УДК 517.521.8

А. И. Соколенко

К ВОПРОСУ СУММИРОВАНИЯ ОГРАНИЧЕННЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ РЕГУЛЯРНЫМИ ПОЛУНЕПРЕРЫВНЫМИ МАТРИЦАМИ

1. Н. А. Давыдов [1, теорема 5] установил достаточное условие для того, чтобы регулярная матрица $A = \| a_{nk} \|$ была сильнее, чем сходимость (говорят, что регулярная матрица сильнее, чем сходимость, если она суммирует хотя бы одну расходящуюся последовательность). Именно им доказана

Теорема А. *Регулярная матрица $A = \| a_{nk} \|$ суммирует некоторую расходящуюся последовательность из 0 и 1, если*

$$\varliminf_{k \to \infty} \max_{n=1,\, 2,\, \dots} | a_{nk} | = 0.$$

Ядро доказательства этой теоремы составляет

Лемма Б [1, лемма 2]. *Пусть $A = \| a_{nk} \|$ — регулярная матрица и $\{p_i\}$ — возрастающая последовательность натуральных чисел. Тогда среди чисел $a^{\{p_i\}} = \varlimsup_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{\infty} | a_{np_i} |$ существует наименьшее и справедливо равенство*

$$\min_{\{p_i\}} \varlimsup_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{\infty} | a_{np_i} | = \varliminf_{k \to \infty} \max_{n=1,\, 2,\, \dots} | a_{nk} |.$$

Эта лемма, по нашему мнению, является предложением, представляющим и самостоятельный интерес.

2. В данной заметке лемма Б переносится на регулярные полунепрерывные матрицы $A = \| a_k(x) \|$ $(0 \leqslant x < +\infty)$ некоторого класса D. В качестве следствия из доказанной нами леммы получаем теорему, являющуюся аналогом теоремы А (теорема 1).

Определение. *Полунепрерывную матрицу* $A = \| a_k(x) \|$ $(0 \leqslant x < +\infty)$ *назовем матрицей класса* D, *если для каждого* $x > 0$ *и* $0 < \varepsilon < 1$ *существует номер* $K = K(X, \varepsilon)$ *такой, что*

$$\sum_{k=K}^{\infty} | a_k(x) | < \varepsilon \tag{1}$$

для всех $x \in [0, X]$.

Лемма. *Пусть* $A = \| a_k(x) \|$ $(0 \leqslant x < +\infty)$ — *регулярная полунепрерывная матрица класса* D *и* $\{p_i\}$ — *возрастающая последовательность натуральных чисел. Тогда среди чисел*

$$a^{\{p_i\}} = \overline{\lim_{x \to +\infty}} \sum_{i=1}^{\infty} | a_{p_i}(x) |$$

существует наименьшее и справедливо равенство

$$\min_{\{p_i\}} \overline{\lim_{x \to +\infty}} \sum_{i=1}^{\infty} | a_{p_i}(x) | = \underline{\lim_{k \to \infty}} \sup_{0 \leqslant x < +\infty} | a_k(x) |. \tag{2}$$

Доказательство. Возьмем последовательность положительных чисел ε_k $(k = 1, 2, \ldots)$, сходящуюся к нулю. Для любого ε_k существует число $0 \leqslant x_k < +\infty$ такое, что

$$| a_k(x_k) | > \sup_{0 \leqslant x < +\infty} | a_k(x) | - \varepsilon_k.$$

Отсюда

$$\sup_{0 \leqslant x < +\infty} | a_k(x) | = | a_k(x_k) | + \varepsilon_k', \tag{3}$$

