УДК 517.535.4

Б. Г. ФРЕЙДИН

О ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЯХ, ДОПУСКАЮЩИХ СПЕЦИАЛЬНУЮ ОЦЕНКУ СНИЗУ

Целая функция $f: \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}$ называется функцией класса Крейна, если

$$1/f(z) = C + \sum_{k=1}^{\infty} A_k/(z - h_k), \quad \sum_{k=1}^{\infty} |A_k| < \infty, \tag{1}$$

где C, A_k, $h_k \in \boldsymbol{R}$. Эти функции были введены М. Г. Крейном в [1] и использовались в теории операторов, проблеме моментов, теории дифференциальных уравнений [2, 5]. М. Г. Крейн доказал [1], что такие функции имеют рост не выше экспоненциального типа и выполняются условия:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\ln|f(t)||(1 + t^2)^{-1} dt < \infty, \tag{2}$$

$$\exists \lim_{t \to \infty} t^{-1} n_+(t) = \lim_{t \to \infty} t^{-1} n_-(t), \tag{3}$$

где $n_+(t)$ и $n_-(t)$ — считающие функции нулей соответственно на $[0, t]$ и $[-t, 0]$. Для функций класса Крейна, имеющих нормальный тип при порядке $\rho = 1$, условие (3) означает определенную симметрию в расположении корней. Возникает вопрос, имеется ли аналог (3) для функций класса Крейна порядка $\rho < 1$. То, что при $0 \leqslant \rho \leqslant \frac{1}{2}$ корни могут располагаться лишь на одном луче, показывает пример: $f(z) = \cos\sqrt{z}$. В настоящей заметке показано, что при $1/2 < \rho < 1$ для функций класса Крейна имеет место некоторое более слабое условие, чем (3): обе величины

$$\sigma_+ = \overline{\lim_{t \to \infty}}\, t^{-\rho(t)} n_+(t), \quad \sigma_- = \overline{\lim_{t \to \infty}}\, t^{-\rho(t)} n_-(t),$$

где $\rho(t)$ — уточненный порядок $f(z)$, положительны.

Из (1) следует, что $f(z)$ допускает оценку снизу $|f(z)| > C|y|$. В 1961 г. В. И. Мацаевым было получено следующее обобщение теоремы Крейна.

Теорема [3.] *Если целая функция $f(z)$ удовлетворяет во всей плоскости неравенству*

$$\ln|f(z)| > -C(r/|\sin\varphi|)^{\delta}, \tag{4}$$

где $0<\delta<1$, то функция $f(z)$ не выше экспоненциального типа и выполняются условия (2) и (3).

Теорема 1. *Пусть $f(z)$ — целая функция порядка ρ, $1/2<<\rho<1$, и уточненного порядка $\rho(r)$. Предположим, что $f(z)$ во всей плоскости допускает оценку снизу*

$$\ln|f(z)| > -\delta(r)(r/|\sin\varphi|)^{\rho(r)}, \tag{5}$$

где $\delta(r)\downarrow 0$. Тогда величины σ_+ и σ_- положительны.

Доказательство. Будем пользоваться характеристиками Неванлинны для угла [4, гл. 1, § 5], а также следующим результатом [4, гл. 6, теорема 2.3]. Если функция $f(z)$ мероморфна в углу $\{z:\alpha\leqslant\leqslant\arg z\leqslant\beta\}$, то для произвольных $\varepsilon>0$, $d>1$ вне некоторого множества $E_\varepsilon\subset(0,\infty)$, такого, что $\mu(E_\varepsilon)=\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\, r^{-1}m(E_\varepsilon\cap[0,r])$,

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta}\ln^+|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi\leqslant Kr^{\pi/(\beta-\alpha)}(S_{\alpha,\beta}(dr,f)+1), \tag{6}$$

где K — постоянная.

Обозначим через D угол $\{z:|\arg z-\pi|<\theta/2\}$, $\theta>\pi/\rho$, $\pi--\theta/2=\alpha$. Условимся характеристики S, A, B, C, c, относящиеся к этому углу, обозначать соответственно S_D, A_D, B_D, C_D, c_D.

Пусть функция $f(z)$ удовлетворяет условию теоремы 1. По первой теореме Неванлинны для угла [4, гл. 1] имеем $S_D(r,f)==S_D(r,1/f)+O(1)$, поэтому получаем

$$m_D(r,f)\equiv\int\limits_{\alpha}^{2\pi-\alpha}\ln^+|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi\leqslant Kr^{\pi/\theta}(S_D(dr,1/f)+O(1))=$$

$$=Kr^{\pi/\theta}(C_D(dr,1/f)+A_D(dr,1/f)+B_D(dr,1/f)+O(1)), \tag{7}$$

$r\overline{\in}E_\varepsilon$, $\mu(E_\varepsilon)<\varepsilon$. Оценим характеристики C_D, A_D и B_D в (7). Если предположим, что $\sigma_-=0$, то, учитывая свойства уточненного порядка [4, гл. 2], имеем

$$C_D(dr,1/f)=(2\pi/\theta)\int\limits_1^{dr}c_D(t)(1/t^{\pi/\theta}+t^{\pi/\theta}(dr)^{-2\pi/\theta})\,t^{-1}\,dt\leqslant$$

