Выпуск 9 1969

# О ВОССТАНОВЛЕНИИ БЕСКОНЕЧНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ ПО ЗНАЧЕНИЯМ ИХ ПРОИЗВОДНЫХ В НУЛЕ

*Ю. И. Любич, В. А. Ткаченко*

Эту задачу можно считать классической. Еще Э. Борель установил [1], что для любой числовой последовательности $\{\alpha_n\}$ $(n \geqslant 0)$ существует бесконечно дифференцируемая функция $f(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$, удовлетворяющая условиям

$$f^{(n)}(0) = \alpha_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{1}$$

Эта функция не единственна, она определена с точностью до слагаемого $g(x)$, такого, что

$$g^{(n)}(0) = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

Проблема описания классов единственности задачи (1) в терминах роста производных $f^{(n)}(x)$ совпадает с проблемой квазианалитичности. Т. Карлеман рассмотрел [2, гл. VII] задачу (1) в квазианалитическом классе функций и показал, что решение, если оно существует, можно получить, суммируя ряд Тейлора

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \frac{x^n}{n!}$$

некоторым линейным методом. Для существования решения в упомянутом классе необходимо и достаточно, чтобы на последовательности $\{\alpha_n\}$ была ограничена некоторая (определяемая классом) квадратичная форма от $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$

Однако работа Карлемана не дает ответа на следующий вопрос: пусть рост последовательности $\{\alpha_n\}$ ограничен оценками

$$|\alpha_n| \leqslant m_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

удовлетворяющими критерию квазианалитичности

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\beta_n} = \infty \quad \left(\beta_n = \inf_{k \geqslant n} \sqrt[k]{m_k}\right).$$

Существует ли квазианалитический класс функций, в котором задача (1) при указанном ограничении роста $\{\alpha_n\}$ всегда разрешима? Столкнувшись с этим вопросом, авторы настоящей заметки предприняли дополнительное исследование (ср. [3]). Результат оказался отрицательным: никакие ограничения роста на $\{\alpha_n\}$, кроме тех, которые влекут сходимость ряда Тейлора на $[0,1]$ (и тем самым аналитичность восстанавливаемой функции в единичном круге), не могут быть достаточными. Точная формулировка этого факта такова: обозначим через $s$ пространство всех числовых последовательностей $\{\alpha_n\}$ $(n \geqslant 0)$, наделенное топологией покоординатной сходимости*. Через $S$ обозначим пространство всех числовых функций на $[0,1]$, наделенное топологией поточечной сходимости; имеет место

**Теорема 1.** *Пусть* $\sigma$ — *какое-нибудь* $F$-*пространство*** *последовательностей* $\{a_n\}$ $(n \geqslant 0)$, *удовлетворяющее условиям:*

1) *вложение* $\sigma \to s$ *непрерывно;*

2) *орты* $e_k = \{\delta_{nk}\}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ *принадлежат* $\sigma$ *и образуют в* $\sigma$ *базис;*

3) *последовательность* $\left\{\frac{1}{n!}\right\}$ *не принадлежит сопряженному пространству* $\sigma^*$.

*Пусть, далее,* $\Sigma$ — *какое-нибудь* $F$-*пространство бесконечно дифференцируемых функций на* $[0\ 1]$, *удовлетворяющее условиям:*

а) *вложение* $\Sigma \to S$ *непрерывно;*

в) *все полиномы принадлежат* $\Sigma$;

с) *пространство* $\Sigma$ *квазианалитично в том смысле, что если функция* $g \in \Sigma$ *удовлетворяет условиям* (2), то $g = 0$.

*Тогда в пространстве* $\sigma$ *существует последовательность* $\{a_n\}$, *для которой ни одно решение задачи* (1) *не принадлежит* $\Sigma$.

Доказательство. Согласно условию а) значение функции $f \in \Sigma$ в любой точке является непрерывным линейным функционалом на $\Sigma$. По теореме Банаха — Штейнгауза каждое значение $f^{(n)}(0)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ также является непрерывным линейным функционалом от $f \in \Sigma$. Поэтому линейный оператор $D : \Sigma \to s$, определенный по формуле

$$Df = \{f^{(n)}(0)\}, \tag{3}$$

непрерывен.

