

Лінійний простір над заданим полем

Лекції для студентів ММФ ХНУ.

Курінний Г.Ч. Невмержицька О.М. Шугайло О.О.

12 травня 2015 р.

Зміст

1	Лінійні простори над довільним полем.	2
1.1	Означення та приклади	2
1.2	Приклади лінійних просторів	4
1.3	Базис та вимірність лінійного простору	5
1.4	Базис лінійного простору і вимірність лінійного простору.	9
1.5	Вимірність окремих лінійних просторів	13
1.6	Матриця переходу від одного базису до другого	15
1.7	Ізоморфні лінійні простори	17
2	Підпростори	21
2.1	Означення і приклади. Лінійні оболонки. Однорідні системи лінійних рівнянь	21
2.2	Лінійні однорідні системи рівнянь.	22
2.3	Розв'язок системи	24
2.4	Процес розв'язування і запису відповіді	26
2.5	Розв'язування однорідних систем	33
2.6	Ранг системи векторів, ранг матриці	35
2.7	Операції над підпросторами	39

3	Двоїстий (спряжений) простір	42
3.1	Простір лінійних функціоналів та лінійних форм.	42
3.2	Дуальний (спряжений) базис у просторі лінійних функціоналів і у просторі лінійних форм.	44
3.3	Природний (канонічний) ізоморфізм між лінійним простором V і спряженим до спряженого (двічі спряженим) V^{**}	45
3.4	Зміна координат лінійного функціонала при зміні базиса в первісному лінійному просторі.	46
3.5	Зв'язок між підпросторами спряженого підпростору і підпросторами самого (первісного) простору. Лінійне кодування	47
3.6	Лінійне кодування	51
4	Прямий добуток лінійних просторів над заданим полем.	55
4.1	Прямий добуток двох множин	55
4.2	Прямий добуток довільної сукупності множин	55
4.3	Прямий добуток двох лінійних просторів над одним полем	56
4.4	Прямий добуток довільної сукупності лінійних просторів над одним полем	58
5	Факторизація лінійного простору по підпростору.	58
5.1	Еквівалентність на множині	58
5.2	Факторизація лінійного простору по підпростору	59

1 Лінійні простори над довільним полем.

1.1 Означення та приклади

Лінійний простір над полем є узагальненням сукупності вільних векторів на дійсній площині, чи у дійсному тривимірному просторі. Далі F буде означати довільне поле, наприклад, поле раціональних чи-

сел, поле дійсний чисел, поле комплексних чисел, поле класів лишків за простим модулем.

Визначення 1.1 Непорожня множина L називається лінійним простором (чи векторним простором) над полем F , якщо на L визначена бінарна операція додавання:

$$L \rightarrow L, \quad (a, b) \mapsto a + b$$

і визначене множення елементів із L на елементи поля F :

$$F \times L \rightarrow L, \quad (\lambda, a) \mapsto \lambda a,$$

так що ці операції підкоряються вимогам:

1. для будь-яких $a, b, c \in L$

$$(a + b) + c = a + (b + c);$$

2. $a + b = b + a$ для будь-яких $a, b \in L$;

3. існує нульовий елемент $0 \in L$ такий, що $a + 0 = 0 + a = a$ для будь-якого $a \in L$;

4. для будь-якого $a \in L$ існує протилежний елемент $-a$ такий, що $-a + a = a + (-a) = a - a = 0$;

5. для будь-яких $a, b \in L, \lambda \in F$

$$\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b;$$

6. для будь-яких $a \in L, \lambda, \mu \in F$

$$(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a;$$

7. для будь-яких $\lambda, \mu \in F, a \in L$ правильно є рівність

$$(\lambda\mu)a = \lambda(\mu a);$$

8. для $1 \in F$ і для будь-якого елемента $a \in L$

$$1a = a.$$

Визначення 1.2 Елементи лінійного простору називають векторами.

1.2 Приклади лінійних просторів

- Вільні вектори на площині із звичайним додаванням та множенням на дійсні числа утворюють лінійний простір
- Вільні вектори у тривимірному просторі утворюють лінійний простір
- Елементами лінійного простору F^n є n -членні послідовності $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ елементів із F . Додавання таких послідовностей та їх множення на число виконується згідно правил:

$$\begin{aligned}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) + (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) &= \\ &= (\lambda_1 + \mu_1, \lambda_2 + \mu_2, \dots, \lambda_n + \mu_n), \\ \lambda(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) &= (\lambda\lambda_1, \lambda\lambda_2, \dots, \lambda\lambda_n).\end{aligned}$$

- Елементами простору F_n є стовпчики чисел із F довжини $n \geq 1$:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Стовпчики додаються та множаться на числа із F згідно з правилами:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \dots \\ \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \mu_1 \\ \lambda_2 + \mu_2 \\ \dots \\ \lambda_n + \mu_n \end{pmatrix},$$

$$\lambda \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\lambda_1 \\ \lambda\lambda_2 \\ \dots \\ \lambda\lambda_n \end{pmatrix}.$$

- Формальні степеневі ряди, многочлени від однієї змінної (скажемо, x) будь-якого степеня, чи степеня, що не перевищує задане натуральне число із звичайними операціями додавання та множення многочленів на число уворюють лінійний простір
- Матриці заданого розміру $m \times n$ з елементами із заданого поля F утворюють лінійний простір
- Для заданого поля F функції

$$f : F \rightarrow F, x \mapsto f(x)$$

із додаванням та множенням на числа за правилами

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

утворюють лінійний простір.

При перевірці того, що справді в наведених прикладах операції додавання та множення на число задовольняють всі необхідні умови, використовуються відповідні властивості операцій додавання та множення в числовому полі.

1.3 Базис та вимірність лінійного простору

Визначення 1.3 *Вирази вигляду*

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

де $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in F$, а $a_1, a_2, \dots, a_n \in L$, називається лінійною комбінацією векторів $a_1, a_2, \dots, a_n$ з коефіцієнтами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in F$.

Якщо $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$, то лінійна комбінація називається тривіальною. Якщо серед коефіцієнтів $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ є ненульовий, то лінійна комбінація називається нетривіальною.

Визначення 1.4 Непорожня сукупність векторів $S \subseteq L$ лінійного простору L називається лінійно залежною, коли існує нетривіальна лінійна комбінація векторів із S , що дорівнює нулю.

Непорожня сукупність $S \subseteq L$ векторів називається лінійно незалежною, коли лише тривіальна лінійна комбінація векторів із S дорівнює нулю.

Приклад 1. У просторі $\mathbb{R}^4$ вектори $a = (2, 7, 1, 1)$, $b = (0, 0, 1, 1)$ лінійно незалежні, тому що коли $xa + yb = 0$, $x, y \in \mathbb{R}$, тоді $2x = 0$, $7x = 0$, $x + y = 0$, і обов'язково $x = y = 0$, тобто лише тривіальна лінійна комбінація векторів a, b дорівнює нулю.

Приклад 2. Знайдемо значення числа λ при якому вектори $a = (1, 2, -1)$, $b = (0, 1, 2)$, $c = (3, 5, \lambda)$ лінійно залежні.

Розв'язування. Створюємо лінійну комбінацію векторів a, b, c з невідомими коефіцієнтами і прирівнюємо її нулю

$$xa + yb + zc = 0. \quad (2)$$

Звертаємо увагу на те, що в правій частині рівності (2) стоїть вектор 0 а не число 0. Вектори a, b, c залежні, якщо існує ненульовий розв'язок рівняння (2). Підставляємо в (2) значення векторів

$$x(1, 2, -1) + y(0, 1, 2) + z(3, 5, \lambda) = (0, 0, 0),$$

і прирівнюємо відповідні числа в лівій і правій частинах:

$$\begin{cases} x + 3z = 0, \\ 2x + y + 5z = 0, \\ -x + 2y + z\lambda = 0 \end{cases}$$

Приведемо одержану систему до вигляду

$$\begin{cases} x = -3z, \\ y = z, \\ z(\lambda + 5) = 0 \end{cases}$$

який показує, що коли $\lambda + 5 \neq 0$, тоді розв'язок єдиний, нульовий, і вектори a, b, c незалежні, а якщо $\lambda + 5 = 0$, то можна взяти $z = 1$ і вектори a, b, c лінійно залежні.

Відповідь — вектори a, b, c лінійно залежні, коли $\lambda = -5$.

Відмітимо низку досить очевидних додатніх умов лінійної залежності. Наступні системи векторів лінійно залежні:

1. система, що містить нульовий вектор;
2. система, що містить два однакові вектори;
3. система, що містить пропорційні вектори.

Справді, якщо в системі векторів $a_1, a_2, \dots, a_n$, $n \geq 1$, $a_1 = 0$, то

$$1a_1 + 0a_2 + \dots + 0a_n = 0$$

і вектори лінійно залежні; якщо $a_1 = a_2$ то

$$1a_1 - 1a_2 + 0a_3 + \dots + 0a_n = 0$$

і вектори $a_1, \dots, a_n$ знову залежні; а якщо $a_1 = \lambda a_2$, то

$$1a_1 - \lambda a_2 + 0a_3 + \dots + 0a_n = 0,$$

що також забезпечує лінійну залежність векторів.

Теорема 1.1 (Необхідна і достатня умова лінійної залежності векторів)

Система векторів лінійно залежна тоді і тільки тоді, коли один із них може бути записаний як лінійна комбінація решти.

Доведення. Розглядаємо вектори $a_1, a_2, \dots, a_n$, $n \geq 2$. Якщо вони залежні, то існує нетривіальна лінійна комбінація, що дорівнює нулю:

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n = 0.$$

Для визначеності будемо вважати, що $\lambda_1 \neq 0$. . Тоді

$$a_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}a_2 + \frac{\lambda_3}{\lambda_1}a_3 + \dots + \frac{\lambda_n}{\lambda_1}a_n = 0, \quad a_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}a_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1}a_3 - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1}a_n.$$

і вектор a_1 записується у вигляді лінійної комбінації решти векторів.

Якщо ж один вектор (скажемо a_1) записується у вигляді лінійної комбінації решти векторів,

$$a_1 = \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 + \dots + \lambda_n a_n,$$

то переносимо всі доданки вліво

$$a_1 - \lambda_2 a_2 - \lambda_3 a_3 - \dots - \lambda_n a_n = 0,$$

і одержуємо нетривіальну лінійну комбінацію, що дорівнює нулю. Отже, система векторів лінійно залежна.

■

Теорема 1.2 (Основна лема про лінійну залежність) $(n+1)$ лінійна комбінація n векторів $(n \geq 1)$ лінійно залежна.

Доведення. Маємо $n + 1$ вектор $b_1, b_2, \dots, b_{n+1}$, кожен з яких є лінійною комбінацією векторів $a_1, a_2, \dots, a_n$:

Потрібно довести, що вектори $b_1, b_2, \dots, b_{n+1}$ лінійно залежні. Доведення теореми проводим методом повної математичної індукції.

База індукції $n = 1$. В такому випадку $b_1 = x a_1, b_2 = y a_1$, вектори b_1 і b_2 пропорційні і, таким чином, залежні.

Індуктивне припущення: якщо у нас є n векторів, кожен з яких записаний у вигляді лінійної комбінації $n - 1$ вектора, то ці вектори лінійно залежні.

Індуктивний перехід. Нехай

$$\begin{aligned} b_1 &= c_{11}a_1 + c_{12}a_2 + \dots + c_{1n}a_n, \\ b_2 &= c_{21}a_1 + c_{22}a_2 + \dots + c_{2n}a_n, \\ &\dots \\ b_{n+1} &= c_{n+1,1}a_1 + c_{n+1,2}a_2 + \dots + c_{n+1,n}a_n, \end{aligned}$$

Перший випадок — всі коефіцієнти $c_{1,1}, c_{2,1}, \dots, c_{n+1,1}$, при a_1 дорівнюють нулю. В цьому випадку у нас виписані лінійні комбінації $(n-1)$ -го вектора $a_2, \dots, a_n$ і за індуктивним припущенням вектори $b_{1,2}, \dots, b_n$ лінійно залежні, а з цього випливає, що і всі вектори $b_1, b_2, \dots, b_{n+1}$ лінійно залежні.

