Кільця — перші поняття в задачах
Лекції для студентів ММФ ХНУ.

Курінний Г.Ч. Невмержицька О.М. Щугайло О.М

Травень — 2015

Зміст

1 Означення кільця

Визначення 1.1 *Кільцем називають непорожню множину K, на якій визначено дві двомісні (бінарні) операції — додавання та множення так, що виконуються наступні аксіоми:*

1. *відносно додавання кільце є комутативною групою, тобто*

(a) додавання асоціативне:

$$\forall a, b, c \in K \quad (a+b)+c = a+(b+c);$$

(b) додавання комутативне:

$$\forall a, b \in K \quad a+b = b+a;$$

(c) існує 0:

$$\forall a \in K \quad a+0 = 0+a = a;$$

(d) у кожного елемента існує протилежний

$$\forall a \exists b \in K \quad a+b = b+a = 0;$$

. (протилежний до $a \in K$ елемент позначають $-a$.)

2. *відносно множення кільце є напівгрупою, тобто*

   (a) множення асоціативне

$$\forall a, b, c \in K \quad (ab)c = a(bc);$$

3. *між собою додавання та множення зв'язаны двома (лвим та правим) дистрибутивними законами*

   (a) $\forall a, b, c \in K \quad a(b+c) = ab+ac;$

   (b) $\forall a, b, c \in K \quad (a+b)c = ac+bc.$

Якщо в кільці K є ткий елемент $1 \in K$, що $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ для будь-якого елемента $a \in K$ то таке кільце називають кільцем з одиницею.

Якщо в кільці множення комутативне, то таке кільце називають комутативним.

2 Задачі і вправи, що стосуються означення кільця

1. Скільки впорядкованихх пар бінарних операцій існує на двоелементній множині?

2. Скількома способами можна на двоелементній множині визначити дві бінарні операції "додавання" та " множення" так, щоб одержати кільце?

3. Скількома способами на множині $\{a, b, c\}$ можна визначити операції додавання та множення так, щоб множина $\{a, b, c\}$ разом з цими операціями утворювала ккільце і нулем в цьому кільці був елемент a?

4. Показати, що якщо K — кільце і $x, y, 0 \in K$, то

$$0x = x0 = 0, \qquad (-x)y = x(-y) = -xy, \qquad (-x)(-y) = xy.$$

5. Показати, що якщо K — кільце і $x, y, z \in K$, то

$$(x - y)z = xz - yz = 0.$$

6. Нехай K кільце і $n \in \mathbb{Z}$. для $a \in K$ визначимо $na \in K$ наступним чином:

$$na = \begin{cases} \overbrace{a + a + \ldots + a}^{n}, & \text{якщо } n \geq 1; \\ 0, & \text{якщо } n = 0; \\ \underbrace{-a - a - \ldots - a}_{-n}, & \text{якщо } n \leq 1; \end{cases}$$

Довести, що для будь-яких $a, b \in K$

$$n(ab) = (na)b = a(nb).$$

7. Показати, що коли до аксіом кільця додати акссіому існування одиниці

$$\exists 1 \forall x \quad 1 \cdot x = x \cdot 1 = x,$$

то аксіма комутативності додавання випливає із решти аксіом.

8. Показати, що у визначенні кільця аксіома комутативності додавання не випливає із решти аксіом.

9. Нехай K — множина, на якій визначені операції додавання та множення, які задовольняють уві аксіоми, крім аксіоми комутитивності додавання. Показати, що коли в K існує елемент $c \in K$, на який можна скорочувати зліва, тобто

$$\forall a, b \in K \quad ca = cb \Rightarrow a = b,$$

то K є кільцем.

10. Показати, що у визначенні кільця аксіома існування протилежного елемента не виводиться із решти аксіом.

11. Показати, що у виначенні кільця

    (a) аксіома лівої дистрибутивності не виводиться із решти аксіом;
    (b) аксіома правої дистрибутивності не виводиться із решти аксіом

12. Чому множина $\mathbb{N}$ натуральних чисел із звичайними операціями додавання та множення не утворюють кільце?

13. Довести, що коли кільце K комутативне, то в ньому є істинною формула банома Ньютона, тобто

$$\forall a, b \in K \, \forall n \in \mathbb{N} \quad (a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^i b^{n-i}.$$

14. Яку найменшу кіількість елементів може мати некомутативне кільце?

15. Показати, що адитивне абелева група A з нульовим множенням, тобто

$$\forall a, b \in A \quad ab = 0,$$

утворює кільце. (Нагадеаємо, що група, в якій бінарна операція навана додаванням, називається адитивною, а комутативні групи також називаються абелевими).

16. Показати, що лінійні функції із $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$, тобто функції, які при деяких $a, b \in \mathbb{R}$ можуть бути заданими виразом $f(x) = a \cdot x + b$, з поелементним додаванням, тобто

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),$$

і з множенням, яке є суперпозицією відображень, тобто

$$(f \cdot g)(x) = f(g(x)),$$

не утворюють кільце.

17. Здійснити перевірку аксіом кільця в кільці класів лишків $\mathbb{Z}_k$ за модулем $k \in \mathbb{N}, \quad k \geq 2$. Елементами цього кільця є числа $0, 1, 2, \ldots, k-1$ (можлливі ллшки при діленні натурального числа на k). Сума і довбуток цих лишків визначається як остача від ділення звичайної суми чи добутку н k.

18. Побудувати таблиці додавання та множення елементів кілець лишків за модулями 2,3,4.

19. Здійснити перевірку аксіом кільця в кільці комплексних чисел $\mathbb{C}$. Його елементами є вирази вигляду $a + b \cdot i$, де $a, b \in \mathbb{R}$, i — символ. Якщо $u = a + bi, v = c + di \in \mathbb{C}$, то

$$u + v = (a+c) + (b+d)i, \qquad u \cdot v = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

При доведенні можна користуватися властивостями дійсних чисел як уже відомими.

20. Здійснити перевірку аксіом кільця в кільці $\mathbb{H}$ кватерніонів. Його елементами є кватерніони,тобто вирази $a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k$, де i, j, k — символи, а

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Додавання та множення кватерніонів здійсюжть за правилом: якщо $u, v \in \mathbb{H}$, $\quad u = a_1 + b_1 \cdot i + c_1 \cdot j + d_1 \cdot k, v = a_2 + b_2 \cdot i + c_2 \cdot j + d_2 \cdot k$ то

$$u + v = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \cdot i + (c_1 + c_2) \cdot j + d \cdot k$$

і

$$u \cdot v = (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2) + (a_1b_2 + b_2a_1c_1d_2 - d_1c_2)i + \\ (a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2)j + (a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2)k.$$

21. Здійснити перевірку аксіом кільця в кільці $\mathfrak{B}(M)$ всіх підмножин множини M. Додаванням в цьому кільці є симетрична різниця, а множенням — перетин підмножин, тобто, коли $A, B \subseteq M$, то

$$A + B = (A \setminus B) \cap (B \setminus A), \qquad A \cdot B = A \cap B.$$

22. Пояснити, чому кільце $\mathfrak{B}(M)$ (див. попередню вправу) має комутативне множення, тобто кільце комутативне.

23. З'сувати, скінченним чи нескінченним є кільце $\mathfrak{B}(M)$, якщо множина M скінченна.

24. Здійснити перевірку аксіом кільця в кільці $\mathrm{End}A$ ендоморфізмів адитивної абелевої групи A. Нагадаємо, що ендморфізмом адитивної абелевої групи A є відображення $f : A \to A$ такі, що

$$\forall a, b \in A \quad f(a + b) = f(a) + f(b); \qquad f(-a) = -f(a), \qquad f(0) = 0.$$

Додавання та множення ендоморфізмв визначається правилами

$$\forall x \in A \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (f \cdot g)(x) = f(g(x)).$$

25. Довести, що множення в кільці ендомофізмів адитивної групи цілих чисел комутативне.

26. Довести, що кільце ендоморфзмів прямого добутку двох циклічних груп одного порядку некомутативне.

27. Є Кільце K і група G/ Здійснити перевірку аксіом кільця в hegjdjve rskmws $K(G)$. Його елементами є формальні суми $\sum_{g \in G} a_g \cdot g$, де $a_g \in K$ для $g \in G$ і лише для скінченної сукупності доданків в цій сумі коефіцієнти a_g не дорівнюють нулю. Додавання та множення в цьому кільці визначється правилами: якщо $a, b \in K(g)$,

$$a = \sum_{g \in G} a_g \cdot g, \qquad b = \sum_{g \in G} b_g \cdot g,$$

то

$$a+b=\sum_{g\in G}(a_g+b_g)\cdot g, \qquad a\cdot b=\sum_{g\in G}\left(\sum_{g_1g_2=g}a_{g_1}\cdot b_{g_2}\right)\cdot g.$$

28. Здійснити перевірку аксіом кільця в кільці $M_n(K)$ квадратних матриць $n-$го порядку (розміру $n\times n$) над кільцем K. елементами цього кільця є квадратні таблиці (матриці) елементів кільця K, що мають n рядків і n стовпчиків. Додаються і множаться матриці наступним чином. Якщо $A, B, U, V \in M_n(K)$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n}\\ \dots & & & \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn}\end{pmatrix},$$

$$U=\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n}\\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2n}\\ \dots & & & \\ u_{n1} & u_{n2} & \dots & u_{nn}\end{pmatrix}, V=\begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1n}\\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2n}\\ \dots & & & \\ v_{n1} & v_{n2} & \dots & v_{nn}\end{pmatrix},$$

то для $1\le i,j\le n$

$$u_{ij}=a_{ij}+b_{ij}, \qquad v_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}.$$

29. Скільки елементів містить кільце $M_2(\mathbb{Z}_2)$?

30. З'ясувати, скнченним чи нескінченним є кільце $M_n(K)$ у випадку, коли кільце скінченне.

31. Навести приклад такого кільця K, що кільце $M_2(K)$ комутативне.

32. Здійснити перевірку аксіом кільця в кільці $M_\infty(K)$ нескінченних матриць над кільцем K із скінченною кількістю ненулових елементів в кожному рядку. Елементами цього кільця є таблиці (матриці) елементів кільця K, що мають нескінченну кількість рядків і нескінченну кількість стовпчиків, але в кожному рядку лише скінченна кількість ненульових елементів. Додаються і множаться матриці як і звичайні матриці: якщо $A, B, U, V \in M_\infty(K)$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & \dots\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & \dots\\ \dots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & \dots\\ \dots & & & & \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} & \dots\\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} & \dots\\ \dots & & & & \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} & \dots\\ \dots & & & & \end{pmatrix},$$

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} & \dots \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2n} & \dots \\ \dots & & & & \\ u_{n1} & u_{n2} & \dots & u_{nn} & \dots \\ & \dots & & & \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1n} & \dots \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2n} & \dots \\ \dots & & & & \\ v_{n1} & v_{n2} & \dots & v_{nn} & \dots \\ \dots & & & & \end{pmatrix},$$

то для $1 \le i, j < \infty$

$$u_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \qquad v_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} b_{kj}.$$

33. Показати, що в кільці нескінченних матриць із скінченною кількістю ненульових елементів в кожному рядку існує одиниці — нейтралний елемент відносно множення.

34. Здійснити перевірку аксіом кільця в кільці $M_\infty(K)$ нескінченних матриць над кільцем K із скінченною кількістю ненулових елементів в кожному стовпчику. Елементами цього кільця є таблиці (матриці) елементів кільця K, що мають нескінченну кількість рядків і нескінченну кількість стовпчиків, але в кожному стовпчику лише скінченна кількість ненульових елементів. Додаються і множаться матриці як і матриці в прикладі 32:

35. Здійснити перевірку аксіом кільця в прямому добутку кілець $K = K_1 \times K_2$, (K_1, K_2 — деякі кільця). Елементами кільця K є впорядковані пари (a, b) такі, що $a \in K_1, b \in K_2$. Додавання та множення таких пар здійснюється згідно з правилами

    $$\forall a, c \in K_1, \quad b, d \in K_2 \quad (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d), \quad (a, b) \cdot (c, d) = (ac, bd).$$

36. Довести, що прямий добуток комутатвних кілець комутативний.

37. З'ясувати, чи є скінченним кільце $K_1 \times K_2$ у випадку, коли кільця K_1, K_2 скінченні.

