УДК 517.5

Ю. И. ЛЮБАРСКИЙ

АНАЛОГИ ПРОСТРАНСТВ В. И. СМИРНОВА ДЛЯ НЕЦЕЛЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ

§ 1. Введение. а. Пусть S — функция типа синуса (ф. т. с.) (определение этого класса, введенного Б. Я. Левиным в [1], приведено ниже), $\Lambda = \{\lambda_k\}_{-\infty}^{\infty}$ — множество ее корней, занумерованных в порядке неубывания их вещественных частей. В настоящей работе излучаются свойства систем $\mathscr{E}(\Lambda) = \{\exp(i\lambda_n t)\}_{-\infty}^{\infty}$, $\mathscr{E}^+(\Lambda) = \{\exp(i\lambda_n t)\}_{n>0}$, $\mathscr{E}^-(\Lambda) = \{\exp(i\lambda_n t)\}_{n\leqslant 0}$ в пространствах $L^2(\Gamma)$, где Γ — кусочно-гладкая кривая, соединяющая точки $-\pi$ и $+\pi$. Если дополнительно $\zeta + 2\pi \notin \Gamma$, $\forall \xi \in \Gamma \setminus \{-\pi\}$, то при замене переменных $t \mapsto z = \exp(it)$ кривая Γ переходит в простую замкнутую кривую $\exp(i\Gamma)$, охватывающую ноль, а системы $\mathscr{E}(\Lambda)$ $\mathscr{E}^+(\Lambda)$, $\mathscr{E}^-(\Lambda)$ — в системы степеней $\{z^{\lambda_n}\}_{-\infty}^{\infty}$, $\{z^{\lambda}\}_{n>0}$, $\{z^{\lambda_n}\}_{n\leqslant 0}$. В случае $\Lambda = \boldsymbol{Z}$ замыкание линейных оболочек систем $\{z^n\}_{n\geqslant 0}$, $\{z^n\}_{n<0}$ по норме пространства $L^2(\exp(i\Gamma))$ совпадает с классическими пространствами В. И. Смирнова (определение см., например, в [2]) соответственно во внутренности и внешности, области, ограниченной кривой $\exp(i\Gamma)$. Цель данной работы — установить, при каких условиях свойства классических пространств В. И. Смирнова можно перенести на замыкания линейных оболочек систем $\mathscr{E}^{\pm}(\Lambda)$ в $L^2(\Gamma)$ и, хотя бы частично, провести это перенесение.

б. Перечислим обозначения, принятые на протяжении всей работы. Через Δ обозначается отрезок $[-\pi, \pi]$; $\boldsymbol{C}^{\pm} = \{z \in \boldsymbol{C}\colon \pm \operatorname{Im} z > 0\}$; черта обозначает комплексное сопряжение. При $a \in \boldsymbol{C}$, $r > 0$ положим $D(a, r) = \{\lambda \in \boldsymbol{C} : |\lambda - a| < r\}$. Через $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$ обозначим функции, равные соответственно нулю и единице на своих областях определения. Пусть $\mathscr{H}$ — нормированное пространство, множество $X \subset \mathscr{H}$. Тогда $B(\mathscr{H}) = \{x \in \mathscr{H}\colon \|x\| \leqslant 1\}$; $\operatorname{clos}(X)$, $\operatorname{conv}(X)$, $\operatorname{lin}(X)$ обозначают соответственно замыкание X, выпуклую и линейную оболочки X. Если S — целая функция экспоненциального типа (ц. ф. э. т.), то $\Lambda = \Lambda(S)$ — множество ее корней, $\mathscr{E}(S) = \mathscr{E}(\Lambda)$, $\mathscr{E}^{\pm}(S) = \mathscr{E}^{\pm}(\Lambda)$ — соответствующие системы экспонент.

в. Дополнительные предположения, предварительные сведения.

Определение. *Пусть* $\theta \in (0, \pi)$. *Контур* Γ *назовем* **θ-графиком**, *если при каждом* $x \in \boldsymbol{R}$ *прямая* $\{z \in \boldsymbol{C};\ z = x + t \exp(i\theta),\ t \in \boldsymbol{R}\}$ *пересекает* Γ *не более чем в одной точке.*

Всюду ниже будем считать, что при некотором $\theta \in (0, \pi)$ Γ — кусочно-гладкий θ-график, соединяющий точки $-\pi$ и π.

Через D_Γ обозначим объединение связных компонент $D_1, \ldots, D_n$ множества $\boldsymbol{C} \diagdown (\Delta \cup \Gamma)$, не содержащих бесконечно удаленной точки, для простоты будем считать, что их — конечное число. Пространством В. И. Смирнова $E^2(D_\Gamma)$ назовем пространство голоморфных в D_Γ функций f таких, что при каждом $j \in 1, \ldots, n$ сужение f на D_j принадлежит $E^2(D_j)$ — пространству В. И. Смирнова в D_j.

Напомним, что ц. ф. э. т. S называется ф. т. с., если

i) все ее кони $\{\lambda_k\}$ — простые и

$$\sup_k |\operatorname{Im} \lambda_k| < \infty;\quad \inf_{m \neq k} |\lambda_m - \lambda_k| > 0;$$

ii) при любом $\delta > 0$

$$|S(\lambda)| \exp(-\pi |\operatorname{Im} \lambda|) \asymp 1,\ \operatorname{dist}(\lambda, \Lambda) > \delta. \tag{1.1}$$

Определим функции $\psi_k \in L^2(\Delta)$ соотношениями

$$\frac{S(\lambda)}{S'(\lambda_k)(\lambda - \lambda_k)} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} \psi_k(t)\, dt,\ k \in \boldsymbol{Z}. \tag{1.2}$$

Из (1.2), в частности, следует

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda_m t} \psi_k(t)\, dt = \delta_{k,m},\ k, m \in \boldsymbol{Z}. \tag{1.3}$$

Двойное интегрирование по частям в (1.2) дает

$$S'(\lambda_m)\psi_m(t) = S'(\lambda_k)\left[i(\lambda_k - \lambda_m) \int_{-\pi}^{t} e^{i\lambda_m(\tau - t)} \psi_k(\tau)\, d\tau + \psi_k(t)\right] =$$

$$= S'(\lambda_k)\left[-i(\lambda_k - \lambda_m) \int_{t}^{\pi} e^{i\lambda_m(\tau - t)} \psi_k(\tau)\, d\tau + \psi_k(t)\right]. \tag{1.4}$$

Мы будем использовать следующую теорему (см. [3], с. 77) о полноте и минимальности системы $\mathscr{E}(S)$ в $L^2(\Gamma)$.