$$\leqslant(4\pi/\theta)\int\limits_1^{dr}n_-(t)\,t^{-(1+\pi/\theta)}\,dt=o(r^{\rho(r)-\pi/\theta});$$

$$A_D(dr,1/f)=\int\limits_1^{dr}(t^{-\pi/\theta}-t^{\pi/\theta}(dr)^{-2\pi/\theta})\,[\ln^+|1/f(te^{i\alpha})|+$$

$$+\ln^+|1/f(te^{i(2\pi-\alpha)})|]\,t^{-1}\,dt\leqslant\int\limits_1^{dr}t^{-(1+\pi/\theta)}\,[2\delta(t)\times$$

$$\times(t/|\sin\varphi|)^{\rho(t)}]\,dt=o(r^{\rho(r)-\pi/\theta});$$

$$B_D(dr,\ 1/f) = 2\,(\theta\,(dr)^{\pi/\theta})^{-1} \int\limits_{\alpha}^{2\pi-\alpha} \ln^+ |\,1/f\,(dre^{i\varphi})\,|\,dt = o\,(r^{\rho(r)-\pi/\theta}).$$

Объединяя оценки и используя (7), получаем $m_D(r,\ f) = o\,(r^{\rho(r)})$.

Оценим функцию $f(z)$ в полуплоскости $\operatorname{Re} z < 0$. Заметим, что для любой точки z, $\operatorname{Re} z < 0$, круг с центром в точке z и радиусом $R = |z| \cos\alpha$ целиком лежит в углу D. Так как функция $\ln|f(z)|$ является субгармонической, то при $\operatorname{Re} z_0 < 0$ имеем

$$\ln|f(z_0)| \leqslant \pi R^{-2} \iint\limits_{|z-z_0|<R} \ln|f(z)|\,d\sigma \leqslant (\cos\alpha \cdot r_0 \sqrt{\pi})^{-2} \times$$

$$\times \int\limits_{r_0(1-\cos\alpha)}^{r_0(1+\cos\alpha)} \int\limits_{\alpha}^{2\pi-\alpha} r \ln^+ |f(re^{i\theta})|\,d\theta\,dr \leqslant C r_0^{-1} \int\limits_{r_0(1-\cos\alpha)}^{r_0(1+\cos\alpha)} m_D(r,\ f)\,dr =$$

$$= o\,(r_0^{\rho(r_0)}) + C_1 r_0^{-1} \int\limits_{E\varepsilon \cap [0,\ r_0(1+\cos\alpha)]} m_D(r,\ f)\,dr \leqslant o\,(r_0^{\rho(r_0)}) + \varepsilon C_1 r_0^{\rho(r_0)}.$$

В силу произвольности ε, отсюда следует, что индикатор $h(\varphi,\ f)$ функции $f(z)$ равен нулю при $\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant 3\pi/2$. Так как $\rho < 1$, то в силу ρ-тригонометрической выпуклости индикатора $h(\varphi,\ f) \equiv 0$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, что противоречит определению уточненного порядка.

Следствие 1. *Пусть $f(z)$ — функция класса Крейна порядка $\rho > 1/2$. Тогда величины σ_+ и σ_- положительны.*

Незначительно изменяя доказательство теоремы 1, можно доказать следующие теоремы.

Теорема 2. *Пусть $u(z)$ — субгармоническая функция порядка $1/2 < \rho < 1$ и удовлетворяет условию $u(z) > -\delta(r)\,(r/|\sin\varphi|)^{\rho(r)}$, где $\rho(r)$ — уточненный порядок $u(r)$, а $\delta(r) \downarrow 0$. Тогда для любого угла D раствора больше π/ρ имеем*

$$\varlimsup_{t\to\infty} \mu_D(t)\,t^{-\rho(t)} > 0, \text{ где } \mu_D(t) = \mu(\{z : |z| < t\} \cap D),$$

а μ — массы Рисса функции $u(z)$.

Теорема 3. *Пусть $f(z)$ — мероморфная функция порядка $1/2 < \rho < 1$, $\delta(\infty,\ f) > 0$ и допускающая представление (1). Тогда σ_+ и σ_- положительны.*

Можно показать, что для функций класса Крейна порядка $1/2 < \rho < 1$ выполняются неравенства $(2\rho - 1)/K < \sigma_+/\sigma_- < K/(2\rho - 1)$, где K — абсолютная постоянная.

Список литературы: 1. *Крейн М. Г.* К теории целых функций экспоненциального типа. — Изв. АН СССР. Сер мат., 1947, **11**, с. 309—326. 2. *Крейн М. Г.* О неопределенном случае краевой задачи Штурма — Лиувилля в интервале (0, ∞). — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1952, **16**, с. 293—324. 3. *Мацаев В. И.* О вольтеровых операторах, получаемых возмущением самосопряженных. — Докл. АН СССР, 1961, **139**, № 4, с. 810—814. 4. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. — М.: Наука, 1970. — 591 с. 5. *Ахиезер Н. И.* Классическая проблема моментов. — М.: Физматгиз, 1961. — 146 с.

Поступила в редколлегию 05.12.84.