Нѣкоторые результаты наблюденій, произведенныхъ на астрономической обсерваторіи Харьковскаго университета съ маятниками Реберъ-Пашвица.

Г. В. Левицкаго.

Въ началѣ августа 1893 года на астрономической обсерваторіи Харьковскаго университета установлены были два горизонтальныхъ маятника Реберъ-Пашвица вмѣстѣ съ фотографическимъ регистрирнымъ приборомъ.

Маятники Реберъ-Пашвица служатъ, между прочимъ, для изслѣдованія колебаній отвѣстной линіи и движеній земной коры. По отношенію къ явленіямъ послѣдняго рода разсмотрѣніе произведенныхъ на Харьковской обсерваторіи отъ 4 августа 1893 по 4 августа 1894 года наблюденій дало слѣдующіе результаты:

1. Наблюденія Мильна, Реберъ-Пашвица и другихъ показали, что земная кора часто испытываетъ продолжительныя микроколебанія, обозначаемыя терминомъ: „seismische Unruhe“. Упомянутые ученые находили связь между вѣтромъ и этими колебаніями, но приписывали имъ однако, по крайней мѣрѣ отчасти, сейсмическое происхожденіе. Наблюденія въ Харьковѣ,—наиболѣе полныя изъ всѣхъ до сихъ поръ произведенныхъ, такъ какъ при этомъ употреблялось два маятника, въ двухъ взаимно-перпендикулярныхъ плоскостяхъ,—показываютъ, съ значительною степенью вѣроятности, что единственная причина разсматриваемыхъ микроколебаній (seismische Unruhe) есть дѣйствіе вѣтра.

2. Вѣроятно, отчасти вслѣдствіе весьма значительной чувствительности харьковскихъ маятниковъ, замѣчены были весьма своеобразныя періодическія качанія земной коры, съ амплитудою до 0″07 и съ періодомъ, измѣняющимся между предѣлами отъ 3½ до 10 минутъ. Съ такою отчетливостью и въ теченіе столь значительныхъ промежутковъ времени, какъ въ Харьковѣ, качанія эти до сихъ поръ еще не наблю-

дались. Ниже будутъ упомянуты нѣкоторые факты, указывающіе, повидимому, на сейсмическое происхожденіе качаній.

3. Въ теченіе года чрезъ Харьковъ прошло не менѣе 120 землетрясеній весьма различной силы. Чрезвычайно сильны и продолжительны были землетрясенія 22 марта и 10 іюля 1894 г. (послѣднее — Константинопольское землетрясеніе). Происхожденіе многихъ землетрясеній удалось констатировать, въ томъ числѣ землетрясеній въ странахъ весьма отдаленныхъ, какъ въ Туркестанѣ, Японіи и Венецуэлѣ. Даже такія весьма слабыя землетрясенія, какъ Одесскія, отмѣчаются въ Харьковѣ весьма замѣтнымъ образомъ.

4. Значительная чувствительность Харьковскихъ маятниковъ и весьма удовлетворительная установка вала регистрирнаго прибора въ фотографическомъ фокусѣ линзъ маятниковъ (въ особенности для маятника въ меридіанѣ) позволила,—и повидимому не безъ успѣха,—искать предвѣстниковъ землетрясеній, т. е. движеній маятниковъ, обусловливаемыхъ тѣми процессами, результатомъ дѣйствія которыхъ является землетрясеніе. Приэтомъ оказалось, что въ большинствѣ случаевъ землетрясенію предшествуютъ за нѣсколько часовъ, иногда даже за 7 и за 9 *), весьма слабыя колебанія маятниковъ, нерѣдко съ амплитудой лишь въ 0″01 или 0″02, начинающіяся или отъ слабаго подземнаго толчка или небольшаго, но рѣзкаго качанія почвы, выражающагося короткимъ изгибомъ кривой отъ маятника на фотограммѣ. Затѣмъ, въ немногихъ случаяхъ, именно для тѣхъ землетрясеній, которыя имѣли мѣсто во время вышеупомянутыхъ продолжительныхъ періодическихъ качаній почвы, никакихъ колебаній маятника, какъ въ только что упомянутыхъ случаяхъ, не замѣчается. Повидимому эти періодическія качанія и служатъ въ разсматриваемыхъ случаяхъ предвѣстниками землетрясеній **). Наконецъ въ весьма небольшомъ числѣ случаевъ, именно только въ двухъ, при весьма слабыхъ притомъ землетрясеніяхъ, никакихъ предвѣстниковъ землетрясеній не замѣчено, т. е. процессы, ведущія къ появленію этихъ землетрясеній, чувствительныхъ для маятниковъ движеній земной коры не производили.