Другий випадок — серед коефіцієнтів $c_{1,1}, c_{2,1}, \dots, c_{n+1,1}$ є ненульовий, нехай $c_{1,1} \neq 0$. Тоді вектори

$$b_i - \frac{c_{i,1}}{c_{1,1}}b_1, \quad i = 2, 3, \dots, n+1$$

є лінійними комбінаціями $(n-1)$ -го вектора $a_2, \dots, a_n$, отже, за індуктивним припущенням, вони залежні. Випишемо нетривіальну лінійну комбінацію цих векторів, що дорівнює нулю:

$$\sum_{i=2}^{n+1} \lambda_i \left(b_i - \frac{c_{i,1}}{c_{1,1}}b_1 \right) = 0.$$

Розкриємо дужки і перепишемо цю лінійну комбінацію у вигляді

$$\sum_{i=2}^{n+1} \lambda_i b_i + x b_1 = 0.$$

Оскільки серед чисел $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_{n+1}$ є ненульове, то це нетривіальна лінійна комбінація, вона дорівнює нулю і вектори $b_1, b_2, \dots, b_{n+1}$, таким чином, лінійно залежні.

■

1.4 Базис лінійного простору і вимірність лінійного простору.

Визначення 1.5 Система векторів називається повною, якщо будь-який вектор із лінійного простору може бути записаний у вигляді лінійної комбінації векторів із цієї системи.

Визначення 1.6 *Лінійно впорядкована (послідовність) лінійно незалежна повна система векторів називається базисом лінійного простору. Кількість векторів базиса лінійного простору називається вимірністю лінійного простору. Вимірність лінійного простору L позначається через $\dim L$.*

Відмітимо, що лінійний простір нульвимірний тоді і тільки тоді, коли він складається з єдиного вектора — нульового.

Теорема 1.3 (Про коректність означення вимірності простору)
Кількість векторів в будь-якому базисі лінійного простору одна і та ж.

Доведення. Доводимо теорему методом від протилежного. Припускаємо, що лінійний простір L має два базиси $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_m$ і $m \geq n + 1$. Оскільки базис є повною системою векторів, то кожен вектор із другого базису є лінійною комбінацією векторів першого базису. За основною лемою про лінійну залежність вектори $b_1, b_2, \dots, b_{n+1}$ (отже, і вектори $b_1, b_2, \dots, b_m$) є лінійно залежними, що суперечить означенню базиса.

■

Визначення 1.7 *Якщо базис лінійного простору містить скінчену множину векторів, то такий лінійний простір називають скінченновимірним. Якщо скінченного базису у просторі немає, то такий лінійний простір називають нескінченновимірним*

Наведемо кілька умов, за яких послідовність векторів є базисом

Теорема 1.4 *Максимальна лінійно незалежна система векторів є базисом*

Теорема 1.5 *В n -вимірному лінійному просторі будь-які n лінійно незалежних векторів утворюють базис.*

Теорема 1.6 *В n -вимірному лінійному просторі будь-яка повна система векторів утворює базис.*

Доведення. Спочатку доведемо теорему 1.4. Нехай $e_1, e_2, \dots, e_n$ впорядкована система векторів в лінійному просторі L є максимальною лінійно незалежною, тобто (за означенням максимальної лінійно незалежної системи) додавання до неї будь-якого вектора перетворює її в лінійно залежну. Вибараємо будь-який вектор $a \in L$. Оскільки система векторів $e_1, e_2, \dots, e_n, a$ залежна, то ми можемо виписати нетривіальну лінійну комбінацію цих векторів, що дорівнює нулю

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n + \lambda a = 0. \quad (3)$$

Припущення, що коефіцієнт λ дорівнює 0 дасть нам нетривіальну лінійну комбінацію векторів $e_1, e_2, \dots, e_n$, яка дорівнює нулю, що суперечить лінійній незалежності векторів $e_1, e_2, \dots, e_n$. Отже, ми можемо рівність (3) розділити на λ і одержати запис вектора a у вигляді лінійної комбінації векторів $e_1, e_2, \dots, e_n$

$$a = \frac{1}{\lambda}(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n).$$

Цим закінчується перевірка повноти системи векторів $e_1, e_2, \dots, e_n$ а також того, що ці вектори утворюють базис.

Доведемо теорему 1.5. Нехай $e_1, e_2, \dots, e_n$ впорядкована лінійно незалежна система векторів в n -вимірному лінійному просторі L . Щоб довести, що ця система є базисом, потрібно довести, що вона є повною. Для цього вибираємо будь-який вектор $a \in L$ і розглядаємо більше систему векторів $e_1, e_2, \dots, e_n, a$. Оскільки всі вектори цієї системи є лінійними комбінаціями базисних векторів, то вони (за основною лемою про лінійну залежність) є залежними. Подібно тому, як ми діяли при доведенні попередньої теореми, створюємо нетривіальну лінійну комбінацію векторів $e_1, e_2, \dots, e_n, a$, переконуємося, що коефіцієнт при a не нуль, на нього можна розділити і показати, що вектор a є лінійною комбінацією векторів із $e_1, e_2, \dots, e_n$. Теорема доведена.

Доведемо теорему 1.6. Нехай $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ повна система векторів в n -вимірному лінійному просторі з базисом $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Вибираємо в U максимальну лінійно незалежну підмножину V

$$V = \{v_1, v_2, \dots, v_m\} \subseteq U, \quad m \leq n.$$

Ті ж міркування, що доводили теорему 1.4 переконують нас в тому, що кожен вектор із V є лінійною комбінацією векторів із

$$u_i = \sum_{k=1}^m a_{ik} v_k, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4)$$

Оскільки система векторів U є повною, то всі вектори із V є лінійними комбінаціями векторів із

$$e_j = \sum_{i=1}^n b_{ji} u_i, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (5)$$

Підставимо в (5) вирази (4) і одержимо

$$e_j = \sum_{i=1}^n b_{ji} \sum_{k=1}^m a_{ik} v_k, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (6)$$

тобто кожен вектор із базису E є лінійною комбінацією векторів із множини V . За основною лемою про лінійну залежність, якщо $m < n$, то вектори $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ лінійно залежні, що суперечить їх вибору. Одержана суперечність доводить, що $m = n$, вектори U лінійно незалежні, і, відповідно, вони утворюють базис.

Теорема 1.6 доведена. ■

Визначення 1.8 Коефіцієнти $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in F$ в розкладенні

$$x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n$$

вектора $x \in L$ за базисом $a_1, a_2, \dots, a_n$ називаються координатами вектора x в базисі $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Ще раз відмітимо, що порядок слідування векторів в базисі важливий. Коли порядок слідування векторів не має значення, то тоді повну лінійно незалежну систему векторів називають базою.

Теорема 1.7 *Нехай у просторі L вибрано базис $a_1, a_2, \dots, a_n$. Тоді в цьому базисі кожен вектор має координати і до того ж єдині.*

Доведення. Дійсно, існування координат впливає із повноти базисних векторів, а єдиність доводиться методом від протилежного з використанням лінійної незалежності базисних векторів.

■

1.5 Вимірність окремих лінійних просторів

- Базисом простору вільних векторів на дійсній площині є впорядкована пара неколінеарних векторів. Цей простір двовимірний.
- Базисом простору вільних векторів у дійсному просторі є впорядкована трійка некомпланарних векторів. Цей простір тривимірний.

item Вектори

$$a_1 = (1, 0, 0, \dots, 0),$$

$$a_2 = (0, 1, 0, \dots, 0),$$

...

$$a_n = (0, 0, 0, \dots, 1).$$

утворюють базис лінійного простору F^n , отже, цей простір n -вимірний.

- Вектори

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}$$

утворюють базис лінійного простору F_n , отже, цей простір n -вимірний.

- Многочлени

$$1, x, x^2, \dots, x^n.$$

утворюють базис лінійного простору $F_n[x]$, що складається із многочленів

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

від однієї змінної (скажемо, x) степеня $n, n \geq 0$ або менше з коефіцієнтами із заданого поля F . Отже, цей простір $n + 1$ -вимірний. В цьому місці потрібно мати на увазі, що многочлени (чи поліноми) розглядаються в алгебричному означенні — многочлен це запис вигляду $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, а не функція, що задається таким записом. Відповідні функції в алгебрі називають поліноміальними функціями. Для прикладу: многочлени x, x^2 різні, але над полем класів лишків за модулем 2 вони задають одні і ту ж функцію.

- Нехай задані натуральні числа $n, m > 0$ і поле F . Розглянемо лінійний простір $F(n, m)$ матриць, що мають n рядків і m стовпчиків (розміру $n \times m$). Позначимо через $E_{i,j}$ матрицю, яка має єдиний ненульовий елемент, а саме 1, який стоїть на перетині i -го рядка і j -го стовпчика. Всі матриці $E_{i,j}$ утворюють базис лінійного простору $F(n, m)$. Отже, простір $F(n, m)$ $n \times m$ -вимірний.
- Лінійний простір формальних степеневих рядів нескінченновимірний, оскільки в ньому для будь-якого натурального можна знайти многочленів (многочлен, це формальний степеневий ряд із скінченною кількістю ненульових доданків).

1.6 Матриця переходу від одного базису до другого

Визначення 1.9 Нехай в n -вимірному лінійному просторі L над полем F є два базиси:

$$a_1, a_2, \dots, a_n \quad (7)$$

i

$$b_1, b_2, \dots, b_n, \quad (8)$$

i задане розкладення (запис у вигляді лінійної комбінації) векторів із (8) за векторами із (7):

$$\begin{aligned} b_1 &= c_{11}a_1 + c_{21}a_2 + \dots + c_{n1}a_n, \\ b_2 &= c_{12}a_1 + c_{22}a_2 + \dots + c_{n2}a_n, \\ &\dots \\ b_n &= c_{1n}a_1 + c_{2n}a_2 + \dots + c_{nn}a_n, \end{aligned}$$

Тоді матриця

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & & & \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

називається матрицею переходу від базису (7) до базису (8). В стислому записі, якщо

$$b_i = \sum_{j=1}^n c_{ji}a_j,$$

то елементи c_{ji} , $1 \leq i, j \leq n$ є елементами матриці переходу від базису $a_1, \dots, a_n$ до базису $b_1, \dots, b_n$.

Теорема 1.8 Стовпчики координат

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$$

одного і того ж вектора в базисах (7), (8) і матриця переходу зв'язані співвідношенням

$$x = Cy. \quad (9)$$

Доведення. Дійсно, нехай

$$\sum_{j=1}^n x_j a_j = \sum_{i=1}^n y_i b_i, \quad b_i = \sum_{j=1}^n c_{ji} a_j.$$

Тоді

$$\sum_{j=1}^n x_j a_j = \sum_{j=1}^n y_i \sum_{j=1}^n c_{ji} a_j = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n c_{ji} y_i \right) a_j \Rightarrow x_j = \sum_{i=1}^n c_{ji} y_i,$$

Остання рівність в матричному вигляді може бути записана як $x = Cy$.

■

Теорема 1.9 Нехай у просторі задані три базиси E, U, V , A — матриця переходу від E до U , B — матриця переходу від U до V і C — матриця переходу від E до V . Тоді

$$C = A \cdot B.$$

Доведення. Позначимо $e_1, e_2, \dots, e_n$ вектори першого базису, $u_1, u_2, \dots, u_n$ вектори другого базису, $v_1, v_2, \dots, v_n$ вектори базису, $a_{ij}, 1 \leq i, j \leq n$, $b_{ik}, 1 \leq i, k \leq n$, $c_{jk}, 1 \leq j, k \leq n$, — елементи матриць переходів від E до U , від U до V і від E до V . Тоді

$$u_i = \sum_{j=1}^n a_{ji} e_j, \quad v_k = \sum_{i=1}^n b_{ik} u_i, \quad v_k = \sum_{j=1}^n c_{jk} e_j,$$

$$v_k = \sum_{j=1}^n b_{ik} \left(\sum_{j=1}^n a_{ji} e_j \right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ji} b_{ik} \right) e_j = \sum_{j=1}^n c_{jk} e_j,$$

одержуємо рівності $c_{jk} = \sum_{i=1}^n a_{ji} b_{ik}, 1 \leq j, k \leq n$, які доводять теорему.