Теорема А. *В сделанных выше предположениях*

i) *система* $\mathscr{E}(S)$ *полна в пространстве* $L^2(\Gamma)$;

ii) *для минимальности* $\mathscr{E}(S)$ *в* $L^2(\Gamma)$ *необходимо и достаточно существование функции* $f_0 \in E^2(D_\Gamma)$ *такой, что* $f_0|_\Delta = \psi_0$ **(1.5).**

Всюду ниже будет рассмотрен случай, когда $\mathscr{E}(S)$ минимальна в $L^2(\Gamma)$. В этом случае из теоремы А, (1.4) при $k = 0$ и (1.5) следует, что все функции ψ_m продолжаются с Δ до функций из пространства $E^2(D_\Gamma)$ и их сужение на Γ образуют систему, биортогональную на Γ к $\mathscr{E}(S)$. Будем рассматривать следующие системы функций в $L^2(\Gamma)$: $\Psi(S) = \{\psi_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$; $\Psi^+(S) = \{\psi_k\}_{k>0}$; $\Psi^-(S) = \{\psi_k\}_{k<0}$.

В § 2 будет доказана полнота системы $\Psi(S)$ в $L^2(\Gamma)$, в § 3 исследуются свойства подпространств $L^2(\Gamma)$, порожденных системами $\Psi^\pm(S)$, $\mathscr{E}^\pm(S)$.

§ 2. Полнота биортогональной системы. а. **Теорема 1.** *Система $\Psi(S)$ полна в пространстве $L^2(\Gamma)$.*

б. Доказательство проведем, считая для простоты, что $\theta=\pi/2$, ниже в п⁰ г будут указаны изменения в рассуждениях, которые нужно внести при $\theta\neq\pi/2$.

Пусть $\Psi(S)$ не полна в $L^2(\Gamma)$. Тогда для некоторой $\varphi\in L^2(\Gamma)$, $\varphi\neq 0$

$$\int_\Gamma \varphi(s)\,\psi_m(s)\,ds=0,\ \ m\in \boldsymbol{Z}. \tag{2.1}$$

Для $\xi\in\Gamma$ через $\Gamma^\pm(\xi)$ обозначим дуги контура Γ, соединяющие точку ξ с точками $\pm\pi$ соответственно. Пусть для простоты $\lambda_0=0$. Соотношения (1.4) при $k=0$ и (2.1) дают

$$i\lambda_m\int_\Gamma \varphi(\xi)\,e^{-i\lambda_m\zeta}\int_{\Gamma^\pm(\xi)} e^{i\lambda_m s}\psi_0(s)\,ds\,d\zeta=0,\ \ m\in\boldsymbol{Z}.$$

Докажем, что каждая из ц. ф. э. т.

$$\Omega^\pm(\lambda)=\lambda\int_\Gamma \varphi(\xi)\,e^{-i\lambda\xi}\int_{\Gamma^\pm(\xi)} e^{i\lambda s}\psi_0(s)\,ds\,d\zeta, \tag{2.2}$$

обращающихся в ноль на Λ, тождественно равна нулю. Рассмотрим, например, функцию Ω^+. Ее индикаторная диаграмма $I_{\Omega^+}\subset\operatorname{conv}(iG_\Gamma^+)$, где $G_\Gamma^+=\{s-\xi,\ \xi\in\Gamma,\ s\in\Gamma^+(\xi)\}$. Из того, что Γ — $\pi/2$-график, следует, что при $s\in\Gamma^+(\xi)$ верно $0<\operatorname{Re}(s-\xi)<\pi-\operatorname{Re}\xi$. Поэтому все множество G_Γ^+ расположено в вертикальной полосе $\{\xi\in\boldsymbol{C}:0\leqslant\operatorname{Re}\xi\leqslant 2\pi\}$. Легко видеть, что единственный отрезок длиной 2π, параллельный вещественной оси и содержащийся в G_Γ^+, есть отрезок $[0,2\pi]$. Соответственно $[-2i\pi,0]$ — единственный отрезок длиной 2π, параллельный мнимой оси и содержащийся в $\operatorname{conv}(iG_\Gamma^+)$. Из теоремы о сложении индикаторов ([4], гл. III, теорема 5) следует, что целая функция $\Delta^+(\lambda)=$ $=e^{-i\pi\lambda}\Omega^+(\lambda)\,S(\lambda)^{-1}$ есть ц. ф. э. т. ноль. Грубые оценки функции Δ^+ на мнимой оси дают

$$|\Delta^+(i\eta)|\overset{\text{ас}}{\leqslant} C_1|\Omega^+(i\eta)|\leqslant C_2|\eta|\max_{z\in G_\Gamma^+}\{e^{-\operatorname{Re}\eta z}\}\leqslant C_3\eta,\ \ \eta\to+\infty;$$

$$|\Delta^+(i\eta)|\overset{\text{ас}}{\leqslant} C_4|e^{2i\pi(i\eta)}\Omega^+(i\eta)|\leqslant C_5|\eta|\max_{z\in G_\Gamma^+}\{e^{-\operatorname{Re}(\eta z+2\eta\pi)}\}\leqslant C_6|\eta|,$$

$$\eta\to-\infty.$$

Из этих оценок следует, что при некоторых $a,b\in\boldsymbol{C}$ верно
$$\Delta^+(\lambda)=a\lambda+b \tag{2.3}.$$

Лемма 1.

$$\int_1^\infty |\Delta^+(-i\eta)|\,\eta^{-1}\,d\eta < \infty. \tag{2.4}$$

Доказательство этой леммы будет дано ниже.

Из (2.3), (2.4) следует $\Delta^+ = 0$, откуда, в свою очередь, $\Omega^+ = 0$. Равенство $\Omega^- = 0$ устанавливается аналогично. Имеем теперь

$$0 = \Omega^-(\lambda) + \Omega^+(\lambda) = \lambda \int_\Gamma \varphi(\xi)\, e^{-i\lambda\xi} \left(\int_{\Gamma^-(\xi)} + \int_{\Gamma^+(\xi)} \right) e^{i\lambda s} \psi_0(s)\, ds\, d\xi =$$

$$= \lambda \int_\Gamma \varphi(\xi)\, e^{-i\lambda\xi} \int_\Gamma e^{i\lambda s}\psi_0(s)\, ds\, d\xi = S(\lambda) \int_\Gamma \varphi(\xi)\, e^{-i\lambda\xi}\, d\xi.$$

Отсюда следует, что

$$\int_\Gamma \varphi(\xi)\, e^{-i\lambda\xi}\, d\xi = 0$$

и $\varphi = 0$. С точностью до леммы 1 теорема 1 доказана.