Предполагаемая связь между землетрясеніями и тѣми явленіями, которыя названы выше предвѣстниками, составляетъ, конечно, пока лишь гипотезу, нуждающуюся въ многократныхъ и многостороннихъ подтвержденіяхъ. Однако почти постоянное присутствіе тѣхъ или другихъ

---

*) Вообще, чѣмъ значительнѣе землетрясеніе, тѣмъ раньше появляются его предвѣстники, хотя встрѣчаются, повидимому, и исключенія; именно, предвѣстники нѣкоторыхъ сильныхъ землетрясеній появлялись лишь за $3^1/_4$ часа, а землетрясеній средней силы—за 9 час.

**) Это указываетъ также на сейсмическое происхожденіе качаній.

предвѣстниковъ передъ землетрясеніями, придаетъ, повидимому, этой связи нѣкоторую степень вѣроятности.

Итакъ, въ Харьковѣ наблюдались землетрясенія троякаго рода:

a) землетрясенія, коимъ предшествуютъ очень слабые толчки и колебанія,

b) землетрясенія, происходящія во время періодическихъ качаній почвы, и

c) очень слабыя землетрясенія, происходящія безъ всякихъ предвѣстниковъ.

Не соотвѣтствуетъ-ли это категоріямъ землетрясеній, установленнымъ геологами, именно землетрясеніямъ дислокаціоннымъ, вулканическимъ и денудаціоннымъ?

Гипотетическая среда Больтцмана
и
теорія Герца.

А. П. Грузинцева.

Больтцманъ въ концѣ прошлаго года опубликовалъ работу *), въ которой даетъ механическое толкованіе свойствъ гипотетической среды — („электромагнитной среды", какъ онъ ее называетъ, т. е. свѣтоваго эфира, по всей вѣроятности), приводящее его къ уравненіямъ Максуэлля въ теоріи электричества и магнетизма. Хотя свойства, приписываемыя Больтцманомъ той универсальной срединѣ, кинетическое состояніе которой обусловливаетъ электромагнитныя и оптическія явленія въ ней, совершенно гипотетическаго характера, но такъ какъ, съ одной стороны, они не противорѣчатъ общимъ взглядамъ физиковъ на сущность физическихъ явленій, а съ другой — крайне важно въ настоящее время имѣть хотя приблизительную картину кинетическаго состоянія діэлектрической универсальной среды, то мы думаетъ, что не безполезно будетъ разсмотрѣть предлагаемое Больтцманомъ. Задавшись такой цѣлью и вдумываясь въ соображенія мюнхенскаго физика, не трудно замѣтить, что его теорію должно дополнить условіемъ „несжимаемости электромагнитной среды"; когда же мы введемъ это условіе въ общія механическія уравненія Больтцмана, то увидимъ, что онѣ приводятъ не къ уравненіямъ Максуэлля, какъ полагаетъ Больтцманъ, а къ уравненіямъ Герца. Такой результатъ показываетъ всю важность предположеній Больтцмана и заставляетъ обработать ихъ съ болѣе общей точки зрѣнія черезъ введеніе силъ на границѣ срединъ, разсматривая „электромагнитную среду", какъ *упругую несжимаемую жидкость*, а не упругое твердое тѣло, какъ приходилось разсматривать „свѣтовой эфиръ" въ эластиціонныхъ теоріяхъ свѣта.