38. Нехай K — комутативне кільце і $X \subset K$ така підмножина в K, що

    $$x, y \in X \Rightarrow x \cdot y \in X;$$

    $$x \in X, y \in K, y \neq 0 \Rightarrow x \cdot y \neq 0.$$

    Введемо на $K \times X$ відношення еквівалентності $\sim$, вважаючи

    $$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = bc.$$

    Нехай A, B — два класи еквівалентності і $(a, b) \in A, (c, d) \in B$. Сумою $A + B$ класів будемо називати клас, що містить $(ad+bc, bd)$, а добутком $A \cdot B$ назвемо клас, який містить (ac, bd).

(a) Перевірити рефлексивність, симетричність і транзитивність відношення $\sim$.

(b) Показати, що операції додавання та множення класів визначчені коректно.

(c) Показати, що сукупність класів разом із введении операціями додавання та множення класів утворюють кільце.

Введене кльце називають кільцем дробів із знаменниками із X. Клас, який містить $(a,b) \in K \times X$, позначають $\frac{a}{b}$.

39. Прямим добутком

$$\prod_{i \in I} K_i$$

сім'ї кілець $K_i, \quad inI$ називають множину відображень

$$f : I \to \cup_{i \in I}$$

таких, що для $i \in I$ завжди $f(i) \in K_i$, разом з так званими "поточечними" операціями додавання та множення, тобто

$$i \in I, \quad f,g : I \to \cup_{i \in I} K_i \Rightarrow (f+g)(i) = f(i)g(i), \quad (fg)(i) = f(i)g(i)$$

Превірити виконання аксіом кільця для прямого добутку кілець.

40. Нехай K — довільне кльце і X — довільна непорожня множина. Через K^X позначають кільце функцій із X в K. Його елементами є відображення

$$f : X \to K,$$

а операції додавання та множення "поточечні",тобто

$$x \in X, \quad f,g : X \to K \Rightarrow (f+g)(x) = f(x)g(x), \quad (fg)(x) = f(x)g(x).$$

Перевірити виконання аксіом кільця для K^X.

41. Нехай K — кільце з операцією додавання $+$ і операцією множення $\cdot$. Побудуємо нове двоїсте (чи дуальне) до K кільце K^*. Множини елементів у заданого кільця і у двоїстого збігаються. Також збігаються операції додавання в цих кільцях. А операція множення $\odot$ в двоїстому кільці визначається таким чином: для $a, b \in K$

$$a \odot b = c \Leftrightarrow b \cdot a = c.$$

Перевірити, що множина K^* із так введеними операціями додавання та множення утворює кільце.

42. Нехай M — множина, K — кільце і $f : M \to K$ — бієкція. Визначимо на M операції додавання та множення наступним чином: для $a, b \in M$
$$a + b = f^{-1}(f(a) + f(b)), \qquad a \cdot b = f^{-1}(f(a) \cdot f(b)).$$
Перевірити, що множина M із так введеними операціями додавання та множення утворює кільце.

43. Нехай K — кільце з одиницею 1, операцією додавання $+$ і операцією множення $\cdot$. Введемо на K нові операції додавання $\oplus$ і множення $\odot$ правилами: для $a, b \in K$
$$a \oplus b = a + b - 1, \qquad a \odot b = a + b - ab.$$
Показати, що K із так введеними операціями є кільцем з одиницею.

44. Нехай K — кільце і $e \notin K$. Побудуємо кільце K_e — так зване кільце із зовнішнь приєднаною одиницею. Його елементами є вирази вигляду $a + ne$, де $a \in K, n \in \mathbb{Z}$. Додавання та множення таких виразів здійснюється згідно з правилами: якщо $a, b \in K$, $m.n \in \mathbb{Z}$, то
$$(a + ne) + (b + me) = (a + b) + (m + n)e,$$
$$(a + ne) \cdot (b + me) = (ab + ma + nb) + (mn)e.$$
Перевірити, що кільце із зовнішньо приєднаною одиницею дійсно є кільцем.

45. З'ясувати скнченним чи не скінченнм є кільце K_e із зовнішньо приєднаною одиницею, якщо початкове кільце K скінченне.

46. Здійснити перевірку аксіом кільця в кільці $K[[x]]$ формальних степеневих рядів над заданим кільцем K.

Елементами $K[[x]]$ є формальні степенев ряди, тобто вирази вигляду
$$a_0 + a_1x + a_2x_2 + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i, \qquad a_i \in K \text{ якщо } i = 0, 1, 2, 3, \ldots$$
Додавання та множення рядів здійснюється згідно з правилами: якщо
$$A = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i, \qquad B = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i,$$
і
$$A + B = C = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i, \qquad A \cdot B = D = \sum_{i=0}^{\infty} d_i x^i,$$
то для $i = 0, 1, 2, \ldots$
$$c_i = a_i + b_i, \qquad d_i = \sum_{p+q=i} a_p b_q.$$

47. Перевірити, що кільце фомальних степеневих рядів над комутативним кільцем з одиницею є комутативним кільцем з одиницею.

48. З'ясувати, скінченним чи нескінченним є кільце $\mathbb{Z}_2[[x]]$.

49. Здійснити перевірку аксіом кільця в кільці формальних степеневих рядів Лорана над заданим кільцем K. Елементами цього кільця є формальні степенев ряди вигляду

$$a_0 + a_1x + a_2x_2 + \ldots = \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_ix^i, \qquad a_i \in K \text{ якщо } i = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

в яких серед коефіцієнтів a_i є лише сккінченна кільксість ненульових. Додавання та множення рядів Лорана здійснюється за тимми ж формулами, що і звичайні степеневі ряди.

50. Нехай K — кільце з одиницею, $x \in K$ і є відобаження $K \to K$, що ставить у відповідність кожному елементу $a \in K$ елемент $a' \in K$, причому це відображення має властивості

$$(a + b)' = a' + b', \qquad (ab)' = a'b + b'a$$

(таке відображення називається диференціюванням в кільці K). Елементами кільця $K[x,']$ диференціальних многочленів з коефіцієнтами із K є формальні суми

$$a_0 + a_1x + a_2x_2 + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} a_ix^i, \qquad a_i \in K \text{ якщо } i = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

в яких лише скінченна кількість доданків не дорівнюють нулю (так звані диференціальні многочлени).

Операції додавання та множення диференціальних многочленів визначаються правилами: якщо

$$A = \sum_{i=0}^{\infty} a_ix^i, \qquad B = \sum_{i=0}^{\infty} b_ix^i,$$

і

$$A + B = C = \sum_{i=0}^{\infty} c_ix^i, \qquad A \cdot B = D = \sum_{i=0}^{\infty} d_ix^i,$$

то для $i = 0, 1, 2, \ldots$

$$c_i = a_i + b_i, \qquad d_i = \sum_{p+q-m=i} C_q^m a_p b_q^{(m)}, \quad (a^{(0)} = a, a^{(1)} = a', \ldots, a^{(m)} = (a^{(m-1)})').$$

51. Нехй $p \geq 2$ просте число і M множина таких послідовностей $x = (x_0, x_1, x_2, \dots)$ цілих чисел, що при кожному $k \geq 0$ число $x_{k+1} - x_k$ ділиться на p^{k+1}. Введемо на M бінарне відношення $\sim$ вважаючи, що

$$x = (x_0, x_1, x_2, \dots) \sim y = (y_0, y_1, y_2, \dots)$$

в тому і тільки тому разі, коли для будь-якого $k = 0, 1, 2, \dots$ число $x_k - y_k$ ділиться на p^{k+1}.

Введене бінарне відношення $\sim$ є відношенням еквівалентності. Отже це відношення розбиває M на класи еквівалентності, які називають $p-$адичими числами. Визначимо операції додавання та множення класів правилами: якщо A, B — два класи (два $p-$адичні числа і

сумнів щодо еквівалентності

$$x = (x_0, x_1, x_2, \dots) \in A, \quad y = (y_0, y_1, y_2, \dots) \in B,$$

то сумою $A+B$ буде клас, якому належить послідовність $x+y = (x_0+y_0, x_1+y_1, x_2+y_2, \dots)$, а добутком AB буде клас, якому належить послідовність $x \cdot y = (x_0 y_0, x_1 y_1, x_2 y_2, \dots)$.

3 Означення підкільця

Визначення 3.1 *Нехай на множині L задані операції додавання $\oplus$ і мнження $\odot$, разом з якими L утворює кільце,і на множині K задані операції додавання $+$ і мнження $\cdot$, разом з якими K утворює кільце. Кльце L називаєтьса підкільцем кільця K, якщо виконуютьса наступні умови:*

1. *$L \subseteq K$;*
2. *0 кільця K і 0 кільця L збігаютьса ;*
3. *Для кожного елемента $a \in L$ протилежний елемент $-a$ в кільці L і протилежний елемент $-a$ в кільці L збігаютьса;*
4. *$\forall a, b \in L \quad a + b = a \oplus b$;*
5. *$\forall a, b \in L \quad a \cdot b = a \oplus b$.*

Із означення підкільця випливає, що для перевірки того, що $L \subseteq K$ є підкільцем кільця K з операціями додавання $+$, множення $\cdot$, нулем 0 та протилежним $-x$ для $x \in K$ потрібно переконатись, що

1. $0 \in L$ (наявність нуля);
2. $\forall a, b \in L \quad a + b \in L$ (замкненість підмножини L відносно додавання);
3. $\forall a, b \in L \quad a \cdot b \in L$ (замкненість підмножини L відносно множення);

4. $\forall a \in L \quad -a \in L$ (наявність у кожного елемента із L протилежного);

Три перевірки — наявність нуля, наявність протилежного та замкненість відносно додавання можна замінити однією перевіркою:

- $\forall a, b \in L \quad a - b \in L$ (замкненість підмножини L відносно віднімання);

Визначення 3.2 *Підкільце, що збігається із усім кільцем, і кільце, о складається лише із нуля (нульове підкільце), називають тривіальними підкільцями. Решта підкілець називають нетривіальними.*

4 Задачі і вправи, що стосуються підкілець

52. Показати, що непорожня підмножина L кільця K буде підкільцем кільця K тоді і тільки тоді, коли підмножина L замкнена відносно віднімання та відносно множення в K, тобто для будь-яких $x, y \in L$

$$x - y \in L, \qquad xy \in L.$$

В наступних вправах 53 — 118 потрібно з'ясувати, чи буде підмножина $K_1 \subseteq K$ підкільцем кільця K

53. $K_1 = m\mathbb{Z} = \{0, \pm m, \pm 2m, \pm 3m, \ldots\}, \qquad K = \mathbb{Z}, \qquad m \in \mathbb{N}.$
54. $K_1 = m\mathbb{Z}, \quad K = n\mathbb{Z}$, m — дільник n.
55. $K_1 - \mathbb{Z}(i) = \{a + bi | a, b \in \mathbb{Z}\}, \qquad K = \mathbb{C}.$
56. $K_1 = \mathbb{Z}(i\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3}i | a, b \in \mathbb{Z}\}, \qquad K = \mathbb{C}.$
57. $K_1 = \mathbb{Z}(i\sqrt{5}) = \{a + b\sqrt{5}i | a, b \in \mathbb{Z}\}, \qquad K = \mathbb{C}.$
58. $K_1 = \mathbb{Q}(i\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2}i | a, b \in \mathbb{Q}\}, \qquad K = \mathbb{C}.$
59. $K_1 = \mathbb{Q}(i\sqrt[3]{2}) = \{a + b\sqrt[3]{2}i | a, b \in \mathbb{Q}\}, \qquad K = \mathbb{C}.$
60. $K_1 = \left\{\frac{m}{2n} | m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\right\}, \qquad K = \mathbb{Q}.$ сумнівний приклад
61. $K_1 = \left\{\frac{m}{2n+1} | m, n \in \mathbb{Z}, \right\}, \qquad K = \mathbb{Q}.$
62. $K_1 = \left\{\frac{2m+1}{n} | m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\right\}, \qquad K = \mathbb{Q}.$
63. $K_1 = \mathbb{Z}_n, \qquad K = \mathbb{Z}.$
64. $K_1 = \mathbb{Z}_5, \qquad K = \mathbb{Z}_6.$

65. $K_1 = \{0, 3\}, \qquad K = \mathbb{Z}_6$.

66. $K_1 = \mathbb{Z}_6, \qquad K = \mathbb{Z}_{12}$.

67. $K_1 = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}, \qquad K = \mathbb{Z}_{12}$.

68. $K_1 = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}, \qquad K = \mathbb{Z}_{12}$.

69. $K = \mathfrak{B}(M), \qquad K_1$ — сукупність скінченних підмножин множини M.

70. $K = \mathfrak{B}(M), \qquad K_1$ — сукупність підмножин множини M, що містять заданий елемент $a \in M$.