где

$$0 \leqslant \varepsilon_k' < \varepsilon_k \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Пусть $\{p_i\}$ — произвольная возрастающая последовательность натуральных чисел. В силу (3) справедливы неравенства

$$\overline{\lim_{x \to +\infty}} \sum_{i=1}^{\infty} | a_{p_i}(x) | \geqslant \overline{\lim_{m \to \infty}} \sum_{i=1}^{\infty} | a_{p_i}(x_{p_m}) | \geqslant \overline{\lim_{m \to \infty}} | a_{p_m}(x_{p_m}) | \geqslant$$

$$\geqslant \lim_{m \to \infty} | a_{p_m}(x_{p_m}) | \geqslant \underline{\lim_{k \to \infty}} | a_k(x_k) | = \underline{\lim_{k \to \infty}} \sup_{0 \leqslant x < +\infty} | a_k(x) |. \tag{4}$$

Поэтому для доказательства справедливости утверждения леммы достаточно построить возрастающую последовательность натуральных чисел $\{q_i\}$ такую, что

$$\overline{\lim_{x \to +\infty}} \sum_{i=1}^{\infty} | a_{q_i}(x) | \leqslant \underline{\lim_{k \to \infty}} \sup_{0 \leqslant x < +\infty} | a_k(x) |. \tag{5}$$

Обозначим:

$$\delta_k = \sup_{0 \leqslant x < +\infty} |a_k(x)|, \quad \delta = \varlimsup_{k \to \infty} \delta_k.$$

Существует подпоследовательность $\delta_{k_m} \to \delta$ $(m \to \infty)$. Пользуясь регулярностью матрицы A и ее принадлежностью к классу D, построим возрастающую последовательность действительных чисел $\{x_i\}$ $(x_{i+1} - x_i \geqslant a > 0$ $(i = 1, 2, \ldots))$ и возрастающую последовательность натуральных чисел $\{k_{m_i}\}$ такие, что

$$|a_{k_1}(x)| + \sum_{j=1}^{i-1} \left| a_{k_{m_j}}(x) \right| < \frac{1}{i} \text{ для всех } x \geqslant x_i \tag{6}$$

и

$$\sum_{j=k_{m_{i+1}}}^{\infty} |a_j(x)| < \frac{1}{i+1} \text{ для } x_i < x \leqslant x_{i-1} \; (i = 1, 2, \ldots). \tag{7}$$

Используя (6) и (7), для $x_i < x \leqslant x_{i+1}$ имеем

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left| a_{k_{m_j}}(x) \right| = \sum_{j=1}^{i-1} \left| a_{k_{m_j}}(x) \right| + \left| a_{k_{m_i}}(x) \right| + \sum_{j=i+1}^{\infty} \left| a_{k_{m_j}}(x) \right| <$$

$$< \frac{1}{i} + \left| a_{k_{m_i}}(x) \right| + \frac{1}{i+1} < \frac{2}{i} + \sup_{0 \leqslant x < +\infty} \left| a_{k_{m_i}}(x) \right| = \frac{2}{i} + \delta_{k_{m_i}} \to \delta$$

$(x \to +\infty)$.

Отсюда

$$\varlimsup_{x \to +\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left| a_{k_{m_j}}(x) \right| \leqslant \delta.$$

Итак, для возрастающей последовательности натуральных чисел $q_i = k_{m_i}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ справедливо неравенство (5), что и доказывает справедливость утверждения леммы.

3. В случае регулярных дискретных матриц (как в работе [1]) условие, соответствующее условию (1), всегда выполняется [2, с. 91]. Если же рассматривать регулярные полунепрерывные матрицы, то условие (1), вообще говоря, выполняется не всегда. Из примера следующей регулярной полунепрерывной матрицы $A = \| a_k(x) \|$ $(0 \leqslant x < +\infty)$ убедимся, что оно существенно для справедливости утверждения леммы[1].

Фиксируем последовательность действительных чисел

$$1 < b_n < b_{n+1} \; (n = 1, 2, \ldots), \quad b_1 < 2, \; b_n \to +\infty \; (n \to \infty). \tag{8}$$

---

[1] Идея построения этой матрицы позаимствована нами из кандидатской диссертации В. Ф. Власенко («Суммирование разбавленных рядов», Киев, 1967), где для других целей рассматривается подобная матрица.