Такъ какъ расширеніе точки зрѣнія Больтцмана измѣняетъ результаты его теоріи и даетъ болѣе полную картину тѣхъ движеній, которыя

*) Wiedemann's Annalen, Bd. XLVIII, S. 78—99.

выполняются внутри діэлектрической средины, то мы раздѣлили настоящую замѣтку на двѣ части. *Въ первой* мы разсмотримъ теорію Больтцмана въ томъ видѣ, какъ онъ ее далъ самъ, дополнивъ ее лишь только въ одномъ пунктѣ, а именно введемъ въ уравненіе движенія условіе „несжимаемости" средины,—условіе, о которомъ Больтцманъ упоминаетъ, но не пользуется имъ *), что, по нашему мнѣнію, неправильно.

Во второй части я дополняю силы, приложенныя къ частицамъ средины согласно теоріи Больтцмана, новыми силами, которыя должны быть приложены къ точкамъ поверхности, ограничивающей средину или, лучше, отдѣляющей ее отъ другой, т. е. отъ подобной же среды, но заполняющей другое тѣло. Эти силы, приложенныя къ точкамъ поверхности, ограничивающей средину, мнѣ кажется, необходимо должны существовать, такъ какъ на поверхности, отдѣляющей одно тѣло отъ другого, могутъ происходить, да и дѣйствительно происходятъ, особыя явленія (напримѣръ, явленіе оптической поляризаціи), а разъ имѣетъ мѣсто явленіе, необходимо допустить существованіе силъ, вызывающихъ его.

I.

Изложимъ теперь теорію Больтцмана. Онъ предполагаетъ, что каждая частица „электромагнитной среды", или эфира, выполняетъ нѣкоторое движеніе общаго характера, т. е. поступательное и вращательное. Пусть

$$u\,,\quad v\,,\quad w$$

будутъ проекціи перемѣщенія частицы $M(x\,,\,y\,,\,z)$ на координатныя оси, а

$$\alpha\,,\;\beta\,,\;\gamma$$

проекціи удвоенной скорости вращенія эфирнаго элемента на тѣ же оси; тогда:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{dw}{dy} - \frac{dv}{dz} \\ \beta &= \frac{du}{dz} - \frac{dw}{dx} \\ \gamma &= \frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(a)}$$

Къ частицѣ M, которую предполагаемъ внутри *изотропной* средины, ограниченной нѣкоторой поверхностью, приложены, по Больтцману, силы:

---

*) Его стѣсняетъ необходимость допускать въ такомъ случаѣ силы „гидростатическаго давленія", но, какъ увидимъ, эти силы исключаются.

1. Ускорительныя, работа которыхъ за элементъ времени можетъ быть представлена въ видѣ:

$$\delta T = \frac{kd\tau}{4\pi}\left(u'\frac{\partial u'}{\partial t} + v'\frac{\partial v'}{\partial t} + w'\frac{\partial w'}{\partial t}\right)dt\,, \quad \ldots\ldots (b)$$

если масса единицы объема эфира будетъ:

$$\frac{k}{4\pi}\,,$$

а элементъ объема средины около точки $M(x\,,\ y\,,\ z)$ будетъ:

$$d\tau\,,$$

и кромѣ того:

$$u' = \frac{\partial u}{\partial t}\,,\quad v' = \frac{\partial v}{\partial t}\,,\quad w' = \frac{\partial w}{\partial t}\,.$$

2. Сопротивленія среды движенію точки M; силу сопротивленія Больтцманъ принимаетъ пропорціональной скорости частицы, т. е. проекціи этой силы будутъ:

$$\lambda_1 u'd\tau\,,\quad \lambda_1 v'd\tau\,,\quad \lambda_1 w'd\tau\,,$$

гдѣ λ_1 коэффиціентъ пропорціональности.