в. Доказательство леммы 1 основано на следующем утверждении.

Лемма 2. *Пусть c — кусочно-гладкий контур конечной длины в $\mathbf{C}$ и $h(-\omega)$ — опорная функция множества* $\operatorname{conv}(c)$. *Для каждого $\omega \in [0, 2\pi]$ соотношения $T_\omega : f \to (T_\omega f)(r) = \int_c f(\xi) \exp[r(\xi e^{i\omega} - h(\omega))]\, d\xi$ определяют ограниченный оператор из $L^2(c)$ в $L^2(0, \infty)$.*

Утверждение этой леммы есть простое следствие из теоремы о мерах Карлесона (см., например, [5], гл. 1, теорема 5.6).

Замечание. При этом легко видеть, что норма операторов T_ω допускает равномерную по $\omega \in [0, 2\pi]$ оценку, зависящую только от максимума по $\omega \in [0, 2\pi]$ нормы Карлесона (см., например [5], с. 40) меры, порожденной в левой полуплоскости длиной дуги кривой $c \exp(-i\omega) - h(-\omega)$.

Из (1.1) следует, что для доказательства (2.4) достаточно установить

$$\int_1^\infty |\Omega^+(-i\eta)|\, e^{-2\pi\eta}\eta^{-1}\, d\eta < \infty. \tag{2.5}$$

Выделим на Γ дуги $l_1 = \{\xi \in \Gamma,\ \operatorname{Re}\xi < -\pi + \varepsilon\}$, $l_2 = \Gamma \setminus l_1$; $m_1 = \{\xi \in \Gamma,\ \operatorname{Re}\xi < \pi - \varepsilon\}$, $m_2 = \Gamma \setminus m_1$, ориентированные в направлении возрастания $\operatorname{Re}\xi$. Имеем

$$\Omega^+(\lambda) = \lambda \left(\int_{l_1} + \int_{l_2} \right) \varphi(\xi)\, e^{-i\lambda\xi} \int_{\Gamma^+(\xi)} e^{i\lambda s}\psi_0(s)\, ds\, d\xi =$$

$$= -\lambda \int_{l_1} \varphi(\xi)\, e^{-i\lambda\xi} \int_{m_2} e^{i\lambda s}\psi_0(s)\, ds\, d\xi + \lambda \int_{l_1} \varphi(\xi)\, e^{-i\lambda\xi} \int_{\Gamma^+(\xi)\setminus m_2} e^{i\lambda s}\psi_0(s)\, ds\, d\xi +$$

$$+ \lambda \int_{l_2} \varphi(\xi)\, e^{-i\lambda\xi} \int_{\Gamma^+(\xi)} e^{i\lambda s}\psi_0(s)\, ds\, d\xi = \Omega_1^+ + \Omega_2^+ + \Omega_3^+.$$

Очевидно, $I_{\Omega_2^+}$, $I_{\Omega_3^+} \subset \{\xi : \operatorname{Im}\xi > -2\pi + \varepsilon\}$, поэтому соотношение (2.5) с заменой Ω^+ на Ω_2^+, Ω_3^+ заведомо выполнено и для доказательства леммы 1 достаточно установить

$$\int_1^\infty |\Omega_1^+(-i\eta)| e^{-2\pi\eta}\eta^{-1}\, d\eta < \infty. \tag{2.6}$$

Положим $\Omega_1(\lambda) = \lambda M(\lambda) L(\lambda)$, где

$$L(\lambda) = \int_{l_1} \varphi(\xi) e^{-i\lambda\xi}\, d\xi;\ \ M(\lambda) = \int_{m_2} e^{i\lambda s}\psi_0(s)\, ds.$$

Лемма 2 дает теперь

$$\int_1^\infty |L(-i\eta)|^2 e^{-2\pi\eta}\, d\eta < \infty,\ \int_1^\infty |M(-i\eta)|^2 e^{-2\pi\eta}\, d\eta < \infty.$$

Отсюда с помощью неравенства Коши—Буняковского следует (2.6). Лемма 1, а с ней и теорема 1 доказаны.

г. В случае $\theta \neq \pi/2$ рассуждения проводятся аналогично с той разницей, что оценки даются вдоль прямых, определяемых по величине θ. Так, индикаторная диаграмма функции Ω^+ лежит в полосе $\{z : 0 > \operatorname{Im}(iz\exp(+i\theta)) > -2\pi\sin\theta\}$, оценки функции Δ^+ (определяемой тем же соотношением, что и в n^0 б) даются не на мнимой оси, а на прямой $\boldsymbol{R}\exp(i\theta)$, в лемме 1 вместо интеграла по лучу $[-i, -i\infty)$ нужно взять интеграл по лучу $(-\infty, -1]\exp(i\theta)$ и т. д.

§ 3. Аналоги пространств В. И. Смирнова. а) Если H_1, H_2 — замкнутые подпространства гильбертова пространства H, такие, что $H_1 \cap H_2 = \{0\}$, то через $\langle H_1, H_2\rangle$ будем обозначать угол между этими подпространствами, а через $\mathcal{P}_{H_1\|H_2}$ — проектор (возможно неограниченный) прямой суммы $H_1 \dotplus H_2$ на H_1 параллельно H_2.

Рассмотрим следующие подпространства пространства $L^2(\Gamma)$:

$$E_+ = E_+^2(\Gamma) = \operatorname{clos}(\operatorname{lin}(\{e^{i\lambda_n\xi}\}_{n\geq 0}));$$
$$E_- = E_-^2(\Gamma) = \operatorname{clos}(\operatorname{lin}(\{e^{i\lambda_n\xi}\}_{n<0}));$$
$$B_+ = B_+^2(\Gamma) = \operatorname{clos}(\operatorname{lin}(\{\psi_n\}_{n\geq 0}));\quad B_- = B_-^2(\Gamma) = \operatorname{clos}(\operatorname{lin}(\{\psi_n\}_{n<0})).$$

Эти подпространства являются аналогами пространств В. И. Смирнова для последовательности показателей Λ. Заметим, что в случае $\Lambda = \boldsymbol{Z}$ имеет место совпадение $\mathcal{E}(S) = \Psi(S)$ и возникает только одна пара подпространств.