■

1.7 Ізоморфні лінійні простори

definition Нехай L_1, L_2 два лінійні простори над одним і тим же полем F . Бієктивне (взаємно однозначне) відображення

$$f : L_1 \rightarrow L_2,$$

яке задовольняє умови:

$$f(a + b) = f(a) + f(b) \quad (10)$$

для довільних векторів $a, b \in L_1$ і

$$f(\lambda a) = \lambda f(a) \quad (11)$$

для довільних $a \in L_1$ і $\lambda \in F$.

Умову (10) називають адитивністю відображення f , а умову (11) називають однорідністю, адитивне і однорідне відображення лінійних просторів називають лінійним відображенням, або лінійним оператором. В такій термінології ізоморфізм є бієктивним лінійним відображенням.

Теорема 1.10 (Властивості ізоморфізмів) *1. Тотожне відображення лінійного простору в себе є ізоморфізмом із лінійного простору в себе.*

2. Обернене відображення до ізоморфізму також є ізоморфізмом.

3. Добуток двох ізоморфізмів знову є ізоморфізмом.

4. Будь-який ізоморфізм переводить лінійно незалежні вектори в лінійно незалежні.

Доведення. Щоб перевірити, що деяке відображення $L_1 \rightarrow L_2$ є ізоморфізмом, потрібно довести чотири його властивості — ін'єктивність (різні елементи із L_1 переводяться в різні елементи із L_2), сюр'єктивність (кожен елемент із L_2 є образом певного елемента із L_1), адитивність та однорідність.

Нижче L_1, L_2, L_2 позначають деякі лінійні простори над полем F .

Перевіряємо властивість “Тотожне відображення є ізоморфізмом”
Позначмо id тоожне відображення із L_1 в L_1 , $\forall x(id(x) = x)$. Оскільки $a \neq b \Rightarrow id(a) = a \neq b = id(b)$, то відображення ін’єктивне; оскільки $\forall x(x = id(x))$, то відображення id є сюр’єктивним; оскільки $id(a + b) = a + b = id(a) + id(b)$, то відображення id є адитивним; оскільки $id(\lambda a) = \lambda a = \lambda id(a)$, то відображення id є однорідним. Отже ми довели, що тотожне відображення є ізоморфізмом.

Нехай $f : L_1 \rightarrow L_2$ ізоморфізм із L_1 в L_2 , а f^{-1} - обернене до f відображення із L_2 в L_1 . Перевіряємо ін’єктивність f^{-1} . Для $a, b \in L_2$, $a \neq b$

$$\exists a_1, b_1 \in L_1 (f(a_1) = a, f(b_1) = b), \quad a \neq b \Rightarrow f^{-1}a = a_1 \neq b_1 = f^{-1}(b).$$

Перевіряємо сюр’єктивність f^{-1} . Нехай $a \in L_1$. Тоді $f(a) = b \in L_2$, $f^{-1}(b) = a$.

Перевіряємо адитивність. Нехай $a, b \in L_2$, $f^{-1}(a) = a_1$, $f^{-1}(b) = b_1$. Тоді $f(a_1 + b_1) = a + b$ і $f^{-1}(a + b) = a_1 + b_1 = f^{-1}(a) + f^{-1}(b)$.

Перевіряємо однорідність $a \in L_2$, $a_1 \in L_1$, $\lambda \in F$, $f(a_1) = a$. Тоді $f(\lambda a_1) = \lambda a$, $f^{-1}(\lambda a) = \lambda a_1 = \lambda f^{-1}(a)$.

Те, що обернене відображення до ізоморфізму є ізоморфізмом, перевірено. -

Нехай $f : L_1 \rightarrow L_2$ ізоморфізм із L_1 в L_2 і $g : L_2 \rightarrow L_3$ ізоморфізм із L_2 в L_3 . Перевіряємо, що добуток $gf : L_1 \rightarrow L_3$ є ізоморфізмом із L_1 в L_3 . Якщо $a, b \in L_1$, $\lambda \in F$, то

$$a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b) \Rightarrow gf(a) \neq gf(b),$$

$$gf(a+b) = g(f(a)+f(b)) = gf(a)+gf(b), \quad gf(\lambda a) = g(\lambda f(a)) = \lambda g(a).$$

Ми перевірили ін’єктивність адитивність і однорідність gf .

Лишилося перевірити сюр’єктивність. Нехай $c \in L_3$. Тді існують елементи $b \in L_2$, $a \in L_1$ такі, що $f(a) = b$, $g(b) = c$. Отже $gf(a) = c$ і сюр’єктивність добутку gf перевірена.

Передимо до перевірки останньої властивості “Ізоморфізм переводить лінійно незалежні вектори в лінійно незалежні.” Нехай L_1, L_2 два лінійні простори, $f : L_1 \rightarrow L_2$ ізоморфізм із L_1 в L_2 , вектори $a_1, a_2, \dots, a_n \in L_1$ лінійно незалежні і $b_i = f(a_i) \in L_2, \quad i = 1, 2, \dots, n$. Потрібно довести, що вектори $b_1, b_2, \dots, b_n \in L_2$ також лінійно незалежні. Доведення проводимо методом від протилежного. Припустимо, що вектори $b_1, b_2, \dots, b_n \in L_2$ лінійно залежні, отже ми можемо написати нетривіальну їх лінійну комбінацію, що дорівнює нулю

$$\lambda b_1 + \lambda b_2 + \dots + \lambda b_n = 0$$

. Із незалежності векторів $a_1, a_2, \dots, a_n$ випливає, що $\lambda a_1 + \lambda a_2 + \dots + \lambda a_n \neq 0$. Дві рівності

$$f(0) = 0 = \lambda b_1 + \lambda b_2 + \dots + \lambda b_n = f(\lambda a_1 + \lambda a_2 + \dots + \lambda a_n)$$

показують, що два різні вектори перейшли під дією ізоморфізма f в один, а це суперечить означенню ізоморфізма.

Остання властивість ізоморфізма перевірена.

Теорема доведена.

■

Визначення 1.10 Два лінійні простори L_1, L_2 над одним і тим же полем F називаються ізоморфними, якщо існує ізоморфізм із одного лінійного простору в другий.

Безпосереднім наслідком теореми є наступна

Теорема 1.11 Відношення “лінійний простір L_1 ізоморфний лінійному простору L_2 ” є відношенням еквівалентності, тобто кожний лінійний простір ізоморфний сам собі (рефлексивність відношення); якщо лінійний простір L_1 ізоморфний лінійному простору L_2 , то лінійний простір L_2 ізоморфний лінійному простору L_1 (симетричність відношення); якщо лінійний простір L_1 ізоморфний лінійному простору L_2 , а лінійний простір L_2 ізоморфний лінійному простору L_3 , то лінійний простір L_1 ізоморфний лінійному простору L_3 (транзитивність відношення).

Теорема 1.12 (Необхідна і достатня умова ізоморфності двох проторів)
Скінченновимірні лінійні простори ізоморфні тоді і тільки тоді, коли вони мають одну і ту ж вимірність. Кожний n -вимірний лінійний простір L над полем F ізоморфний лінійному простору F^n .

Доведення. Нехай L_1, L_2 два n -вимірні лінійні простори і

$$e_1, e_2, \dots, e_n, \quad u_1, u_2, \dots, u_n$$

їх базиси. Тоді відображення, яке ставить у відповідність вектору $a = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in L_1$ вектор $b = \sum_{i=1}^n x_i u_i \in L_2$ є ізоморфізмом. Тезнічну перевірку цього оминемо. Ми обгрунтували, що два n -вірні простори над одним полем ізоморфні.

Покажемо, що два ізоморфні лінійні простори мають одну і ту ж вимірність. Нехай L_1, L_2 два лінійні простори, $e_1, e_2, \dots, e_n$ базис лінійного простору і $f : L_1 \rightarrow L_2$ ізоморфізм із L_1 в L_2 . Покажемо, що базис L_2 також складається із n векторів. Для цього досить показати, що вектори $u_1 = f(e_1), u_2 = f(e_2), \dots, u_n = f(e_n)$ утворюють повну лінійно незалежну систему в L_2 , і тому утворюють базис.

Перевіряємо повноту системи векторів $u_1, u_2, \dots, u_n$. Візьмемо довільний вектор $b \in L_2$. Оскільки відображення f сю'єктивне, то $b = f(a)$ для деякого вектора $a = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. тоді $b = f(\sum_{i=1}^n x_i e_i) = \sum_{i=1}^n x_i u_i$ і ми записали вектор b у вигляді лінійної комбінації векторів $u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$

Перевіримо лінійну незалежність системи векторів $u_1, u_2, \dots, u_n$. Нехай $\sum_{i=1}^n x_i u_i = 0$. Тоді $f(\sum_{i=1}^n x_i e_i) = 0$. Оскільки відображення f є ін'єктивним, то $\sum_{i=1}^n x_i e_i = 0$. лінійної незалежності векторів $e_1, e_2, \dots, e_n$ випливає $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$. . Отже вектори $u_1, u_2, \dots, u_n$ лінійно незалежні.

■

В деяких випадках для заданих двох просторів існує природний, всім зрозумілий, можна сказати, стандартний ізоморфізм. Такий ізоморфізм називають канонічним.

Канонічним ізоморфізмом із простору в себе є тотожне відображення. Канонічним ізоморфізмом із n -вимірною простору L з вибраним базисом $e_1, e_2, \dots, e_n$ в F^n є

$$L \rightarrow F^n \quad x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \mapsto (x_1, \dots, x_n)$$

Канонічним ізоморфізмом із n -вимірною простору L з вибраним базисом $e_1, e_2, \dots, e_n$ в F_n є

$$L \rightarrow F_n \quad x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

В математиці вживається вираз “міркування ведуться з точністю до ізоморфізму”, який означає, що ізоморфні лінійні простори вважаються тотожними (не розрізняються).

2 Підпростори

2.1 Означення і приклади. Лінійні оболонки. Однорідні системи лінійних рівнянь

Визначення 2.1 Непорожня підмножина $V \subseteq L$ лінійного простору L називається (лінійним) підпростором лінійного простору L , якщо для будь-яких $a, b \in V$ і будь-якого $\lambda \in F$

$$a + b \in V, \quad \lambda a \in V.$$

Підмножина, що складається лише із нульового вектора, і підмножина, що збігається із усім простором, є підпросторами. Ці підпростори називаються тривіальними. Решта підпросторів називаються нетривіальними.

Підпростори, що не збігаються з усім простором, називаються власними.

Найчастіше підпростір задається як лінійна оболонка векторів та системою лінійних однорідних рівнянь.

Визначення 2.2 *Нехай ϵ лінійний простір L над полем F і в ньому вектори*

$$a_1, a_2, \dots, a_k. \quad (12)$$

Тоді множина всіх лінійних комбінацій вказаної сукупності векторів утворюють в L лінійний підпростір, що називається лінійною оболонкою векторів (12). Цей підпростір позначається через $Lin(a_1, a_2, \dots, a_k)$. Таким чином,

$$Lin(a_1, \dots, a_n) = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i a_i \mid x_1, \dots, x_n \text{ — числа} \right\}.$$

Лінійна оболонка векторів справді є підпростором, тому що сума двох лінійних комбінацій знову є лінійною комбінацією, вектор, протилежний до лінійної комбінації записується у вигляді лінійної комбінації, якщо лінійну комбінацію помножити на число, то одержимо знову лінійну комбінацію. Будемо вважати наведені міркування очевидними.

Лінійна оболонка двох векторів a, b складається із усіх лінійних комбінацій

$$xa + yb.$$

Лінійна оболонка двох неколінеарних векторів на площині збігається із множиною всіх вільних векторів на площині.

Лінійна оболонка базиса збігається із усім лінійним простором.

2.2 Лінійні однорідні системи рівнянь.

Вважемо, що перше знайомство із системами лінійних алгебричних рівнянь відбулося (див. розділ “Застосування визначників”). Зокрема, відомі формули Крмера для розв’язування системи n рівнянь з n невідомими у випадку, коли визначник основної матриці системи

ненульовий; відомий ранг матриці як “Найбільший із порядків ненульових мінорів”; відомі елементарні перетворення рядків і стовпчиків матриці. Наразі частину відомого матеріалу повторимо з використанням поняття лінійного простору.

Нагадаємо означення та позначення, що використовуються при вивченні систем лінійних алгебричних рівнянь.