Элементарная работа этихъ силъ будетъ:

$$\delta R = \lambda_1 d\tau(u'^2 + v'^2 + w'^2)\,dt\,. \quad \ldots\ldots\ldots (c)$$

Эта работа обращается внутри средины въ теплоту, которая извѣстна подъ именемъ „теплоты Джауля“.

3. Затѣмъ Больтцманъ допускаетъ существованіе силъ сопротивленія вращенію элемента; эти силы пропорціональны проекціямъ $\alpha\,,\ \beta\,,\ \gamma\,,$ а слѣдовательно проекціи ихъ, обозначая коэффиціентъ пропорціональности черезъ $\frac{1}{4\pi\mu}$, будутъ:

$$\frac{\alpha d\tau}{4\pi\mu}\,,\quad \frac{\beta d\tau}{4\pi\mu}\,,\quad \frac{\gamma d\tau}{4\pi\mu}\,.$$

Работа ихъ должна состоять въ стремленіи уничтожить вращеніе элемента, т. е. сообщить ему перемѣщеніе, проекціи котораго должны быть:

$$-\frac{\partial\alpha}{\partial t}dt\,,\quad -\frac{\partial\beta}{\partial t}dt\,,\quad -\frac{\partial\gamma}{\partial t}dt\,;$$

слѣдовательно, эта работа можетъ быть представлена въ видѣ:

$$\delta G = -\frac{d\tau}{4\pi\mu}\left(\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial t}+\beta\frac{\partial\beta}{\partial t}+\gamma\frac{\partial\gamma}{\partial t}\right)dt \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, \text{(d)}$$

4. Наконецъ, къ точкѣ M приложены внѣшнія силы, проекціи которыхъ пусть будутъ:

$$Xd\tau\,,\quad Yd\tau\,,\quad Zd\tau\,,$$

а слѣдовательно, элементарная работа ихъ будетъ:

$$\delta U = (Xu' + Yv' + Zw')d\tau\, dt \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, \text{(e)}$$

Сложивъ выраженія (b), (c), (d) и (e) и взявъ интегралъ по всему объему средины, мы, по закону сохраненія энергіи, получимъ:

$$\int(\delta T + \delta G + \delta R + \delta U) = 0\,,$$

т. е.

$$dt\int d\tau\left\{k\left(u'\frac{du'}{dt}+v'\frac{dv'}{dt}+w'\frac{dw'}{dt}\right)-\frac{1}{\mu}\left(\alpha\frac{\partial\alpha}{dt}+\beta\frac{\partial\beta}{dt}+\gamma\frac{\partial\gamma}{dt}\right)+\right.$$

$$\left.+4\pi\lambda_1(u'^2+v'^2+w'^2)+4\pi(Xu'+Yv'+Zw')\right\}=0\,.\quad.\,.\,\text{(f)}$$

Преобразуя это равенство при помощи интегрированія по частямъ, послѣ подстановки значеній

$$\alpha\,,\ \beta\,,\ \gamma$$

изъ равенства (a), Больтцманъ получаетъ уравненія движенія въ томъ видѣ, въ какомъ ихъ далъ Максуэлль; но при этомъ онъ опустилъ изъ вида, что количества

$$u'dt\,,\quad v'dt\,,\quad w'dt$$

не совершенно произвольны, а должны удовлетворять нѣкоторому соотношенію. Дѣйствительно, вслѣдствіе несжимаемости средины имѣемъ:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

или, по дифференцированіи по t:

$$\frac{du'}{dx}+\frac{dv'}{dy}+\frac{dw'}{dz}=0\,.\,\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,\text{(g)}$$

Вотъ этому уравненію и должны удовлетворять значенія $u'dt$, $v'dt$, $w'dt$.

