Объ интерполированіи двухъ произведеній.

И. И. Иванова.

Если черезъ

$$\prod_{ax+b}$$

обозначимъ произведеніе

$$(a+b)(2a+b)(3a+b)\ldots(xa+b),$$

а черезъ

$$\prod_{ax^2+b}$$

произведеніе

$$(1^2a+b)(2^2a+b)(3^2a+b)\ldots(x^2a+b),$$

то, при условіи $0 < b < a$, имѣютъ мѣсто слѣдующія неравенства:

$$\prod_{ax+b} > \sqrt{2\pi}\, a^x x^{x+\frac{1}{2}+\frac{b}{a}} e^{-x+\frac{b}{a}C-\frac{1}{2}\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{x+1}\right)}$$

$$\prod_{ax+b} < \sqrt{2\pi}\, a^x x^{x+\frac{1}{2}}(x+1)^{\frac{b}{a}} e^{-x+\frac{1}{12x}+\frac{b}{a}C}$$

и

$$\prod_{ax^2+b} > 2\pi a^x x^{2x+1} e^{-2x+\frac{b}{a}\left(\frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{2}\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{\pi^4}{90}-\frac{1}{3(x+1)(x+2)(x+3)}\right)}$$

$$\prod_{ax^2+b} < 2\pi a^x x^{2x+1} e^{-2x+\frac{1}{6x}+\frac{b}{a}\left(\frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{x+1}\right)}$$

Въ двухъ первыхъ неравенствахъ C обозначаетъ постоянную Эйлера:

$$C = 0{,}5772156\ldots$$

Докажемъ два первыя неравенства. Очевидно, что

$$\prod_{xa+b} = a^x . 1.2\ldots x . \left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{b}{2a}\right)\left(1+\frac{b}{3a}\right)\ldots\left(1+\frac{b}{ax}\right).$$

Изъ разложенія $lg\left(1+\frac{b}{ka}\right)$ въ рядъ:

$$lg\left(1+\frac{b}{ka}\right) = \frac{b}{ka} - \frac{1}{2}\left(\frac{b}{ka}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{b}{ka}\right)^3 - \ldots,$$

при условіи

$$0 < b < a,$$

находимъ:

$$1+\frac{b}{ka} < e^{\frac{b}{ka}} \qquad \text{и} \qquad 1+\frac{b}{ka} > e^{\frac{b}{ka} - \frac{1}{2}\frac{b^2}{a^2}\frac{1}{k^2}},$$

слѣдовательно,

$$\prod_{ax+b} > a^x . 1.2.3\ldots x . e^{\frac{b}{a}\sum\limits_1^x \frac{1}{k} - \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^2 \sum\limits_1^x \frac{1}{k^2}}$$

и

$$\prod_{ax+b} < a^x . 1.2.3\ldots x . e^{\frac{b}{a}\sum\limits_1^x \frac{1}{k}}.$$

Если C обозначаетъ постоянную Эйлера, то, какъ извѣстно,

$$C = \left(\frac{1}{1} - lg\,\frac{2}{1}\right) + \left(\frac{1}{2} - lg\,\frac{3}{2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{x} - lg\,\frac{x+1}{x}\right) + \ldots$$

и такъ какъ

$$\frac{1}{m} - lg\frac{m+1}{m} > 0$$

и $$lg\frac{m+1}{m} - \frac{1}{m+1} > 0, \quad \text{при } m > 1,$$

то имѣемъ

$$\sum_1^x \frac{1}{k} > C + lg\, x,$$

$$\sum_1^x \frac{1}{k} < C + lg\,(x+1).$$

Далѣе, извѣстно, что

$$\sum_1^\infty \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

и такъ какъ, очевидно,

$$\sum_k^\infty \frac{1}{(k+1)^2} > \sum_k^\infty \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k+1},$$

то находимъ, что

$$\sum_1^x \frac{1}{k^2} < \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{x+1}$$

принимяя во вниманіе выведенныя неравенства, а также два извѣстныя неравенства:

$$1.2.3\ldots x > \sqrt{2\pi}\, x^{x+\frac{1}{2}} e^{-x}$$

и $$1.2.3\ldots x < \sqrt{2\pi}\, x^{x+\frac{1}{2}} e^{-x+\frac{1}{12x}},$$

мы и находимъ требуемыя:

$$\prod_{ax+b} > \sqrt{2\pi}\, a^{x}\, a^{x+\frac{1}{2}}\, e^{-x+\frac{b}{a}(C+lgx)-\frac{1}{2}\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{x+1}\right)}$$

или

$$\prod_{ax+b} > \sqrt{2\pi}\, a^{x}\, x^{x+\frac{b}{a}+\frac{1}{2}}\, e^{-x+\frac{b}{a}C-\frac{1}{2}\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{x+1}\right)}$$

и

$$\prod_{ax+b} < \sqrt{2\pi}\, a^{x}\, x^{x+\frac{1}{2}}\, e^{-x+\frac{1}{12x}+\frac{b}{a}(C+lg\,(x+1))}$$

или

$$\prod_{ax+b} < \sqrt{2\pi}\, x^{x}\, x^{x+\frac{1}{2}}\, (x+1)^{\frac{b}{a}}\, e^{-x+\frac{1}{12x}+\frac{b}{a}C}$$

Послѣдніе два вышепредложенныя неравенства доказываются точно такъ же. При доказательствѣ ихъ придется принять во вниманіе, кромѣ двухъ неравенствъ Стирлинга, еще слѣдующія два:

$$\sum_{1}^{x}\frac{1}{k^2} > \frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{x},$$

$$\sum_{1}^{x}\frac{1}{k^2} < \frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{x+1}$$

и

$$\sum_{1}^{x}\frac{1}{k^4} < \frac{\pi^4}{90}-\frac{1}{3}\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)},$$

которыя доказываются очень легко и изъ которыхъ второе было уже выше доказано.

С.-Петербургъ.
20 Марта 1888 г.