Для всех $x \in [0, b_1)$ и $k = 1, 2, \ldots$ полагаем $a_k(x) = 0$. Для каждого $n = 1, 2, \ldots$ на полуотрезке $[b_n, \; b_{n+1})$ фиксируем последовательность $\{c_i^{(n)}\}$:

$$b_n = c_1^{(n)}, \; b_n < c_i^{(n)} < c_{i+1}^{(n)} < b_{n+1} \;\; (i = 2, 3, \ldots), \; c_i^{(n)} \to b_{n+1} \;\; (i \to \infty)$$

и полагаем для

$$x \in \left[c_i^{(n)}, \; c_{i+1}^{(n)}\right) \;\; (i = 1, 2, \ldots)$$

$$a_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{b_n}\left(1 - \frac{1}{b_n}\right)^{k-i}, & \text{если } k = i, \; i+1, \ldots; \\ 0, & \text{если } k = 1, 2, \ldots, i-1. \end{cases} \tag{9}$$

Из (8) и (9) следует, что для всех $k = 1, 2, \ldots$ и $x \geqslant 0$ $a_k(x) \geqslant 0$. Если $x \geqslant b_1$, то x принадлежит некоторому полуотрезку $\left[c_i^{(n)}, \; c_{i+1}^{(n)}\right)$, и мы имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) = \sum_{k=i}^{\infty} \frac{1}{b_n}\left(1 - \frac{1}{b_n}\right)^{k-i} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{b_n}\left(1 - \frac{1}{b_n}\right)^{j} = 1. \tag{10}$$

Таким образом, построенная полунепрерывная матрица $A = \| a_k(x) \| \; (0 \leqslant x < +\infty)$ является регулярной положительной матрицей.

В то же время, в силу (9) и (10), ни для какого $X \geqslant b_2$ и $0 < \varepsilon < 1$ нельзя указать номера $K = K(X, \; \varepsilon)$ такого, что $\sum\limits_{k=K}^{\infty} a_k(x) < \varepsilon$ для всех $x \in [0, \; X]$, так что условие (1) для этой матрицы не выполнено. Покажем, что для построенной матрицы (9) утверждение леммы не имеет места.

Допустим, что для этой матрицы справедливо равенство

$$\inf_{\{p_i\}} \varlimsup_{x \to +\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{p_i}(x) = \varliminf_{k \to \infty} \sup_{0 \leqslant x < +\infty} a_k(x). \tag{2'}$$

Легко видеть, что

$$\sup_{0 \leqslant x < +\infty} a_k(x) = \frac{1}{b_1} \;\; (k = 1, \; 2, \; \ldots).$$

Тогда в силу (2′) и (8) получаем

$$\inf_{\{p_i\}} \varlimsup_{x \to +\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{p_i}(x) = \frac{1}{b_1} > \frac{1}{2}. \tag{11}$$

Взяв последовательность

$$S_k = \begin{cases} 0, & \text{если } k = 2p - 1 \\ 1, & \text{если } k = 2p \end{cases} \;\; (p = 1, \; 2, \; \ldots), \tag{12}$$

имеем

$$t(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) S_k = \sum_{p=1}^{\infty} a_{2p}(x) \;\; (0 \leqslant x < +\infty).$$

Если $x \geqslant b_1$, то x принадлежит некоторому полуотрезку $[c_i^{(n)}, c_{i+1}^{(n)})$ и мы имеем

$$t(x) = \begin{cases} \dfrac{\dfrac{1}{b_n}\left(1-\dfrac{1}{b_n}\right)}{1-\left(1-\dfrac{1}{b_n}\right)^2}, & \text{если } i = 2p-1 \\ & \qquad (p = 1, 2, \ldots), \\ \dfrac{\dfrac{1}{b_n}}{1-\left(1-\dfrac{1}{b_n}\right)^2}, & \text{если } i = 2p \end{cases}$$

откуда

$$\lim_{x \to +\infty} t(x) = \frac{1}{2},$$

т. е. построенная матрица суммирует последовательность (12) к $\frac{1}{2}$. Однако по теореме Н. А. Давыдова [3, теорема 5], в силу (11), данная матрица не суммирует ни одной ограниченной расходящейся последовательности.