Чтобы ввести условіе (g) въ равенство (f) мы умножаемъ это уравненіе на $H\,dt\,d\tau$, если H—неизвѣстная функція координатъ (x, y, z) и времени t, беремъ интегралъ по всему объему и прикладываемъ результатъ къ равенству (f); получаемъ:

$$dt\int d\tau\left\{k\left(u'\frac{\partial u'}{\partial t}+v'\frac{\partial v'}{\partial t}+w'\frac{\partial w'}{\partial t}\right)-\frac{1}{\mu}\left(\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial t}+\beta\frac{\partial\beta}{\partial t}+\gamma\frac{\partial\gamma}{\partial t}\right)+\right.$$

$$\left.+4\pi\lambda_1(u'^2+v'^2+w'^2)+4\pi(Xu'+Yv'+Zw')+H\left(\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}+\frac{\partial w'}{\partial z}\right)\right\}=0. \text{(h)}$$

Но при помощи равенствъ (а) имѣемъ:

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t}=\frac{\partial w'}{\partial y}-\frac{\partial v'}{\partial z}$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial t}=\frac{\partial u'}{\partial z}-\frac{\partial w'}{\partial x}$$

$$\frac{\partial\gamma}{\partial t}=\frac{\partial v'}{\partial x}-\frac{\partial u'}{\partial y};$$

поэтому получимъ, пользуясь преобразованіемъ Грина:

$$\int\frac{d\tau}{\mu}\left(\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial t}+\beta\frac{\partial\beta}{\partial t}+\gamma\frac{\partial\gamma}{\partial t}\right)=-\int d\tau\left\{u'\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\beta}{\mu}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)\right]+\right.$$

$$\left.+v'\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)\right]+w'\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\beta}{\mu}\right)\right]\right\}-\int\frac{dS}{\mu}\,[u'(C_1\beta-B_1\gamma)+$$

$$+v'(A_1\gamma-C_1\alpha)+w'(B_1\alpha-A_1\beta)]\quad\ldots\ldots\text{(k)}$$

$$\int Hd\tau\left(\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}+\frac{\partial w'}{\partial z}\right)=-\int d\tau\left(u'\frac{\partial H}{\partial x}+v'\frac{\partial H}{\partial y}+w'\frac{\partial H}{\partial z}\right)-$$

$$-\int HdS\,(A_1u'+B_1v'+C_1w').\quad\ldots\ldots\ldots\text{(l)}$$

Въ правыхъ частяхъ этихъ равенствъ первые интегралы относятся ко всему объему, занятому срединой, а вторые—ко всѣмъ точкамъ поверхности, ограничивающей этотъ объемъ, и кромѣ того dS обозначаетъ элементъ поверхности, а

$$A_1,\quad B_1,\quad C_1$$

косинусы угловъ нормала къ поверхности, проведеннаго внутрь объема.

Подставляя эти значенія интеграловъ изъ равенствъ (k) и (l) въ равенство (h), получимъ:

$$dt\int d\tau\left\{u'\left[k\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\beta}{\mu}\right)+4\pi\lambda_1\frac{\partial u}{dt}+4\pi X-\frac{\partial H}{\partial x}\right]+\right.$$

$$+v'\left[k\frac{\partial^2 v}{dt^2}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)+4\pi\lambda_1\frac{\partial v}{dt}+4\pi Y-\frac{\partial H}{\partial y}\right]+$$

$$\left.+w'\left[k\frac{\partial^2 w}{dt^2}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\beta}{\mu}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)+4\pi\lambda_1\frac{\partial w}{dt}+4\pi Z-\frac{\partial H}{\partial z}\right]\right\}+$$

$$+dt\int dS\left\{u'\left[C_1\frac{\beta}{\mu}-B_1\frac{\gamma}{\mu}-A_1H\right]+v'\left[A_1\frac{\gamma}{\mu}-C_1\frac{\alpha}{\mu}-B_1H\right]+\right.$$

$$\left.+w'\left[B_1\frac{\alpha}{\mu}-A_1\frac{\beta}{\mu}-C_1H\right]\right\}=0\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(\mathrm{f}')$$