Предположим теперь, что вопреки утверждению теоремы для каждой последовательности $a = \{a_n\} \in \sigma$ существует решение задачи (1), принадлежащее пространству $\Sigma$. В силу условия с) это решение единственно. Тем самым определяется отображение $I : \sigma \to \Sigma$, которое, очевидно, является правым обратным к $D$:

$$DI = 1. \tag{4}$$

Так $D$ — линейный мономорфизм (т. е. $\operatorname{Ker} D = 0$) согласно условию с), то отображение $I$ линейно. Действительно,

$$D(I(a+b) - Ia - Ib) = 0,$$

откуда

$$I(a+b) - Ia - Ib = 0.$$

Аналогично

$$I(\lambda a) = \lambda Ia.$$

Легко видеть, что оператор $I$ замкнут. В самом деле, если $a_k \in \sigma$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ и

$$\lim_{k\to\infty} a_k = a, \quad \lim_{k\to\infty} Ia_k = f,$$

* Эта топология определяется метрикой

$$\rho\left(\{a'_n\}, \{a''_n\}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} |a'_n - a''_n| (1 + |a'_n - a''_n|)^{-1}.$$

** Т. е. пространство Фреше. Пространством Фреше называется локально-выпуклое, метризуемое, полное линейное топологическое пространство. Все используемые здесь сведения о линейных топологических пространствах можно найти в [4].

то в силу непрерывности оператора $D$

$$\lim_{k\to\infty} DIa_k = Df,$$

откуда в силу (4)

$$a = Df.$$

Так как $a \in \Sigma$, $f \in \sigma$, то $f = Ia$, что и требовалось.

По теореме о замкнутом графике оператор $I$ непрерывен.

Заметим теперь, что согласно условию 1) отображения $\{\alpha_n\} \to \alpha_k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ непрерывны на $\sigma$. Поэтому базис $e_k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ естественный в том смысле, что

$$\{\alpha_n\} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n e_n. \tag{5}$$

Но

$$(Ie_n)(x) = \frac{x_n}{n!} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{6}$$

в силу в). Из (5) и (6) по непрерывности оператора $I$ следует

$$I(\{\alpha_n\})(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \frac{x^n}{n!}, \tag{7}$$

где ряд сходится в смысле $\Sigma$ и, тем более, поточечно. Следовательно, ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n!}$$

сходится при всех $\{\alpha_n\} \in \sigma$. По теореме Банаха — Штейнгауза

$$\left\{\frac{1}{n!}\right\} \in \sigma^*,$$

вопреки условию 3).

Теорема доказана.

*Замечание 1.* Условия 1) —2) в классе $F$-пространств эквивалентны тому, что орты $e_k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ образуют в $\sigma$ естественный базис. Нетрудно убедиться, что между собой эти условия независимы.

Пространство последовательностей, в котором орты образуют естественный базис, мы будем называть *координатным пространством.*

*Замечание 2.* Условие а) можно заменить более слабым требованием непрерывности линейных функционалов $f^{(n)}(0)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ и $f(1)$.

*Замечание 3.* Если отбросить условие 3), то утверждение теоремы заменится утверждением о том, что если решение задачи (1), принадлежащее $\Sigma$, существует, то оно единственно и определяется рядом Тейлора (7), сходящимся на $[0, 1]$; следовательно, решение аналитически продолжается в единичный круг.

Приводимое ниже следствие иллюстрирует теорему 1. Прежде чем его формулировать, введем некоторые обозначения. Пусть $\{m_n\}$ $(n \geqslant 0)$ — последовательность положительных чисел и $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Рассмотрим пространство последовательностей $a = \{\alpha_n\}$, для которых конечна норма

$$\|a\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha_n|^p}{m_n^p}\right)^{\frac{1}{p}} & (p < \infty) \\ \sup\limits_n \frac{|\alpha_n|}{m_n} & (p = \infty). \end{cases}$$

Это банахово пространство обозначим через $l_p\{m_n\}$.

Пусть $\{M_n\}$ $(n \geqslant 0)$ — еще одна последовательность положительных чисел. Через $C^\infty\{M_n\}$ обозначим банахово пространство бесконечно дифференцируемых функций $f(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$, для которых конечна норма

$$\|f\| = \sup_n \frac{\|f^{(n)}\|_c}{M_n}.$$

($\|\cdot\|_C$ — обычная норма в $C[0, 1]$).