71. $K = \mathfrak{B}(M), \qquad K_1$ — сукупність підмножин множини M, що не містять заданий елемент $a \in M$..

72. $K = \mathfrak{B}(M), \quad K_1 = \mathfrak{B}(M_1), \qquad M_1 \subseteq M$.

73. K — адитивна абелева група з нульовим множенням, K_1 підгрупа цієї групи.

74. $K = \operatorname{End} A, \qquad K_1 = \{f \in \operatorname{End} A | f(A) \subseteq B\}$. Тут A — адитивне абелева група, B — її підгрупа.

75. $K = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $K_1 = \mathbb{R}\langle x \rangle$ — множина функцій із $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$, які при деяких $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad a_0, a_1, \ldots a_n$ можуть бути задані виразом

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n.$$

76. $K = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, K_1 — множина функцій із $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$, які при деяких $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad a_k, b_k \in \mathbb{R}, \quad 0 \le k \le n$ можуть бути задані виразом

$$f(x) = \sum_{0 \le k \le n} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right).$$

77. $K = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, K_1 — множина парних функцій із $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$

78. $K = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, K_1 — множина функцій із $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$, , які при деяких $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad a_k \in \mathbb{R}, \quad 0 \le k \le n$ можуть бути задані виразом

$$f(x) = \sum_{0 \le k \le n} a_k \cos kx.$$

79. $K = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, K_1 — множина непарних функцій із $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$

80. $K = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, K_1 — множина функцій із $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$, які при деяких $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad a_k \in \mathbb{R}, \quad 0 \le k \le n$ можуть бути задані виразом

$$f(x) = \sum_{0 \le k \le n} a_k \sin kx.$$

81. $K = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, K_1 — множина функцій із $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$, яі приймають знчення 0 в точці 0.

82. $K = \mathbb{R}\langle x \rangle$, K_1 — множина многочленв з дійсними коейіцієнтам, що діляться на $x - 1$.

83. $K = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, K_1 — множина многочленів з цілими коефіцієнтами і парним вільним членом.

84. $K = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, K_1 — множина многочленів з цілими коефіцієнтами і парним старшим членом.

85. $K = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, K_1 — множина диференційовних функцій із $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$.

86. $K = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, K_1 — множина таких диференційовних функцій f із $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$, що $f'(0) = 0$.

87. $K = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, K_1 — множина функцій із $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$, що приймають значення 1 в точці 0.

88. $K = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, K_1 — множина таких диференційовних функцій із $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$, що $f'(0) = 1$.

89. $K = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, K_1 — множина функцій із $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$, що прямують до нуля, коли змінна прямує до нескінченності.

90. $K = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, K_1 — множина інтегровних на всій прямій функцій із $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$.

91. $K = \mathbb{R}[[x]]$, K_1 — множина рядів із скінченною кількістю ненульових доданків (K_1 називають кільцем формальних многочленів над полем дійсних чисел і позначають $\mathbb{R}[x]$

92. $K = \mathbb{R}[[x]]$, K_1 — множина рядів із ненульовим радіусом збіжності.

93. $K = \mathbb{R}[[x]]$, K_1 — множина рядів із нульовими коефіцієнтами при непарних степенях.

94. $K = \mathbb{R}[[x]]$, K_1 — множина рядів із нульовими коефіцціентами при парних степенях.

95. $K = \mathbb{R}[[x]]$, K_1 — множина рядів,у яких перші n коефіцціентв дорівнюють нулю ($n = 0, 1, 2, \ldots$ — фіксоване чило).

96. $K = \mathbb{R}[[x]]$, K_1 — множина рядів, що задовольняють лінійним рекурентним співвідношенням, тобто ряди

$$a = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \qquad a_k \in \mathbb{R}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

для яких існують $m \geq 1$, і числа $u_1, u_2, \ldots, u_m$ такі, що

$$a_n + u_1 a_{n-1} + u_2 a_{n-2} + \ldots + u_m a_{n-m} = 0$$

для всіх $n = m, m+1, m+2, \ldots$

97. $K = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, K_1 — множина функцщій, що приймають значння 0 за мжами певного відрізка.

98. $K = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, K_1 — множина функцщій, що приймають значння 0 у скінченній множині точок.

99. $K = M_2(\mathbb{R})$ — кільце квадратних матриць розміру 2 на 2 над полем дійсних чисел, $K_1 = M_2(\mathbb{Z})$.

100. $K = M_2(\mathbb{R})$,
$$K_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} | a \in \mathbb{R} \right\}.$$

101. $K = M_2(\mathbb{R})$,
$$K_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

102. $K = M_2(\mathbb{R})$,
$$K_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

103. $K = M_2(\mathbb{R})$,
$$K_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} | a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad a + c = b + d \right\}.$$

104. $K = M_n(\mathbb{R})$ — кільце квадратних матриць розміру n на n над полем дійсних чисел, K_1 — множина тих матриць із K, які мають нульовий i−й рядок ($i, 1 \leq i \leq n$ — фіксоване число).

105. $K = M_n(\mathbb{R})$ — кільце квадратних матриць розміру n на n над полем дійсних чисел, K_1 — множина тих матриць із K, які мають нульовий i−й стовпчик ($i, 1 \leq i \leq n$ — фіксоване число).

106. $K = M_2(\mathbb{R})$,
$$K_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 3a & b \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

107. $K = M_2(\mathbb{C})$,
$$K_1 = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\overline{z}_1 & -z_2 \end{pmatrix} | z_1, z_2 \in \mathbb{C} \right\}.$$

108. $K = M_4(\mathbb{R})$,

$$K_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix} |a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

109. $K = M_n(\mathbb{R})$, K_1 — сукупність верхньо-трикутних матриць із дійсними елементамию

110. $K = M_n(\mathbb{R})$, K_1 — сукупність нижньо-трикутних матриць із дійсними елементамию

111. $K = M_n(\mathbb{R})$, K_1 — сукупність матриць із цілими елементами, що мають нульовий визначник.

112. K — кільце нескінченних матриць із скінченною кількістю ненульових елементів у кожному стовпчику. K_1 — підмножина, що складається із матриць із скінченною кількістю ненульових рядків.

113. K — кільце нескінченних матриць із скінченною кількістю ненульових елементів у кожному рядку. K_1 — підмножина, що складається із матриць із скінченною кількістю ненульових стовпчиків.

114. K — кільце нескінченних матриць із скінченною кількістю ненульових елементів у кожному рядку. K_1 — підмножина, що складається із матриць із скінченною кількістю ненульових елементів.

115. $K = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $\qquad K_1 = \{(a, a) | a \in \mathbb{Z}\}$.

116. $K = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $\qquad K_1 = \{(2k, 2n), (2k + 1, 2n + 1) | k, n \in \mathbb{Z}\}$.

117. Позначимо p — деяке просте число.

$$K = \prod_{n=1,2,3,\ldots} \mathbb{Z}_{p^n},$$

$K_1 \subseteq K$ складається із тих вдображень $f : \mathbb{N} \to \cup_{n=1,2,3,\ldots} \mathbb{Z}_{p^n}$, що задовольняють умову: $f(n + 1) - f(n)$ ділиться на p^n для будь-якого $n = 1, 2, \ldots$.

118. Перевірити, що підкільце кільця $M_2(\mathbb{Z})$, що містить матриці

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

збігається із усім кільцем $M_2(\mathbb{Z})$.

119. Нехай K — комутативне кільце з одиницею. Розглянемо множину $K\langle x\rangle =$ функцій f із K в K, обчислення яких можна проводити за формулою

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n,$$

при деяких $n = 0, 1, 2, \ldots$ і $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in K$. Перевірити, що $K\langle x\rangle =$ є підкільцем кільця всіх функцій із K в K — це кільце називають кільцем многочленів із коефіцієнтами із K в K або кільцем поліномальних функцій,, щоб відрізнити від кільця формальних многочленів.

120. Нехай K кільце і $X \subseteq K$. Перевірити, що множина

$$K_1 = \{a \in K | ax = xa \text{ для всіх } x \in X\}$$

є підкільцем кільця K, його називають централізатором підмножини X.

121. Нехай K — кільце і $a \in K$. Перевірити, що кожна із множин

(a) $aK = \{ax | x \in K\}$;

(b) $Ka = \{xa | x \in K\}$;

(c) $aKa = \{axa | x \in K\}$,

є підкільцем кільця K.

122. Нехай K — кільце і K_1, K_2 — його підкільця. Показати, що $K_1 \cup K_2$ є підкільцем кільця K в тому і тільки тому випадку, коли або $K_1 \subseteq K_2$, або $K_2 \subseteq K_1$.

123. Показати, що сума

$$K_1 + K_2 = \{x + y | x \in K_1, y \in K_2\}$$

підкілець $K_1, K_2 \subseteq K$ не обов'язково є кідкільцем в K.

124. Нехай $K_i \quad (i \in I)$ певна сукупність підкілець кільця K. Показати, що

$$\bigcap_{i \in I} K_i$$

є підкільцем кільця K.

125. Показати, що матриці вигляду

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_n \end{pmatrix} \qquad (a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R})$$

(так звані діагональні матриці) утворюють підкільце кільця $M_n(\mathbb{R})$.

5 Елементи кільця, що мають спеціальні властивості, і кільця, що мають елементи із сеціальними властивостями.

Визначення 5.1 *Нехай K кільце з одиницею 1. Елемент $a \in K$ називаеться*

- *оборотним справа (відповдно, зліва), якщо існує $x \in K$ такий, що $ax = 1$ (відповідно, $xa = 1$);*
- *правим (відповідно, лвим) дільником нуля, якщо для деякого елемента $x \in K$ виконуетья рівність $xa = 0$ (відповідно, $ax = 0$);*
- *дільником нуля, якщо він є або правим або лівим дільником нуля;*
- *центральним, якщо для будь-якого $x \in K$ виконуеться рівність $ax = xa$;*
- *ідемпотентом (або ідемпотентним елементом), якщо $a^2 = a$;*
- *нільпотентом (або нільпотентним елементом), якщо $a^n = 0$ для деякого $n \in \mathbb{N}$;*
- *нерозкладним, якщо $a \neq 0$ і в будь-якому розкладенні в добуток двох множників $a = xy$ один із множинків x, y оборотний.*

Визначення 5.2 *Ненульове кільце з одиницею називаеться*

- *тілом, якщо в ньому всі ненульові елементи оборотні;*
- *полем, якщо воно є комутативним тілом;*
- *областю цілісності, якщо воно комутативне і в ньому немає дільників нуля;*
- *булевим. якщо вньому всі елементи є ідемпотентами.*

Визначення 5.3 *Область цілісності K називаеться факторіальним кільцем (або кільцем з однозначним розкладенням на нерозкладні множники), якщо в K кожен неооротний елемент мае однозначне розкладення в добуток нерозкладних множинів. Це означає, що коли $a \in K$ ненульовий необоротний елемент, то існують нерозкладні елементи $p_1, p_2, \ldots, p_n$ $n \in \mathbb{N}$ і обортний елемент $u \in K$ такі, що*

$$a = u \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n.$$

Крім того, якщо є два такі рзкладення

$$a = u \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n = v \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_m,$$

в яких u, v — оборотні елементи, а $p_1, p_2, \ldots, p_n, q_1, q_2, \ldots, q_m$ — нерозкладні, то $m = n$ і зміною нумерації нерозкладних елементів можна досягти того, що

$$p_k = u_k \cdot q_k, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

для деяких оборотних елементів $u_1, u_2, \ldots$

6 Задачі і вправи, що стосуються кілець із спеціальними елементами.

126. Перевірити, що коли $a \in K$ оборотний елемент, то $-a$ і a^{-1} також оборотні елементи, до того ж
$$(a^{-1})^{-1} = a, \qquad (-a)^{-1} = -(a^{-1}).$$

127. Перевірити, що коли $a, b \in K$ оборотні елементи, то a також є оборотним елементом, і
$$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}.$$

128. Знайти оборотні елементи кілець
$$\mathbb{Z}; \qquad \mathbb{Z}_n; \qquad M_2(\mathbb{Z}); \qquad \mathbb{R}[x]$$
і кільця $\mathrm{End}\, A$, де A — абелева група.

129. Нехай K — комутативне кільце з одиницею і
$$f = \sum_{k=0,1,2,\ldots} a_k x^k \in K[[x]].$$
Показати, що ряд f оборотний в кільці $K[[x]]$ тоді і тільки тоді, коли елемент a_0 оборотний в кільці K

130. Знайти умову оборотності цілого $p-$адичного числа (див. вправу 51).