Теорему о разложении пространства $L^2(\ )$ в прямую сумму пространств E_+, E_- удается доказать при дополнительных ограничениях на функцию S.

Теорема 2. *Пусть ф. т. с. такова, что функция ψ_0, определенная соотношением (1.2) при $k = 0$, имеет производную $\psi_0' \in E^2(D_\Gamma)$. Тогда $\langle E_+^2(\Gamma), E_-^2(\Gamma)\rangle > 0$; $\langle B_+^2(\Gamma), B_-^2(\Gamma)\rangle > 0$ и, таким образом, имеют* *место равенства* $L^2(\Gamma) = E_+^2(\Gamma) \dot{+} E_-^2(\Gamma) = B_+^2(\Gamma) \dot{+} B_-^2(\Gamma)$. *При этом проектор* $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{E_-\|E_+}$ *имеет вид*

$$\mathcal{P}: f \mapsto \frac{1}{2} f(z) - \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi + \frac{i}{2\pi} \frac{\psi_0(\pi)}{\psi_0(-\pi)} \int_\Gamma \frac{f(\xi)}{2\pi - z + \xi} d\xi +$$

$$+ \frac{i}{2\pi} \frac{\psi_0(-\pi)}{\psi_0(\pi)} \int_\Gamma \frac{f(\xi)}{-2\pi - z + \xi} d\xi + \int_\Gamma f(\xi)\, l(z, \xi)\, d\xi, \tag{3.1}$$

где функция $l(z, \xi)$ *определена и голоморфна по* z и ξ при $z \in \Pi_\theta = \{z : z = x + y \exp(i\theta), -\pi < x < \pi, y \in \boldsymbol{R}\}$, $\xi \in D_\Gamma$, *при каждом* $z \in \Pi_\theta$ *принадлежит пространству* $E^2(D_\Gamma)$ *как функция от* ξ *и порождает вполне непрерывный оператор в пространстве* $L^2(\Gamma)$.

б. Доказательство теоремы 2 проведем, считая для простоты $\theta = \pi/2$. В π^0 и будет указано, какие изменения нужно провести в общем случае. Кроме того, будем для простоты считать, что $\Gamma \setminus \{-\pi, \pi\} \subset \boldsymbol{C}_-$. В этом случае D_Γ связна.

Достаточно построить ограниченный проектор $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{E_-\|E^+}$. Для этого рассмотрим ряд

$$k(\xi, s) = \sum_{m<0} \psi_m(\xi)\, e^{i\lambda_m s}. \tag{3.2}$$

Легко видеть, что при каждом $s \in \boldsymbol{C}_-$ ряд (3.2) сходится равномерно по $\xi \in \Delta$. Положим $\Pi = \Pi_{\pi/2}$ и при каждом $s \in \boldsymbol{C}_- \cap \Pi$ найдем сумму ряда (3.2) в смысле слабой сходимости в $L^2(\Delta)$, т. е. функцию $k(\cdot, s) \in L^2(\Delta)$ такую, что при любой $\varphi \in L^2(\Delta)$

$$\lim_{N\to\infty} \sum_N^{-1} e^{i\lambda_m s} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\xi)\, \psi_m(\xi)\, d\xi = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\xi)\, k(\xi, s)\, d\xi.$$

Функция $k(\xi, s)$ будет суммой ряда (3.2) и в смысле сходимости в $L^2(\Delta)$. Имеем

$$k_N(\xi, s) \overset{\text{def}}{=} \sum_{-N}^{-1} e^{i\lambda_m s} \psi_m(\xi) = \sum_{-N}^{-1} e^{i\lambda_m s} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S(\lambda)\, e^{-i\lambda\xi}\, d\lambda}{S'(\lambda_m)(\lambda - \lambda_m)} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\lambda)\, e^{-i\lambda\xi} \left(\sum_{-N}^{-1} \frac{e^{i\lambda_m s}}{S'(\lambda_m)(\lambda - \lambda_m)} \right) d\lambda. \tag{3.3}$$

Пусть для простоты $\lambda_0 = 0$ и $\pm \operatorname{Re} \lambda_m > 0$ при $\pm m > 0$. Для вычисления внутренней суммы в правой части (3.3) рассмотрим расширяющуюся последовательность областей $\{D_N\}$, ограниченных контурами $C_N = L_N \cup K_N \cup T_\delta$, где $L_N = [-iR_N, -i\delta] \cup [i\delta\, iR_N]$, $K_N = \{\lambda : |\lambda| = R_N, \operatorname{Re}\lambda \leqslant 0\}$, $T_\delta = \{\lambda : |\lambda| = \delta, \operatorname{Re}\lambda \leqslant 0\}$, здесь не зависящее от N число $\delta > 0$ и последовательность $R_N \nearrow +\infty$ выбраны таким образом, чтобы $D_N \cap \boldsymbol{\Lambda} = \{\lambda_m\}_{-N}^{-1}$; $\inf_N \{\operatorname{dist}(C_N, \boldsymbol{\Lambda})\} > 0$. Положим $\chi_N(\lambda) = 1$, $\lambda \in D_N$; $\chi_N(\lambda) = 0$, $\lambda \notin D_N$. По теореме о вычетах

$$\sum_{-N}^{-1} \frac{e^{i\lambda_m s}}{S'(\lambda_m)(\lambda - \lambda_m)} = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_N} \frac{e^{i\mu s}\, d\mu}{S(\mu)(\lambda - \mu)} + \chi_N(\lambda) \frac{e^{i\lambda s}}{S(\lambda)},$$

Возвращаясь к (3.3), имеем

$$k_N(\xi, s) = \frac{1}{2\pi}\int_{-R_N}^{-\delta} e^{i\lambda(s-\xi)}\,d\lambda + \frac{1}{4i\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} S(\lambda)\,e^{i\lambda s}\left(\int_{L_N}\frac{e^{i\mu s}}{S(\mu)(\lambda-\mu)}\,d\mu\right)d\lambda +$$

$$+\frac{1}{4i\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} S(\lambda)\,e^{-i\lambda\xi}\int_{K_N}\frac{e^{i\mu s}}{S(\mu)(\lambda-\mu)}\,d\mu\,d\lambda = k_N^{(1)} + k_N^{(2)} + k_N^{(3)}. \quad (3.4)$$