Теперь имѣемъ право считать $u'dt$, $v'dt$, $w'dt$ совершенно произвольными количествами, а потому послѣднее равенство распадается на слѣдующія двѣ системы уравненій:

A. *внутри* средины:

$$\left.\begin{aligned}
k\frac{\partial^2 u}{dt^2}+4\pi\lambda_1\frac{\partial u}{dt}&=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\beta}{\mu}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)-4\pi X+\frac{\partial H}{\partial x}\\
k\frac{\partial^2 v}{dt^2}+4\pi\lambda_1\frac{\partial v}{dt}&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)-4\pi Y+\frac{\partial H}{\partial y}\\
k\frac{\partial^2 w}{dt^2}+4\pi\lambda_1\frac{\partial w}{\delta t}&=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\beta}{\mu}\right)-4\pi Z+\frac{\partial H}{\partial z}
\end{aligned}\right\}\;.\;.\;.\;(\mathrm{A})$$

и B. *на границѣ* средины:

$$\left.\begin{aligned}
C_1\beta-B_1\gamma&=A_1H\mu\\
A_1\gamma-C_1\alpha&=B_1H\mu\\
B_1\alpha-A_1\beta&=C_1H\mu
\end{aligned}\right\}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(\mathrm{B})$$

Если въ этихъ уравненіяхъ положимъ:

$$H=0\,,$$

то они обратятся въ уравненія, полученныя Больтцманомъ, какъ легко можно убѣдиться *).

---

*) L. c. стр. 82, уравненія (12); разница только въ обозначеніяхъ.

Предполагая средину неограниченной, мы увидимъ, что уравненія (B) сами собой удовлетворяются, ибо на безконечности всѣ функціи:

$$\alpha, \ \beta, \ \gamma, \ H$$

обращаются въ нуль. Такимъ образомъ, для неограниченной средины условія на границахъ удовлетворяются; что же касается средины, ограниченной нѣкоторой поверхностью, то Больтцманъ вмѣсто системы (B) (при $H=0$) выводитъ другую, состоящую въ равенствѣ проекцій α, β, γ и u', v', w' на касательную плоскость; проекціи же на нормалъ къ поверхности не равны. Подробный выводъ этихъ условій Больтцмана можно найти въ его „Vorlesungen über Maxwell's Theorie der Electricität und Lichtes", II Theil, S. 19—21 (Leipzig 1893). Но такой пріемъ совершенно искусственный: основное уравненіе движенія въ срединѣ должно дать и условія на границахъ, какъ это показано во *второй* части этой замѣтки. Уравненія (A) заключаютъ въ себѣ неизвѣстную функцію H, входящую въ видѣ членовъ:

$$\frac{\partial H}{\partial x}, \ \frac{\partial H}{\partial y}, \ \frac{\partial H}{\partial z},$$

аналогичныхъ проекціямъ „гидростатическаго давленія" въ уравненіяхъ гидродинамики; хотя подобныя силы ни Максвелль, ни Герцъ не разсматривали, но онѣ не вредятъ дѣлу, ибо, вслѣдствіе физической неопредѣленности функціи H, уравненія (A) не будутъ окончательными: эта функція H должна быть исключена изъ нихъ *). Для исключенія продифференцируемъ 3ье уравненіе въ системѣ (A) по y, 2ое по z и изъ перваго результата вычтемъ второй; получимъ при помощи (a) въ предположеніи, что силы

$$X, \ Y, \ Z$$

имѣютъ потенціалъ:

$$k\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2}+4\pi\lambda_1\frac{\partial \alpha}{\partial t}=\Delta\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)-\frac{\partial l_1}{\partial x},$$

