УДК 517.535
В. Н. ЛОГВИНЕНКО

НЕКОТОРЫЕ УСЛОВИЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ОПРЕДЕЛЕННОСТИ СУЖЕНИЙ НА $\mathbb{R}^n$ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА

Пусть функция $f: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{C}$, а E — подмножество $\boldsymbol{R}^n$. Назовем эту функцию E-эрмитово-позитивной, если $(\forall N \in \boldsymbol{N})(\forall x^{(1)}, \ldots, x^{(N)} \in E)$ $(\forall \zeta_1, \ldots, \zeta_N \in \boldsymbol{C})$:

$$\sum_{j,k=1}^{N} f(x^{(j)} - x^{(k)}) \zeta_j \bar{\zeta}_k \geqslant 0. \tag{1}$$

При $E = \boldsymbol{R}^n$ функция f, удовлетворяющая условию (1), *положительно определена* в обычном смысле.

В настоящей работе изучается вопрос, для каких множеств E и классов функций f из того, что f E-эрмитово-позитивна, вытекает положительная определенность этой функции. Если от функций f не требовать ничего, кроме E-эрмитово-позитивности, то естественное необходимое условие того, что эти функции положительно определены, таково: алгебраическая разность $E - E = \{x - y : x \in E,\ y \in E\}$ должна совпадать с $\boldsymbol{R}^n$. Как следует из приведенного ниже примера, это условие не является достаточным даже для классов $\boldsymbol{C}^k(\boldsymbol{R}^n)$, $k \in \boldsymbol{N}$. Более сильное условие на множество E: его дополнение измеримо и не является относительно плотным подмножеством $\boldsymbol{R}^n$ — достаточно для всего класса E-эрмитово-позитивных функций. Напомним, что множество $A \subset \boldsymbol{R}^n$ называется относительно плотным, если оно измеримо и для некоторых постоянных $L > 0$ и $\delta > 0$ лебегова мера пересечения A с кубом

$$K(x, L) = \{y \in \boldsymbol{R}^n : \max\{|y_j - x_j| : j = \overline{1, n}\} \leqslant L\}$$

е меньше, чем δ, при любом $x\in \boldsymbol{R}^n$. Достаточность сформулированного условия становится очевидной, если заметить, что при его выполнении для любого конечного набора векторов $x^{(1)}, \ldots, x^{(N)}\in \boldsymbol{R}^n$ найдется такой набор векторов $y^{(1)}, \ldots, y^{(N)}\in E$, что для любых индексов $j, k\in\{1, \ldots, N\}$ имеет место равенство $x^{(j)}-x^{(k)}=y^{(j)}-y^{(k)}$. В справедливости замечания легко убедиться, если учесть, что для любых постоянных $M>0$ и $\varepsilon>0$ найдется такой куб $K(x, M)$, что лебегова мера его пересечения с дополнением E меньше ε, и оценить меру множества

$$\{y\in K(x, M)\cap E \mid \exists j\in\{1, \ldots, N\}: y+x^{(j)}-x^{(1)}\notin E\}.$$

Однако это достаточное условие не необходимо. Усмотреть это проще всего при $n=1$; этим случаем мы и ограничимся. Зададимся произвольным числом $\delta\in(0, 1)$. Для любых натуральных j и k найдутся такое число $N_k^{(j)}\in \boldsymbol{N}$ и такое множество $F_k^{(j)}\subset[0, N_k^{(j)}]$, что, во-первых, лебегова мера пересечения $F_k^{(j)}\cap[m, m+1]$ равна δ для $m=0, 1, \ldots, N_k^{(j)}-1$, во-вторых, для любых чисел $\rho_{1,1}, \rho_{1,2}, \ldots, \rho_{j-1,j}, \rho_{j,j}\in[-k, k]$, для которых $\rho_{\lambda,\mu}+\rho_{\mu,\nu}=\rho_{\lambda,\nu}$ для всех $1\leqslant\lambda\leqslant\mu\leqslant\nu\leqslant j$ (а, стало быть, $\rho_{1,1}=\ldots=\rho_{j,j}=0$), найдутся j точек $x^{(1)}, \ldots, x^{(j)}\in[0, N_k^{(j)}]\setminus F_k^{(j)}$, для которых при $1\leqslant\mu\leqslant\nu\leqslant j$ выполняется $x^{(\mu)}-x^{(\nu)}=\rho_{\mu,\nu}$. Зададим множество E, определив его дополнение. Во-первых, потребуем, чтобы $CE=-CE$, т.е. множества E и CE должны быть симметричными относительно начала координат. Во-вторых, положим $CE\cap\boldsymbol{R}_+=F_1^{(2)}\cup(F_1^{(3)}+N_1^{(2)})\cup(F_2^{(2)}+N_1^{(2)}+N_1^{(3)})\cup(F_2^{(3)}+N_1^{(2)}+N_1^{(3)}+N_2^{(2)})\cup(F_3^{(2)}+N_1^{(2)}+N_1^{(3)}+N_2^{(2)}+N_2^{(3)})\cup(F_1^{(4)}+N_1^{(2)}+N_1^{(3)}+N_2^{(2)}+N_2^{(3)}+N_3^{(2)})\cup\ldots$. Оба множества E и CE относительно плотны. Из конструкции следует, что любая E-эрмитово-позитивная функция положительно определена.