131. Перевірити, що квадратна матриця з коефіцієнтами із комуттативного кільця з одиницею оборотна тоді і тільки тоді, коли оборотним є виначник цієї матриці.

132. Перевірити, що матриця із кільця $M_n(\mathbb{Z})$ оборотна тоді і тільки тоді, коли визначник цієї матриці дорівнює $+1$ або -1.

133. Перевірити, що матриця із кільця $M_n(\mathbb{R}[x])$ оборотна тоді і тільки тоді, коли визначник цієї матриці є формальним многочленом нульового степеня, тобто числом.

134. Нехай A — прямий добуток циклічних груп одного і того ж порядку. Показати, що в кільці ендоморфізмів цієї групи є оборотні справа але не оборотні зліва елементи, і є елементи, які оборотні зліва, але не оборотні справа.

135. Показати, що коли в кільці K є ждиний елемент $e \in K$ такий, що $ex = x$ для кожного елемента $x \in K$, то e — одиниця кільця K.

136. Нехай K — кільце з одиницею і елементи $x, y \in K$ такі, що $xy = 1$ і $yx \neq 1$. Перевірити, що

   (a) $y^m x^m \neq 1$ для $m = 1, 2, 3, \ldots$;

   (b) $y^m x^m \neq y^n x^n$ для $m, n = 1, 2, 3, \ldots, \quad m \neq n$.

137. Нехай x — оборотний справа елемент кільця. Перевірити, що наступні умови рівносильні

   (a) x має більш ніжодин правий обернений;

   (b) x не оборотний (оберненого не має);

   (c) x — лівий дільник нуля.

138. Показати, що оборотні елементи кільця з одиницею утворюють групу відносно множення.

139. Знайти кільце, група оборотний елементів в якому ізоморфна групі

$$\mathbb{Z}_2; \qquad \{1\}; \qquad \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

140. Показати, що комплексні числа утворююь поле.

141. Показати, що кільце класів лишків за простим модулем утворюють поле.

142. Показати, що $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ полем.

143. Показати, що формальні ряди Лорана з коефіцієнтами із поля утворюють поле.

144. Показати, що скінченна область цілісності є полем.

145. Показати, що в скінченному полі F для буудь-якого $a \in F$ знйдеться ненульове натуральне число n таке, що $a^n = 1$.

146. Побудувати поле, що складається із чотирьох елементів.

147. Показати, що кватерніони утворюють тіло, але не утворюють поле.

148. Нехай є послідовність тіл, кожне з яких є підтілом наступного тіла. Довести, що об'єднання усіх тіл є тілом.

149. Показати, що в прмому добутку тіл для будь-якого елемента a знайдеться елемент b такий, що $aba = a$ і $bab = b$.

150. Перевірити, що кільце з одиницею буде тілом тоді і тільки тоді, коли для будь-якого елемента $x \neq 1$ знайдеться елемента y такий, що

$$x + y - xy = 0, \qquad y + x - yx = 0.$$

151. Показати, що дільник нуля не може бути оборотним елементом кільця. З цієї причини поле завжди є областю цілісності.

152. Показати, що функція із $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ є оборотним елементом тоді і тільки тоді, коли вона не є дільником нуля.

153. Показати, що елемент скінченного кільця з одиницею оборотний тоді і тільки тоді, коли він не є дільником нуля.

154. Знайти всі дільники нуля в кільці

$$\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}; \qquad \mathbb{Z}_{18}; \qquad \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

155. Знайти всі дільники нуля в кільці $K_1 \times K_2$, де K_1, K_2 — деякі кільця.

156. Перевірити, що в кільці нескінченних матриць із скінченною кількістю ненульових рядків всі матриці є дільниками нуля.

157. Показати, що в кільці $K \subseteq \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$, о складається із послідовностей, що мають скінченну кількість ненульових елементів, всі елементи є дільниками нуля.

158. Показати, що формальний многочлен

$$f(x) = \sum^{n} a_i x^i \in K[x]$$

з коефіцієнтам із ненульового комутативного кільця K є дільником нуля тоді і тільки тода, коли для дякого $b \in K$, $b \neq 0$ і для будь-якого $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ виконується рівність $a_i \cdot b = 0$.

159. Показати, що кільце формальних многочленів над обалстю цілісності є областю цілісності.

160. Показати, що кільце цілих $p-$адичних чисел є областю цілісності.

161. Знайти ідемпотенти кільця

$$\mathbb{Z}; \qquad \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}; \qquad \mathbb{Z}_{18}; \qquad \mathbb{Z}_{36}; \qquad \operatorname{End} A.$$

162. Показати, що кои $e-$ ідемпотент в кільці з одиницею, то $1 - e$ також є ідемпотентом.

163. Показати, що кожен відмінний від 1 ідемпотент кільця з одиницею є ідемпотентом.

164. Нехай A ненульова і не одинична матриця в кільці $M_2(K)$ над полем K. Показати, що A є ідемпотентом тоді і тільки тоді, коли для деякої оборотної матриці $T \in M_2(K)$ виконується рівність

$$A = T^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T.$$

165. Нехай K — кільце з одиницею 1 і G — кнченна група. Показати, що коли елемент $n \cdot 1$ оборотний в кільці K $(n = |G|)$, то елемент

$$(n \cdot 1)^{-1} \cdot \sum_{g \in G} g$$

є ідемпотентом в кільці $K(G)$.

А чи було групове кліьце?

166. Нехай K — кльце з одиницею і елементи $x, y \in K$ такі, що $xy = 1$, а $yx \neq 1$. Показати, що

   (a) елементи $y^2x^2, \quad yx - y^2x^2, \quad 1 - yx + x^2y^2$ є ідемпотентами;

   (b) в кіьці K для удь-якого натурального n можна вказати n ріних взаємно ортогональних ідемпотентів, тобто існуюють ідемпотенти $e_1, e_2, \ldots, e_n$ такі, що $e_i \cdot e_j = 0$ для будь-яких $i \neq j, \quad 1 \leq i, j \leq n$.

167. Скажемо, що ідемпотент e є нерозкладним, якщо в будь-якому представленні $e = f + g$ у вигляді двох переставних ідемпотенівт ($f^2 = f, \quad g^2 = g, \quad gf = fg$) один із доданкв дорівнює нулю.

168. Показати, що коли в кільці K для будь-якого елеента $a \in K$ знайдеться ідемпотент $e \in K$ такий, що $aK = eK$, то в цьому кільці для будь-якого елеента $a \in K$ знайдеться елемент $\in K$ такий, що

$$aK + bK = K, \qquad aK \cap bK = \{0\}.$$

169. Показати, що кільце підмножин $\mathfrak{B}(M)$ булеве.

170. Показати, що коли I — деяка непорожня множина, то кільце $\mathbb{Z}^I$ булеве.

171. Показати, що коли M — нескінченна множина, то підкільце кільця $\mathfrak{B}(M)$, що складається із скінченних підмножин, не має одиниці і всі його елементи є ідемпотентами.

172. Показати, що в будь-якому бульовому кільці K для будь-якого елемента $a \in K$ знайдеться елемент $binK$ такий, що

$$aba = a, \qquad bab = b.$$

173. Знайти нільпотенти кільця

$$\mathbb{Z}_{18}; \qquad \mathbb{Z}_{36}.$$

174. Показати, що нільпотенти комутативного кільця утворюють підкільце.

175. Навести приклад двох нільпотентів кільця $M_2(\mathbb{Z})$, сума яких не є нільпотентом.

176. Перевірити, що матриця

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

є нільпотентом в кільці $M_2(\mathbb{R})$.

177. Показати, що коли кльце K не має ненулових нільпотентів, то для будь-якої непорожньої множини M кільце K^M також не має ненульових нільпотентів.

178. Показати, що формальний многочлен над комутативним кльцем є нільпотентом тоді і тільки тоді, коли всі його коефіцієнти є нільпотентами.

179. Навести приклад формального степеневого ряда з нільпотентними коефіцієнтами, який не був би нільпотентом.

180. Нехай K — кільце з одиницею, $\mathbb{Q} \subseteq K$, $a \in K$ — нільпотент. Тоді рівняння $x^2 = 1 - a$ має в K розв'язок.

181. Показати, що коли a — нільпотент комутативного кільця з одиницею, то для будь-якого $x \in K$ елементи $1 - ax, \quad 1 - xa$ оборотні. Зокрема, оборотним уде елемент $1 - a$.

182. Показати, що формальний многочлен над комутативним кільцем з одиницею оборотний тоді і тільки тоді, коли вільний член цього многочлена є оборотним, а решта коефіцієнтів — нільпотенти.

183. Показати, що в кільці $\mathbb{Z}_{10}$ немає ненульови нільпотентів.

184. Нехай $n \in \mathbb{N}$ натуральне число, $n \geq 2$ і

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot_k^{\alpha_k}, \quad k \geq 11$$

де $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — різні прості числа, $\alpha_1 \geq \alpha_2 \ldots \alpha_k \geq 1$. Показати, що число $m \in \mathbb{Z}_n$ є нільпотентом в кільці $\mathbb{Z}_n$ тоді і тільки тоді, коли числа $p_1, p_2, \ldots, p_k$ є дільниками числа m.

185. Показати, що коли A — абелева група, то ендоморфізм $f : A \to A$ є нільпотеном в кільці $\operatorname{End} A$ тоді і тільки тоді, коли для деякого натурального $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$

$$A = B_0 \supseteq f(A) = B_1 \supseteq f(B_1) = B_2 \supseteq \ldots f(B_{n-1}) = B_n = 0.$$

186. Знайти нільпотенти кільця ендоморфізмів цікліччної групи порядку p^2, p — просте число.

187. Перевірити, що коли K — поле, то в кільці $M_n(K)$ можна знайти матрицю A таку, що $A^n = 0$, але $A^{n-1} \neq 0$, але не існує матриці $B \in M_n(K)$ такої, що $B^{n+1} = 0$, але $B^n \neq 0$.

188. Перевірити, що центральні елементи кільця утворюють підкільце.

189. Знайти центральні елементи алгебри кватерніонів.

190. Нехай K кільце з одиницею і $A \in M_n(K)$. Показати, що матриця A є центральним елементом в $M_n(K)$, коли для деякого $a \in K$ матриця A скалярна, тобто має вигляд
$$\begin{pmatrix} a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a \end{pmatrix}.$$

191. Показати, що в кільці нескінченних матриць із скінченною кількістю ненульових рядків над кільцем з одиницею центральним елемнтом є лише нульова матриця.

192. Показати, що в кільці $\mathbb{Z}(i\sqrt{3})$ елементи $2, 1 + i\sqrt{3}, 1 - \sqrt{3}$ є нерозкладними.

193. Показати, що в кільці $\mathbb{Z}(i\sqrt{5})$ елементи $3, 7, 1 = i2\sqrt{5}, 1 - 2\sqrt{5}$ є нерозкладними.

194. Показати, що кільця
$$\mathbb{Z}(i\sqrt{3}), \qquad \mathbb{Z}(i\sqrt{5})$$
не факторіальні.

195. Показати, що кільця
$$\mathbb{Z}, \qquad \mathbb{C}\langle x\rangle$$
факторіальні.

196. Показати, що кільце цілих p—адичних чисел факторіальне.

7 Відповіді до задач,що стосуються означення кільця.

1. 256.
2. 4.
3. 2.

4. Скористатися рівностями

$$x0 = x(0+0) = x0 + x0, \quad 0x = (0+0)x = 0x + 0x,$$

рівностям

$$(-x)y + xy = (-x + x)y = 0y = 0,$$

та

$$(-x)(-y) - xy = (-x)(-y) + (-x)y = (-x)(-y + y) = 0.$$

7. Скористатися співвідношеннями $(-1)x = -x$ та

$$0 = (x + y) - (x + y) = (x + y) + (-1)(x + y),$$

$$0 = (x + y) + (-y - x) = (x + y) + ((-1)x + (-1)y) = (x + y) + (-1)(y + x).$$

Із цихспіввідношень випливає, що

$$(x + y) + (-1)(x + y) = (x + y) + (-1)(y + x);$$

$$(-1)(x + y) = (-1)(y + x), \quad x + y = y + x.$$

8. Взяти некомутативну групу, її групову операцію назвати додаванням, а добуток взяти нульовим, тобто добуток довільних двох елементів дорівнює нулю — нейтральному елементу групи.

10. Розглянути множину натуральних чисел із звичайними операціями додавання та множення.

