Интервал ds в соответствующем пространстве-времени можно написать в виде

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - b(\tau)^2 (dr^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2 + r^2 d\theta^2).$$

Зависящий от времени множитель перед элементом пространственного расстояния, очевидно, не меняет эвклидова характера пространственной метрики, так как при заданном τ этот множитель постоянен и простым преобразованием координат может быть приведен к единице. Вводя опять величину η вместо τ, согласно соотношению $c\,d\tau = b\,d\eta$, имеем

$$ds^2 = b(\eta)^2 (d\eta^2 - dr^2 - r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2 - r^2 d\theta^2). \qquad (103,17)$$

Общие уравнения поля (96,3) и (96,7) дают

$$\varkappa \rho c^2 = \frac{3\dot{b}^2}{b^4}, \quad 3 \ln b = -\int \frac{c^2 d\rho}{p + \rho c^2} + \text{const.}, \qquad (103,18)$$

откуда

$$\eta = \sqrt{\frac{3}{\varkappa}} \int \frac{d\rho}{b^2 \sqrt{\rho c^2}}. \qquad (103,19)$$

Для случая $p = 0$ находим

$$\rho b^3 = \text{const.}, \quad b = b_0 \eta^2, \quad \tau = \frac{b_0}{c} \frac{\eta^3}{3}, \qquad (103,20)$$

а при $p = \frac{1}{3} \rho c^2$:

$$\rho b^4 = \text{const.}, \quad b = b_0' \eta, \quad \tau = \frac{b_0'}{c} \frac{\eta^2}{2}. \qquad (103,21)$$

Таким образом, и в этом случае метрика имеет особую точку при $\eta = 0$.

Необходимо, однако, иметь в виду, что лишь более полное исследование уравнений поля в общем случае не изотропного пространства могло бы ответить на вопрос о том, насколько указанное общее свойство приведенных выше решений соответствует реальной действительности, а не является специальным свойством изотропной модели, не имеющим места при более общих предположениях.

Расстояние от любой точки, выбранной в качестве начала координат до какой-либо другой точки, равно $a\chi$ (а в плоском пространстве — соответственно br). Это расстояние меняется со временем. Скорость этого изменения равна

$$V = \frac{da\chi}{d\tau} = \chi \dot{a} \frac{d\eta}{d\tau} = \chi \frac{c\dot{a}}{a},$$

т. е. пропорциональна расстоянию от наблюдателя до наблюдаемой точки. Отношение скорости к расстоянию, которое мы обозначим посредством α, равно

$$\alpha = \frac{V}{a\chi} = c \frac{\dot{a}}{a^2}. \qquad (103,22)$$

Заметных значений скорость V достигает лишь для очень больших расстояний. Астрономически этот эффект приводит к тому, что внегалактические туманности оказываются обладающими большими радиальными скоростями относительно земли, действительно пропорциональными их расстоянию от земли. Для α измерения дают в настоящее время значение около $\alpha = 1{,}8 \cdot 10^{-17}$ сек.$^{-1}$. Скорости V всех туманностей положительны, т. е. „туманности" разбегаются друг от друга. Из положительности V следует, что $\dot{a} > 0$. Это значит, что значение η в настоящее время лежит между 0 и π, если пространство обладает положительной кривизной, и $\eta > 0$, если кривизна отрицательна.

Напишем формулы, связывающие η и a с измеряемыми астрономическими величинами α и ρ. Для пространства положительной кривизны имеем из (103,5)

$$\frac{\varkappa\rho c^2}{3} = \frac{1}{a^2} + \frac{\alpha^2}{c^2}, \tag{103,23}$$

а из (103,9) и (103,10)

$$\alpha = \frac{c \cdot \cancel{\cos\eta}\ \sin\eta}{a_0(1-\cos\eta)^2} = \frac{c}{a}\,\mathrm{ctg}\,\frac{\eta}{2}.$$

Комбинируя эти два уравнения, находим

$$\cos\frac{\eta}{2} = \alpha\sqrt{\frac{3}{\varkappa\rho c^2}}. \tag{103,24}$$

Для пространства отрицательной кривизны получаем аналогично

$$\frac{\varkappa\rho}{3} = \frac{\alpha^2}{c^2} - \frac{1}{a^2}, \tag{103,25}$$

$$\mathrm{ch}\,\frac{\eta}{2} = \frac{\alpha}{c^2}\sqrt{\frac{3}{\varkappa\rho c^2}}. \tag{103,26}$$

Формулы (103,23) и (103,25) дают возможность установить знак кривизны пространства, если известны значения ρ и α. Именно, кривизна положительна или отрицательна в зависимости от того, положительна или отрицательна разность $\frac{\varkappa\rho c^2}{3} - \frac{\alpha^2}{c^2}$. Она обращается в нуль при $\rho = \frac{3\alpha^2}{\varkappa c^4} = 6 \cdot 10^{-28}$ *г/см*^{3}. Имеющиеся в настоящее время измерения ρ обладают небольшой точностью. Они дают для ρ значения порядка 10^{-30} *г/см*^{3}. Вместе с приведенным выше значением α это приводит к $\frac{\varkappa\rho c^2}{3} - \frac{\alpha^2}{c^2} > 0$, причем $a = 1{,}7 \cdot 10^{27}$ *см* $= 1{,}8 \cdot 10^9$ световых лет. Таким образом, имеющиеся в настоящее время данные дают основания считать, что пространство бесконечно и обладает отрицательной кривизной.