Полученное противоречие и доказывает то, что условие (1) существенно для справедливости утверждения леммы.

4. Условие (1), являясь существенным для справедливости утверждения леммы, не является однако необходимым. Для доказательства этого утверждения построим следующую регулярную полунепрерывную матрицу $A = \| a_k(x) \|$ $(0 \leqslant x < +\infty)$[1].

Фиксируем: 1) возрастающую последовательность натуральных чисел $\{p_n\}$, существенно отличную от последовательности всех натуральных чисел (возрастающую последовательность натуральных чисел $\{p_n\}$ будем называть существенно отличной от последовательности всех натуральных чисел, если $\{1, 2, \ldots\} \setminus \{p_n\} = \{q_n\}$ — бесконечная последовательность); 2) последовательность действительных чисел $\{y_n\}$ так, чтобы $y_1 = 0$, $y_{n+1} > y_n \to +\infty$ $(n \to \infty)$. На каждом полуотрезке $[y_n, y_{n+1})$ $(n = 1, 2, \ldots)$ фиксируем последовательность $\{x_i^{(n)}\}$ так, чтобы

$$x_1^{(n)} = y_n \ (n = 1, 2, \ldots), \quad x_{i+1}^{(n)} > x_i^{(n)} \ (i = 1, 2, \ldots),$$

$$\lim_{i \to \infty} x_i^{(n)} = y_{n+1}.$$

Положим:

для $0 = y_1 = x_1^{(1)} \leqslant x < x_2^{(1)}$ $a_{p_1}(x) = 1$, $a_k(x) = 0$, если $k \neq p_1$,

для $x_2^{(1)} \leqslant x < x_3^{(1)}$ $a_{p_2}(x) = 1$, $a_k(x) = 0$, если $k \neq p_2$,

. . . .

[1] См. предыдущую сноску.

для $x_n^{(1)} \leqslant x < x_{n+1}^{(1)}$ $a_{p_n}(x) = 1$, $a_k(x) = 0$, если $k \neq p_n$,

. . . .

для $y_2 = x_1^2 \leqslant x < x_2^{(2)}$ $a_{p_2}(x) = 1$, $a_k(x) = 0$, если $k \neq p_2$,

для $x_2^{(2)} \leqslant x < x_3^{(2)}$ $a_{p_3}(x) = 1$, $a_k(x) = 0$, если $k \neq p_3$,

. . . .

для $x_n^{(2)} \leqslant x < x_{n+1}^{(2)}$ $a_{p_{n+1}}(x) = 1$, $a_k(x) = 0$, если $k \neq p_{n+1}$,

. . . .

для $y_n = x_1^{(n)} \leqslant x < x_2^{(n)}$ $a_{p_n}(x) = 1$, $a_k(x) = 0$, если $k \neq p_n$,

для $x_2^{(n)} \leqslant x < x_3^{(n)}$ $a_{p_{n+1}}(x) = 1$, $a_k(x) = 0$, если $k \neq p_{n+1}$,

. . . .

для $x_i^{(n)} \leqslant x < x_{i+1}^{(n)}$ $a_{p_{n+i-1}}(x) = 1$, $a_k(x) = 0$, если $k \neq p_{n+i-1}$

. . . .

Построенная матрица $A = \| a_k(x) \|$ $(0 \leqslant x < +\infty)$ является, очевидно, регулярной положительной матрицей, для которой условие (1) не выполнено.