11. (a) Розглянемо множину M всіх відображенm адитивної абелевої групи A в себе з операціями додавання та множення, що задані правилами: якщо $f, g \in M$, $x \in A$ то

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x); \qquad (fg)(x) = f(g(x)).$$

Групою A візьмемо циклічну групу -3-го порядку $A = \{0, a, 2a\}$ і відображення $f, g, h : A \to A$ оберемотак, щоб виконувалися рівності

$$f(a) = a, \quad g(a) = a, \quad h(a) = 0, \quad h(2a) = 2a.$$

Тоді

$$(h(f + g))(a) = h((f + g)(a)) = h(f(a) + g(a)) = h(a + a) = h(2a) = 2a;$$

$$(hf + hg)(a) = (hf)(a) + (hg)(a) = h(f(a)) + h(g(a)) = h(a) + h(a) = 0 + 0 = 0.$$

Це означає, що у множині M разом із введениими операціями додавання та множення не виконується закон лівої дистрибутивності. Разом з тим решта аксіом виконується. Перевіримо асоціативність додавання: для будь-яких $f, g, h \in M$ і лля будь-якого $x \in A$

$$((f+g)+h)(x) \stackrel{1}{=} (f+g)(x)+h(x) \stackrel{2}{=} (f(x)+g(x))+h(x) \stackrel{3}{=}$$

$$f(x)+(g(x)+h(x)) \stackrel{4}{=} f(x)+(g+h)(x) \stackrel{5}{=} (f+(g+h))(x)$$

Рівності 1б2б4б5 правильні за означенням додавання на множині відображень, а рівність 3 можна псатитому, що доавання вруп асоціативне.

Подібним чином перевіряється решта аксіом.

(b) Розглянемо множину M всіх відображень адитивної абелевої групи A в себе з операціями додавання та мнження, що задані правилами: якщо $f, g \in M$, $x \in A$ то

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x); \qquad (fg)(x) = g(f(x)).$$

14. 4

17. Для позначення операцій додавання та множення на множині $\mathbb{Z}_k = \{0, 1, 2, \ldots, k-1\}$ введемо смволи $\oplus, \odot$ на відміну від символів $+, \cdot$, якими будемо позначати операції додавання та множення на множині цілих чисел.

Якщо звачайна сума $a+b$ чисел $a, b \in \mathbb{Z}_k$ при діленні на k дає остачу r, тобто

$$a+b = k \cdot q + r, \qquad (0 \leq r < k),$$

то

$$a \oplus b = r$$

за правилом додавання в $\mathbb{Z}_k$. Із наведеного означенна оперцій видно, що завжди $(a+b)-(a \oplus b$ ділиться на k. Подібним чином одержуємо, що різниця $(a+b)-(a \odot b)$ ділиться на k для будь-яких $a, b \in \mathbb{Z}$.

Доведемо асоціативність додавання, тобто тотожну істинність формули

$$\forall a, b, c, \in \mathbb{Z}_k \quad (a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c). \tag{1}$$

Оскільки різниці

$$u_1 = (a+b)-(a \oplus b), \quad u_2 = (b+c)-(b \oplus c),$$

$$u_3 = ((a \oplus b)+c)-((a \oplus b) \oplus c)), \quad u_4 = (a+(b \oplus c)-(a \oplus (b \oplus c))$$

діляться в кільці цілих чисел на k, то

$$(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c) = u_4 - u_3 + u_2 - u_1$$

також ділиться на k. а осскільки цілі числа $(a \oplus b) \oplus c, a \oplus (b \oplus c)$ знаходяться в межах вд 0 до $k-1$, то їх різниця може ділитися на k лише у випадку коли ці члса рівні.

20. Перевіримо праву дистрибутивність, тобто виконання рівності

$$(u+v)w = uw + vw$$

для будь-яких $u, v, w \in \mathbb{H}$.

Нехай

$$u = a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k, \quad v = a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k, \quad w = a_3 + b_3 i + c_3 j + d_3 k.$$

Тоді

$$\begin{gathered}
(u+v)w \overset{1}{=} \left((a_1+a_2)+(b_1+b_2)i+(c_1+c_2)j+(d_1+d_2)k\right)w \overset{2}{=} \\
\overset{2}{=} (a_1+a_2)a_3-(b_1+b_2)b_3-(c_1+c_2)c_3-(d_1+d_2)d_3+ \\
+\left((a_1+a_2)b_3+(b_1+b_2)a_3+(c_1+c_2)d_3-(d_1+d_2)c_3\right)i+ \\
+\left((a_1+a_2)c_3-(b_1+b_2)d_3+(c_1+c_2)a_3-(d_1+d_2)b_3\right)j+ \\
+\left((a_1+a_2)d_3+(b_1+b_2)c_3-(c_1+c_2)b_3-(d_1+d_2)a_3\right)i \overset{3}{=} \\
\overset{3}{=} (a_1a_3-b_1b_3-c_1c_3-d_1d_3+a_2a_3-b_2b_3-c_2c_3-d_2d_3)+ \\
+(a_1b_3+b_1a_3+c_1d_3-d_1c_3+a_2b_3+b_2a_3+c_2d_3-d_2c_3)i+ \\
+(a_1c_3-b_1d_3+c_1a_3+d_1b_3+a_2c_3-b_2d_3+c_2a_3+d_2b_3)j+ \\
+(a_1d_3+b_1c_3-c_1b_3+d_1a_3+a_2d_3+b_2c_3c_2b_3-d_2a_3)k \overset{4}{=} \\
\overset{4}{=} ((a_1a_3-b_1b_3-c_1c_3-d_1d_3)+(a_1b_3+b_1a_3+c_1d_3-d_1c_3)i \\
(a_1c_3-b_1d_3+c_1a_3+d_1b_3)j+(a_1d_3+b_1c_3-c_1b_3+d_1a_3)k)+ \\
+((a_2a_3-b_2b_3-c_2c_3-d_2d_3)+(a_2b_3+b_2a_3+c_2d_3-d_2c_3)i+ \\
(a_2c_3-b_2d_3+c_2d_3+d_2b_3)j+(a_2d_3+b_2c_3-c_2b_3+d_2a_3)k) \overset{5}{=} uw+vw.
\end{gathered}$$

Тут рівності 1,2,4,5 правильні за означенням дій з кватерніонам, а рівність 3 грунтується на відомих властивостях дій з дійсними числами.

21. Перевіримо наявність нуля та наявність протилежного елемента.

Роль нуля в кільці підмножин виконує порожня множина,тому що для кожної дмножини $A \subseteq M$

$$\emptyset + A = A + \emptyset = (A \setminus \emptyset) \cup (\emptyset \setminus A) = A.$$

Протележним до кожного елемента буде сам цей елемент, тому що

$$A + A = (A \setminus A) \cup (A \setminus A) = \emptyset.$$

24. Перевіримо ліву дистрибутивність. Нехай f, g, h — три довільно вибрані ендоморфизми групи A. Заозначенням, два відображення є рівними в тому і тільки тому випадку, коли образи кожного елемента під дією цих вдображень збігаються. Отже, щоб довести рівність

$$(f+g)h = fh + gh,$$

потрібно довести, що для кожного елемента $x \in A$ виконується рівнсть

$$((f+g)h)(x) = (fh+gh)(x).$$

Останню рівність і перевіряємо. Дійсно, за визнченням дій над ендоморфізмами

$$((f+g)h)(x) = (f+g)(h(x))) = f(h(x))+g(h(x)) = (fh)(x)+(gh)(x)(fh+gh)(x).$$

26. Якщо група A елементна, то і група $B = A \times A$ одноелементна, і кільце ендоморфізмів групи B одноелементне і, відповідно, комутативне. Якщо ж група A має більше ніж один елемент, тоді прикладом непереставних ендоморфізмів будуть ендоморфізми $, g$, що визначаються правилами: для $a, b \in A$

$$(a, b) \xrightarrow{f} (a, 0) \qquad (a, b) \xrightarrow{g} (b, a).$$

27. Перевіримо ліву дистрибутивність, тобто виконання рівності

$$a(b+c) = ab + ac$$

для

$$a = \sum_{g \in G} a_g g, \qquad b = \sum_{g \in G} b_g g, \qquad c = \sum_{g \in G} c_g g.$$

де $a_g, b_g, c_g \in K$. Позначимо

$$a(b+c) = x = \sum_{g \in G} x_g g, \qquad ab + ac = y = \sum_{g \in G} y_g g,$$

$$b + c = d = \sum_{g \in G} d_g g, \qquad ab = h = \sum_{g \in G} h_g g, \qquad ac = f = \sum_{g \in G} f_g g.$$

В цих позченнях потрібно превірити, що для вссіх $g \in G$ виконується рівність

$$x_g = y_g.$$

За визначенням додавання елементів кільця $K(G)$

$$d_g = b_g + c_g, \qquad y_g = h_g + f_g.$$

Отже, для $g \in G$

$$x_g = \sum_{g=g_1g_2} a_{g_1}d_{g_2} = \sum_{g=g_1g_2} a_{g_1}(b_{g_2}+c_{g_2}) = \sum_{g=g_1g_2} (a_{g_1}b_{g_2}+a_{g_1}c_{g_2}) =,$$

$$= \sum_{g=g_1g_2} a_{g_1}b_{g_2} + \sum_{g=g_1g_2} a_{g_1}c_{g_2} = h_g + f_g = y_g.$$

32. Перевіримо асоціативність множення в кільці нескінченних матриць із скінченною кількістю ненульових елемнтів у кожному рядкутобто якщо A, B, C такі матриці, і $X = (AB)C$, $Y = A(BC)$ то

$$X = Y. \tag{2}$$

Позначимо $D = AB, \quad H = BC$. Елементи матриць будемо позначати відповідними малими латинськими буквами з індексами, що належать множині $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Для перевірки рівності матриць потрібно переконатись в рівності відповідних елементів. Отже, щоб перевірити рівність (2) потрібно перевірити рівність

$$x_{p,q} = y_{p,q} \tag{3}$$

для будь-якоих $p, q \in \mathbb{N}$.

За правлиом множення матриць ми можемо записати

$$x_{p,q} = \sum_{i\in\mathbb{N}} d_{p,i}c_{i,q}, \quad y_{p,q} = \sum_{j\in\mathbb{N}} a_{p,j}h_{j,q} \quad d_{p,i} = \sum_{j\in\mathbb{N}} a_{p,j}b_{j,i}, \quad h_{j,q} = \sum_{i\in\mathbb{N}} a_{j,i}h_{i,q}$$

Тому

$$x_{p,q} = \sum_{i\in\mathbb{N}} \left(\sum_{j\in\mathbb{N}} a_{p,j}b_{j,i}\right) c_{i,q} = \sum_{i,j\in\mathbb{N}} a_{p,j}b_{j,i}c_{i,q} = \sum_{j\in\mathbb{N}} a_{p,j} \left(\sum_{i\in\mathbb{N}} a_{j,i}h_{i,q}\right) = y_{p,q},$$

Міняти пордяок підсумовування ми маємо право тому, що елементи матриць належать кільцю, а в кільці додавання комутативне, а додавання та множення асоціативні.

Перевірка асоціативності множення матриць завершена.

35. Перевіримо наявність нуля в кільці $K_1 \times K_2$, це робиться конструкктивно, тобто ми вказуємо прямо на нуль — якщо 0_1 є нулем кльця K_1, а 0_2 є нулем кльця K_2б то $(0_1, 0_2)$ є нулем кільця $K_1 \times K_2$. Справді, якщо $a \in K_1, b \in K_2$, то

$$(a,b)+(0_1,0_2) = (a+0_1, b+0_2) = (a,b), \qquad (0_1,0_2)+(a,b) = (0_1+a, 0_2+b) = (a,b).$$

Кінець перевірки.

38. Перевіримо транзитивність відношення $\sim$

$$(a_1, a_2) \sim (b_1, b_2) \Leftrightarrow a_1 b_2 = a_2 b_1$$

на множині $K \times X$, тобто коли $(a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2) \in K \times X$, і

$$(a_1, a_2) \sim (b_1, b_2), \qquad (b_1, b_1 \sim (c_1, c_2), \tag{4}$$

тоді

$$(a_1, a_2) \sim (c_1, c_2). \tag{5}$$

За означенням відношення $\sim$ залежності (5) означають

$$a_1 b_2 = a_2 b_1 \tag{6}$$

і

$$b_1 c_2 = c_1 b_2. \tag{7}$$

Домножим рівність (6) на c_2, а рівність (7) на a_2. Одержимо відповідно рівності

$$a_1 b_2 c_2 = a_2 b_1 c_2 \tag{8}$$

і

$$a_2 b_1 c_2 = a_2 c_1 b_2. \tag{9}$$

Із (8), (9) одержуємо

$$a_1 b_2 c_2 = a_2 c_1 b_2. \tag{10}$$

Оскільки кільце K комутативне, то із (10) випливає

$$b_2 (a_1 c_2 - a_2 c_1) = 0. \tag{11}$$

Множина X вибрана так, що із (11) випливає

$$a_1 c_2 - a_2 c_1 = 0, \qquad a_1 c_2 = a_2 c_1. \tag{12}$$

Отже (6) довели.