§ 104. Распространение света

Рассмотрим распространение лучей света в изотропном пространстве. Для этого напишем уравнение эйконала (82,10):

$$g^{ik}\frac{\partial\psi}{\partial x^i}\frac{\partial\psi}{\partial x^k} = 0.$$

Точку, из которой выходит луч света, выберем в качестве начала координат χ, θ, φ. Из соображений симметрии очевидно, что лучи света будут распространяться вдоль линий $\theta = \text{const.}$, $\varphi = \text{const.}$, т. е. вдоль луча будет меняться только координата χ. Поэтому эйконал ψ является функцией только от пространственной координаты χ и от временной координаты η. С помощью g^{ik} из (103,4) или (103,2) находим теперь уравнение эйконала в простом виде

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta}\right)^2 = \left(\frac{\partial \psi}{\partial \chi}\right)^2, \tag{104,1}$$

имеющем место в пространстве как с положительной, так и с отрицательной кривизной.

Полный интервал этого уравнения есть

$$\psi = \beta(\chi \pm \eta) + \text{const.} \tag{104,2}$$

с постоянным β. Мы выберем здесь знак минус перед η, что соответствует лучам, распространяющимся по направлению от начала координат. Уравнение распространения луча получается отсюда, как и при решении уравнения Гамильтона-Якоби, путем приравнивания постоянной производной от ψ по параметру β. Это дает

$$\chi = \eta + \text{const.}, \tag{104,3}$$

чем и определяется распространение лучей света. С помощью формул предыдущего параграфа можно выразить отсюда проходимое лучом расстояние $a\chi$ как функцию от времени τ.

В пространстве с положительной кривизной обходу луча „вокруг пространства“ и возвращению его в исходную точку соответствовало бы изменение χ от 0 до 2π (см. § 102). Из (104,3) мы видим, что при этом и η должно было бы измениться на 2π, что, однако, невозможно (за исключением только одного случая, — выхода луча в момент $\eta = 0$). Таким образом, луч не мог бы возвратиться в исходную точку, обойдя „вокруг пространства“.

Частоту ω света можно определить, дифференцируя эйконал по времени

$$\omega = -\frac{\partial \psi}{\partial \tau} = -\frac{\partial \psi}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial \tau} = -\frac{c\dot{\psi}}{a}$$

или, подставляя выражение (104,2) для ψ:

$$\omega = \frac{\beta c}{a}.$$

Таким образом, при распространении луча света вдоль него постоянно произведение

$$a\omega = \text{const.} \tag{104,4}$$

Предположим, что в момент η мы наблюдаем свет, испущенный туманностью, находящейся на расстоянии, соответствующем определенному значению координаты χ. Моменту испускания этого света туманностью соответствует согласно (104,2) значение $\eta - \chi$ координаты η.

Если ω_0 есть частота света в момент его испускания, то наблюдаемая нами частота ω равна согласно (104,4):

$$\omega = \omega_0 \frac{a(\eta - \chi)}{a(\eta)}. \tag{104,5}$$

Поскольку, как было указано в конце предыдущего параграфа, $a(\eta)$ есть возрастающая функция от η, то $\omega < \omega_0$, т. е. происходит смещение частоты света в красную сторону спектра. Это явление представляет собой по существу эффект Допплера от взаимного „разбегания“ туманностей. В пространстве с отрицательной кривизной имеем из (104,5) и (103,15) при $\eta \gg 1$ приближенно

$$\omega = \omega_0 e^{-\chi}. \tag{104,6}$$

Далее, определим интенсивность J света, доходящего до нас с туманности, находящейся на расстоянии χ. Поток световой энергии в единицу времени через единицу поверхности на расстоянии $a\chi$ от источника света обратно пропорционален поверхности сферы радиуса $a\chi$, равной (в пространстве с отрицательной кривизной) $4\pi a^2 \operatorname{sh}^2\chi$ (см. § 102). Далее, интенсивность определяется наблюдателем как поток световой энергии в единицу собственного времени, интервал $d\tau = \frac{a(\eta)}{c} d\eta$ которого меняется с изменением η. Поскольку интенсивность обратно пропорциональна длительности этого интервала, а за время распространения света от источника до наблюдателя a меняется от $a(\eta - \chi)$ до $a(\eta)$, то в J появится множитель $\frac{a(\eta-\chi)}{a(\eta)}$. Наконец, надо иметь в виду, что энергия, измеряемая наблюдателем в данном месте, есть производная от действия по собственному времени. Между тем, не зависящей от времени является не производная $\frac{\partial S}{\partial \tau}$, а производная $\frac{\partial S}{\partial \eta}$, что непосредственно следует из того, что уравнение Гамильтона-Якоби, имеющее вид, аналогичный (104,1), не содержит η. Поскольку $\frac{\partial S}{\partial \tau} = \frac{c}{a}\frac{\partial S}{\partial \eta}$, то энергия обратно пропорциональна $a(\eta)$. Это приводит к появлению в J еще одного множителя $\frac{a(\eta-\chi)}{a(\eta)}$. В результате получаем окончательно интенсивность в виде