в. Слагаемое $k_N^{(1)}$ вычисляется явно:

$$k_N^{(1)}(\xi, s) = \frac{1}{2i\pi}\,\frac{e^{-i\delta(s-\xi)} - e^{-iR_N(s-\xi)}}{s-\xi} \to \frac{1}{2i\pi}\,\frac{e^{-i\delta(s-\xi)}}{s-\xi}. \quad (3.5)$$

Докажем, что в смысле слабой сходимости в $L^2(\Delta)$ $k_N^{(3)}(\cdot, s) \to 0$, $N\to\infty$ **(3.6).** При $\varphi \in L^2(\Delta)$ положим

$$\Phi(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\xi)\,e^{-i\lambda\xi}\,d\xi.$$

Имеем при $s \in \boldsymbol{C}_-$

$$I_N \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\zeta)\,k_N^{(3)}(\xi, s)\,d\xi = \frac{1}{4i\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} S(\lambda)\,\Phi(\lambda)\int_{K_N}\frac{e^{i\mu s}}{S(\mu)(\lambda-\mu)}\,d\mu\,d\lambda =$$

$$= \frac{1}{4i\pi^2}\int_{K_N}\frac{e^{i\mu s}}{S(\mu)}\,V(\mu)\,d\mu, \quad (3.7)$$

где

$$V(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{S(\lambda)\,\Phi(\lambda)}{\lambda-\mu}\,d\lambda. \quad (3.8)$$

Справедливо соотношение $V(\mu) \rightrightarrows 0$, $\mu\to\infty$ **(3.9).** При $|\operatorname{Im}\mu| > 1$ это очевидно, для того, чтобы получить (3.9) при $|\operatorname{Im}\mu| < 1$, нужно сдвинуть контур интегрирования в (3.8), заменив его на $\boldsymbol{R} \mp 2i$ при $\pm\operatorname{Im}\mu > 0$. Соотношение $I_N \to 0$, $N\to\infty$ следует теперь из (3.7) и (3.9) с помощью леммы Жордана.

Непосредственно проверяется, что в слабой $L^2(\Delta)$-топологии

$$k_N^{(2)}(\zeta, z) \underset{N\to\infty}{\to} \frac{1}{4i\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} S(\lambda)\,e^{-i\lambda\xi}\int_{L}\frac{e^{i\mu s}}{S(\mu)(\lambda-\mu)}\,d\mu\,d\lambda, \quad (3.10)$$

где $L = (i\boldsymbol{R}\setminus[-i\delta, i\delta]) \cup T_\delta$.

Объединяя соотношения (3.4)—(3.6), (3.10), имеем

$$k(\xi, s) = \sum_{m<0} e^{i\lambda_m s}\psi_m(\xi) = -\frac{e^{-i\delta(s-\xi)}}{2i\pi(s-\xi)} +$$

$$+\frac{1}{4i\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} S(\lambda)\, e^{-i\lambda\xi}\int_L \frac{e^{i\mu s}}{S(\mu)(\lambda-\mu)}\, d\mu\, d\lambda =$$

$$= k_{\mathrm{I}}(\xi, s) + k_{\mathrm{II}}(\xi, s), \quad \xi \in \Delta,\ s \in D_\Gamma. \tag{3.11}$$

г. Ядро $k_{\mathrm{I}}(\xi, s)$ как функция от s, ξ аналитически продолжается во всю комплексную плоскость с условием $s \neq \xi$. Для исследования аналитических свойств ядра $k_{\mathrm{II}}(\xi, s)$ представим его в виде

$$k_{\mathrm{II}}(\xi, s) = \frac{1}{4i\pi^2}\left(\int_{-i\infty}^{-i\delta} + \int_{T_\delta} + \int_{i\delta}^{i\infty}\right)\frac{e^{i\mu s}}{S(\mu)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{S(\lambda)\, e^{-i\lambda\xi}}{\lambda-\mu}\, d\lambda\, d\mu =$$

$$= \bar{k}_{\mathrm{II}}(\xi, s) + \overset{0}{k}_{\mathrm{II}}(\xi, s) + \overset{+}{k}_{\mathrm{II}}(\xi, s). \tag{3.12}$$

Для исследования внутренних интегралов в средней части (3.12) воспользуемся представлением (1.2) при $k = 0$. Имеем

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{S(\lambda)\, e^{-i\lambda\xi}}{\lambda-\mu}\, d\lambda = \frac{1}{2i\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\left(\frac{\lambda}{\lambda-\mu} - 1\right)\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t}\psi_0(t)\, dt +\right.$$

$$\left.+\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t}\psi_0(t)\, dt\right] e^{-i\lambda\xi}\, d\lambda = \frac{1}{2i\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mu}{\lambda-\mu}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t}\psi_0(t)\, dt e^{-i\lambda\xi}\, d\lambda - i\psi_0(\xi) =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\psi_0(t)\frac{\mu}{2i\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\lambda(t-\xi)}}{\lambda-\mu}\, d\lambda\, dt - i\psi_0(\xi). \tag{3.13}$$

Внутренний интеграл в правой части (3.13) вычисляется непосредственно. При $\operatorname{Im}\mu < 0$ имеем

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\lambda(t-\xi)}}{\lambda-\mu}\, d\lambda = \begin{cases} 0, & \xi < t; \\ -e^{i\mu(t-\xi)}, & \xi > t. \end{cases}$$

Окончательно

$$\bar{k}_{\mathrm{II}}(\xi, s) = \frac{1}{2i\pi}\int_{-i\infty}^{-i\delta}\frac{e^{i\mu s}}{S(\mu)}\left[\psi_0(\xi) - i\mu\int_{-\pi}^{\xi} e^{i\mu(t-\xi)}\psi_0(t)\, dt\right] d\mu \tag{3.14}$$

и аналогично

$$\overset{+}{k}_{\mathrm{II}}(\xi, s) = \frac{1}{2i\pi}\int_{i\delta}^{i\infty}\frac{e^{i\mu s}}{S(\mu)}\left[\psi_0(\xi) + i\mu\int_{\xi}^{\pi} e^{i\mu(t-\xi)}\psi_0(t)\, dt\right] d\mu. \tag{3.15}$$

Соответственно, полагая $T_\delta^\pm = T_\delta \cap C_\pm$, имеем $k_{II}^0 = \hat{k}_{II}^+ + \hat{k}_{II}^-$, где

$$\hat{k}_{II}^\pm(\xi, s) = \frac{1}{2i\pi} \int\limits_{T_\delta^\pm} \frac{e^{i\mu s}}{S(\mu)} \left[\psi_0(\xi) - i\mu \int\limits_{\pm\pi}^{\xi} e^{i\mu(t-\xi)} \psi_0(t)\, dt\right] d\mu. \quad (3.16)$$

Используя то, что Γ является $\pi/2$-графиком, легко установить равномерную сходимость и, следовательно, голоморфность правых частей соотношений (3.14—3.16) при всех $\xi \in D_\Gamma$, $s \in \Pi$. Доопределим сразу функции $k_{II}^\pm$, $\hat{k}_{II}^\pm$ на множество этих значений аргументов. Отметим сразу, что ядра $\hat{k}_{II}^+$ порождают вполне непрерывный оператор в пространстве $L^2(\Gamma)$.