Клас екввалентності, якому належить пара $(a_1, a_2) \in K \times X$ позначають через $\frac{a_1}{a_2}$ і називають дробом із знменником a_2 і чисельником a_1. Відповідно, множину класів еквівалентності $\sim$ називають множиною дробів із знаменникаи із множини X.

Перевіримо коректність додавання класів (дробів), тобто потрібно переконатися в тому, що коли виконуються рівності

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}, \qquad \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2}, \tag{13}$$

тоді
$$\frac{a_1c_2+a_2c_1}{a_2c_2}=\frac{b_1d_2+b_2d_1}{b_2d_2}, \tag{14}$$
тобто
$$(a_1c_2+a_2c_1)b_2d_2=(b_1d_2+b_2d_1)a_2c_2, \tag{15}$$
Задані рівності (13) переписуємо у вигляді
$$a_1b_2=b_1a_2, \qquad c_1d_2=d_1c_2. \tag{16}$$
Домножаємо першу з цих рівностей на c_2d_2, а другу — на a_2b_2
$$a_1b_2c_2d_2=b_1a_2c_2d_2, \qquad a_2b_2c_1d_2=a_2b_2d_1c_2. \tag{17}$$
Сума цих рівностей збігається із потрібною нам рівністю (15)

39. Перевіримо наявність протилежних елементів. Для
$$f\in\prod_{i\in I}K_i$$
протилежним буде елемент
$$g\in\prod_{i\in I}K_i,$$
який визначається умовою: для $i\in I$
$$g(i)=-f(i).$$

40. Перевіримо праву дистрибутивність, тобто для будь-яких $f,g,h\in K^X$
$$(f+g)h=fh+gh.$$
Щоб довести цю рівність, потрібно для будь-якого $x\in X$ перевірити рівність
$$((f+g)h)(x)=(fh+gh)(x).$$
Дійсно,
$$((f+g)h)(x)\overset{1}{=}(f+g)(x)h(x)\overset{2}{=}(f(x)+g(x))h(x)\overset{3}{=}$$
$$\overset{3}{=}f(x)h(x)+g(x)h9x)\overset{4}{=}(fh)(x)+(gh)(x)\overset{5}{=}(fh+gh)(x).$$
Тут рівності 1,2,4,5 вконуюються за озченням дій з відображеннями, а рівність 3 виконується тому, щоправа дистрибутвність є властивістююкільця K.

41. Асоціативність множення в K^* випливає із асоціативності в K. Дійсно, для будь-яких $a, b, c \in K^*$

$$(a \circ b) \circ c = c \cdot (a \circ b) = c(ba) = (cb)a = a \circ (cb) = a \circ (b \circ c).$$

44. Перевіримо асоціативність множення в кільці K_e.

Нехай $a, b, c \in K$ і $n, m, k \in \mathbb{Z}$. Тоді

$$((a+ne)(b+me))(c+ke) = (ab+ma+nb+(mn)e)(c+ke) =$$

$$= abc + (mk)a + (nk)b + (mn)c + n(bc) + m(ac) + k(ab) + (nmk)e =$$

$$(a+ne)(bc+kb+mc+(mk)e) = (a+ne)((b+me)(c+ke)).$$

46. Перевіримо асоціативність множення формальних степеневих рядів, тобто перевіримо рівність

$$(AB)C = A(BC)$$

для будь-яких форальних степеневих рядів

$$A = \sum_{i\ge 0} a_i x^i, \qquad B = \sum_{i\ge 0} b_i x^i, \qquad C = \sum_{i\ge 0} c_i x^i.$$

Позначимо

$$U = (AB)C = \sum_{i\ge 0} u_i x^i, \qquad V = A(BC) = \sum_{i\ge 0} v_i x^i, \qquad D = AB = \sum_{i\ge 0} d_i x^i, \qquad F = \sum_{i\ge 0} f_i x^i.$$

Побрібно довести рівність $u_k = v_k$ для будь-якого $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

За правилом множення формальних степеневих рядів

$$u_k = \sum_{r+s=k} d_s c_r, \quad v_k = \sum_{p+t=k} a_p f_t, \quad d_s = \sum_{p+q=s} a_p b_q, \quad f_t = \sum_{q+r=t} b_q c_r.2$$

Отже

$$u_k = \sum_{r+s=k} \left(\sum_{p+q=s} a_p b_q \right) c_r = \sum_{p+q+r=k} a_p b_q c_r = \sum_{p+t=k} a_p \left(\sum_{q+r=t} b_q c_r \right) = v_k.$$

50. Перевіримо асоціативність множення диференціальних многочленв, тобто перевіримо рівність

$$(AB)C = A(BC)$$

для будь-яких диференціальних многочленів

$$A = \sum_{i\ge 0} a_i x^i, \qquad B = \sum_{i\ge 0} b_i x^i, \qquad C = \sum_{i\ge 0} c_i x^i.$$

Позначимо

$$U = (AB)C = \sum_{i \geq 0} u_i x^i, \qquad V = A(BC) = \sum_{i \geq 0} v_i x^i,$$

$$D = AB = \sum_{i \geq 0} d_i x^i, \qquad F = \sum_{i \geq 0} f_i x^i.$$

побрібно довести рівність $u_k = v_k$ для будь-якого $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$
За правилом множення диференціальних многочленів

$$u_\alpha = \sum_{k+l-q=\alpha} d_k c_l^{(q)} C_k^q, \quad v_\alpha = \sum_{i+m-s=\alpha} a_i f_m^{(s)} C_i^s,$$

$$d_k = \sum_{i+j-p=k} a_i b_j^{(p)} C_i^p, \quad f_m = \sum_{j+l-r=m} b_j c_l^{(r)} C_j^r.$$

Тому

$$u_\alpha = \sum_{k+l-q=\alpha} \left(\sum_{i+j-p=k} a_i b_j^{(p)} C_i^p \right) c_l^{(q)} C_k^q = \sum_{i+j+l-q-p=\alpha} \left(a_i b_j^{(p)} c_l^{(q)} C_i^p \right) C_{i+j-p}^q$$

$$u_\alpha = \sum_{i+j+l-q-p=\alpha} a_i b_j^{(p)} c_l^{(q)} \left(C_i^p C_{i+j-p}^q \right) \tag{18}$$

Для знаходження v_α потрібно знайти $f_m^{(s)}$:

$$f_m^{(s)} = \sum_{j+l-r=m} \left(b_j c_l^{(r)} \right)^{(s)} C_j^r = \sum_{j+l-r=m} \sum_{p+q=r+s} \left(b_j^{(p)} c_l^{(q)} C_s^p \right) C_j^r$$

Тепер

$$v_\alpha = \sum_{i+m-s=\alpha} a_i \sum_{j+l-r=m} \sum_{p+q=r+s} \left(b_j^{(p)} c_l^{(q)} C_s^p \right) C_j^r C_i^s$$

$$v_\alpha = \sum_{i+j+l-r-s=\alpha} \sum_{p+q=r+s} a_i b_j^{(p)} c_l^{(q)} C_s^p C_j^r C_i^s \tag{19}$$

$$v_\alpha = \sum_{i+j+l-p-q=\alpha} a_i b_j^{(p)} c_l^{(q)} \sum_{p+q=r+s} \left(C_s^p C_i^s \right) C_j^r \tag{20}$$

За допомогою явних формул для біномних коефіцієнтів перевіряємо рівність

$$C_s^p C_i^s = C_{i-p}^{i-s} C_i^p. \tag{21}$$

Дійсно,

$$C_s^p C_i^s = \frac{s!}{p!(s-p)!} \cdot \frac{i!}{s!(i-s)!} = \frac{i!}{p!(s-p)!(i-s)!}$$

$$C_{i-p}^{i-s} C_i^p = \frac{(i-p)!}{(i-s)!(s-p)!} \cdot \frac{i!}{p!(i-p)!} = \frac{i!}{p!(s-p)!(i-s)!}.$$

Рівність (21) дозволяє переписати суму

$$\sum_{p+q=r+s} (C_s^p C_i^s)\, C_j^r$$

у формулі (20) у вигляді

$$\sum_{p+q=r+s} \left(C_{i-p}^{i-s} C_i^p\right) C_j^r = C_i^p \sum_{s=0}^{i} C_{i-p}^{i-s} C_j^{p+q-s}$$

що дозволяє переписати формулу (20) у вигляді

$$v_\alpha = \sum_{i+j+l-p-q=\alpha} a_i b_j^{(p)} c_l^{(q)} C_i^p \sum_{s=0}^{i} C_{i-p}^{i-s} C_j^{p+q-s} \tag{22}$$

Із (18), (22) бачимо, що для перевірки рівності $u_\alpha = v_\alpha$ лишилося перевірити рівність

$$\sum_{s=0}^{i} C_{i-p}^{i-s} C_j^{p+q-s} = \sum_{s=0}^{i} C_{i-p}^{s-p} C_j^{q-(s-p)} = C_{i+j-p}^{q}. \tag{23}$$

В правильності останньої тотожності можна переконатися комбінаторними міркуваннями: якщо є множина M, $\quad |M| = i+j-p$, і в ній дві підмножини $M_1 \subseteq M, |M_1| = i-p, \quad M_2 \subseteq M, |M_2| = j$, то вибірка $N \subseteq M, |N| = q$ рівносильна вибірці двох підмножин

$$N_1 \subseteq M_1, \quad |N_1| = s-p, \qquad N_2 \subseteq M_2, |N_2| = q-(s-p)$$

для деяких $s-p = 0, 1, \ldots, i-p$.

Асоціативність множення диференціяльних рядів перевірена.

51. Перевірка коректності визначення додавання та множення класів полягає в перевірці двох речей. Спочатку потрібно переконатися в тому. що результат додавання та множення послідовностей із вказаною властивсістю знову має цю властивість, а потім потрібно переконатися в тому, що результат додавання чи множення двох класів не залежить від вибору представників в цих класах. Обмежимося множенням.

Нехай є дві послідовності $x = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\} \in M$, і $y = \{y_0, y_1, y_2, \ldots\} \in M$, тобто для будь-якого $n = 0, 1, 2, \ldots$ цілі числа $x_{n+1} - x_n, \quad y_{n+1} - y_n$ діляться на p^{n+1}. Щоб показати, що послідовність xy лежить в M потрібно переконатися в тому, що число $x_{n+1}y_{n+1} - x_n y_n$ ділиться на p^{n+1}. Це дійсно так, тому що це число можна записати у вигляді

$$x_{n+1}y_{n+1} - x_n y_n = x_{n+1}y_{n+1} - x_n y_{n+1} + x_n y_{n+1} - x_n y_n = (x_{n+1} - x_n)\, y_{n+1} + x_n\,(y_{n+1} - y_n)\,.$$

Отже добуток послідовностей із M знову лежить в M.

Переконаємося тепер в тому, що добуток двох класів не залежить від вибору представників в цих класах.

Нехай A, B два класи еквівалентності на множині M і $x, x' \in A$, $y, y' \in B$, а клас C такий, що $xy \in C$. Потрібно переконатися в тому, що $x'y' \in C$. Для цього позначимо

$$x = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\}, \quad y = \{y_0, y_1, y_2, \ldots\}$$

$$x' = \{x'_0, x'_1, x'_2, \ldots\}, \quad y' = \{y'_0, y'_1, y'_2, \ldots\}$$

$$xy = \{x_0y_0, x_1y_1, x_2y_2, \ldots\}, \quad x'y' = \{x'_0y'_0, x'_1y'_1, x'_2y'_2, \ldots\}$$

За означенням, послідовності $xy, x'y'$ лежать в одному класі, якщо для будь-якого $n = 0, 1, 2, \ldots$ число $x'_n y'_n - x_n y_n$ ділиться на p^{n+1}. А цедійсно так, тому що

$$x'_n y'_n - x_n y_n = x'_n y'_n - x'_n y_n + x'_n y_n - x_n y_n = x'_n\,(y'_n - y_n) + (x'_n - x_n)\, y_n.$$

8 Відповіді і вказівки до задач, що стосуються поняття “підкільце“

53 — 58. Так. 59. Ні. 60. Так. 61. Так. 62. Ні. 63. Ні. 64. Ні. 65. Так. 66. Ні. 67. Ні. 68. Так. 69. Так.