Визначення 2.3 Рівняння

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b,$$

де $x_1, x_2, \dots, x_n$ — невідомі, а $a_1, a_2, \dots, a_n, b \in F$ називається *лінійним алгебричним рівнянням*. $a_1, a_2, \dots, a_n$ — коефіцієнти рівняння. b — права частина рівняння. Якщо права частина рівняння дорівнює нулю, то воно називається *однорідним*. Відповідно, якщо права частина не дорівнює нулю, то воно називається *неоднорідним*.

Якщо система m лінійних рівнянь з n невідомими записана у вигляді

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \right\}, \quad (13)$$

то

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

основна матриця системи,

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

розширена матриця системи,

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

стовпчик (або вектор) правих частин, а

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

стовпчик (вектор) невідомих.

В цих позначеннях система лінійних рівнянь записується в наступному матричному вигляді:

$$Ax = b.$$

Визначення 2.4 Якщо стовпчик правих частин нульовий, то система однорідна. Якщо він ненульовий, то система неоднорідна.

Якщо $b \neq 0$, то кажуть, що однорідна система $Ax = 0$ відповідає неоднорідній системі $Ax = b$.

2.3 Розв'язок системи

Визначення 2.5 Набір із n чисел (можна також сказати — вектор із F_n) є розв'язком системи, коли після підстановки цих чисел замість невідомих рівняння стають тотожностями.

Числа $x = 2, y = 3$ утворюють розв'язок (один!) системи

$$\begin{cases} -5x + 7y = 11 \\ 2x - y = 1 \end{cases},$$

тому що два рівняння

$$\begin{cases} -5 \cdot 2 + 7 \cdot 3 = 11 \\ 2 \cdot 2 - 3 = 1 \end{cases},$$

насправді є тотожностями.

Теорема 2.1 *Розв'язки однорідної системи утворюють лінійний підпростір у просторі F_n .*

Доведення. Доводиться з використанням рівностей

$$A(\lambda x) = \lambda Ax, \quad A(x + y) = Ax + Ay,$$

де A — матриця системи x, y — стовчики невідомих, $\lambda \in F$. ■

Теорема 2.2 *Нехай $M \subseteq F_n$ - множина розв'язків неоднорідної системи лінійних рівнянь $Ax = b$, x^0 — довільно вибраний окремий розв'язок цієї системи і $L \subseteq F_n$ — лінійний підпростір розв'язків відповідної однорідної системи $Ax = 0$. Тоді*

$$M = x^0 + L = \{x^0 + y | y \in L\}.$$

Доведення. Нехай $u \in x^0 + L$, тобто $u = x^0 + y$, де $Ax^0 = b$, $Ay = 0$. Тоді

$$Au = Ax^0 + Ay = b,$$

і $u \in M$. Ми довели включення $x^0 + L \subseteq M$.

Виберемо $v \in M$ і позначмо $y = v - x^0$. Тоді $Ay = Av - Ax^0 = 0$ і $y \in L$, $v = x^0 + y$, $M \subseteq x^0 + L$. Доведені два включення $x^0 + L \subseteq M$, $M \subseteq x^0 + L$ дають нам рівність $M = x^0 + L$.

Теорема доведена. ■

Визначення 2.6 *Дві система лінійних алгебричних рівнянь називаються рівносильними, якщо вони мають одну і ту ж множину розв'язків.*

Визначення 2.7 Система називається сумісною, якщо вона має непорожню множину розв'язків. Якщо розв'язків система не має, то вона несумісна

2.4 Процес розв'язування і запису відповіді

Теорема 2.3 (Про елементарні перетворення системи лінійних рівнянь)
Наступні перетворення системи лінійних алгебричних рівнянь

- множення одного рівняння на ненульове число;
- переставляння рівнянь;
- додавання до одного рівняння іншого, помноженого на будь-яке число

приводять до системи, що рівносильна даній.

Приклад. Маємо чотири системи

$$a : \begin{cases} x_1 + 6x_2 + x_3 = 10, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = -1, \\ x_1 + x_2 = 0, \end{cases} \quad b : \begin{cases} 2x_1 + 12x_2 + 2x_3 = 20, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = -1, \\ x_1 + x_2 = 0, \end{cases}$$

$$c : \begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = -1, \\ x_1 + 6x_2 + x_3 = 10, \end{cases} \quad d : \begin{cases} x_1 + 6x_2 + x_3 = 10, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = -1, \\ 3x_1 + 13x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Система b одержана із системи a множенням першого рівняння на 2, або система a одержана із системи b множенням першого рівняння на $\frac{1}{2}$.

Система c одержана із системи a перетавлянням першого і третього рядків, система a одержана із системи c перетавлянням першого і третього рядків.

Система d одержана із системи a додаванням подвоєного першого рівняння до третього, або система a одержана із системи d додаванням першого рівняння, помноженого на (-2) до третього.

Всі ці чотири системи рівносильні, множина розв'язків кожної з них збігається із множиною векторів вигляду $\begin{pmatrix} 1+t \\ 2-t \\ -3+5t \end{pmatrix}$, де t — деяке число. Система a в матричному вигляді перепишеться як

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Матриця

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

є основною матрицею системи. Матриця

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 & 10 \\ 2 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

є розширеною матрицею системи, вектор

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

є вектором невідомих, вектор

$$\begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

є вектором правих частин.

Розкутість типографських міркувань. Незважаючи на те, що стандарт вимагає писати вектор стовчиком, “типографські міркування” дозволяють у практичній роботі писати вектор рядком, це

не є помилкою, це справа домовленості. Таким чином, вектор невідомих можна писати у вигляді (x_1, x_2, x_3) , а вектор правих частин $(10, -1, 0)$. Однак справа від матриці писати вектор рядком неприпустимо. Запис вектора в стовпчик, а не в рядок, важливий в певних вузьких областях математики, де запис в рядок чи у стовпчик несе суттєве інформаційне навантаження.

Доведення. Нехай A — система, X множина її розв'язків, B — система, що одержана із A одним елементарним перетворенням, Y — множина розв'язів системи B . Потрібно довести, що $X = Y$.

Зрозуміло, що кожен розв'язок системи A є розв'язком системи B , тому $A \subseteq B$. Кожне елементарне перетворення рівнянь має обернене елементарне перетворення. Застосувавши його до системи B одержимо систему $C = A$ із множиною розв'язків $Z = X$. Як і раніше, $Y \subseteq Z$, тобто $Y \subseteq X$. Включення $X \subseteq Y \subseteq X$, можливі лише за умови $X = Y$. Рівносильність систем доведена.

■

Елементарним перетворенням рівнянь системи відповідають елементарні перетворення рядків розширеної матриці. Основна частина розв'язування системи полягає в приведенні розширеної матриці до того чи іншого (в залежності від обставин) зручного вигляду, який дозволяє записати ту чи іншу форму розв'язку.

Розв'язати систему] означає дати зручне окреслення множини її розв'язків. Якщо розв'язок один, то розв'язування полягає в його знаходженні і точному записі. Якщо ж розв'язків нескінченно багато, то практика виробила три зручні окреслення цієї множини, які називаються

- загальний розв'язок;
- параметричний розв'язок;
- векторний розв'язок.

Для прикладу, нехай потрібно розв'язати систему, що складається із одного рівняння $x_1 + 2x_2 - x_4 = 2$. Загальним розв'язком системи є

$$x_1 = -2x_2 + x_4 + 2;$$

Параметричним розв'язком системи є

$$\begin{cases} x_1 = -2t_1 + t_3 + 2, \\ x_2 = t_1, \\ x_3 = t_2, \\ x_4 = t_3; \end{cases}$$

Векторним розв'язком системи є

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Із розділу “Застосування визначників” відомо, що система сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг розширеної матриці системи дорівнює рангу основної. Ранг розуміється як найбільший з порядків ненульових мінорів. Нижче розглядаємо виключно сумісні системи.

Розв'язування системи з єдиним розв'язком. Систему з єдиним розв'язком елементарними перетвореннями (та викреслюванням за необхідності рівнянь вигляду $0=0$) зводять до системи рівнянь з невідомими і ненульовим визначником основної системи. Далі застосовують так звані формули Крамера

Завжди є розв'язок

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$$

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

де $x_1, \dots, x_n$ невідомі, Δ — визначник основної матриці, Δ_i — визначник основної матриці, в якій i -й стовпчик замінений на стовпчик правих частин.

Єдиним розв'язком однорідної системи, зрозуміло, є нульовий вектор.

Загальний розв'язок.

Визначення 2.8 *Нехай ми зуміли невідомі*

$$M = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

розбити на дві групи

$$M = M_1 \cup M_2, \quad M_1 \cap M_2 = \emptyset,$$

так, що які б ми не взяли значення для змінних з другої групи, M_2 змінні з другої групи M_1 знаходяться і єдиним чином. Тоді змінні із першої групи називають основними, а змінні із другої групи — вільними.

Визначення 2.9 *Запис формул, які дозволяють обчислити основні змінні, коли задані вільні, називають загальним розв'язком системи.*

Кажемо, що розширена матриця системи знаходиться у спрощеному вигляді, якщо у всіх ненульових рядків і в деяких стовпчиках основної матриці стоїть одинична матриця.

Приклад. Матриця

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & 5 & 0 & 3 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & 7 & 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

має спрощений вигляд, оскільки в 2,3,5 стовпчиках стоїть одинична матриця. Це розширена матриця системи

$$\begin{cases} 2x_1 + 1x_2 + 0x_3 + (-1)x_4 + 0x_5 + 2x_6 = 5, \\ 3x_1 + 0x_2 + 1x_3 + 5x_4 + 0x_5 + 3x_6 = 7, \\ 3x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 7x_4 + 1x_5 + 4x_6 = -3. \end{cases}$$

Основними змінними можна взяти x_2, x_3, x_5 . Вільними змінними можна взяти x_1, x_4, x_6 . Загальним розв'язком системи буде

$$\begin{aligned}x_2 &= -2x_1 + x_4 + 0 \cdot x_5 - 2 \cdot x_6 + 5, \\x_3 &= -3x_1 - 5 \cdot x_4 - 3x_6 + 7, \\x_5 &= -3x_1 - 7 \cdot x_4 - x_6 - 3.\end{aligned}$$

Одержання загального розв'язку системи полягає в тому, що розширену матрицю системи елементарними перетвореннями рядків методом Гауса чи якоюсь його видозміною приводять до спрощеного вигляду і записують за одержаною матрицею систему:

$$\left. \begin{aligned}x_1 &+ \bar{a}_{1,r+1}x_{r+1} + \dots + \bar{a}_{1,n}x_n = \bar{b}_1, \\x_2 &+ \bar{a}_{2,r+1}x_{r+1} + \dots + \bar{a}_{2,n}x_n = \bar{b}_2, \\&\dots \\x_r &+ \bar{a}_{r,r+1}x_{r+1} + \dots + \bar{a}_{r,n}x_n = \bar{b}_r\end{aligned} \right\}, \quad (15)$$

Потім вільні змінні $\{x_1, \dots, x_r\}$ з коефіцієнтами переносять до правих частин і одержують загальний розв'язок:

$$\left. \begin{aligned}x_1 &= -\bar{a}_{1,r+1}x_{r+1} - \dots - \bar{a}_{1,n}x_n + \bar{b}_1, \\x_2 &= -\bar{a}_{2,r+1}x_{r+1} - \dots - \bar{a}_{2,n}x_n + \bar{b}_2, \\&\dots \\x_r &= -\bar{a}_{r,r+1}x_{r+1} - \dots - \bar{a}_{r,n}x_n + \bar{b}_r\end{aligned} \right\}. \quad (16)$$

Параметричний розв'язок

Загальний розв'язок (16) можна видозмінити, представивши вільні змінні $\{x_{r+1}, \dots, x_n\}$ параметрами, через які виражаються усі змінні.

