УДК 517.545:547.56

С. Д. БРОНЗА, В. Г. ТАИРОВА

СУЩЕСТВОВАНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ЗАДАННОЙ РАЗВЕТВЛЕННОСТИ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ ОДНОМУ ДОПОЛНИТЕЛЬНОМУ УСЛОВИЮ

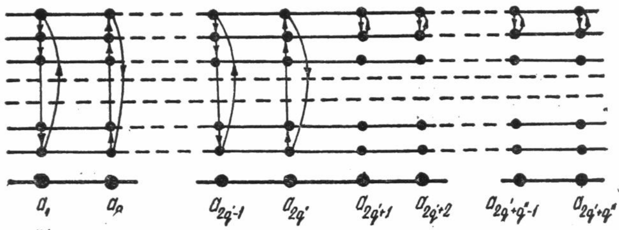
Пусть $F_\rho = F_\rho(n; a_1 : \lambda_1(a_1), \ldots, \lambda_{m_1}(a_1); \ldots; a_q : \lambda_1(a_q), \ldots \ldots, \lambda_{m_q}(a_q)) = F_\rho(n; a_1 : \Lambda_1(a_1); \ldots; a_q : \Lambda_q(a_q))$ — класс замкнутых римановых поверхностей (р. п. рода ρ, где $\Lambda_j = \sum_{k=1}^{m_j} \lambda_k(a_j)$ — суммарная разветвленность р. п. класса F_ρ над базисной точкой a_j. Числа Λ_j должны удовлетворять соотношениям:

$$\sum_{j=1}^{q} \Lambda_j = \sum_{j=1}^{q} \sum_{k=1}^{m_j} \lambda_k (a_j) = 2(n-1) + 2\rho$$

(формула Римана — Гурвица), $\Lambda_j \leqslant n - m_j$, $j = \overline{1, q}$.

В [1, с. 468] показано, что для случая $\rho = 0$ выполнения формулы Римана — Гурвица является необходимым, но не достаточным условием существования компактной р. п. заданной разветвленности.

В этой работе мы даем достаточные условия существования классов F_ρ при дополнительных ограничениях, налагаемых на числа Λ_j. Для того чтобы сформулировать наш результат, определим на множестве монотонных разбиений (μ-разбиений) числа N на слагаемые



частичный порядок: μ'-разбиение считаем мельче μ-разбиения, если разбиение μ' может быть получено из разбиения μ разбиением элементов последнего на части.

Теорема. *Класс римановых поверхностей* $F_\rho = F_\rho(n; a_1 : \Lambda_1; \ldots$ $\ldots ; a_q : \Lambda_q)$ *не пуст, если μ-разбиение числа* $2(n-1) + 2\rho$: $\mu =$ $= (2(n-1) + 2\rho/\Lambda_1, \ldots, \Lambda_q)$ мельче его μ_0-разбиения:

$$\mu_0 = (2(n-1) + 2\rho/\underbrace{(n-1), \ldots, (n-1)}_{2q'}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{q''}).$$

Доказательство. На совокупность чисел $\{\Lambda_j\}_1^q$ можно смотреть, как на μ-разбиение числа $2(n-1) + 2\rho$: $\mu = (2(n-1) +$ $+ 2\rho/\Lambda_1, \ldots, \Lambda_q)$.

Зафиксируем μ_0-разбиение числа $2(n-1) + 2\rho$:

$$\mu_0 = (2(n-1) + 2\rho/\underbrace{(n-1), \ldots, (n-1)}_{2q'}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{q''}).$$

Класс р. п., соответствующий μ_0-разбиению числа $2(n-1) + 2\rho$, не пуст: профиль Π_0, изображенный на рисунке, представляет р. п. этого класса. Пусть $\Pi_0 = \operatorname{clos} \sum_{j=1}^{2q'+q''} G_j^0$. Очевидно, подстановки атомарных псевдопрофилей этого профиля таковы:

$$S(G_j^0) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 2 & 3 & \ldots & 1 \end{pmatrix}, & \text{если } j = 1, 3, \ldots, 2q' - 1; \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ n & 1 & \ldots & n-1 \end{pmatrix}, & \text{если } j = 2, 4, \ldots, 2q'; \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ 2 & 1 & 3 & \ldots & n \end{pmatrix}, & \text{если } j = 2q' + 1, \ldots, 2q' + q''. \end{cases}$$

Пусть теперь класс р. п. F_ρ соответствует μ-разбиению числа $2(n-1)+2\rho$ и разбиение μ мельче разбиения μ_0. Тогда

$$2(n-1)+2\rho=\sum_{j=1}^{q}\Lambda_j=\sum_{m=1}^{2q'}\sum_{j=1}^{q_m}\Lambda_j^m+\underbrace{1+\dots+1}_{q''},$$

$$\sum_{j=1}^{q_m}\Lambda_j^m=n-1.$$

Согласно теореме Р. Тома [2], класс римановых поверхностей $F_0(n;a_1:\Lambda_1^m;\ \dots\ ;a_q:\Lambda_{q_m}^m;\ a_{q_m+1},n-1)$, $m=\overline{1,2q'}$, не пуст. Пусть $\Pi_m=\operatorname{clos}\sum_{j=1}^{q_m+1}G_j^m$ — профиль р. п. этого класса. Без ограничения общности можно считать, что подстановка атомарного псевдопрофиля $G_{q_m+1}^m$ профиля Π_m такова:

$$S(G_{q_m+1}^m)=\begin{cases}\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n\\ n & 1 & \dots & n-1\end{pmatrix}, & \text{если } m=1,\ \dots\ ,2q'-1;\\ \begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n\\ 2 & 3 & \dots & 1\end{pmatrix}, & \text{если } m=2,\ \dots\ ,2q',\end{cases}$$

ибо если это не так, то указанного положения над точкой $a_{q_m+1}^m$ можно добиться применением преобразований обмен и изменения нумерации сильных контуров профиля Π_m.