д. Для исследования операторов, порождаемых ядрами $k_{II}^\pm$, воспользуемся тем, что $\psi_0' \in E^2(D_\Gamma)$. При этом определены значения $\psi_0(\pm\pi)$, причем $\psi_0(\pm\pi) \neq 0$, иначе S не могла бы быть ф. т. с. Интегрирование по частям в правой части (3.14) дает

$$\psi_0(\zeta) - i\mu e^{-i\mu\xi} \int\limits_{-\pi}^{\xi} e^{i\mu t} \psi_0(t)\, dt =$$

$$= e^{-i\mu(\pi+\xi)} \psi_0(-\pi) + e^{-i\mu\xi} \int\limits_{-\pi}^{\xi} e^{i\mu t} \psi_0'(t)\, dt. \quad (3.17)$$

Также интегрированием по частям и простыми преобразованиями устанавливается асимптотика функции $S^{-1}(\mu)$ при $\mu \to i\infty$:

$$\frac{1}{S(i\eta)} = \frac{ie^{\eta\pi}}{\psi_0(\pi)} + \hat{\varphi}_-(\eta) e^{\eta\pi}; \ \eta < -\delta, \ \hat{\varphi}_- \in L^2(-\infty, -\delta) \cap L^\infty(-\infty, -\delta). \quad (3.18)$$

Подставляя (3.17), (3.18) в (3.14), имеем

$$k_{II}^-(\xi, s) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{-\delta} e^{-\eta s} \left[\frac{ie^{\eta\pi}}{\psi_0(\pi)} + e^{\eta\pi} \hat{\varphi}_-(\eta)\right] [e^{\eta(\pi+\xi)} \psi_0(-\pi) +$$

$$+ e^{\eta\xi} \int\limits_{-\pi}^{\xi} e^{-\eta t} \psi_0'(t)\, dt] \, d\eta = \frac{i}{2\pi} \frac{\psi_0(-\pi)}{\psi_0(\pi)} \int\limits_{-\infty}^{-\delta} e^{\eta(2\pi+\xi-s)} +$$

$$+ \frac{\psi_0(-\pi)}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{-\delta} e^{\eta(2\pi+\xi-s)} \hat{\varphi}_-(\eta)\, d\eta + \frac{i}{2\pi\psi_0(\pi)} \int\limits_{-\infty}^{-\delta} e^{\eta(\pi-s+\xi)} \int\limits_{-\pi}^{\xi} e^{-\eta t} \psi_0'(t)\, dt\, d\eta +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{-\delta} e^{\eta(\pi-s+\xi)} \left(\int\limits_{-\pi}^{\xi} e^{-\eta t} \psi_0'(t)\, dt\right) \hat{\varphi}_-(\eta)\, d\eta = \quad (3.19)$$

$$= k_1^-(\xi, s) + k_2^-(\xi, s) + k_3^-(\xi, s) + k_4^-(\xi, s).$$

Интегралы, стоящие в этих равенствах, очевидно, сходятся при почти всех ζ, $s \in \Gamma$.

Для исследования ядер k_j^- понадобятся следующие леммы, доказательство которых дано ниже в п^0 з. $\operatorname{conv}(\bigcup\{i(\Gamma^-(z)-z),\ z\in\Gamma\})$.

Лемма 3. *Пусть* $h(-\omega)$ — *опорная функция множества* $\operatorname{conv}(\bigcup\{i(\Gamma^-(z)-z),\ z\in\Gamma\})$. *Для каждого* $\omega\in[0,2\pi]$ *соотношение*

$$R_\omega:(\varphi,\psi)\mapsto(R_\omega(\varphi,\psi))(r)=$$
$$=\int_\Gamma\varphi(z)\int_{\Gamma^-(z)}\psi(t)\,e^{-ir(z-t)\exp(i\omega)}\,dt\,dz\,e^{-rh(\omega)}$$

определяет ограниченный оператор из $L^1(\Gamma)\times L^2(\Gamma)$ *в* $L^2(0,\infty)$.

Лемма 4. *Пусть* c — *кусочно-гладкий контур конечной длины, лежащий в левой полуплоскости. Тогда соотношение*

$$Q:\psi\to(Q\psi)(\sigma)=\int_c\frac{\psi(v)}{\sigma-v}\,dv$$

определяет ограниченный оператор из $L^2(c)$ *в* $H^2(\mathbf{C}_{\text{пр}})$ — *пространство Харди в правой полуплоскости. При этом норма этого оператора оценивается величиной, зависящей только от нормы Карлесона, меры, порожденной в левой полуплоскости длиной дуги контура* c.

е. Ядро $k_1^-(\xi,s)$ вычисляется непосредственно:

$$k_1^-(\xi,s)=\frac{i}{2\pi}\frac{\psi_0(-\pi)}{\psi_0(\pi)}\frac{\exp(-\delta(2\pi-s+\xi))}{2\pi-s+\xi}=$$
$$=\frac{i}{2\pi}\frac{\psi_0(-\pi)}{\psi_0(\pi)}\frac{1}{2\pi-s+\xi}+\hat{k}_1-(\xi,s). \qquad (3.20)$$

При этом функция $\hat{k}_1^-$, очевидно, является ядром вполне непрерывного оператора $\hat{K}_1^-$ в пространстве $L^2(\Gamma)$.

Обозначим через $K_j^-:L^2(\Gamma)\to L^2(\Gamma)$ операторы, порожденные ядрами k_j^-, $j=2,3,4$. Положим $\mathfrak{M}=\{f\in B(L^2(\Gamma));\ f$ обращается в ноль в окрестности точек $\pm\pi\}$. Это множество, очевидно, плотно в $B(L^2(\Gamma))$. Рассмотрим также операторы

$$T^\pm:f\mapsto e^{\pi\eta}\int_\Gamma f(\xi)\,e^{\pm\xi\eta}\,d\xi.$$

Из леммы 2 следует, что $T^\pm$ — ограниченные операторы из $L^2(\Gamma)$ в $L^2(-\infty,-\delta)$.