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= -\bar{a}_{1,r+1}t_1 - \dots - \bar{a}_{1,n}t_{n-r} + \bar{b}_1, \\ x_2 &= -\bar{a}_{2,r+1}t_1 - \dots - \bar{a}_{2,n}t_{n-r} + \bar{b}_2, \\ &\dots \\ x_r &= -\bar{a}_{r,r+1}t_1 - \dots - \bar{a}_{r,n}t_{n-r} + \bar{b}_r, \\ x_{r+1} &= t_1, \\ &\dots \\ x_n &= t_{n-r} \end{aligned} \right\}$$

Визначення 2.10 Розв'язк системи у вигляді

$$\begin{aligned} x_1 &= c_{11}t_1 + \dots + c_{1n-r}t_{n-r} + c_{10}, \\ x_2 &= c_{21}t_1 + \dots + c_{2n-r}t_{n-r} + c_{20}, \\ &\dots \\ x_n &= c_{n1}t_1 + \dots + c_{n-r}t_{n-r} + c_{n0}, \end{aligned} \tag{17}$$

де $t_1, t_2, \dots, t_{n-r}$ довільні числа (параметри), називають параметричним розв'язком.

Векторний розв'язок

$$x = \sum_{i=1}^{n-r} c_i t_i + c_0,$$

де

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad c_i = \begin{pmatrix} c_{1i} \\ c_{2i} \\ \dots \\ c_{ni} \end{pmatrix} \quad \text{при } i = 0, 1, 2, \dots, n-r.$$

називється векторним розв'язком.

Для прикладу, якщо маємо загальний розв'язок у вигляді

$$\begin{aligned} x_1 &= x_3 - x_4 + 3, \\ x_2 &= 7x_3 + 5x_4 - 1, \end{aligned}$$

то його перетворюємо у параметричний вигляд так:

$$\begin{cases} x_1 = x_3 - x_4 + 3, \\ x_2 = 7x_3 + 5x_4 - 1, \\ x_3 = x_3, \\ x_4 = x_4, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = t_1 - t_2 + 3, \\ x_2 = 7t_1 + 5t_2 - 1, \\ x_3 = t_1, \\ x_4 = t_2, \end{cases}$$

або у векторний

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t_2 + \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Окремий розв'язок системи (один, вибраний довільним чином)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$x_1 = -3, \quad x_2 = -1, \quad , x_3 = 0, \quad x_4 = 0.$$

2.5 Розв'язування однорідних систем

Однорідна система завжди сумісна — вона має нульовий розв'язок. Для однорідних систем, як і для неоднорідних, можна шукати загальний розв'язок, параметричний і векторний. Пам'ятаючи, що розв'язки однорідної системи утворюють лінійний простір в n , зупинимось на векторному розв'язку.

Теорема 2.4 *Підпростір розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь з n невідомими, основна матриця якої має ранг r , має вимірність $n - r$.*

Доведення. Нехай маємо лінійну однорідну систему $Ax = 0$, де A — матриця рангу r з n стовпчиками і

$$x_i = \sum_j^{n-r} a_{ij} x_j, i = 1, 2, \dots, r. \quad (18)$$

її загальний розв'язок. Підставимо замість вільних змінних значення

$$x_{r+1} = 1, \quad x_{r+2} = 0, \quad x_{r+3} = 0, \dots, x_n = 0,$$

обчислимо основні змінні і одержимо перший розв'язок u_1 .

Підставимо замість вільних змінних значення

$$x_{r+1} = 0, \quad x_{r+2} = 1, \quad x_{r+3} = 0, \dots, x_n = 0,$$

обчислимо основні змінні і одержимо другий розв'язок u_2 .

Подібним чином одержуємо решту розв'язків $u_3, u_4, \dots, u_{n-r}$. Точніше, якщо вектор u_k має координати

$$u_k = \begin{pmatrix} u_{1,k} \\ u_{2,k} \\ \dots \\ u_{n,k} \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, n-r,$$

то

$$u_{r+i,k} = \delta(i, k) = 1, \text{ якщо } i = k, 0, \text{ якщо } i \neq k.$$

Щоб закінчити доведення теореми, достатньо переконатися, що вектори $u_1, u_2, \dots, u_{n-r}$ утворюють базис лінійного простору розв'язків системи $Ax = 0$.

Щоб переконатися у вказані вектори є лінійно незалежними утворюємо довільну лінійну комбінацію $u_1, u_2, \dots, u_{n-r} = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_{n-r} u_{n-r} = 0$. І $u_1, u_2, \dots, u_{n-r}$ ми можемо записати

$$v_{r+1} = \lambda_1 = 0, \quad v_{r+2} = \lambda_2 = 0, \dots, v_n = \lambda_{n-r} = 0,$$

побудована лінійна комбінація є тривіальною і вектори $u_1, u_2, \dots, u_{n-r}$ лінійно незалежні.

Для перевірки повноти системи векторів $u_1, u_2, \dots, u_n$ виберемо довільний вектор у просторі розв'язків (тобто розв'язок) $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$. Будуємо розв'язок $w = v_{r+1}u_1 + v_{r+1}u_1 + \dots + v_{r+1}u_1$. Оскільки в цих розв'язках вільні невідомі збігаються, а основні невідомі вільними визначаються однозначно, то збігають і вільні. Отже

$$v = w = v_{r+1}u_1 + v_{r+1}u_1 + \dots + v_{r+1}u_1.$$

Повнота доведена і дведення теореми завершено. Наведемо пояснювальний приклад до доведення. Нехай $n = 5, r = 2, n - r = 3$,

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Сукупність векторів u_1, u_2, u_3 лінійно незалежна, оскільки

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0 \Rightarrow u_1 = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 - \lambda_2 + 5\lambda_3 \\ -\lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

■

2.6 Ранг системи векторів, ранг матриці

Визначення 2.11 Рангом системи векторів називається вимірність лінійної оболонки цих векторів.

Теорема 2.5 Ранг системи S векторів лінійного простору V дорівнює кількості векторів в максимвльній лінійно незалежній підсистемі $T \subseteq S$.

Доведення. Будемо діяти подібно до доведення теореми 1.5 на сторінці 11. Щоб довести, що система T є базисом, потрібно довести, що вона є повною. Для цього вибираємо будь-який вектор $a \in S$ і розглядаємо більшу систему векторів $R = T \cup \{a\} \subseteq S$. Оскільки T є макимальною лінійно незалежною, тобто будь-яка більша система є лінійно залежною, то система векторів R є лінійно залежною. Отже ми можемо побудувати нетривіальну лінійну комбінацію векторів із R , яка дорівнює нулю. Зробимо це.

$$\lambda a + \sum_{b \in T} \lambda_b b = 0. \quad (19)$$

Припущення $\lambda = 0$ приводить до суперечності — нетривіальна лінійна комбінація векторів із T дорівнює нулю. Отже T не дорівнює нулю, рівність (19) можна розділити на λ , лишити a зліва, а решту доданків перенести направо

$$a = \sum_{b \in T} \left(-\frac{\lambda_b}{\lambda} \right) b, \quad (20)$$

і одержати, що кожен вектор a системи S є лінійною комбінацією векторів із T :

$$a = \sum_{b \in T} \lambda_{a,b} b. \quad (21)$$

Виберемо довільний вектор $u \in \text{Lin } S$. За означенням лінійної оболонки вектор u є лінійною комбінацією векторів із S , тобто

$$u = \sum_{a \in S} \lambda_a a. \quad (22)$$

Підставимо в (eq-max-indep-rang-3) замість a (21) і одержмо

$$u = \sum_{a \in S} \lambda_a \sum_{b \in T} \lambda_{a,b} b. \quad (23)$$

Ми довели, що кожен вектор із $\text{Lin } S$ є лінійною комбінацією векторів із T , тобто система T є повною. Оскільки вона за умовою також є

лінійно незалежною, то T є базисом $\text{Lin } S$, а кількість векторів в T є вимірністю $\text{Lin } S$.

Теорема доведена. ■

Подібно до елементарних перетворень рядків матриці, рівнянь в системі рівнянь, можна розглядати і елементарні перетворення системи векторів — переставляння векторів, додавання до одного вектора іншого, помноженого на будь-яке число, множення вектора на ненульове число.

Теорема 2.6 *Якщо є дві системи векторів S і T і одна з них одержана із другої за допомогою елементарного перетворення, то*

$$\text{Lin } S = T. \quad (24)$$

Доведення. Нехай T одержана із S за допомогою елементарного перетворення системи векторів. Оскільки при елементарному перетворення системи лінійна оболонка може лише зменшитися то $\text{Lin } T \subseteq S$, а оскільки кожне елементарне перетворення має обернене, то також $\text{Lin } S \subseteq T$. Разом два включення дають рівність (24) ■

Теорема 2.7 *Ранг матриці, тобто найбільший з порядків її ненульових мінорів, збігається з рангом системи її рядків і збігається з рангом системи її стовпчиків.*

Доведення. З огляду на те, що елементарні перетворення рядків матриці не змінюють ні найбільший з порядків ненульових мінорів, ні вимірність лінійної оболонки рядків матриці, то ми можемо вважати, що матриця знаходиться у спрощеному вигляді, тобто у вигляді ненульових рядка і у деяких відмічених стовпчиках стоїть одинична матриця. Для спрощення позначень будемо вважати, що матриця має ненульові перші r рядків, і одинична матриця стоїть у перших r стовпчиках, інші рядки відображати не будемо.

Отже, маємо матрицю

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & a_{1,r+1} & a_{1,r+2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_{2,r+1} & a_{2,r+2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{r,r+1} & a_{r,r+2} & \dots & a_{r,n} \end{pmatrix}, \quad n \geq r \geq 1.$$

Найбільший з порядків ненульових мінорів дорівнює r — відповідний мінор стоїть в перших стовпчиках, віддорвнує 1.

Система рядків матриці A є повною в лінійній оболонці рядків за означенням: кожен вектор лінійної оболонки є лінійною комбінацією рядків матриці. Система рядків матриці є також лінійно незалежною — будемо вважати, що це видно. Тому виірність лінійної оболонки рядків матриці дорівнює r .

Пам'ятаємо, що ранг матриці дорівнює рангу транспонованої матриці. А нагр транспонованої матриці, за уже доведеним, дорівнює вимірності лінійної оболонки стовпчиків — рангу системи стовпчиків. Звідси випливає твердження теореми.

Теорема доведена.

■

Підсумуємо доведене наступною теоремою

Теорема 2.8 (Основна теорема про ранг матриці) *Ранг нульової матриці дорівнює нулю. Якщо матриця ненульова, то число $r \geq 1$ є рангом матриці в тому і тільки тому випадку, коли виконується одна із 5 рівносильних умов*

1. (Алгебричний ранг.) Існує ненульовий мінор r -го порядку, який не дорівнює нулю, а мінорів $r + 1$ -го порядку або немає, або всі вони дорівнюють нулю.
2. (Геометричний рядковий ранг.) Максимальна сукупність лінійно незалежних рядків матриці містить r рядків.

3. (Геометричний стовпчиковий) Максимальна сукупність лінійно незалежних стовпчиків матриці містить r стовпчиків.
4. (Гауссовий рядковий) Елементарними перетвореннями рядків матрицю можна привести до вигляду, коли вона у всіх ненульових рядках і у відмічених стовпчиках містить одиничну матрицю.
5. (Гауссовий стовпчиковий) Елементарними перетвореннями стовпчиків матрицю можна привести до вигляду, коли вона у всіх ненульових стовпчиках і у відмічених рядках містить одиничну матрицю.

2.7 Операції над підпросторами

Визначення 2.12 Сумою $V = V_1 + V_2$ підпросторів $V_1, V_2 \subseteq L$ лінійного простору L називається підпростір

$$V = \{x + y | x \in V_1, y \in V_2\}.$$

Означення суми підпросторів коректне в тому розумінні, що справді є підпростором, тобто сума двох векторів із V зову лежить в V ; нульовий вектор лежить в V ; вектор із V помножений на будь-яке число лежить в V . Перевірки цих властивостей не повинні становити складності. Для прикладу, наявність нульового вектора в V перевіряється наступним чином:

$$0 \in V_1, 0 \in V_2 \Rightarrow 0 = 0 + 0 \in V.$$

Подібним чином перевіряється, що теоретико-множинний перетин підпросторів є підпростором.

Таким чином, найважливішими операціями над підпросторами є сума і перетин.