Следствие. *Пусть $C^\infty\{M_n\}$ — квазианалитический класс. Если при $p > 1$*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{m_n}{n!}\right)^q = \infty, \tag{8}$$

*а при $p = 1$*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{m_n}{n!} = \infty, \tag{9}$$

*то в пространстве $l_p\{m_n\}$ существует последовательность $\{\alpha_n\}$, для которой ни одно решение задачи* (1) *не принадлежит $C^\infty\{M_n\}$.*

Условие (8) при $p < \infty$ выражает тот факт, что последовательность $\left\{\frac{1}{n!}\right\}$ не принадлежит пространству $l_q\left\{\frac{1}{m_n}\right\}$, сопряженному с $l_p\{m_n\}$. Аналогичный факт выражает условие (9). При $p = \infty$ теорему 1 надлежит применить не к $l_\infty\{m_n\}$ а к его подпространству, натянутому на орты $e_k$. Это подпространство выделяется условием

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{m_n} = 0,$$

а его сопряженное есть $l_1\left\{\frac{1}{m_n}\right\}_\infty$.

Рассмотрим теперь пространство $C^\infty$ всех бесконечно дифференцируемых функций на $[0, 1]$, наделенное топологией равномерной сходимости со всеми производными*. Через $D$ будем теперь обозначать оператор из $C^\infty$ в $s$, определяемый прежней формулой (3). Этот оператор, очевидно, непрерывен. По теореме Бореля $D$ — эпиморфизм (т. е. $\operatorname{Im} D = s$). Поэтому существует линейный оператор $I: s \to C^\infty$, правый обратный к $D$, т. е. разрешающий задачу (1) на всем $s$.

**Теорема 2.** *Не существует непрерывного линейного оператора $I: s \to C^\infty$, правого обратного к $D$.*

Доказательство. Пространство $s$ — координатное. Поэтому, если требуемый оператор $I$ существует, то

$$I(\{\alpha_n\}) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n I e_n.$$

Так как полученный ряд сходится в $C^\infty$, то он сходится в $C$ и, следовательно,

$$\sup_n |\alpha_n| \, \|Ie_n\|_C < \infty. \tag{10}$$

---

* Эта топология определяется метрикой

$$\rho(f, g) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \|f^{(n)} - g^{(n)}\|_C (1 + \|f^{(n)} - g^{(n)}\|_C)^{-1}.$$

Таким образом, $C^\infty$ есть $F$ — пространство.

Так как условие (10) должно выполняться на всем пространстве $s$, то $Ie_n = 0$, начиная с некоторого номера. Но это противоречит тому, что $I$ обязан быть мономорфизмом ввиду наличия у него левого обратного.

Проведенное рассуждение можно значительно обобщить и на этом пути получить исчерпывающее описание тех координатных пространств, для которых задача (1) разрешима линейно и непрерывно.

***Лемма***. *Если $\sigma$ — координатное пространство, $B$ — банахово пространство и $j : \sigma \to B$ — непрерывный линейный оператор, причем $je_n \neq 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, то пространство $\sigma$ непрерывно вкладывается в $l_\infty \{m_n\}$, где $m_n = \| je_n \|^{-1}$.*

Доказательство. Обозначим через $P_k$ оператор естественного проектирования пространства $\sigma$ на одномерное подпространство, порождаемое ортом $e_k$. По теореме Банаха — Штейнгауза семейство операторов $P_k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ равностепенно непрерывно. Но тогда этим свойством обладает и семейство функционалов

$$\| jP_k \{\alpha_n\} \| = | \alpha_k | \, \| je_k \| \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Следовательно, функционал

$$\nu(\{\alpha_n\}) = \sup_n | \alpha_n | \, \| je_n \| = \sup_n \frac{|\alpha_n|}{m_n}$$

непрерывен на $\sigma$, что и доказывает лемму.

**Теорема 3.** *Для того чтобы на координатном пространстве $\sigma$ существовал непрерывный линейный оператор $I : \sigma \to C^\infty$, правый обратный к $D$, необходимо и достаточно, чтобы $\sigma$ непрерывно вкладывалось в некоторое $l_\infty \{m_n\}$.*

Необходимость вытекает из леммы, если положить $B = C$, $j = iI$, где $i : C^\infty \to C$ — вложение.