Для доказательства полной непрерывности оператора K_2^- достаточно доказать, что любую, слабо сходящуюся к нулю, последовательность функций $\{g_n\}\subset L^2(\Gamma)$ он переводит в сильно сходящуюся. Другими словами,

$$\sup\left\{\left|\int_\Gamma\int_\Gamma f(\xi)\,g_n(s)\,k_2^-(\xi,s)\,d\xi\,ds\right|,\ f\in\mathfrak{M}\right\}\to0,\ n\to\infty. \qquad (3.21)$$

Воспользуемся соотношением

$$\int_\Gamma\int_\Gamma f(\xi)\,g_n(s)\,k_2^-(\xi,s)\,ds\,d\xi=$$
$$=\frac{\psi_0(-\pi)}{2\pi}\int_{-\infty}^{-\delta}\hat{\varphi}_-(\eta)\,(T^+f)(\eta)\,(T^-g)(\eta)\,d\eta. \qquad (3.22)$$

Без уменьшения общности можно считать $\| g_n \|_{L^2(\Gamma)} \leqslant 1$. Отсюда и из слабой сходимости $\{g_n\}$ к нулю следует $\forall M > 0$, $T^- g_n(\eta) \rightrightarrows 0$, $n \to \infty$, $\eta \in (-M, -\delta)$ и, кроме того, $A \overset{\text{def}}{=} \sup \{ |(T^- g_n)(\eta)|, n \in N, \eta \in (-\infty, -\delta)\} < \infty$. Из (3.22) следует

$$\left| \int_\Gamma \int_\Gamma f(\xi) g_n(s) k_2^-(\xi, s)\, ds\, d\xi \right| \leqslant \left| \frac{1}{2\pi} \psi_0(-\pi) \right| \times$$

$$\left(A \int_{-\infty}^{-M} |\hat{\varphi}_-(\eta) T^+ f(\eta)|\, d\eta + \sup_{\eta \in (-M, -\delta)} \{ |T^- g_n(\eta)\} \int_{-M}^{-\delta} |\hat{\varphi}_-(\eta) T^+ f(\eta)\, d\eta \right) \leqslant$$

$$\leqslant \left| \frac{\psi_0(\pi)}{2\pi} \right| \left\{ A \left(\int_{-\infty}^{-M} |\hat{\varphi}_-(\eta)|^2\, d\eta \right)^{1/2} \| T^+ \| + \right.$$

$$\left. + \sup_{-M < \eta < -\delta} \{ |T^- g_n(\eta)| \} \cdot \| T^- \| \| \hat{\varphi}_- \| \right\}. \tag{3.23}$$

Выбирая по заданному $\varepsilon > 0$ вначале M таким образом, чтобы первое слагаемое правой части (3.23) не превосходило $\varepsilon/2$, а затем по этому M подходящий номер $n_0 = n_0(M)$, добьемся того, чтобы при $n > n_0$ выражение в левой части (3.23) не превосходило ε. В силу произвольности ε отсюда следует (3.21).

Преобразуем ядро оператора k_3^-:

$$k_3^-(\xi, s) = \frac{i}{2\pi \psi_0(\pi)} \int_{\Gamma^-(\xi]} \psi_0'(t) \int_{-\infty}^{-\delta} e^{\eta(\pi - s + \xi - t)}\, d\eta\, dt =$$

$$= \frac{i}{2\pi \psi_0(\pi)} \int_{\Gamma^-(\xi)} \psi_0^-(t) \frac{\exp(-\delta(\pi - s + \xi - t))}{\pi - s + \xi - t}\, dt.$$

Для доказательства полной непрерывности K_3^- достаточно установить полную непрерывность оператора

$$A : g \mapsto \int_\Gamma g(s)\, a(\xi, s)\, ds; \; a(\xi, s) = \int_{\Gamma^-(\xi)} \frac{\psi_0'(t)}{\pi - s + \xi - t}\, dt.$$

В частности, достаточно доказать, что при некотором $C > 0$

$$\int_\Gamma |a(\xi, s)|^2\, |ds| < C, \; \forall \xi \in \Gamma. \tag{3.24}$$

Для каждого $\xi \in \Gamma$ рассмотрим функцию

$$\Omega_\zeta(\sigma) = \int_{\Gamma^-(\xi)} \frac{\psi_0'(t)}{\sigma + \xi - t}\, dt = \int_{\Gamma^-(\xi) - \xi} \frac{\psi_0'(v + \xi)}{\sigma - v}\, dv.$$

Из леммы 4 следует, что $\Omega_\xi \in H^2(C_{\text{пр}})$, причем

$$\sup_{\xi \in \Gamma} \| \Omega_\xi \|_{H^2(C_{\text{пр}})} < \infty.$$

Для получения оценки (3.24) остается заметить, что

$$\int_{\Gamma} |a(\zeta, s)|^2 |ds| = \int_{-\Gamma+\pi} |\Omega_\xi(\sigma)|^2 |d\sigma|,$$

и еще раз воспользоваться теоремой о мерах Карлесона.

Доказательство полной непрерывности оператора K_4^- может быть проведено одним из двух способов: аналогично доказательству для K_2^- с использованием леммы 3 вместо леммы 2 либо аналогично доказательству для K_3^-.

Окончательно ядро k_{II}^- имеет вид

$$k_{\text{II}}^-(\zeta, s) = \frac{i}{2\pi}\frac{\psi_0(-\pi)}{\psi_0(\pi)}\frac{1}{2\pi - s + \xi} + \hat{l}_-(\xi, s),$$

где функция $\hat{l}_-(\zeta, s)$ определена при $\zeta \in \operatorname{clos}(D_\Gamma)$, $s \in \Pi$ и является ядром вполне непрерывного оператора в $L^2(\Gamma)$. Аналогично доказывается, что

$$k_{\text{II}}^+(\zeta, s) = \frac{i}{2\pi}\frac{\psi_0(\pi)}{\psi_0(-\pi)}\frac{1}{-2\pi - s + \xi} + \hat{l}_+(\zeta, s),$$

окончательно

$$k(\zeta, s) = \frac{1}{2i\pi(s-\zeta)} + \frac{i}{2\pi}\frac{\psi_0(-\pi)}{\psi_0(-\pi)}\frac{1}{2\pi - s + \xi} + \frac{i}{2\pi}\frac{\psi_0(\pi)}{\psi_0(-\pi)}\frac{1}{-2\pi - s + \xi} + l(\xi, s),$$

где функция $l(\xi, s)$ определена при $\xi \in \operatorname{clos}(D_\Gamma)$, $s \in \Pi$ голоморфна при $\xi \in D_\Gamma$ $s \in \Pi$ и является ядром вполне непрерывного оператора в пространстве $L^2(\Gamma)$.