Из очевидных равенств

$$\sup_{0 \leqslant x < +\infty} a_k(x) \begin{cases} 1, & \text{если } k = p_n \\ 0, & \text{если } k = q_n \end{cases} (n = 1, 2, \ldots), \sum_{i=1}^{\infty} a_{l_i}(x) = 0,$$

где $\{p_i\}$ и $\{q_i\}$ — последовательности натуральных чисел, которые мы использовали при построении матрицы A, и $\{l_i\}$ — подпоследовательность последовательности $\{q_n\}$, получаем

$$\overline{\lim_{k \to \infty}} \sup_{0 \leqslant x < +\infty} a_k(x) = 0 = \min_{\{k_i\}} \overline{\lim_{x \to +\infty}} \sum_{i=1}^{\infty} a_{k_i}(x),$$

т. е. для матрицы A справедливо утверждение леммы.

Итак, условие (1) не является необходимым для справедливости утверждения леммы.

5. Справедливо следующее предложение.

Теорема 1. *Регулярная полунепрерывная матрица $A = \| a_k(x) \|$ $(0 \leqslant x < +\infty)$ класса D суммирует некоторую расходящуюся последовательность из 0 и 1, если*

$$\underline{\lim_{k \to \infty}} \sup_{0 \leqslant x < +\infty} | a_k(x) | = 0. \tag{13}$$

Доказательство. В силу леммы, существует возрастающая последовательность натуральных чисел $\{q_i\}$ такая, что

$$\overline{\lim_{x \to +\infty}} \sum_{i=1}^{\infty} \left| a_{q_i}(x) \right| = \underline{\lim_{k \to \infty}} \sup_{0 \leqslant x < +\infty} | a_k(x) | = 0.$$

Откуда

$$\lim_{x\to+\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_{q_i}(x)=0.$$

Рассмотрим последовательность

$$S_k=\begin{cases}1, & \text{если } k=q_i\\ 0, & \text{если } k=l_i\end{cases}\quad (i=1,\ 2,\ \ldots),$$

где $\{l_i\}=\{1,\ 2,\ \ldots\}\diagdown\{q_i\}$, покажем суммируемость ее матрицей A. Действительно, используя равенства

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)\,S_k=\sum_{i=1}^{\infty} a_{q_i}(x)\,S_{q_i}+\sum_{i=1}^{\infty} a_{l_i}(x)\,S_{l_i}=\sum_{i=1}^{\infty} a_{q_i}(x),$$

получаем

$$\lim_{x\to+\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)\,S_k=0.$$

Теорема доказана.

Теореме 1 можно дать другую формулировку.

Теорема 1′. *Справедливость неравенства* $\varlimsup\limits_{k\to\infty}\sup\limits_{0\leqslant x<+\infty}|a_k(x)|>0$ *является необходимым условием неэффективности регулярной полунепрерывной матрицы* $A=\|a_k(x)\|$ $(0\leqslant x<+\infty)$ *класса* D *на множестве ограниченных последовательностей.*

6. Теорема 1 является точной в том смысле, что условие (13)

$$\varlimsup_{k\to\infty}\sup_{0\leqslant x<+\infty}|a_k(x)|=0.$$

в этой теореме ослабить нельзя.

Докажем это утверждение. Известна теорема Мерсера [4, с. 206—224], дающая достаточные условия для того, чтобы регулярная матрица была вполне неэффективной (говорят, что регулярная матрица является вполне неэффективной, если она суммирует только сходящиеся последовательности). Если $\alpha>0$, $S\neq\infty$ и

$$t_n=\alpha S_n+(1-\alpha)\frac{\sum\limits_{k=0}^{n-1} S_k}{n}\to S\ (n\to\infty),$$

то $S_n\to S\ (n\to\infty)$. Последовательность $\{t_n\}$ задает метод суммирования, определяемый регулярной матрицей $A=\|a_{nk}\|$, для которой

$$a_{n0}=a_{n1}=\ \ldots\ =a_{n,\,n-1}=\frac{1-\alpha}{n},\ a_{nn}=\alpha\ (n\geqslant 1).$$