Скажем, следуя Планшерелю и Пойа [1], что целая в $\boldsymbol{C}^n$ функция $f(z)$ имеет экспоненциальный тип (конечную степень) не выше σ, если величина $\sup\{|f(z)|\exp\{-A(|z_1|+\ldots+|z_n|)\}: z=(z_1, \ldots, z_n)\in \boldsymbol{C}^n\}$ конечна при любом $A>\sigma$. Если к тому же эта величина бесконечна при любом $A<\sigma$, то экспоненциальный тип f в точности равен σ. Через $[1, \sigma]_n$ обозначается класс всех целых в $\boldsymbol{C}^n$ функций экспоненциального типа не выше σ, через $[1, \infty)_n$ — класс $\bigcup_{\sigma>0}[1, \sigma]_n$, т.е. класс всех целых в $\boldsymbol{C}^n$ функций конечной степени. Для вывода достаточных условий на множество E, при выполнении которых любая E-эрмитово-позитивная функция, являющаяся сужением на $\boldsymbol{R}^n$ целой функции конечной степени, положительно определена, нам понадобятся следующие теоремы.

Теорема А. *Пусть E — относительно плотное подмножество $\boldsymbol{R}^n$. Любому $\sigma\in(0, \infty)$ отвечает такая конечная величина $C=C(\sigma, E)$, что для каждой функции $f\in[1, \sigma]_n$ выполняется неравенство*

$$\sup\{|f(x)|: x\in \boldsymbol{R}^n\}\leqslant C\sup\{|f(x)|: x\in E\}. \tag{2}$$

Наименьшая из величин C, для которых неравенство (2) справедливо при всех функциях $f \in [1, \sigma]_n$, называется *константой нормирования* и обозначается $\Gamma_\sigma(E)$.

Теорема B. *Пусть* E — *ε-сеть для* $\boldsymbol{R}^n$, *т. е.* $\sup\{\inf\{|x_1 - y_1| + \ldots + |x_n - y_n| : y \in E\} : x \in \boldsymbol{R}^n\} < \varepsilon$. *Тогда, каково бы ни было число* $\sigma \in (0, (2([en] + 1)\varepsilon)^{-1})$, *для любой функции* $f \in [1, \sigma]_n$ *справедлива оценка:* $\sup\{|f(x)| : x \in \boldsymbol{R}^n\} \leqslant (1 - \sigma\varepsilon)^{-1} \sup\{|f(x)| : x \in E\}$.

Теорема C. *Пусть* F — *относительно плотное подмножество* $\boldsymbol{R}^n$, *а* E — *ε-сеть для* F, *что означает:* $\sup\{\inf\{|x_1 - y_1| + \ldots + |x_n - y_n| : y \in E\} : x \in F\} < \varepsilon$. *Тогда, каково бы ни было положительное число* σ, *для которого* $2([en] + 1)\sigma\Gamma_{2([en]+1)\sigma}(F)\varepsilon < 1$, *для любой функции* $f \in [1, \sigma]_n$ *справедлива оценка:* $\sup\{|f(x)| : x \in \boldsymbol{R}^n\} \leqslant \Gamma_\sigma(F)(1 - \sigma\Gamma_\sigma(F)\varepsilon)^{-1} \sup\{|f(x)| : x \in E\}$.