$$J = \text{const.} \frac{a^2(\eta - \chi)}{a^4(\eta)\operatorname{sh}^2\chi}. \tag{104,7}$$

Астрономически расстояние до туманностей часто измеряется именно по их видимой яркости (абсолютные яркости внегалактических туманностей при этом считают примерно одинаковыми). Это „астрономическое расстояние“ R связано с J посредством соотношения $J = \text{const.}/R^2$, и, следовательно, для R мы имеем из (104,7)

$$R = \frac{a^2(\eta)\operatorname{sh}\chi}{a(\eta - \chi)} \tag{104,8}$$

(при небольших χ R равно $a\chi$, т. е. истинному расстоянию). В пространстве с отрицательной кривизной это дает при $\eta \gg 1$ приближенно

$$R = \frac{a}{2}(e^{2\chi} - 1). \tag{104,9}$$

Наконец, определим количество dN туманностей, находящихся на „расстоянии" между R и $R+dR$. Поскольку распределение туманностей в пространстве считается равномерным, то число их в данном элементе объема пропорционально величине этого элемента, причем, поскольку мы пользуемся „собственной" системой отсчета, оно не зависит от η. Таким образом,

$$dN = \text{const.}\, \mathrm{sh}^2 \chi\, d\chi. \tag{104,10}$$

Выражая χ через R, мы можем получить отсюда распределение туманностей по их яркостям.

§ 105. Термодинамика общей теории относительности

Общая теория относительности коренным образом меняет результаты применения термодинамики к миру как целому.

Мы видели в § 97, что закон сохранения полного 4-импульса в общей теории относительности приобретает характер тождества. В частности, полный 4-импульс P_i во всем пространстве оказывается равным нулю. Это следует непосредственно из выражения (97,11) 4-импульса в виде интеграла по поверхности $P_i = \frac{1}{c}\oint h_i^{0\alpha} df_\alpha$. Действительно, в конечном пространстве (т. е. в пространстве с положительной кривизной) всякая замкнутая поверхность с обеих своих сторон охватывает конечную область пространства. Поэтому указанный интеграл равен полному 4-импульсу, заключенному в пространстве с одной стороны поверхности, и в то же время взятому с обратным знаком 4-импульсу в пространстве, находящемся с другой ее стороны. Полный же 4-импульс во всем пространстве равен, следовательно, нулю.

В случае бесконечного пространства (с отрицательной кривизной) не имеет, очевидно, смысла говорить о полном 4-импульсе во всем пространстве, и надо вместо этого рассматривать 4-импульс, отнесенный, скажем, к единице объема, т. е. предел отношения 4-импульса в некоторой области пространства к объему этой области при неограниченном ее увеличении. Но гравитационное поле, т. е. g_{ik} и Γ^i_{kl}, а потому и величины h^i_{kl} во всем пространстве конечны. Поэтому при увеличении области пространства интеграл $\frac{1}{c}\oint h_i^{0\alpha}\, df_\alpha$ растет в общем, как поверхность, охватывающая эту область, т. е. медленнее, чем ее объем. Их отношение, т. е. 4-импульс, приходящийся на единицу объема, стремится, следовательно, к нулю.

Таким образом, закон сохранения полного 4-импульса во всем пространстве выполняется тождественно, сводясь к тому, что нуль всегда равен нулю.

В нерелятивистской термодинамике энтропия всякой замкнутой системы монотонно возрастает, достигая через достаточный промежуток времени своего максимального значения, соответствующего состоянию термодинамического равновесия. Это значение является максимальным, какое энтропия может иметь при данных постоянных значениях импульса и энергии системы. В применении к миру, как целому, этот закон приводит в нерелятивистской механике к известной трудности, так называемой „тепловой смерти".

В релятивистской термодинамике закон монотонного возрастания энтропии замкнутых систем попрежнему имеет место. Однако, утверждение, что при этом возрастании энтропия принимает в конце концов наибольшее возможное при данных энергии и импульсе значение, в применении к миру, как целому, теряет теперь смысл. Таким образом, энтропия мира систематически возрастает без того, однако, чтобы мир переходил в какое-либо состояние равновесия, обладающее максимальной энтропией.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГИЗ РСФСР

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
„ГОСТЕХИЗДАТ“

Москва, Метростроевская, 1.