ж. Зафиксируем $s \in \Pi$ так, чтобы $\operatorname{Im} s < \inf\{\operatorname{Im}\sigma,\ \sigma \in \Gamma\}$. Имеем при $n \in \boldsymbol{Z}$

$$\int_{-\pi}^{\pi} k(\zeta, s)\, e^{i\lambda_n \xi}\, d\xi = \lim_{N\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda_n \xi}\sum_{-N}^{-1}\psi_m(\xi)\, e^{i\lambda_m s}\, d\xi = \begin{cases} e^{i\lambda_n s}, & n < 0; \\ 0, & n \geqslant 0. \end{cases} \tag{3.26}$$

Деформируя путь интегрирования в этом соотношении, имеем

$$\int_{\Gamma} k(\xi, s)\, e^{i\lambda_n \xi}\, d\xi = \begin{cases} e^{i\lambda_n s}, & n < 0; \\ 0, & n \geqslant 0. \end{cases}$$

Зафиксировав $\xi_0 \in \Gamma$, перейдем к пределу в (3.26), устремив s снизу к точке ξ_0. Имеем

$$\lim_{s\to\xi_0 - i0}\int_{\Gamma}\left\{\frac{1}{2i\pi}\frac{1}{s-\xi} + \frac{i}{2\pi}\frac{\psi_0(\pi)}{\psi_0(-\pi)}\frac{1}{2\pi - s + \xi} + \frac{\psi_0(-\pi)}{\psi_0(\pi)}\frac{1}{-2\pi - s + \xi} + \right.$$

$$\left. + l(\xi, s)\right\} e^{i\lambda_n \xi}\, d\xi = \frac{1}{2}e^{i\lambda_n \xi_0} + \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma}\frac{e^{i\lambda_n \xi}\, d\xi}{\xi_0 - \xi} + \frac{i}{2\pi}\frac{\psi_0(\pi)}{\psi_0(-\pi)}\times$$

$$\times \int_{\Gamma} \frac{e^{i\lambda_n \xi}\, d\xi}{\xi - \xi_0} + \frac{i}{2\pi} \frac{\psi_0(-\pi)}{\psi_0(\pi)} \int_{\Gamma} \frac{e^{i\lambda_n \xi}\, d\xi}{-2\pi - \xi_0 + \xi} + \int_{\Gamma} e^{i\lambda_n \xi} l(\xi, \xi_0)\, d\xi =$$

$$= \begin{cases} e^{i\lambda_n \xi_0} & n < 0; \\ 0 & n \geqslant 0. \end{cases} \qquad (3.27)$$

Оператор, определенный равенством (3.1), очевидно, ограничен в $L^2(\Gamma)$. Из (3.27) следует, что он является проектором на E_- параллельно E_+. С точностью до лемм 3, 4 теорема 2 доказана.

з. Доказательство леммы 3 проведем для случая $\omega = 0$. Пусть $h_z(-\omega)$ — опорная функция множества $i(\Gamma^-(z) - z)$. Из леммы 2 следует, что функции

$$F_z(r) = \int_{\Gamma^-(z)} \psi(t)\, e^{-ir(z-t) - rh_z(0)}\, dt$$

принадлежат пространству $L^2(0, \infty)$ и $\| F_z \|_{L^2(0,\infty)} \leqslant \mathrm{const}\, \| \psi \|_{L^2(\Gamma)}$, где константа — общая для всех $z \in \Gamma$. Кроме того, при любом $z \in \Gamma$, очевидно, $h_z(\omega) \leqslant h(\omega)$. Утверждение леммы 3 следует отсюда и из неравенства треугольника.

Для доказательства леммы 4 достаточно установить, что при некоторой константе C, зависящей только от нормы Карлесона, меры, порожденной в левой полуплоскости длиной дуги контура c, и при любом $\delta > 0$ выполнено

$$\sup \left\{ \left| \int_0^{\infty} f(\sigma) \int_c \frac{\psi(v)}{v - \sigma}\, dv\, d\sigma \right| ;\ f \in B(L^2(iR + \delta)) < C. \right.$$

Функция

$$F(v) = \frac{1}{2\pi} \int_{iR+\delta} \frac{f(\sigma)}{v - \sigma}\, d\sigma \in B(H^2(C_{\text{лев}} + \delta))$$

и для доказательства (3.28) достаточно изменить порядок интегрирования в стоящем там интеграле и еще раз использовать теорему о мерах Карлесона.

и. В случае $\theta \neq \pi/2$ доказательство теоремы проводится аналогично с той разницей, что вместо контуров C_N нужно взять контуры $C_{N,\theta} = L_{N,\theta} \cup K_{N,\theta} \cup T_{\sigma,\theta}$ где $L_{N,\theta} = ([-R_N, -\delta] \cup [\delta, R_N]) \exp(i(\pi - \theta))$; $K_{N,\theta} = \{\lambda : |\lambda| = R_N, \quad \arg \lambda \in (\pi - \theta, 2\pi - \theta)\}$; $\quad T_{\sigma,\theta} = \{\lambda : |\lambda| = \delta, \arg \lambda \in (-\theta, 2\pi - \theta)\}$.

Список литературы: 1. *Левин Б. Я.* О базисах показательных функций в $L^2(-\pi, \pi)$//Зап. мат. отд. физ.-мат. ф-та Харьк. гос. ун-та и Харьк. мат. об-ва (сер. 4), 27. —1961.—С. 39—48. 2. *Привалов И. И.* Граничные свойства аналитических функций.—М.—Л.: Гостехтеориздат.— 1950.— С. 336. 3. *Любарский Ю. И.* Системы экспонент в пространствах функций, заданных на кривых.— Х., 1987. — С. 40.— (Препринт/АН УССР, ФТИНТ; № 677877—87). 4. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций.— М.: Гостехтеориздат.— 1956.— 632 с. 5. *Гарнетт Дж.* Ограниченные аналитические функции.— М.: Мир. 1984.— 469 с

Поступила в редколлегию 01.12.86