Сформулированные теоремы являются многомерными аналогами классической теоремы Картрайт [2] о целой в $\boldsymbol{C}$ функции экспоненциального типа, ограниченной на последовательности целых точек вещественной оси (вернее, ее обобщений, полученных Боасом [3] и Б. Я. Левиным [4]). Теорема A была сформулирована Б. Я. Левиным в докладе на Всесоюзной конференции по комплексному анализу (Харьков, 1971 г.), теорема B доказана в [5], а теорема C — в работе [6]. Следующие теоремы 1, 2 и 3 вытекают из теорем A, B и C соответственно.

Теорема 1. *Пусть множество* $E \subset \boldsymbol{R}^n$ *имеет положительную меру Лебега, а алгебраическая разность* $E - E$ *относительно плотна. Тогда любая* E-*эрмитово-позитивная функция* $f \in [1, \infty)_n$ *положительно определена.*

Доказательство. Точно так же, как для обычных положительно определенных функций (см., например, [7]), проверяется, что для любого вектора $x \in E - E$ выполнено неравенство $|f(x)| \leqslant f(0)$. Если $f \in [1, \infty)_n$, то найдется такое $\sigma_1 < \infty$, что $f \in [1, \sigma_1]_n$. По теореме A справедлива оценка $\sup\{|f(x)| : x \in \boldsymbol{R}^n\} \leqslant Cf(0)$, где конечная величина C зависит лишь от E и σ_1. Из теоремы Бохнера — Хинчина (см. [7]) вытекает, что произведение E-эрмитово-позитивной функции на положительно определенную E-эрмитово-позитивно. Значит, при любом $\varepsilon \in (0, 1/2]$ функция $f_\varepsilon(z) = f(z) \prod_{j=1}^n \{\sin(\varepsilon z_j)/(\varepsilon z_j)\}^2$, принадлежащая классу $[1, \sigma]_n$, где $\sigma = \sigma_1 + 1$, является E-эрмитово-позитивной. Кроме того, ее сужение на $\boldsymbol{R}^n$ лежит в пространстве $L^1(\boldsymbol{R}^n) \cap L^2(\boldsymbol{R}^n)$. По теореме Винера — Пэли существует функция $\varphi_\varepsilon(t) \in C(\boldsymbol{R}^n)$, $\operatorname{supp} \varphi_\varepsilon \subset K(0, \sigma)$, для которой

$$f_\varepsilon(z) = \int_{K(0,\sigma)} \varphi_\varepsilon(t) \exp\{-i\langle z, t\rangle\} dt, \quad \langle z, w\rangle = \sum_{j=1}^n z_j \bar{w}_j.$$

Теорема будет доказана, если мы покажем, что при любом $\varepsilon > 0$ функция $\varphi_\varepsilon(t)$ неотрицательна. Тогда все функции $f_\varepsilon(x)$, $\varepsilon > 0$, положительно определены и, переходя к пределу при $\varepsilon \downarrow 0$, убеждаемся, что тем же свойством обладает и функция f.

Если непрерывная функция f является E-эрмитово-позитивной, то для любой функции $\rho \in L^2(E)$ справедливо соотношение

$$\int_{E^2} f_\varepsilon(x-y)\rho(x)\overline{\rho(y)}\,dxdy \geqslant 0 \text{ или}$$

$$\int_{K(0,\sigma)} \varphi_\varepsilon(t)\,|\hat\rho(t)|^2\,dt \geqslant 0, \tag{3}$$