Теорема 2.9 Нехай $V_1, V_2 \subseteq L$ лінійні підпростори лінійного простору L . Вимірність суми та перетину цих підпросторів зв'язані рівністю

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2).$$

Доведення. Нехай претин $V_1 \cap V_2$ має базис $e_1, e_2, \dots, e_p$. Доповни-ми цей базис векторами $u_1, u_2, \dots, u_q$ до максимальної лінійно незалежної системи векторів в V_1 і векторами $v_1, v_2, \dots, v_r$ до максимальної лінійно незалежної системи векторів в V_2 . Таким чином, базисом в V_1 буде $e_1, e_2, \dots, e_p, u_1, u_2, \dots, u_q$, а базисом в V_2 буде $e_1, e_2, \dots, e_p, v_1, v_2, \dots, v_r$, і

$$\dim(V_1 \cap V_2) = p, \dim V_1 = p + q, \quad \dim V_2 = p + r.$$

Переконаємося, що система векторів $e_1, e_2, \dots, e_p, u_1, u_2, \dots, u_q, v_1, v_2, \dots, v_r$ є базисом $V_1 + V_2$. Переконаємося що ця система повна. Виберемо довільний елемент $a \in V_1 + V_2, a = b + c, b \in V_1, c \in V_2$. Тоді

$$b = \sum_{i=1}^p \lambda_i e_i + \sum_{j=1}^q \mu_j u_j, \quad c = \sum_{i=1}^p \nu_i e_i + \sum_{k=1}^r \xi_k v_k, \quad b+c = \sum_{i=1}^p (\lambda_i + \nu_i) e_i + \sum_{j=1}^q \mu_j u_j + \sum_{k=1}^r \xi_k v_k$$

Повнота системи векторів перевірена. Переходимо до перевірки лінійної незалежності нашої системи векторів. Випишемо лінійну комбінацію, що дорівнює нулю

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i e_i + \sum_{j=1}^q \mu_j u_j + \sum_{k=1}^r \xi_k v_k = 0.$$

Перенесемо останню суму направо

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i e_i + \sum_{j=1}^q \mu_j u_j = - \sum_{k=1}^r \xi_k v_k, \quad (25)$$

і позначимо через a вектор, що стоїть в лівій і в правій частині (25). Формула в лівій частині (25) показує, що вектор a лежить в V_1 , а

формула в павій частині рівності (25) показує, що цей вектор лежить в V_2 . Отже вектор a лежить у перетині. Із за однозначності розкладення вектора за базисом випливає, що $a = 0$ і початкова лінійна комбінація векторів нашої системи є тривіальною. Лінійну незалежність векторів із системи перевірили.

Ми довели, що $\dim(V_1 + V_2) = p + q + r$. На завершення доведення теореми запишемо

$$\dim(V_1 + V_2) = p + q + r = (p + q) + (p + r) - p = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim V_1 \cap V_2.$$

■

Визначення 2.13 Сума

$$V_1 + V_2 + \dots + V_k = \{x + y + \dots + z \mid x \in V_1, y \in V_2, \dots, z \in V_k\}$$

підпросторів $V_1, V_2, \dots, V_k$ лінійного простору L називається прямою, якщо із рівностей

$$x_1 + y_1 + \dots + z_1 = x_2 + y_2 + \dots + z_2$$

для довільних векторів

$$x_1, x_2 \in V_1, y_1, y_2 \in V_2, \dots, z_1, z_2 \in V_k$$

випливає рівність

$$x_1 = x_2, y_1 = y_2, \dots, z_1 = z_2$$

Пряма сума підпросторів позначається знаком $\oplus$.

Теорема 2.10 Для прямої суми підпросторів виконується рівність

$$\dim(V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_k) = \sum_{i=1}^k \dim V_i.$$

Доведення. Доведення полягає в перевірці того, що об'єднання базисів доданків є базисом суми.

■

3 Двоїстий (спряжений) простір

3.1 Простір лінійних функціоналів та лінійних форм.

Вважаємо, що є лінійний простір V над полем F . Будемо називати його первісним, початкови, заданим. Коли простір V скінченновимірний, то вважаємо, що його вимірність дорівнює n .

Визначення 3.1 Відображення $f : V \rightarrow F$ називається лінійним функціоналом над лінійним простором V , якщо воно адитивне

$$f(a + b) = f(a) + f(b),$$

і однорідне

$$(\lambda a) = \lambda f(a).$$

Для прикладу, похідна в точці 0 є лінійним функціоналом у лінійному просторі функцій, що мають похідні будь-якого порядку в точці 0 . Відображення, яке ставить у відповідність кожному вектору число 0 є лінійним функціоналом, його позначають 0 .

Позначмо множину лінійних функціоналів на лінійному просторі V над полем F через V^* . На непорожній множині V^* введемо операцію додавання лінійних функціоналів: для $f, g \in V^*, x \in V$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),$$

а також введемо множення функціонала на число: для $f \in V^*, \lambda \in F, x \in V$

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

Теорема 3.1 Множина V^* разом із введеним додаванням функціоналів та множенням функціоналів на числа є лінійним простором. Цей простір називають спряженим (або дуальним чи двоїстим) до V і позначають V^* .

Доведення. Технічну перевірку коректності визначення суми лінійних функціоналів, множення лінійного функціонала на число і того, що разом із введеними операціями V^* утворює лінійний простір, оминемо — як приклад такої технічної перевірки наведемо перевірку того, що сума лінійних функціоналів адитивна. Нехай $f, g \in V^*$, $x, y \in V$.

$$\begin{aligned}(f + g)(x + y) &= f(x + y) + g(x + y) = f(x) + g(x) + f(y) + g(y) = \\ &= (f(x) + f(y)) + (g(x) + g(y)) = f(x + y) + g(x + y).\end{aligned}$$

■

Лінійні функціонали здають лінійними формами і навпаки, кожна лінійна форма задає лінійний функціонал.

Визначення 3.2 Вирази вигляду

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \quad n \geq 1,$$

де коефіцієнти $a_1, a_2, \dots, a_n \in F$ сталі числа, а $x_1, x_2, \dots, x_n$ — змінні називають лінійними формами (від n змінних).

Прикладами лінійних форм є $2x_1 - 3x_2, \sum_{i=1}^n x_i$. Окремим випадком лінійної форми є нульова форма — всі коефіцієнти нульової форми дорівнюють нулю.

Лінійні форми можна додавати

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i + \sum_{i=1}^n b_i x_i = \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) x_i,$$

і множити на число

$$\lambda \sum_{i=1}^n a_i x_i = \sum_{i=1}^n (\lambda a_i) x_i.$$

Якщо на лінійному просторі V вимірності n з базисом $e_i, i = 1, 2, \dots, n$ є лінійний функціонал $f : L \rightarrow F$, то для $x \in L, \quad x = \sum x_i e_i$ значення $f(x)$ можна обчислити наступним чином:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^n a_i x_i, \quad a_i = f(e_i).$$

Таким чином, значення функціонала f на векторах обчислюється за допомогою лінійної форми. І навпаки, коли заданий набір чисел $a_i \in F, i = 1, 2, \dots, n$ то визначаємо $f(e_i) = a_i$ і $f(x) = \sum x_i a_i$, тобто за лінійною формою ми можтмо побудувати лінійний функціонал. Але це відбувається виключно при наявності базиса. Відповідність між формами та функціоналами канонічна (всім єдиним чином зрозуміла, природна) при наявності базиса і узгоджена з операціями додавання та множення на числа. Отже лінійні простори лінійних функціоналів і лінійних форм канонічно ізоморфні. Наявність канонічного ізоморфізму дозволяє називати і той і другий простір спряженим до заданого лінійного простору.

3.2 Дуальний (спряжений) базис у просторі лінійних функціоналів і у просторі лінійних форм.

Теорема 3.2 *Спряжений простір має ту ж вимірність, що і заданий лінійний простір.*

Доведення. Припустимо, що заданий лінійний простір n -вимірний і має базис $e_1, e_2, \dots, e_n$. Будуємо функціонали $f_1, f_2, \dots, f_n$ так, що

$$f_I(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (26)$$

Побудовані функціонали задаються формами: для $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$

$$f_i(x) = x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (27)$$

Для доведення теореми досить переконатися, що побудовані функціонали утворюють повну лінійно незалежну систему.

Оскільки для будь-якого функціоналу f

$$f(x) = \sum_{i=1}^n f(e_i)x_i = \sum_{i=1}^n f(e_i)f_i(x) = \left(\sum_{i=1}^n f(e_i)f_i \right) x$$

то система $f_1, \dots, f_n$ повна.

Перевіряємо лінійну незалежність функціоналів $f_1, \dots, f_n$. Виберемо лінійну комбінацію, що дорівнює нулю $a_1f_1 + a_2f_2 + \dots + a_nf_n = 0$. Застосуємо цю лінійну комбінацію до вектора e_1 :

$$0(a_1f_1 + a_2f_2 + \dots + a_nf_n)(e_1) = a_1.$$

Одержали рівність $a_1 = 0$. Подібним чином переконуємося в тому, що і решта коефіцієнтів $a_2, a_3, \dots, a_n$ дорівнюють нулю.

Теорема доведена. ■

Визначення 3.3 Якщо в лінійному просторі V є базис $e_1, e_2, \dots, e_n$, то базис (26) називають дуальним (або двоїтим, чи спряженим) базисом у просторі функціоналів, а базис (27) називають дуальним базисом у просторі форм.

3.3 Природний (канонічний) ізоморфізм між лінійним простором V і спряженим до спряженого (двічі спряженим) V^{**}

Позначимо через V^{**} лінійний простір, що спряжений до V^* . Кожен вектор $a \in V$ визначає лінійний функціонал $\hat{a}$ in V^{**} , що задється правилом: для $f \in V^*$

$$\hat{a}(f) = f(a).$$

Відображення $\hat{a} : V \rightarrow V^{**}$ насправді є лінійним, оскільки для $f, g \in V^*$, $\lambda \in F$

$$\hat{a}(f + g) = (f + g)(a) = f(a) + g(a) = \hat{a}(f) + \hat{a}(g),$$

$$\hat{a}(\lambda f) = (\lambda f)(a) = \lambda f(a) = \lambda \hat{a}(f).$$

Теорема 3.3 *Відображення*

$$a \mapsto \hat{a}$$

*є ізоморфізмом із лінійного простору V в лінійний простір V^{**}*

Доведення. Позначимо через $e_1, e_2, \dots, e_n$ базис лінійного простору V , через $u_1, u_2, \dots, u_n$ спряжений до $e_1, e_2, \dots, e_n$ базис лінійного простору V^* , і через $v_1, v_2, \dots, v_n$ спряжений до $u_1, u_2, \dots, u_n$ базис лінійного простору V^{**} . Твердження теореми випливає з того, що

$$\hat{e}_1 = v_1, \quad \hat{e}_2 = v_2, \dots, \hat{e}_n = v_n.$$

■

3.4 Зміна координат лінійного функціонала при зміні базиса в первісному лінійному просторі.

Вибравши базис $e_1, e_2, \dots, e_n$ в лінійному просторі V ми для кожного лінійного функціонала $f : V \rightarrow F$ одержуємо задання

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n f(e_i) x_i,$$

де числа $f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)$ є координатами функціонала f у дуальному базисі спряженого простору.

Теорема 3.4 *Нехай у лінійному просторі V є два базиси: старий базис $e_1, e_2, \dots, e_n$ і новий базис $u_1, u_2, \dots, u_n$. Лінійний функціонал $f \in V^*$ одержує два набори координат: $a_1, a_2, \dots, a_n$ в базисі, що спряжений до старого, і $b_1, b_2, \dots, b_n$ в базисі, що спряжений до нового. Якщо C — матриця переходу від старого базиса до нового, то*

$$(b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n)C, \quad (28)$$

або стисло, позначивши $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$,

$$b = aC. \quad (29)$$

Доведення. Твердження теореми випливає з того, що для $i = 1, 2, \dots, n$

$$b_i = f(u_i) = f\left(\sum_{j=1}^n c_{ji}e_j\right) = \sum_{j=1}^n c_{ji}f(e_j) = \sum_{j=1}^n a_j c_{ji}.$$

■

Якщо записати означення матриці переходу від старого базиса до нового у вигляді

$$(u_1, u_2, \dots, u_n) = (e_1, e_2, \dots, e_n)C, \quad (30)$$

і порівняти із зміною координат лінійного функціонала (28), то побачимо, що вони змінюються однаково або, як кажуть, коваріантно. Звернемо увагу на зміну координат вектора (9) переході від старого базиса до нового. Щоб підкреслити, відміни у формулах (9) і (30), кажуть, що координати вектора змінюються контраваріантно по відношенню до зміни базисних векторів.