70. Ні, оскільки K_1 не містить порожньої множини, яка відіграє роль нуля — нейтрального елемента за додаванням.

71. Так. 72. Так. 73. Так. 74. Так. 75. Так. 76. Так. 77. Так. 78. Так. 79. Ні. 80. Ні. 81. Так. 82. Так. 83. Так. 84. Ні. 85. Так. 86. Так. 87. Ні. 88. Ні. 89. Так. 90. Ні. 91. Так. 92. Так. 93. Так. 94. Ні. 95. Так.

96. Зв'язати з рядом, який задовольняє лінійному рекурентному співвідношенню відношення двох многочленів. Зробити висновок, що такі відношення утворюють кільце.

97. Так. 98. Ні. 99. Так. 100 – 110. Так. 111. Ні.
112 – 117. Так.
118. Скористатися рівностями:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

119. Із комутативності кільця K і виконання в ньому відповідних аксіом можна одержати настцпні формули для різниці і добутку двох могочленів: якщо $f, g \in K^K$,

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n, \quad g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_mx^n, \quad n \geq m \geq 0,$$

то

$$(f-g)(x) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + \ldots + (a_m - b_m)x^m + a_{m+1}x^{m+1} + \ldots + a_nx^n,$$

$$(fg)(x) = \sum_{i=0}^{n+m}\left(\sum_{j+k=i} a_jb_k\right)x^i.$$

120. Нехай a, b лежать в централізаторі множини X. Тоді для будь-якого $x \in X$ будуть виконуватися рівності

$$(a-b)x = ax - bx = xa - xb = x(a-b),$$

$$abx = axb = xab,$$

що і доводить належність елементів $a-b, ab$ централізатору мноини X.

122. Якщо одне із підкілець міститься в іншому, то їх об'єднання збігається з більшим підкільцем, отже є підкільцем кільця. Якщо ні одне із двох підкілець K_1, K_2 не міститься в іншому, то вибираємо два елементи

$$x \in K_1 \setminus K_2, \qquad y \in K_2 \setminus K_1,$$

і розглядамо суму $z = x + y$. Припущення $z \in K_1$ приводить до суперечності $y = z - x \in K_1$, а припущення $z \in K_2$ приводить до суперечності $x = z - y \in K_2$.

123. Взяти $K = M_2(\mathbb{Z})$,

$$K_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & n \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| n \in \mathbb{Z} \right\}, \qquad K_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ n & 0 \end{pmatrix} \middle| n \in \mathbb{Z} \right\}$$

9 Елементи кільця із спеціальними властивостями і кільця із спеціальними елементами

128 б). Оборотними є ті елементи m кільця $\mathbb{Z}_n$, які є взаємно простими з n.

в). Оборотною еоементом в $M_2(\mathbb{Z})$ є така матриця

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

у якої $ad - bc = \pm 1$.

д). Ендоморфізм абелевої групи оборотний тоді і тільки тоді, коли він є автоморфізмом, тобто бієктивним ендоморфізмом.

129. Нехай ряд $g = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots$ є оберненим до ряду $f = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$. Із $fg = 1$ випливають рівності

$$\begin{aligned} a_0b_0 &= 1 \qquad (24)\\ a_0b_1 + a_1b_0 &= 0,\\ a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0 &= 0,\\ &\dots \end{aligned}$$

Рівність (24) показує, що елемент a оборотний.

Якщо ж елемент a оборотний, то систему рівнянь, що починається із (24), можна розглядати як систему рівнянь для знаходження оберненого до f ряду g, — ця система має розв'язок, отже ряд f має обернений g.

130. Факт, що різниця n, m цілих чисел ділиться на число p^k, записуємо у вигляді

$$n \equiv m (\operatorname{mod} p^k).$$

Роль одиниці в кільці $p-$адичних чисел відіграє клас, що містить послідовність $\{1, 1, 1, \dots\}$.

Якщо $p-$адичне число A містить послідовність $\{x_0, x_1, x_2, \dots\}$. , є оборотним, і $B = A^{-1}$, $B = \{y_0, y_1, y_2, \dots\}$, то для всіх $n = 0, 1, 2, \dots$

$$x_n y_n \equiv 1 (\operatorname{mod} p^{n+1}), \qquad (25)$$

зокрема

$$x_0 y_0 \equiv 1 (\operatorname{mod} p), \qquad (26)$$

і

$$x_0 \not\equiv 0 (\operatorname{mod} p). \qquad (27)$$

Навпаки, нехай число A містить послідовність $\{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ таку, що виконується (27). Із

$$x_n \equiv x_{n-1} \equiv \dots \equiv x_1 \equiv x_0$$

випливає, що система рівнянь (25) має розв'язок і число A є оборотним.

131. Скористатися тим, що визначник добутку двох матриць є добутком визначників множників, а також скористатися формулою для обчислення елементів оберненої матриці.

134. Нехай B — неодноелементна циклічна група, I — нескінченна множина, що містить нескінченну послідовність $\{i_0, i_1, i_2, ldots\}$ і $A = B^I$. Виберемо два ендоморфізми $\alpha, \beta : A \to A$, що визначаються правилами: для $f \in A$

$$\alpha(f) = \begin{cases} f(i), & \text{якщо } i \in I \setminus \{i_0, i_1, i_2, \ldots\} \\ f(i+1), & \text{якщо } i \in \{i_0, i_1, i_2, \ldots\} \end{cases}$$

$$\alpha(f) = \begin{cases} f(i), & \text{якщо } i \in I \setminus \{i_0, i_1, i_2, \ldots\} \\ 0, & \text{якщо } i = i_0, \\ f(i-1), & \text{якщо } i \in \{i_1, i_2, \ldots\} \end{cases}$$

Тоді $\alpha\beta = 1$, але ні α ні β не оборотні, оскільки не є бієктивними відображеннями.

135. Оскільки для будь-яких $x, y \in K$

$$((xe - x) + e)y = (xe - x)y + ey = (xe - x)ey + ey = xeey - xey + ey = y,$$

то $xe - x + e = e$ і $xe = x$.

136 а). Припустомо, що $xy = 1$ і $y^m x^m = 1$ для деякого $m > 1$. Тоді можна записати

$$(xy) \cdot (y^{m-1}x^{m-1}) \cdot (xy) = x \cdot 1 \cdot y = 1, \quad y^{m-1}x^{m-1} = 1.$$

Продовжуючи цей процес переконуємося, що $yx = 1$.

137. а) $\Rightarrow$ б). Якщо y_1, y_2 — праві обернені до елемента x, тобто $xy_1 = xy_2 = 1$, то припущення про існування оберненого до x приводить до рівностей

$$y_1 = x^{-1}xy_1 = x^{-1}xy_2 = y_2.$$

б) $\Rightarrow$ в). Нехай $xy = 1$, але x не оборотний, тобто $yx \neq 1$ і, відповідно, $yx - 1 \neq 0$. Тоді $x(yx - 1) = x - x = 0$ і x є лівим дільником нуля.

в) $\Rightarrow$ а). Нехай $xy = 1$ і x є лівим дільником нуля, тобто $xz = 0$ для деякого ненульового елемента z. Тоді $y + z \neq y$ і $1 = xy = x(y + z)$.

138. Скористатися вправою 127.

139 а). $\mathbb{Z}$. 139 б). $\mathbb{Z}_2$. 139 в). $\mathbb{R}[x]$.

140. Скористатися тим, що коли $z = a + bi$ — комплексне число і $a^2 + b^2 \neq 0$, то для

$$t = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}$$

будуть виконуватися рівності $zt = tz = 1$.

141. Можна скористатися тим, що для $1 \leq m < p$ найбільший спільний дільник m і p дорівнює одиниці і, відповідно, $mx + py = 1$ для деяких цілих чисел x, y.

Тоді елемент $r \in \mathbb{Z}_p$ $1 \leq r < p$ такий, що $x \equiv r (\mod p)$, буде оберненим до m в кільці $\mathbb{Z}_p$.

142. Переконатися в тому, що коли $a, b \in \mathbb{Q}$ і одно із чисел a, b не дорівнює нулю, то $a^2 - 2b^2 \neq 0$, після чого перевірити, що число

$$\frac{a}{a^2 - 2b^2} - \frac{b}{a^2 - 2b^2}$$

буде оберненим до числа $a + b\sqrt{2}$.

143. Нехай ряд Лорана f має вигляд

$$f = a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + a_{n+2} x^{n+2} + \dots$$

де $n \in \mathbb{Z}$, $a_n, a_{n+1}, a_{n+2} \dots$ — елементи поля K, $a_n \neq 0$. Ряд g, що обернений до f будемо шукати у вигляді

$$g = b_{-n} x^{-n} + b_{-n+1} x^{-n+1} + b_{-n+2} x^{-n+2} + \dots$$

Із умови $fg = 1$ для визначення коефіцієнтів ряда g одержуємо систему рівнянь

$$\begin{aligned} a_n b_{-n} &= 1, \\ a_n b_{-n+1} + a_{n+1} b_{-n} &= 0, \\ a_n b_{-n+2} + a_{n+1} b_{-n+1} + a_{n+2} b_{-n} &= 0, \\ &\dots \end{aligned}$$

яка завжди має розв'язок, оскільки a_n в полі K має обернений.

144. Нехай K — скінченна область цілісності і $x \in K, \quad x \neq 0$. Тоді відображення

$$a \longrightarrow xa$$

із K в K є ін'єктивним. Оскільки множина K скінченна, то це відображення також сюр'єктивне, і $xa = 1$ для деякого $a \in L$.

145. Скористатися тим, що ненульові елементи поля утворюють мультиплікативну групу.

146. Полем із 4-х елементів буде $\{0, 1, i, j\}$ з наступними таблицями додавання та множення

$+$	0	1	i	j
0	0	1	i	j
1	1	0	j	i
i	i	j	0	1
j	j	i	1	0

$\times$	0	1	i	j
0	0	0	0	0
1	0	1	i	j
i	0	i	j	1
j	0	j	1	i

147. Оскільки $jk = i$ і $kj = -i$, то $\mathbb{H}$ є некомутативними кільцем і, таким чином, не є полем. Якщо $x = a + bi + cj + dk$ — ненульовий катерніон, тобто $N(x) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \neq 0$, то x має обернений елемент x^{-1}. Ним буде

$$x^{-1} = \frac{a}{N} - \frac{b}{N}i - \frac{c}{N}j - \frac{d}{N}k +$$

149. Нехай $K_i (i \in I)$ множина тіл і $a \in \prod_{i \in I} K_i$ елемент прямого добутку цих тіл. Потрібний елемент $b \in \prod_{i \in I} K_i$ визначається умовою

$$b(i) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } a_i = 0, \\ a_i^{-1}, & \text{якщо } a_i = 0 \end{cases}$$

150. Нехай K — тіло і $x \neq 1$. Тоді для

$$y = -x(1-x)^{-1}$$

буде

$$y + x - yx = y(1-x) + x = -x + x = 0.$$

152. Нехай $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ деяка функція. Коли для деякого $a \in \mathbb{R}$ $f(a) = 0$, то побудуємо функцію $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x = a, \\ 0, & \text{якщо } x \neq a. \end{cases}$$

Функція g не нульова і для неї виконується тотожність $g(x)f(x) = 0$. Отже в такому випадку функція f є дільником нуля.

Припустимо, що функція $f(x)$ не є дільником нуля і, відповідно, $f(a) \neq 0$ для будь-якого $a \in \mathbb{R}$. Тоді побудуємо функцію g за допомогою правила: $g(x) = (f(x))^{-1}$. Для так побудованої функції g буде виконуватися тотожність $f(x)g(x) = 1$, і функція g є оберненою до функції f.

153. Скористатися тим, що коли K скінченне кільце і $a \in K$, то відображення із K в K, задане правилом $x \longrightarrow ax$ не буде сюр'єктивним тоді і тільки тоді, коли воно не ін'єктивне.

154 а). Послідовність $\{a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots\}$, в якій хоч один із елементів дорівнює нулю.

154 б). Числа, які можна записати у вигляді $2k$ або $3k$.

154 в). Пари (a, b), в яких або $a = 0$, або $b = 0$.

155. Пари (a, b), в яких або a або b є дільником нуля.

156. Нехай A — матриця. яка має нескінченну кількість рядків і нескінченну кількість стовпчиків, в якій всі рядки, починаючи з $n-$го нульові. будуємо ненульову матрицю B з елементами $b_{i,j}$ $i, j = 1, 2, \ldots$ таку, що $b_{1,n} = 1$ а решта

елементів — нулі. Для такої матриці буде виконуватись рівність $BA = 0$, отже матриця A є правим дільником нуля.