где через $\hat\rho(t)$ обозначено преобразование Фурье-функции ρ. Проверка этого утверждения дублирует проверку соответствующего утверждения для положительно определенных функций. Покажем, что из неравенства (3), справедливого для всех функций $\rho \in L^2(E)$, вытекает неотрицательность функции $\varphi_\varepsilon(t)$. Доказательство проходит в два этапа: вначале проверяется, что $\operatorname{Im}\varphi_\varepsilon(t) \equiv 0$, а затем неотрицательность $\varphi_\varepsilon(t)$. Поскольку проверка обоих свойств производится одинаково, то будем считать, что вещественнозначность $\varphi_\varepsilon(t)$ уже доказана и нужно лишь доказать, что эта функция неотрицательна. Предварительно заметим, что множество сужений на куб $K(0,\sigma)$ преобразований Фурье-функций из $L^2(E)$ плотно в пространстве $L^2(K(0,\sigma))$. Если бы это было не так, то нашлась бы ненулевая функция $\psi \in L^2(K(0,\sigma))$, ортогональная всем таким сужениям. Из равенства Парсеваля следовало бы, что преобразование Фурье $\hat\psi$ функции ψ ортогонально пространству $L^2(E)$, т.е. $\hat\psi = 0$. Так как $\hat\psi$ — целая функция, а $\operatorname{mes}_n E > 0$, то $\psi = 0$ почти всюду, чего не может быть. Пусть, вопреки тому, что мы доказываем, есть точка $t^{(0)} \in K(0,\sigma)$, в которой $\varphi_\varepsilon(t^{(0)}) < 0$. Тогда найдутся такие положительные числа δ и ω, что $\max\{\varphi_\varepsilon(t) : t \in K(t^{(0)},\delta)\} = -\omega$. По доказанному для любого $\eta > 0$ найдется такая функция $h = h_\eta \in L^2(E)$, что $\int_{K(0,\sigma)} |\hat h(t) - \chi_{K(t^{(0)},\delta)}(t)|^2\,dt < \eta^2$, где через $\chi_{K(t^{(0)},\delta)}(t)$ обозначен индикатор куба $K(t^{(0)},\delta)$. Имеем

$$\int_{K(0,\sigma)} \varphi_\varepsilon(t)\,|\hat h(t)|^2\,dt = \int_{K(0,\sigma)} \varphi_\varepsilon(t)\,\chi_{K(t^{(0)},\delta)}(t)\,dt +$$

$$+ 2\int_{K(0,\sigma)} \varphi_\varepsilon(t)\,\chi_{K(t^{(0)},\delta)}(t)\operatorname{Re}\{\hat h(t) - \chi_{K(t^{(0)},\delta)}(t)\}\,dt +$$

$$+ \int_{K(0,\sigma)} |\hat h(t) - \chi_{K(t^{(0)},\delta)}(t)|^2\,\varphi_\varepsilon(t)\,dt \leqslant -\omega(2\delta)^n + 2\eta\max\{|\varphi_\varepsilon(t)| :$$

$$t \in K(0,\sigma)\}(2\delta)^n + \eta^2\max\{|\varphi_\varepsilon(t)| : t \in K(0,\sigma)\}.$$

При достаточно малых положительных η правая часть последнего неравенства отрицательна. Значит, $\int_{K(0,\sigma)} \varphi_\varepsilon(t)\,|\hat h(t)|^2\,dt < 0$, что не может быть.

Замечание 1. Требование аналитичности функции f в предыдущей теореме нельзя существенно ослабить даже в случае, когда $n = 1$, а $E - E = \boldsymbol{R}$. Например, его нельзя заменить требованием,

чтобы ограниченная функция $f \in C^k(\mathbf{R})$, $k = 0, 1, \dots$. Начнем с п
строения соответствующего примера в классе $C(\mathbf{R})$. Положим E $= [0, 1/2] \cup \mathbf{Z}$, а функцию $f(x)$ определим равной $\cos \pi x$ при $x \in [-1/2, 1/2]$ и равной 0 при $|x| \geqslant 1/2$. Ясно, что $E - E =$ Преобразование Фурье $\hat{f}(t)$ функции $f(x)$ равно $\cos(t/2)\{1/(\pi + t)$ $+ 1/(\pi - t)\}$, т. е. меняет знак на оси. По теореме Бохнера — Хинчина функция $f(x)$ не является положительно определенной. Тем не менее эта функция E-эрмитово-позитивна. Действительно, при любых $x^{(1)}, \dots, x^{(N)} \in E$ и $\zeta_1, \dots, \zeta_N \in \mathbf{C}$ имеем

$$\sum_{j,\,k=1}^{N} f(x^{(j)} - x^{(k)})\,\zeta_j \bar{\zeta}_k = \sum_{0 < x^{(j)},\, x^{(k)} < 1/2} \cos \pi (x^{(j)} - x^{(k)})\,\zeta_j \bar{\zeta}_k +$$
$$+ \sum\nolimits_{|x^{(j)} - x^{(k)}| \geqslant 1/2} f(x^{(j)} - x^{(k)})\,\zeta_j \bar{\zeta}_k + f(0) \sum\nolimits_{x^{(j)} \notin [0,\,1/2]} |\zeta_j|^2.$$