Для доказательства достаточности приведем одну из конструкций*, разрешающих задачу (1). Пусть $\Phi(x)$ $(0 \leqslant x < \infty)$ бесконечно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям

$$\Phi'(0) = 1, \quad \Phi^{(k)}(0) = 0 \quad (k = 0, 2, 3, \ldots)$$

и

$$|\Phi(x)| \leqslant 1 \quad (0 \leqslant x < \infty).$$

Положим

$$\Phi_n(x) = \frac{1}{m_n} \Phi(m_n x) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

и определим линейный оператор $\tilde{I} : l_\infty \{m_n\} \to C^\infty$, полагая

$$\tilde{I}(\{\alpha_n\})(x) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \left[ \left( \int_0^x \right)^{n-1} \Phi_n \right](x).$$

Непосредственно проверяется, что этот оператор разрешает задачу (1) и непрерывен. Его ограничение на пространство $\sigma$ есть искомый оператор $I$.

Построенный оператор $\tilde{I}$ не обладает какими-либо естественными свойствами, кроме линейности и непрерывности: он не перестановочен с дифференцированием, не перестановочен подобным преобразованием независимого переменного и т. д. Мы покажем, что эти отрицательные эффекты не могут быть устранены изменением конструкции.

---

* Эту конструкцию нам предложил Г. Р. Белицкий.

**Теорема 4.** *Пусть $\sigma$ — координатное пространство, инвариантное относительно оператора левого сдвига $T: s \to s$, действующего по формуле*

$$T\{a_n'\} = \{a_{n+1}\}.$$

*Если существует непрерывный линейный оператор $I: \sigma \to C^\infty$, правый обратный к $D$ и перестановочный с дифференцированием в том смысле, что диаграмма*

$$\begin{tikzcd} \sigma \arrow[r, "I"] \arrow[d, "T"'] & C^\infty \arrow[d, "\frac{d}{dx}"] \\ \sigma \arrow[r, "I"] & C^\infty \end{tikzcd}$$

*коммутативна, то* $\left\{\frac{1}{n!}\right\} \in \sigma^*$.

Следует подчеркнуть, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} C^\infty \arrow[r, "D"] \arrow[d, "\frac{d}{dx}"'] & s \arrow[d, "T"] \\ C^\infty \arrow[r, "D"] & s \end{tikzcd}$$

очевидно, коммутативна.

Доказательство. Так как

$$Te_n = e_{n-1} \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\ e_{-1} = 0),$$

то

$$\frac{d}{dx} Ie_n = Ie_{n-1} \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

откуда по индукции следует, что $Ie_n$ — полином, степени не выше $n$. Но тогда

$$(Ie_n)(x) = \frac{x^n}{n!},$$

и по непрерывности

$$I(\{a_n\})(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!},$$

где ряд сходится в $C^\infty$. Тем более, сходится ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!},$$

откуда следует, что $\left\{\frac{1}{n!}\right\} \in \sigma^*$.

Рассмотрим теперь в $S$ мультипликативную полугруппу операторов $H_t (0 \leqslant t \leqslant 1)$ подобного преобразования независимого переменного,

$$(H_t f)(x) = f(tx).$$

Соответственно в $s$ рассмотрим полугруппу $h_t (0 \leqslant t \leqslant 1)$ операторов.

$$h_t\{a_n\} = \{a_n t^n\}.$$

Очевидно, $C^\infty$ инвариантно относительно $H_t$ и диаграмма

$$\begin{tikzcd} C^\infty \arrow[r, "D"] \arrow[d, "H_t"'] & s \arrow[d, "h_t"] \\ C^\infty \arrow[r, "D"] & s \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Отметим, что любое координатное пространство $\sigma$ инвариантно относительно $h_t$, так как из сходимости ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k e_k$$

по «теореме Абеля» следует сходимость ряда* при всех $t \in [0, 1]$.

**Теорема 5.** *Пусть $\sigma$ — координатное пространство. Если существует непрерывный линейный оператор $I: \sigma \to C^\infty$, правый обратный к $D$ и перестановочный с полугруппой подобных преобразований в том смысле, что диаграмма*

$$\begin{tikzcd} \sigma \arrow[r, "I"] \arrow[d, "h_t"'] & C^\infty \arrow[d, "H_t"] \\ \sigma \arrow[r, "I"] & C^\infty \end{tikzcd}$$

*коммутативна, то* $\left\{\frac{1}{n!}\right\} \in \sigma^*$.