Матрицю $C, C \neq 0$ для якої $AC = 0$, можна вибирати з єдиним ненульовим стовпчиком, в якому ненульвоі елементи стоять в перших n рядках.

157. Скористатися вправою 154 а).

158. Нехай K — комутативне кільце з одиницею і і многочлен

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$$

з коефіцієнтами із K дільником нуля в кільці многочленів, отже $fg = 0$ для деякого ненульоваго многочлена

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots$$

Якщо $a_ib_j \neq 0$ для деяких $i, j = 0, 1, 2, \dots$, то вибираємо серед них найбільш можливі і коефіцієнт при x^{i+j} в fg буде ненульовим, що суперечить приущенню. Отже $a_ib_j = 0$ для будь=яких $i, j = 0, 1, 2, \dots$ Для одного ненульового коефіцієнта $b = b_j$ многочлена g буде виконуватся рівність $a_ib = 0$ для всіх $i = 0, 1, 2, \dots$

159. Скористатися тим, що молодший член добутку двох рядів збігається з добутком молодших членів множників.

160. Показати, що кожне ненульове $p-$адичне число A можна записати у вигляді $A = p^k \cdot B$, де B — оборотне $p-$адичне число.

161 г). 0,1,9,28.

161 д). Ендоморфізми f, для яких існує підгрупа $B \subseteq A$ така, що $f(A) = B, \quad f(x) = x$ для будь-якого $x \in B$.

164. Нехай матриця $A \in M_2(K)$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

є ідемпотентом, тобто

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + dc & cb + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

що рівносильно системі рівнянь

$$\begin{array}{rcl} a^2 + bc & = & a, \\ (a+d)b & = & b, \\ (a+d)c & = & c, \\ d^2 + bc & = & d. \end{array} \tag{28}$$

Припустивши, що $a + d \neq 1$ одержуємо одну з 2-х можливостей

$$A = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Далі вважаємо, що $a + d = 1$ або $d = 1 - a$. Знайдемо всі такі ідемпотентні матриці.

Система рівнянь (28) перепишеться у вигляді

$$a^2 + bc = a, \qquad d = 1 - a. \tag{29}$$

В залежності від того, $b = 0$ чи $b \neq 0$ маємо такі можливості. Якщо $b = 0$, то $a(1-a) = 0$ і $a = 0$ або $a = 1$, тобто

$$A = A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix},$$

або

$$A = A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}.$$

Якщо $b \neq 0$, то

$$A = A_3 = \begin{pmatrix} a & b \\ \dfrac{a(1-a)}{b} & 1 - a \end{pmatrix}$$

Для вказаних матриць A потрібно знайти оборотну матрицю

$$T = \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}$$

таку, що

$$A = T^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T,$$

або

$$\begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}$$

тобто

$$\begin{aligned} xa + yc &= x, \\ xb + yd &= y, \\ ua + vc &= 0, \\ ub + vd &= 0. \end{aligned} \tag{30}$$

Для матриці $A = A_1$ можна взяти

$$T = T_1 = \begin{pmatrix} c & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -c \end{pmatrix}$$

Для матриці $A = A_2$ можна взяти

$$T = T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -c & 1 \end{pmatrix}, \qquad T_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -c & 1 \end{pmatrix}.$$

Для матриці $A = A_3$ система (30) перепишеться у вигляді

$$\begin{aligned} x(a-1) + y\frac{a(1-a)}{b} &= 0, \\ xb + y(-a) &= 0, \\ ua + v\frac{a(1-a)}{b} &= 0, \\ ub + v(1-a) &= 0. \end{aligned} \tag{31}$$

або

$$xb - ya = 0, \qquad ub + v(1-a) = 0. \tag{32}$$

Одним із розв'язків системи (32) буде

$$x = a, \quad y = b, \quad v = b, \quad u = a - 1,$$

що дає нам

$$T = T_3 = \begin{pmatrix} a & b \\ a-1 & b \end{pmatrix}, \quad \det T_3 = b, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \dfrac{1-a}{b} & \frac{a}{b} \end{pmatrix}$$

і

$$T_3 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T_3.$$

166 б. Для натурального $n \geq 1$ взаємно ортогональними многочленами будуть

$$e_k = y^{n-k}x^{n-k} - y^{n-k-1}x^{n-k-1}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Те, що ідемпотенти різні, можна одержати із вправи 136.

167. Нехай f і g — переставні ідемпотенти. Показати, що fg і $f - fg$ є ідемпотентами. Далі потрібне випливає з того, що

$$f = (f - fg) + fg, \qquad g = (g - gf) + gf.$$

168. Таким елементом буде $b = 1 - e$.

169. Булевість кільця $\mathfrak{B}(M)$ випливає з того, що

$$A \cdot A = A \cap A = A$$

для будь-якого $A \subseteq M$, і в $\mathfrak{B}(M)$ є одиниця M.

173 б. 0,6,12,18,24,30.

174. Потрібно лише переконатися в тому, що добуток і різниця двох ідемпотентів є ідемпотентом. А для цього порібно переконатися в тому, що коли a, b — нільпотенти, і $a^n = b^m = 0$ для деяких натуральних m, n, то

$$(a \cdot b)^{\min\{mn\}} = 0, \qquad (a - b)^{m+n} = 0.$$

175. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

178. Скористатися ти, що сума і різнця двох нільпотентів знову буде нільпотентом (див. вправу 174.)

179. Розглянути кільце формальних степеневих рядів над кільцем

$$K = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{27} \ldots \prod_{i=1}^{3} \mathbb{Z}_{3^i}. =$$

В кільці K розглянути послідовність

$$\begin{aligned} (0,0,0,0,\ldots) = 0 = a_0, \\ (0,3,0,0,\ldots) = a_1, \\ (0,0,3,0,\ldots) = a_2, \\ \ldots \end{aligned}$$

тобто в a_n на $n+1-$му місці стоїть 3, а решта елементів — нулі. Елементи вибраної послідовності $a_0, a_1, a_2, \ldots$ мають дві властивості:

$i \neq j \Rightarrow a_i \cdot a_j = 0, \qquad i, j, = 0, 1, 2, \ldots;$

$a_n^{n+1} = 0, a_n^n \neq 0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$

Далі розглядаєься формальний степеневий ряд

$$f = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \ldots$$

Всі коефіцієнти цього ряду нільпотентні, але сам ряд не нільпотентний.

180. Скористатися формулою Маклорена

$$(1+x)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r(r-1)(r-2)\ldots(r-k+1)}{k!}$$

181. Скористатися тим, що коли $a^n = 0$, то

$$(1-a) \cdot (1 + a + a^2 + \ldots a^{n-1}) = 1.$$

182. Нехай $f = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ оборотний елемент кільця $K[x]$ і для $g = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$ виконується рівність

$$f \cdot g = h = c_0 + c_1 x + \ldots + c_{n+m} x^{n+m} = 1,$$

де

$$c_i = \sum p + q = i a_p b_q.$$

Прирівнюючи відповідні коефіцієнти у многояленів h і 1 одержуємо систему рівностей

$$\begin{aligned} c_0 = a_0 b_0 &= 1, \\ c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0 &= 0, \\ c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 &= 0, \\ &\dots \\ c_{n+m} = a_n b_m &= 0. \end{aligned} \tag{33}$$

Перша рівність в системі (33) показує, що елемент a_0 обов'язково оборотний. Далі вважаємо, що $n > 0$ і будемо перевіряти, що решта коефіцієнтів многочлена f є нільпотентами.

Індукцією по $r = 0, 1, 2, \dots, m$ перевіряємо, що

$$a_n^{r+1} b_{m-r} = 0. \tag{34}$$

При $r = 0$ рівняння збігається із останнім рівнянням системи (33), тому воно правильне. Припускаємо, що $a_n^{k+1} b_{m-k} = 0$ при $k = 0, 1, \dots r - 1$. і доводимо цю рівність при $k = r$.

Оскільки

$$c_{n+m-r} = a_n b_{m-r} + a_{n-1} b_{m-r+1} + a_{n-2} b_{m-r+2} + \dots + a_{n-r+1} b_{m-1} + a_{n-r} b_m = 0,$$

то і

$$c_{n+m-r} a_n^r = a_n^{r+1} b_{m-r} + a_{n-1} \left(a_n^r b_{m-r+1}\right) + a_{n-2} a_n^1 \left(a_n^{r-1} b_{m-r+2}\right) \dots + a_{n-r} a_n^{r-1} \left(a_n b_m\right) = 0.$$

Множники

$$a_n^r b_{m-r+1}, \quad a_n^{r-1} b_{m-r+2}, \quad \dots, \quad a_n b_m$$

дорівнюють нулю за індуктивним припущенням. Тому $a_n^{r+1} b_{m-r} = 0$. Рівність (34) доведена. Зокрема, доведена рівність $a_n^{m+1} b_0 = 0$. Із оборотності елемента b_0 випливає, що a_n нільпотент.

Використовуючи вправу 181 переконуємося, що $f - a_n x^n$ оборотний многочлен. Повторюючи попередні іркування $n - 1$ раз переконуємося, що коефіцієнти $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1$ є нільпотентами.

Нехай тепер відомо, що a_0 оборотний елемент кільця коефіцієнтів, а $a_1, a_2, \dots, a_n$ — нільпотенти. Використовуючи вправу 181 переконуємося послідовно, що многочлени

$$a_0, a_0 + a_1 x, a_0 + a_1 x + a_2 x^2, \dots a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

є оборотними.

184. Нехай $p_1, p_2, \dots, p_k$ є дільниками числа m. Тод n буде дільником числа m^{α_1} і m^{α_1} є нільпотентом в кільці $\mathbb{Z}_n$.

Якщо p_i не є дільником числа m для деякого $1 \leq i \leq k$, то p_i не є дільником числа m^α для будь-якого $\alpha = 1, 2, \ldots$, m^α не дорівнює нулю в кільці $\mathbb{Z}_n$ і m^α не нільпотент в цьому кільці.

186.Якщо елементами циклічної групи A є

$$e, a, a^2, a^3, \ldots, a^p, a^{p+1}, \ldots, a^{p^n-1}$$

то нільптентами будуть ендоморфізми $f : A \to A$, для яких

$$f(a) = a^{kp}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

187. Якщо матриця

$$A = \left(\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{array} \right)$$

має розмір $n \times n$, то $A^n = 0$, $a^{n-1} \neq 0$.

Щоб довести відсутність матриці розміру $n \times n$, для якої $A^n \neq 0$, $A^{n+1} = 0$, можна побудувати лінійний простір V, елементами якого є вектори

$$x = \left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{array} \right),$$

і в цьому просторі розглянути підпрстори $V_1, V_2, \ldots$

$$V_i = \{x \in V | A^i x = 0\}.$$

Далі потрібно довести, що немає ланцюжка різних підпросторів

$$0 \subset V_1 \subset V_2 \ldots \subset V_n \subset V_{n+1} \subseteq V.$$

189. Кватерніони вигляду $a + 0i + 0j + 0k = a$.

190. Записати умову того, що матриця із центру комутує із матрицями, що мають один елемент 1, а решта елементів 0.

192. Покажемо, як доводити нерозкладність числа 3 в $\mathbb{Z}(i\sqrt{5})$. Нехай

$$a = a_1 + a_2\sqrt{5}, \qquad b = b_1 + b_2\sqrt{5}, \qquad a \cdot b = 3.$$

Тоді

$$|a|^2 \cdot |b|^2 = (a_1^2 + 5a_2^2)(b_1^2 + 5_2^2) = 9,$$

що можливо лише у випдку, коли одне із чисел $|a|^2, |b|^2$ дорівнює одиниці і, відповідно, це число оборотне.

194 б. Скористатися вправою 192.

196. Скористатися тим, що для ненульового $p-$адичного числа A існує однозначно визначене натуральне число k і оборотне $p-$адичне число B такі, що

$$A = p^k \cdot B.$$

Необоротне $p-$адичне число буде нерозкладним тоді і тільки тоді, коли $k = 1$.

Література

[1] В.І.Андрійчук , Б.В. Забавський "Алгебра і теорія чисел" — Львів. — 2005.

[2] В.І. Андрійчук , Б.В. Забавський "Лінійна алгебра" — Львів. — 2008.

[3] В.І. Андрійчук, Б.В. Забавський "Загальна алгебра" — Львів. — 2009.

Покажчик