Первая сумма в правой части последнего неравенства неотрицательна, так как функция $\cos \pi x$ положительно определена. Третья сумма также неотрицательна, а вторая равна нулю.

Теперь нетрудно построить пример для $k \in \mathbf{N}$. При любых $n \in \mathbf{N}$ и $\delta > 0$ функция $f_k(x) = f_k(x;\ n, \delta) = f(x)\,\{(1 + \exp\{2\pi i n x\}) \times$ $\times \sin(\delta x)/(\delta x)\}^k \in C^k(\mathbf{R})$. Кроме того, эта функция E-эрмитово-позитивна как произведение E-эрмитово-позитивной на положительно определенную. Преобразование Фурье $\hat{f}_k(t)$ функции $f_k(x)$ равно

$$\cos\frac{t}{2}\left\{\frac{1}{\pi + t} + \frac{1}{\pi - t}\right\} \ast \left\{\frac{1}{2\delta}\left(\chi_{[-\delta,\,\delta]}(t) + \chi_{[2\pi n - \delta,\,2\pi n + \delta]}(t)\right)\right\} \ast$$
$$\dots \ast \left\{\frac{1}{2\delta}\left(\chi_{[-\delta,\,\delta]}(t) + \chi_{[2\pi n - \delta,\,2\pi n + \delta]}(t)\right)\right\}, \tag{4}$$

где множитель $\{(2\delta)^{-1}(\chi_{[-\delta,\delta]}(t) + \chi_{[2\pi n - \delta,\,2\pi n + \delta]}(t))\}$ повторяется в свертке k раз. Зафиксируем $k \in \mathbf{N}$ и будем считать число $n \in \mathbf{N}$ достаточно большим, а $\delta > 0$ — достаточно малым. При этих условиях свертка k последних сомножителей в (4) представляет собой сумму «шапочек» с разнесенными носителями; у одной из этих шапочек носителем является отрезок $[-k\delta, k\delta]$. Выберем достаточно близкий к началу координат отрезок $[a, b]$, на котором $\cos(t/2)$ $\{(\pi + t)^{-1} + (\pi - t)^{-1}\} \leqslant -\omega < 0$. При достаточно большом $n \in \mathbf{N}$ и $\delta k < (b - a)/2$ знак свертки (4) в точке $t = (a + b)/2$ определяется сверткой функции $\cos(t/2)\{(\pi + t)^{-1} + (\pi - t)^{-1}\}$ с шапочко
носитель которой — отрезок $[-k\delta, k\delta]$, а эта свертка в указанн
точке отрицательна. По теореме Бохнера — Хинчина функция $f_k($
не является положительно определенной.

Теорема 2. *Пусть* $E \subset \mathbf{R}^n$ — *множество единственности д винеровского класса* $W^2_{\sigma,\,n} = \{f \in [1, \sigma]_n\colon \int_{\mathbf{R}^n} |f(x)|^2\,dx < \infty\}$, *а ал раическая разность* $E - E$ *является* ε-*сетью для* $\mathbf{R}^n$, *при* $2([en] + 1)\,\sigma\varepsilon < 1$. *Тогда любая целая в* $\mathbf{C}^n$ *функция конечной с пени, меньшей* σ, *сужение которой на вещественную гиперпл кость* E-*эрмитово-позитивно, положительно определена на* $\mathbf{R}^n$.