3.5 Зв'язок між підпросторами спряженого підпростору і підпросторами самого (первісного) простору. Лінійне кодування

Визначення 3.4 Множина

$$\{x \in V | f(x) = 0\}$$

називається ядром лінійного функціонала $f \in V^*$. Ядро лінійного функціонала f позначається $\text{Ker}(f)$

Теорема 3.5 Між частко впорядкованою множиною (ч.в.м) $P = \{A | A \subseteq V \text{ лінійних підпросторів лінійного простору } V \text{ і ч.в.м. } Q = \{B | B \subseteq V^*\} \text{ лінійних підпросторів спряженого простору } V^*$ існує природний антиізоморфізм, тобто бієктивне відображення $\alpha : Q \rightarrow P$ таке, що для будь-яких підпросторів B_1, B_2, V^*

$$B_1 \subseteq B_2 \Leftrightarrow \alpha(B_1) \supseteq \alpha(B_2).$$

Цей природний (канонічний) антиізоморфізм задається правилом:

$$A = \alpha(B) \Leftrightarrow A = \{x \in V \mid (\forall f \in B) f(x) = 0\}.$$

Обернений антиізоморфізм $\beta : P \rightarrow Q$ задається правилом

$$B = \beta(A) \Leftrightarrow B = \{f \in V^* \mid (\forall x \in A) f(x) = 0\}.$$

Доведення. Для того, щоб довести теорему, потрібно перевірити такі пункти:

- Для лінійного підпростору $B \subseteq V^*$ множина $A = \alpha(B)$ є підпростором лінійного простору V .
- Для лінійних підпросторів $B_1, B_2 \subseteq V^*$ якщо $B_1 \subseteq B_2$, то $\alpha(B_1) \supseteq \alpha(B_2)$.
- Добуток $\beta\alpha$ є тотожним відображенням множини Q лінійних підпросторів простору V^* в себе.

Симетричну перевірку (коли підпростори A, B міняються ролями) перевіряти не потрібно, враховуючи те, що двічі спряжений простір канонічно ізоморфний заданому простору.

Перевіряємо першу властивість. Нехай $B \subseteq V^*$ лінійний підпростір простору V^* , $A = \alpha(B)$, $x, y \in A$, $\lambda, \mu \in F$. За означенням відображення α для будь-якого функціонала $f \in B$ $f(x) = f(y) = 0$ і $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) = 0$. Отже $\lambda x + \mu y \in A$. Те, що A є лінійним підпростором лінійного простору V перевірено.

Перевіряємо другу властивість. Нехай $B_1, B_2 \subseteq V^*$ два підпростори такі, що $B_1 \subseteq B_2$, і нехай $A_1 = \alpha(B_1)$, $A_2 = \alpha(B_2)$. Потрібно перевірити, що $A_1 \supseteq A_2$.

Дійсно,

$$x \in A_2 \Rightarrow \forall f \in B_2) f(x) = 0 \Rightarrow \forall f \in B_1) f(x) = 0 \Rightarrow x \in A_1,$$

і $A_1 \supseteq A_2$.

Переходимо до перевірки останньої властивості. Нехай $A \in P$, $B, B_1 \in Q$, $\alpha(B) = A$, $\beta(A) = B_1$. Спочатку перевіримо включення $B \subseteq B_1$.

Дійсно, за означенням відображень α, β

$$f \in B \Rightarrow (\forall x \in A) f(x) = 0 \Rightarrow f \in B_1.$$

Отже, $B \subseteq B_1$.

Для перевірки рівності $B = B_1$ досить переконатися в тому, що $\dim B = \dim B_1$. Для цього вибираємо базис $e_1, e_2, \dots, e_n$ в V . Після такого вибору всі функціонали задаються лінійними формами від n змінних. Далі вибираємо базис $f_1, f_2, \dots, f_r \in B$, $r \leq n$. Підпростір $A \subseteq V$ є простором розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} f_1(x) = 0, \\ \dots \\ f_r(x) = 0. \end{cases}$$

Простір розв'язків цієї системи має вимірність $n - r$. Вибираємо базис $u_1, u_2, \dots, u_{n-r}$ лінійного простору A . Тепер лінійний простір B_1 є простором розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} f(u_1) = 0, \\ \dots \\ f(u_{n-r}) = 0. \end{cases}$$

Вимірність цього простору дорівнює $n - (n - r) = r$. Отже $\dim B = \dim B_1 = r$.

Теорема доведена. ■

: Приклад Нехай є 5-вимірний лінійний простір V над полем дійсних чисел, його елементами є вектори

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}, \quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in R.$$

Спряжений простір також 5-вимірний, його елементами є лінійні функціонали, що задані лінійними формами

$$f(x) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + a_5x_5. \quad a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in R. \quad (31)$$

Розглянемо лінійний підпростір $A \subset V$ з базисом

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо підпростір $\beta(A) = B \subseteq V^*$, тобто підпростір таких лінійних функціоналів $f \in V^*$, що $f(x) = 0$ для будь-якого вектора $x \in A$.

Оскільки

$$(\forall x \in A)f(x) = 0 \Leftrightarrow f(u_1) = f(u_2) = 0,$$

то для знаходження лінійних форм із B маємо однорідну систему рівнянь

$$\begin{cases} 2a_1 + a_2 + 3a_4 + 3a_5 = 0, \\ -a_1 + 4a_3 + 5a_4 + a_5 = 0. \end{cases} \quad (32)$$

Розв'язування починаємо із запису матриці системи:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Длі методом Гауса прводимо матрицю M до спрощеного вигляду

$$M \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 8 & 13 & 5 \\ -1 & 0 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 8 & 13 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & 8 & 13 & 5 \end{pmatrix}$$

Тут перший перехід — до першого рядка додали другий, помножений на 2; другий перехід — поміняли місцями перший і другий рядок; третій перехід — перший рядок помножили на (-1). За одержаною матрицею у спрощеному вигляді пишемо систему рівнянь (що ріносильна системі (32):

$$\begin{cases} a_1 - 4a_3 - 5a_4 - a_5 = 0, \\ a_2 + 8a_3 + 13a_4 + 5a_5 = 0. \end{cases} \quad (33)$$

Розділяємо змінні на основні (a_1, a_2) і вільні (a_3, a_4, a_5) , переносимо доданки із вільними змінними направо

$$\begin{cases} a_1 = 4a_3 + 5a_4 + a_5, \\ a_2 = -8a_3 - 13a_4 - 5a_5. \end{cases} \quad (34)$$

Складаємо таблицю для знаходження базисних векторів простору розв'язків, в ній замість вільних змінних ставимо $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ (гарантуємо лінійну незалежність і повноту знайденої сукупності розв'язків):

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
f_1	4	-8	1	0	0
f_2	5	-13	0	1	0
f_3	1	-5	0	0	1

Записуємо відповідь: базисними формами лінійного простору B є

$$\begin{aligned} f_1 &= 4x_1 - 8x_2 + x_3, \\ f_2 &= 5x_1 - 13x_2 + x_4, \\ f_3 &= x_1 - 5x_2 + x_5, \end{aligned}$$

лінійний підпростір A є простором всіх розв'язків системи

$$\begin{cases} 4x_1 - 8x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_1 - 13x_2 + x_4 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + x_5 = 0. \end{cases}$$

3.6 Лінійне кодування

Для захисту інформації що передається каналом зв'язку, використовують певний її перезапис. Під інформацією тут розуміємо послідовність символів, а символи — елементи певного поля. Перезапис інформації з метою захисту від пошкодження називають кодуванням, на

відміну від перезапису з метою зхисту від несанкціонованого використання, який називають шифруванням.

Розглянемо один метод перезапису, який називають лінійним кодуванням.

Нехай потрібно передати послідовність $(x_1, x_2, \dots, x_r)$ інформаційних символів. Вводимо лінійний простір V стовпчиків довжини $n, n > r \geq 1$. В цьому просторі вибирається підпростір $L \subset V$ вимірності r з базисом $e_1, e_2, \dots, e_r$. Далі каналом зв'язку передається вектор

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_r e_r.$$

Матриця A , стовчиками якої є вектори $e_1, e_2, \dots, e_r \in V$ називається породжуючою матрицею коду. Можна сказати, що каналом зв'язку передаються лінійні комбінації стовпчиків породжуючої матриці коду.

Підпростір $L \subset V$ визначає підпростір $M \subset V^*$ вимірності $n - r$

$$M = \{f \in V^* | f(e_1) = f(e_2) = \dots = f(e_r) = 0\}.$$

Переходячи до базиса $f_1, f_2, \dots, f_{n-r}$ підпростору M одержуємо, що L є простором розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь з матрицею B , що має n стовпчиків і $n - r$ рядків. Матриця B називається перевіркою матрицею коду.

Прийнятий після передавання вектор x' множиться на перевірку матрицю B :

$$Bx' = b.$$

Якщо $b = 0$, то робиться висновок, що вектор x при передаванні каналом зв'язку не пошкодився, $x' = x$, його розкладають за базисом підпростору і знаходять інформаційні символи. Якщо ж $b \neq 0$, то в залежності від важливості змісту та вартості передавання приймається одне із двох рішень, або вимагається повторне передавання інформації, або робиться висновок, що передавався найближчий (в певному розумінні) до x' вектор із L .

Для прикладу, нехай інформаційні символи належать полю $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$, простір V тривимірний, каналом зв'язку передаються векто-

ри $\begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$, які утворюють одновимірний простір $A \subset V$, базисним

вектором в A є вектор $e = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Припустимо, що потрібно переда-

ти послідовність 00101110. Символи передаються по одному, замість
символа λ передається вектор λe , Отже, передається послідовність

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Лінійний простір A можна задати системою рівнянь

$$\begin{cases} x_1 = x_3, \\ x_2 = x_3 \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Нагадаємо, що передаються символи двоелементного поля $\mathbb{Z}_2$, в яко-
му $1 + 1 = 0$ і $1 = -1$. Породжуючою матрицею нашого коду є

$$M = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

а перевіркою матрицею є

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Припустимо, що після проходження каналом зв'язку на приймач при-
йшли вектори

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Передостанній вектор $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ не проходить перевірку перевіркою матрицею:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Якщо передавались команди на супутник для увімкнення чи вимкнення двигунів, вартість хибного виконання команди велика, і для повторного передавання є можливості, то команда повинна бути передана повторно. Якщо ж передавалась світлина пляжу з мобільника на мобільник, то можна дозволити приймачу виправити помилку. Для цього приймач шукає із двох векторів $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, що утворюють

простір A , найближчий до $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ — не збігається найменша кількість

координат, ним буде $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, і при декодуванні передостанній символ

декодується як 1. Оскільки довгі вектори виписувати у стовчик буває вельми незручно, то їх пишуть (особливо у спеціальній літературі, що стосується кодування та декодування) у рядок (як кажуть, із типографських міркувань). А оскільки вектор справа від матриці писати в рядок безумовно неправильно, то до рядка застосовують транспонування, він стає стовпчиком, і тоді його можна писати справа від матриці.

4 Прямий добуток лінійних просторів над заданим полем.

4.1 Прямий добуток двох множин

Визначення 4.1 *Прямим добутком (або декартовим добутком) двох множин A і B називається множина $A \times B$, елементами якої є впорядковані пари (a, b) елементів $a \in A, b \in B$. Прямий добуток множини на себе називають декартовим квадратом множини.*

Так, коли $A = \{a, b, c\}$, $B = \{x, y\}$, то

$$\begin{aligned} A \times B &= \{(a, x), (a, y), (b, x), (b, y), (c, x), (c, y)\}, & B \times A &= \{(x, a), (y, a), (x, b), \\ A \times A &= A^2 = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}, & B \times B & \end{aligned}$$

А коли на площині задана декартова система координат, і кожна точка цієї площини уявляється як пара чисел (x, y) , то таку площину можна уявляти як прямий добуток дійсних прямих $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, або $\mathbb{R}^2$ — декартів квадрат дійсної прямої.