Возьмем регулярную положительную полунепрерывную матрицу $A = \| a_k(x) \|$ $(0 \leqslant x < +\infty)$, для которой $a_k(x) = a_{nk}$ при

$$n - 1 < x \leqslant n \text{ и } a_k(0) = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots; \ n = 1, 2, \ldots),$$

где a_{nk} — элементы матрицы Мерсера $(0 < \alpha < 1)$, являющуюся, как и матрица Мерсера, вполне неэффективной. Для этой матрицы, принадлежащей классу D, имеем

$$\sup_{0 \leqslant x < +\infty} | a_k(x) | = \alpha > 0 \quad (k > K)$$

и, следовательно,

$$\varlimsup_{k \to \infty} \sup_{0 \leqslant x < +\infty} | a_k(x) | = \alpha > 0.$$

Справедливость утверждения вытекает из произвольности α, $0 < \alpha < 1$.

7. Следуя Н. А. Давыдову [1, п. 5], введем в рассмотрение число

$$\delta_A = \varlimsup_{k \to \infty} \sup_{0 \leqslant x < +\infty} | a_k(x) |.$$

Ряд фактов, относящихся к теории суммирования рядов с помощью регулярной полунепрерывной матрицы

$$A = \| a_k(x) \| \quad (0 \leqslant x < +\infty)$$

класса D, выражаются посредством этого числа. Действительно, справедливы следующие утверждения, содержащиеся в работах Н. А. Давыдова [1, 3] и в настоящей заметке.

1) Если $\delta_A = 0$, то регулярная полунепрерывная матрица

$$A = \| a_k(x) \| \quad (0 \leqslant x < +\infty)$$

класса D суммирует некоторую расходящуюся последовательность из 0 и 1 и, значит, неравенство $\delta_A > 0$ является необходимым условием для того, чтобы регулярная полунепрерывная матрица A класса D была неэффективна на множестве ограниченных последовательностей.

2) Если $\delta_A > 0$, то регулярная положительная полунепрерывная матрица

$$A = \| a_k(x) \| \quad (0 \leqslant x < +\infty)$$

класса D не суммирует ни одной неограниченной последовательности, все члены которой содержатся в угле раствора меньше π.

3) Если $\delta_A > \frac{1}{2}$, то регулярная положительная полунепрерывная матрица

$$A = \| a_k(x) \| \quad (0 \leqslant x < +\infty)$$

класса D не суммирует ни одной расходящейся ограниченной последовательности.

4) Если $\delta_A = 1$, то ядро ограниченной последовательности $\{S_k\}$ совпадает с ядром функции

$$t(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) S_k \quad (0 \leqslant x < +\infty),$$

где

$$A = \| a_k(x) \| \quad (0 \leqslant x < +\infty) -$$

регулярная положительная полунепрерывная матрица класса D[1].

В заключение благодарю профессора Н. А. Давыдова за постановку задачи и ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Давыдов Н. А. Суммирование ограниченных последовательностей регулярными матрицами.—Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения». Вып. 23. Харьков, 1975, с. 24—32.
2. Давыдов Н. А. Перенесение одной теоремы Мазура—Орлича для регулярных матричных преобразований на регулярные интегральные преобразования.—Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения». Вып. 3. Харьков, 1966, с. 90—94.
3. Давыдов Н. А. Суммирование ограниченных последовательностей регулярными положительными матрицами.—«Мат. заметки», 1973, т. 13, вып. 2, с, 179—188.
4. Merser J. On the timit of reat variants.—«Proc. London Math. Soc.» (2), 1970, vol. 5, p. 206—224.
5. Харди Г. Расходящиеся ряды. Изд-во иностр. лит., 1951. 476 с.

[1] Определение ядра последовательности и функции см., например, [5, 2, 77].