Доказательство. Пусть для функции f выполнены условия теоремы. Из ее E-эрмитово-позитивности и теоремы B следует, что $\sup\{|f(x)| : x \in \boldsymbol{R}^n\} \leqslant (1-\sigma\varepsilon)^{-1} f(0)$. Рассмотрим семейство функций $f_\eta(z) = f(z) \prod_{j=1}^n \{\sin(\eta z_j)/(\eta z_j\}^2$, $0 < \eta < \eta_0$, где число η_0 выбрано настолько малым, что все функции $f_\eta \in [1, \sigma]_n$. Так как сужение f_η на $\boldsymbol{R}^n$ является E-эрмитово-позитивным и лежит в пространстве $L^1(\boldsymbol{R}^n) \cap L^2(\boldsymbol{R}^n)$, то найдется функция $\varphi_\eta \in C(\boldsymbol{R}^n)$, $\operatorname{supp} \varphi_\eta \subset K(0, \sigma)$, для которой $f_\eta(z) = \hat{\varphi}_\eta(z)$ и $\int\limits_{K(0,\sigma)} \varphi_\eta(t) |\sum\limits_k c_k \exp\{-i < x^{(k)}, t >\}|^2 dt \geqslant 0$ для любого тригонометрического многочлена $\sum\limits_k c_k \exp\{-i < < x^{(k)}, t >\}$ с показателями $x^{(k)} \in E$. Дальнейшее доказательство полностью копирует доказательство теоремы 1, если заметить, что тригонометрические многочлены указанного вида плотны в $L^2(K(0, \sigma))$, так как E — множество единственности для винеровского класса $W^2_{\sigma, n}$.

Теорема 3. *Пусть F — относительно плотное подмножество $\boldsymbol{R}^n$, $E \subset \boldsymbol{R}^n$ — множество единственности для класса $W^2_{\sigma, n}$, а алгебраическая разность $E - E$ является ε-сетью для F, причем выполнено условие $2([en]+1)\sigma\Gamma_{2([en]+1)\sigma}(F)\varepsilon < 1$. Тогда любая целая в $\boldsymbol{C}^n$ функция f конечной степени, меньшей σ, сужение которой на вещественную гиперплоскость E-эрмитово-позитивно, положительно определена на $\boldsymbol{R}^n$.*

Доказательство этой теоремы дословно повторяет доказательство предыдущей с единственным исключением: вместо теоремы B нужно сослаться на теорему C.

Следующие две теоремы вытекают из результатов о «медленном росте», полученных в работе [6].

Теорема 4. *Пусть измеримое множество $F \subset \boldsymbol{R}^n$ при некотором $\alpha > 0$ удовлетворяет условию $\int\limits_{CF} (\max\{\ln(x_1^2 + \ldots + x_n^2), 1\})^{\alpha/n} dx < \infty$, E — множество единственности для винеровского класса $W^2_{\sigma, n}$, для которого алгебраическая разность $E - E$ — плотное относительно F множество (это означает, что найдутся такие положительные постоянные L и δ, что лебегова мера пересечения $E - E$ с любым кубом $K(x, L)$, центр x которого лежит в F, не меньше, чем δ). Тогда любая целая в $\boldsymbol{C}^n$ функция f конечной степени, меньшей σ, сужение которой на вещественную гиперплоскость $\boldsymbol{R}^n$ Е-эрмитово-позитивно, положительно определена на $\boldsymbol{R}^n$.*

Теорема 5. *Пусть множество $F \subset \boldsymbol{R}^n$ такое же, как в предыдущей теореме, E — множество единственности для класса $W^2_{\sigma, n}$, а алгебраическая разность $E - E$ является ε-сетью для F, причем $4([en]+1)\sigma\varepsilon < 1$. Тогда любая целая в $\boldsymbol{C}^n$ функция f конечной степени, меньшей σ, сужение которой на вещественную гиперплоскость E-эрмитово-позитивно, положительно определена на $\boldsymbol{R}^n$.*