4.2 Прямий добуток довільної сукупності множин

Для того, щоб відрізняти елементи сукупності один від одного використовують так звані показчики, або індекси. Так елементи двоелементної множини можна позначити як a_1, a_2 — тут числа 1, 2 використані як показчики, індекси, які дозволяють відрізнити один елемент від другою. Звичайно елементи скінченної множини, що має n елементів індексується числами $0, 1, 2, \dots, n-1$ або числами $1, 2, \dots, n$; елементи зліченної множини індексуються натуральними числами (з нулем або без нього); якщо множина одноелементна, то для позначення цього елемента індекси зазвичай не використовуються.

Для заданих множин A_1, A_2 , що індексовані множиною індексів $I = \{1, 2\}$, впорядковану пару (x, y) , $x \in A_1, y \in A_2$ можна розглядати як таблично задану функцію

$$f : I \rightarrow A_1 \cup A_2, \quad f(i) = x \in A_1, \quad f(2) = y \in A_2.$$

Таке розуміння впорядкованих пар (x, y) дозволяє узагальнити поняття прямого добутку множин на випадок коли вножин не дві, а будь-яка сукупність.

Визначення 4.2 Нехай $\mathcal{A}$ довільна сукупність множин $A_i, i \in I$, що індексовані елементами із певної множини I . Тоді прямим добутком $\prod_{i \in I} A_i$ називається

$$\prod_{i \in I} A_i = \{f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \mid f(i) \in A_i\}.$$

Певні зручності дає домовленість про те, що

- якщо один із множників порожній, то весь прямий добуток порожній;
- якщо індексуюча множина одноелементна (прямий добуток одного множника) то добуток дорівнює цьому множнику;
- якщо індексуюча множина порожня (множиться порожня множина множників) то прямий добуток одноелементний;
- елементами прямого добутку зліченної множини множників є послідовності елементів множників.
- якщо всі множники збігаються $\forall i \in I (A_i = A)$, то прямий добуток позначається A^I .

4.3 Прямий добуток двох лінійних просторів над одним полем

На прямому добутку $L_1 \times L_2$ двох лінійних просторів L_1, L_2 над одним полем F можна природно вести операції додавання та множення на число: якщо $x_1, x_2 \in L_1, \quad y_1, y_2 \in L_2, \quad \lambda \in F$ то

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad \lambda(x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1).$$

Разом із так введеними операціями $L_1 \times L_2$ утворює лінійний простір.

Теорема 4.1 *Лінійний простір $L_1 \times L_2$ є прямою сумою підпросторів $L_1 \times \{0\}, \{0\} \times L_2 \subseteq L_1 \times L_2$. Якщо базисом лінійного простору L_1 є вектори $e_1, e_2, \dots, e_n \in L_1$, а базис L_2 утворюють вектори $u_1, u_2, \dots, u_m \in L_2$, то базис лінійного простору $L_1 \times L_2$ утворюють вектори*

$$(e_1, 0), (e_2, 0), \dots, (e_n, 0), (0, u_1), (0, u_2), \dots, (0, u_m).$$

Доведення. Справді, будь-який вектор $(x, y) \in L_1 \times L_2$ можна записати у вигляді

$$(x, 0) + (0, y) = (x, y), \quad (x, 0) \in L_1 \times \{0\}, (0, y) \in \{0\} \times L_2, \quad (35)$$

звідки випливає, що $L_1 \times L_2 = L_1 \times \{0\} + \{0\} \times L_2$. А оскільки $L_1 \times \{0\} \cap \{0\} \times L_2 = \{0\}$, то сума є прямою. Те, що вектори із множини (35) утворюють базис всього лінійного простору випливає з того, що базис прямої суми є об'єднанням базисів доданків.

■

Приклад Нехай лінійний простір L_1 над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$ складається із матриць розміру 2 на 2, а лінійний простір L_2 складається із многочленів степеня 2 чи менше. Тоді вектор

$$a = \left(\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}, 1 - x + 5x^2 \right)$$

належить лінійному простору $L_1 \times L_2$. Використовуючи те, що $L_1 \times L_2$ є прямою сумою підпросторів $L_1 \times \{0\}, \{0\} \times L_2$, які канонічно ізоморфні просторам L_1, L_2 , той же вектор a можна записати у вигляді

$$a = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} + 1 - x + 5x^2.$$

4.4 Прямий добуток довільної сукупності лінійних просторів над одним полем

Нехай $L_i, i \in I$ довільна сукупність лінійних підпросторів над полем F , що індексована множиною I . Множина

$$\prod_{i \in I} L_i$$

перетворюється в лінійний простір введенням операцій додавання та множення на число наступним чином. Для

$$f, g \in \prod_{i \in I} L_i, \quad f, g : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} L_i \quad i \in I \Rightarrow (f+g)(i) = f(i)+g(i), \quad (\lambda f)(i) = \lambda f(i)$$

Приклад Якщо $I = \mathbb{R}, L_i = \mathbb{R}$, для всіх $i \in \mathbb{R}$ і $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, то f — всюди визначена дійснозначна функція дійсного аргумента.

5 Факторизація лінійного простору по підпростору.

5.1 Еквівалентність на множині

Нагадаємо, що таке відношення еквівалентності і що таке фактор-класи цієї еквівалентності.

Рефлексивне, симетричне і транзитивне бінарне відношення на множині називають відношення еквівалентності. Відношення еквівалентності задає класи еквівалентності, або факторкласи, тобто класи елементів множини, які еквівалентні одному вибраному елементу. Об'єднання класів є вся множина, а різні класи не перетинаються. Елементи, що належать класу, називаються представниками цього класу.

Нова множина, елементами якої є факторкласи, називається фактормножиною.

5.2 Факторизація лінійного простору по підпростору

Нехай $\mathcal{L}$ лінійний простір L над полем F і в ньому лінійний підпростір $V \subseteq L$. На множині L природно виникає відношення еквівалентності $\sim$: для $a, b \in L$

$$a \sim b \Leftrightarrow a - b \in V.$$

Це відношення

- рефлексивне, тому що для $a \in L$ $a - a = 0 \in V$; $a, b \in L$

$$a - b \in V \Rightarrow -(a - b) = b - a \in V;$$

- транзитивне, тому що для $a, b, c \in L$

$$a - b, b - c \in V \Rightarrow a - c = (a - b) + (b - c) \in V.$$

На класах еквівалентності $[a], a \in L$ вводимо операції додавання та множення на число наступними правилами.

$$[a] + [b] = [a + b]; \quad \lambda[a] = [\lambda a].$$

Отже, щоб знайти суму двох класів, потрібно вибрати представники цих класів, і знайти клас, в якому лежить сума представників. А щоб знайти добуток класа на число, вибираємо в класі представника, множимо його на число і знаходимо новий клас, в якому лежить знайдений добуток.

Література

- [1] О.А.Борисенко, Л.М.Ушакова “Аналітична геометрія“, — Харків:Основа, 1993.

- [2] В.П.Ольшанський “<Короткий >курс лінійної алгебри та аналітичної геометрії”: Лекції та лаб.роботи на ПЕОМ : Навч. посібник для студ. техн. вузів / В. П. Ольшанський ; Харківський політехнічний ун-т. — К. : ІСДО, 1994. - 216 с.
- [3] “Аналітична геометрія. Лінійна алгебра”: Навчально- методичний посібник / Укл.: І.Д.Пукальський, І.П.Лусте. — Чернівці: Рута, 2007. — 244 с.
- [4] Методичні вказівки з теми “Визначники та елементи лінійної алгебри“, укладач Паламарчук В.О. // Краторськ, ДДМА, 2001, 30 стор. — vila.pdf
- [5] Олег Романів “Лінійна алгебра. Перший семестр1“, — Львів, 1 вересня 2013, інтернет
- [6] Л.А.Калужнін, В.А.Вишенський, Ц.А. Шуб “Лнійні простори“ — Київ: Вища Школа, 1971
- [7] В.І.Андрійчук , Б.В. Забавський “Алгебра і теорія чисел“ — Львів. — 2005.
- [8] В.І. Андрійчук , Б.В. Забавський “Лінійна алгебра“ — Львів. — 2008.
- [9] В.І. Андрійчук, Б.В. Забавський “Загальна алгебра“ — Львів. — 2009.
- [10] Гудименко Ф.С., Борисенко Д.М., Волкова В.О., Зражевська Г.М., Ющенко О.А. “Збірник задач з вищої математики“ — К., Видавництво Київського університету, 1967 р. 352 с.
- [11] И.В. Проскуряков “Сборник задач по линейной алгебре“. — М:Наука, 1967

Показчик

- антиізоморфізм
 - природний, 47
- антиізоморфізм
 - ч.в.м., 47
 - канонічний, 47
- база, 12
- базис
 - лінійного простору, 9
- ч.в.м., 47
- декодування, 53
- добуток
 - декартів
 - множин, 54
 - прямих, 54
 - прямий
 - множин, 54
 - просторів, 55
 - прямих, 54
- додавання
 - факторкласів, 58
 - форм, 42
 - функціоналів, 41
- дтермінант, 22
- елементарні перетворення
 - системи векторів, 36
- елементи
 - індексовані, 54
- факторклас
 - нульовий, 58
- факторкласи, 57
- фактормножина, 57
- форма
 - лінійна, 42
 - нульова, 42
- форми
 - лінійно незалежні, 42
- формули
 - Крамера, 22, 29
- функціонал
 - лінійний, 41
- функціонала
 - нульовий, 41
- індекс, 54
- інформація, 51
- ізоморфізм, 16, 19
 - канонічний, 20, 44
 - природний, 44
- канал зв'язку, 51
- класи
 - еквівалентності, 57
- кодування, 51
 - лінійне, 51
- коефіцієнти
 - рівняння, 22
- квадрат
 - декартів, 54
- линейное пространство
 - нульмерное, 9

лінійна оболонка
 системи векторів, 21
 лінійна комбінація
 нетривіальна, 5
 тривіальна, 5
 векторів, 5
 лінійний просіт
 скінченновимірний, 10
 лінійний простір, 2
 дуальний, 41
 двічі спряжений, 44
 двоїстий, 41
 нескінченновимірним, 10
 спряжений, 41
 спряжений до спряженого, 44
 лінійні простори
 ізоморфні, 16, 19
 матриця, 14
 перевірочна коду, 51
 породжуюча коду, 51
 міnor, 22
 міркування
 типографські, 27
 многочлен, 14
 множення
 форми на число, 42
 класа на число, 58
 множення
 функціонала на число, 41
 невідомі, 22
 перетворення
 елементарні, 26
 підпростір, 21
 лінійний, 21
 нетривіальний, 21
 тривіальний, 21
 власний, 21
 показчик, 54
 поле
 дійсних чисел, 2
 класів лишків, 2
 комплексних чисел, 2
 раціональних чисел, 2
 представник
 класу, 57
 ранг
 матриці, 36
 системи стовпчиків, 36
 системи векторів, 36
 ранг матриці
 алгебричний, 38
 гауссовий рядковий, 38
 гауссовий стовпчиковий, 38
 геометричний рядковий, 38
 геометричний стовпчиковий, 38
 рівняння
 лінійне алгебричне, 22
 неоднорідне, 22
 однорідне, 22
 права частина, 22
 розкладення
 вектора за базисом, 14
 розв'язок
 параметричний, 31

розв'язок
 системи рівнянь, 28
 векторний, 31
 загальний, 29

розв'язок
 системи, 24

ррозв'язок
 єдиний, 29

ряд
 формальний степеневий, 14

символ, 51

система
 неоднорідна, 22
 несумісна, 25
 однорідна, 22, 33
 розв'язок, 28
 розв'язування, 28
 сумісна, 25

система векторів
 лінійно незалежна, 5
 лінійно залежна, 5
 повна, 9

системи
 рівносильні, 25

сума
 форм, 42
 функціоналів, 41
 пряма підпросторів, 40

шифрування, 51

вектор, 3

вірність
 простору

матриць, 13

многочленів, 13

степеневих рядів, 13

вимірність
 лінійного простору, 9, 14

визначник, 22

відношення
 рефлексивне, 16, 57
 симетричне, 16, 57
 транзитивне, 16, 57

відображення
 адитивне, 16, 41
 лінійне, 16
 однорідне, 16, 41

віображення
 бієктивне, 16
 ін'ктивне, 16
 сюр'єктивне, 16
 взаємно однозначне, 16

ядро
 лінійного функціонала, 46

зміна координат
 контраваріантна, 46
 коваріантна, 46