РАЗНОСТЬ

n-го порядка логариѳмической функціи.

М. А. Тихомандрицкаго.

Пусть дана нѣкоторая функція u_x отъ перемѣнной x; разность n-го порядка этой функціи чрезъ члены ряда ея значеній:

$$u_x, \ u_{x+h}, \ u_{x+2h} \cdots\cdots u_{x+nh}, \qquad (1)$$

соотвѣтствующихъ послѣдовательному увеличенію значеній x на h, выражается, какъ извѣстно, такимъ образомъ:

$$\Delta^n u_x = u_{x+nh} - C_1{}^n u_{x+(n-1)h} + C_2{}^n u_{x+(n-2)h} - \ldots + (-1)^n u_x, \qquad (2)$$

гдѣ $C_m{}^n$ обозначаетъ m-ый биноміальный коэффиціентъ; разность n-го порядка отъ $\log u_x$ выразится чрезъ члены ряда (1), если возьмемъ логариѳмъ отъ дроби, числитель которой будетъ состоять изъ произведенія тѣхъ членовъ этого ряда, предъ которыми въ формулѣ (2) стоитъ знакъ $+$, знаменатель же изъ произведенія тѣхъ, предъ которыми стоитъ знакъ $-$, — возвышенныхъ каждый въ степень, показываемую его коэффиціентомъ въ той же формулѣ (2), такимъ образомъ:

$$\Delta^n \log u_x = \log \left\{ \frac{u_{x+nh} \cdot (u_{x+(n-2)h})^{C_2{}^n} (u_{x+(n-4)h})^{C_4{}^n} \ldots\ldots}{(u_{x+(n-1)h})^{C_1{}^n} (u_{x+(n-2)h})^{C_3{}^n} \ldots\ldots\ldots} \right\} \qquad (3)$$

Дѣйствительно, мы имѣемъ послѣдовательно:

$$\Delta \log u_x = \log u_{x+h} - \log u_x = \log \frac{u_{x+h}}{u_x};$$

$$\Delta^2 \log u_x = \Delta \log \frac{u_{x+h}}{u_x} = \log \frac{u_{x+2h}}{u_{x+h}} - \log \frac{u_{x+h}}{u_x} = \log \frac{u_{x+2h}u_x}{(u_{x+h})^2};$$

$$\Delta^3 \log u_x = \Delta \log \frac{u_{x+2h} \cdot u_x}{(u_{x+h})^2} = \log \frac{u_{x+3h} \cdot u_{x+h}}{(u_{x+2h})^2} - \log \frac{u_{x+2h} \cdot u_x}{(u_{x+h})^2} =$$

$$= \log \frac{u_{x+3h} \cdot (u_{x+h})^3}{(u_{x+2h})^3 u_x};$$

и т. д.—результаты, которые получаются изъ (3), полагая въ ней $n = 1, 2, 3$, и т. д.; такъ что остается только показать, что наша формула, разъ она вѣрна до порядка n, будетъ вѣрна и для непосредственно слѣдующаго, а слѣдовательно и для всякаго порядка. Для этого беремъ разность отъ обѣихъ частей (3); будемъ имѣть:

$$\Delta^{n+1} \log u_x = \log \left\{ \frac{u_{x+(n+1)h} \cdot (u_{x+(n-1)h})^{C_2^n} (u_{x+(n-3)h})^{C_4^n} \dots}{(u_{x+nh})^{C_1^n} \cdot (u_{x+(n-2)h})^{C_3^n} \dots\dots\dots\dots} \right\} -$$

$$- \log \left\{ \frac{u_{x+nh} \cdot (u_{x+(n-2)n})^{C_2^n} \cdot (u_{x+(n-4)h})^{C_4^n} \dots}{(u_{x+(n-1)h})^{C_1^n} (u_{x+(n-3)h})^{C_3^n} \dots\dots\dots} \right\} =$$

$$= \log \left\{ \frac{u_{x+(n+1)h} \cdot (u_{x+(n-1)h})^{C_2^n + C_1^n} (u_{x+(n-3)h})^{C_4^n + C_3^n} \dots}{(u_{x+nh})^{C_1^n + 1} (u_{x+(n-2)h})^{C_3^n + C_2^n} \dots\dots\dots\dots} \right\};$$

но, по извѣстнымъ свойствамъ биноміальныхъ коэффиціентовъ,

$$C_1^n+1=C_1^{n+1};\ C_2^n+C_1^n=C_2^{n+1};\ C_3^n+C_2^n=C_3^{n+1};\ C_4^n+C_3^n=C_4^{n+1},$$

и т. д.;

слѣд. мы получаемъ:

$$\Delta^{n+1}\log u_x=\log\left\{\frac{u_{x+(n+1)h}\cdot(u_{x+(n-1)h})^{C_2^{n+1}}\cdot(u_{x+(n-3)h})^{C_4^{n+1}}\cdots}{(u_{x+nh})^{C_1^{n+1}}(u_{x+(n-2)h})^{C_3^{n+1}}\cdots\cdots}\right\},$$

—результатъ, который получается изъ (3) чрезъ перемѣну n на $n+1$, что и доказываетъ справедливость нашей формулы для всякаго значенія n.

Такимъ образомъ формула (3) выводится непосредственно изъ самаго опредѣленія конечной разности; но ее можно получить еще скорѣе изъ формулы (2), перемѣнивъ въ послѣдней u_x на $\log u_x$ и соединивъ затѣмъ всѣ члены въ одинъ на основаніи извѣстныхъ свойствъ логариѳма.

18 $\frac{21}{\text{II}}$ 86.