Доказательство. Очевидно

$$(Ie_n)(x) = \frac{x^n}{n!}(1 + \varepsilon_n(x)),$$

где

$$\varepsilon_n \in C^\infty \text{ и } \varepsilon_n^{(k)}(0) = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Поэтому

$$I(\{a_n\})(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \frac{x^n}{n!}(1 + \varepsilon_n(x)),$$

где ряд сходится в смысле $C^\infty$. В силу коммутативности диаграммы

$$I(\{a_n\})(tx) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \frac{x^n}{n!}(1 + \varepsilon_n(x)). \tag{11}$$

Получился степенной ряд по $t$, сходящийся при каждом $t \in [0, 1]$ и при каждом $x \in [0, 1]$. Дифференцируя по $t$ в точке $t = 0$, получаем

$$a_k x^k = a_k x^k (1 + \varepsilon_k(x)) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

откуда $\varepsilon_k = 0\,(k = 0, 1, 2, \ldots)$, после чего ряд (11) становится степенным и доказательство заканчивается стандартным образом.

В заключение мы покажем, что в некотором модифицированном смысле задача (1) разрешима линейно и непрерывно на всем $s$. Обозначим через $N$ подпространство тех функций из $C^\infty$, которые удовлетворяют условиям (2) (т. е. $N = \operatorname{Ker} D$).

**Теорема 6.** *Ряд Тейлора*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$$

*для любой последовательности $\{a_n\}$ сходится в смысле фактор-пространства $C_N^\infty = C^\infty / N$.*

---

* Классическая теорема Абеля непосредственно обобщается на любые полные локально выпуклые пространства: достаточно провести обычное рассуждение для каждой из фундаментальных полунорм.

Этот ряд определяет линейный непрерывный оператор $R: s \to C_N^\infty$. Оператор $R$ является двусторонним обратным к фактор-оператору $D_N$, определяемому коммутативной диаграммой

$$\begin{array}{ccc} C^\infty & \xrightarrow{D} & s \\ & \varphi\searrow \quad \nearrow D_N, & \\ & C_N^\infty & \end{array}$$

где $\varphi$ — естественное отображение. Тем самым,

$$RD = \varphi. \tag{12}$$

Доказательство. Пусть $\{m_n\}$ — какая-нибудь мажоранта последовательности $a = \{\alpha_n\}$. Согласно теореме 3 существует непрерывный линейный оператор $I: l_1\{m_n\} \to C^\infty$, разрешающий задачу (1). Положим

$$Ia = f$$

и рассмотрим далее оператор $P_k$ естественного проектирования пространства $l_1\{m_n\}$ на линейную оболочку ортов $e_0, \ldots, e_k$. Очевидно,

$$\lim_{k \to \infty} P_k a = a,$$

откуда

$$f = \lim_{k \to \infty} IP_k a.$$

Остается заметить, что

$$(IP_k a)(x) - \sum_{n=0} \alpha_n \frac{x^n}{n!} \in N.$$

Из теоремы 6 вытекают некоторые чисто геометрические заключения.

Следствие 1. *$F$-пространства $s$ и $C^\infty / N$ изоморфны.*

Следствие 2. *Подпространство $N$ недополняемо в $C^\infty$.*

Действительно, если бы $N$ было дополняемо в $C^\infty$, то у оператора $\varphi$ был бы непрерывный правый обратный $\psi$. Тогда из (12).

$$RD\psi = 1,$$

*и в силу двусторонней обратимости оператора* $R$

$$D\psi R = 1.$$

Это противоречит теореме 2.

## ЛИТЕРАТУРА

1. E. Borel. Ann. Ecole Norm. Sup. (3), 12 (1895).
2. T. Carleman. Les fonctions quasi analytiques, Paris, 1926.
3. Б. С. Митягин. ДАН СССР, 138, № 2. 1961, 289—292.
4. Н. Бурбаки. Топологические векторные пространства. ИЛ М.. 1959.

*Поступила 22 мая 1968 г.*