Заметим, что подстановка псевдопрофиля $\sum_{j=1}^{q_m}G_j^m$ совпадает с подстановкой атомарного псевдопрофиля G_m^0:

$$S\Bigl(\sum_{j=1}^{q_m}G_j^m\Bigr)=S(G_{q_m+1}^m)=S(G_m^0).$$

Поэтому, произведя замену в профиле Π_0 атомарного псевдопрофиля G_m^0 псевдопрофилем $\sum_{j=1}^{q_m}G_j^m$, $m=\overline{1,2q'}$, получим профиль р. п. из класса F_ϱ, фигурирующего в формулировке теоремы.

Следствие. *Классы р. п.* $F_0(n;a_1:\Lambda_1;\ \dots\ ;a_q:\Lambda_q)$ *не пусты, если* $q\geqslant n$.

Пусть μ- — *разбиение числа* $2(n-1)$ *мельче его* μ_0-*разбиения:*

$$\mu_0=(2(n-1)/(n-1),\ (n-1));$$

$$\mu=(2(n-1)/\Lambda_1^1,\ \dots\ ,\Lambda_{q_1}^1,\Lambda_1^2,\ \dots\ ,\Lambda_{q_2}^2)\ \sum_{j=1}^{q_m}\Lambda_j=n-1,\ \ m=1,2.$$

Доказанная теорема обеспечивает существование классов n-листных замкнутых р. п., разветвленность которых определяется слагаемыми μ-*разбиения числа* $2(n-1)$. Следствие будет доказано, если мы покажем, что любое разбиение числа $2(n-1)$ на q слагаемых при $q\geqslant n$ мельче его μ_0-разбиения.

Итак, пусть μ — произвольное разбиение числа $2(n-1)$ на q слагаемых и $q \geqslant n$: $\mu = (2(n-1)/\Lambda_1, \ldots, \Lambda_q)$. Пусть C — окружность длины $2(n-1)$. Разделим окружность C точками $b_1, b_2, \ldots, b_q$ на q частей, длины которых равны $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_q$. Утверждаем, что среди точек множества $\{b_j\}_1^q$ найдется хотя бы одна пара диаметрально противоположных. Если бы это было не так, то, поскольку точка, диаметрально противоположная $\{b_j\}_1^q$, не принадлежала бы множеству $\{b_j\}_1^q$, то длина окружности C оказалась бы не менее 2_q, так как $q \geqslant n$, то и не менее $2n$, в то время как длина C равна $2n-2$. Этим доказано, что слагаемые μ-разбиения числа $2(n-1)$ можно разбить на две суммы, каждая из которых равна $n-1$, а вместе с этим доказано и следствие.

Замечание. Доказанная теорема и следствие из нее дают один из ответов на вопрос о простых условиях реализуемости накрытий [2, 3] в случае римановой сферы.

Список литературы: 1. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. М., 1970. 592 с. 2. *Thom R.* L'equivalence d'une function differentiable et d'un polynome // Topology. 1965. N 3, Supp. 2. P. 297—307. 3. *Edmonds A. L. et al.* Realizability of branched coverings of surfaces / A. L. Edmonds, R. S. Kulkarni, R. E. Stong // Trans. Amer. Math. Soc. 1984. 283, N 2. P. 773—790.

Поступила в редколлегию 24.10.87

УДК 517.5

О. М. КАТКОВА

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ПОСТРОЕНИЯ ЧАСТОТНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ПОЛИА

В связи с задачей Лагерра о точном определении числа корней вещественного полинома с помощью правила Декарта в работах Фекете, Полиа и Балинта (см. [1], отд. V, гл. 3, § 2) была доказана следующая теорема.

Теорема А. *Пусть P — полином с вещественными коэффициентами. Положим $f_k(z) = e^{kz}$, $k \in \boldsymbol{R}_+$; $g_k(z) = (1-z)^{-k-1}$, $k \in \boldsymbol{R}_+$; $h_k(z) = (1+z)^{k-1}$, $k \in \boldsymbol{N}$. При достаточно большом $k > 0$ число перемен знака в последовательности коэффициентов функций Pf_k, Ph_k совпадает с числом положительных корней полинома P, а число перемен знака в последовательности коэффициентов функции Pg_k — с числом корней полинома P на интервале* $[0, 1)$.

В случае, когда положительных корней у полинома P нет, теорема А утверждает лишь, что все коэффициенты функций Pf_k, Pg_k, Ph_k при достаточно большом k неотрицательны. Целью настоящей статьи является доказательство того, что в этом случае имеет место более сильное утверждение. Для формулировки результата нам понадобится введенное Фекете в работе [2] понятие, обобщающее понятие положительной последовательности.