Теоремы 4 и 5 доказываются аналогично, приведем доказательство первой из них. Как и раньше, для любого вектора $x \in E - E$ выполняется неравенство $|f(x)| \leqslant f(0)$. Пусть $f \in [1, \sigma_1]_n$, где по условию теоремы $\sigma_1 < \sigma$. Согласно утверждению теоремы 4 работы [6] для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая конечная величина $C_\varepsilon = C(E, F, \sigma, \varepsilon)$, что оценка $|f(x)| \leqslant C_\varepsilon \exp\left\{\varepsilon\left(\ln^+ \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}\right)^{\alpha/n}\right\} f(0)$ выполняется для всех $x \in \boldsymbol{R}^n$. Мы используем эту оценку при $\varepsilon = 1$, записывая для простоты C вместо C_1. Найдется неквазианалитический класс $C\{m_k\} = \{\varphi(\tau) \in C^\infty(\boldsymbol{R})\colon \sup\{\sqrt[k]{|\varphi^{(k)}(\tau)|/m_k}\colon k \in \boldsymbol{N}, \tau \in \boldsymbol{R}\} < \infty$, $\sup\{|\varphi(t)|\colon \tau \in \mathbb{R}\} < \infty\}$, функция А. Островского $T(\rho) = \max\{\rho^k/m^k : k = 0, 1, \ldots\}$, $\rho \geqslant 0$, которого мажорирует на положительном луче функцию $\sqrt[n]{Cf(0)} \cdot \exp\{n \ln^+ \rho)^{(2+\alpha/n)}\}$. Как известно (см., например, [8]), любой неквазианалитический класс $C\{m_k\}$ содержит ненулевую неотрицательную функцию $\psi_0(\tau)$ с компактным носителем. Не ограничивая общности, можно считать, что $\operatorname{supp} \psi_0 \subset [-\eta, \eta]$, где $\sigma_1 + \eta \leqslant \sigma$, и $\int_{-\eta}^{\eta} \psi_0(\tau)\, d\tau = 1$. Пусть $\psi(t) = \Pi_{j=1}^n \psi_0(t_j)$, $t \in \boldsymbol{R}^n$. Преобразование Фурье $\hat{\psi}(z)$ этой функции — целая в $\boldsymbol{C}^n$ функция из класса $[1, \eta]_n$, а $\hat{\psi}|_{\mathbb{R}_n}$ — положительно определенная функция. Интегрированием по частям в формуле, связывающей $\hat{\psi}(z)$ и $\psi(t)$, легко получить оценку скорости убывания функции $\psi(x)$ при $x_1^2 + \ldots + x_n^2 \to \infty$ через скорость роста функции $T(|x_1|) \ldots T(|x_n|)$. Из этой оценки следует, что сужения на $\boldsymbol{R}^n$ семейства целых функций $\{f_\omega(z) = f(z)\psi(\omega z)\colon 0 < \omega \leqslant 1\} \subset [1, \sigma]_n$ E-эрмитово-позитивны и лежат в пространстве $L^1(\boldsymbol{R}^n) \cap L^2(\boldsymbol{R}^n)$. Так как $f_\omega(z) \to f(z)$ при $\omega \to 0$ равномерно на каждом компакте в $\boldsymbol{C}^n$, то для доказательства положительной определенности функции $f(x)$ достаточно проверить, что положительно определены функции $f_\omega(x)$, $0 < \omega \leqslant 1$, а такую проверку мы уже осуществили, доказывая теорему 2.

Список литературы: 1. *Plancherel M., Polya G.* Fonctions entiéres et intégrale de Fourier multiples // Comm. Math. Helv. 1937—1938. **10**. P. 110—163. 2. *Cartwright M. L.* On certain integral functions of order One // Quart. Journal of Math. Oxf. ser. 1936. **7**. P. 46—55. 3. *Boas R. P.* Entire functions bounded on a line // Duke Math. Journal. 1940. **6**, N 3. P. 148—186. 4. *Левин Б. Я.* О функциях конечной степени, ограниченных на последовательности точек // Докл. АН СССР. 1949. **65**, № 3. С. 265—268. 5. *Логвиненко В. Н.* Об одном многомерном обобщении теоремы М. Картрайт // Докл. АН СССР. 1974. **219**, № 3. С. 546—549. 6. *Логвиненко В. Н.* Условия ограниченности и условия медленного роста на вещественной гиперплоскости целых функций экспоненциального типа // Сиб. мат. журн. 1988. **29**, № 4. С. 126—138. 7. *Ахиезер Н. И.* Лекции об интегральных преобразованиях. Х., 1984. 120 с. 8. *Мандельбройт С.* Квазианалитические классы функций. М.; Л., 1937. 107 с.

Поступила в редколлегию 17.03.90