---

*) Если желаемъ опредѣлить аналитически эту функцію, то продифференцируемъ уравненія (A) по x, y, z и результаты сложимъ; получимъ вслѣдствіе равенства (g):

$$\Delta H=4\pi\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right).$$

Если силы X, Y, Z удовлетворяютъ тождественно уравненію:

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=0,$$

то функція H опредѣлится изъ болѣе простого уравненія:

$$\Delta H=0.$$

гдѣ:

$$l_1 = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\alpha}{\mu}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\beta}{\mu}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\gamma}{\mu}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \text{(m)}$$

Положимъ:

$$\int_0^t \alpha dt = A\varepsilon\xi\,, \quad \int_0^t \beta dt = A\varepsilon\eta\,, \quad \int_0^t \gamma dt = A\varepsilon\zeta\,, \quad \ldots\ldots \text{(n)}$$

считая время отъ момента начала движенія, т. е. отъ момента, когда всѣ функціи α, β, γ, u, v, w равны нулю, и подразумѣвая подъ A и ε двѣ постоянныя.

При такихъ положеніяхъ предыдущее уравненіе можно написать въ слѣдующемъ видѣ:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[k\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} + 4\pi\lambda_1\frac{\partial\xi}{\partial t}\right] = \frac{\partial}{\partial t}\left[\Delta\left(\frac{\xi}{\mu}\right) - \frac{\partial l'}{\partial x}\right],$$

гдѣ

$$l' = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\xi}{\mu}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\eta}{\mu}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\zeta}{\mu}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \text{(p)}$$

Интегрируя по t и помня, что для $t=0$ всѣ функціи равны нулю, получаемъ:

$$k\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} + 4\pi\lambda_1\frac{\partial\xi}{\partial t} = \Delta\frac{\xi}{\mu} - \frac{\partial l'}{\partial x} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(q)}$$

Если примемъ, что μ постоянно, и положимъ:

$$k = A^2\varepsilon\,, \quad \lambda_1 = A^2\lambda\,, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(r)}$$

то уравненіе (q) обратимъ въ слѣдующее:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} + 4\pi\varkappa\frac{\partial\xi}{\partial t} = \omega^2\left(\Delta\xi - \frac{\partial l}{\partial x}\right), \quad \ldots\ldots\ldots \text{(q bis)}$$

гдѣ

$$\varkappa = \frac{\lambda_1}{k}\,, \quad \omega^2 = \frac{1}{k\mu}$$

и

$$l = \frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z}\,. \quad \ldots\ldots\ldots \text{(s)}$$

Уравненіе (q bis) и ему аналогичныя съ η и ζ тождественны съ уравненіями (XIII) въ моей „Электромагнитной теоріи свѣта“ (стр. 11), выведенными изъ общихъ уравненій Г. Герца.

Разсмотримъ ближе положенія (n). Подставляя значенія α, β, γ изъ (n) въ равенства (a), получимъ:

$$\left.\begin{aligned} A\varepsilon\frac{\partial\xi}{\partial t} &= \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \\ A\varepsilon\frac{\partial\eta}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \\ A\varepsilon\frac{\partial\zeta}{\partial t} &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(t)}$$

а это уравненія (XI) моей теоріи (стр. 10).

Если внѣшнихъ силъ нѣтъ, т. е., если

$$X = Y = Z = 0\,,$$

тогда изъ уравненій (A) можемъ получить систему (X) стр. 9 моей „Электромагнитной теоріи свѣта".

Дѣйствительно, положимъ:

$$H = \frac{\partial H_1}{\partial t}\,,$$

тогда первое изъ уравненій (A) будетъ при помощи (a):

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{k\frac{\partial u}{\partial t} + 4\pi\lambda_1 u - \frac{\partial H_1}{\partial x}\right\} = \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{A\varepsilon}{\mu}\left(\frac{\partial\eta}{\partial z} - \frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)\right\},$$

откуда:

$$k\frac{\partial u}{\partial t} + 4\pi\lambda_1 u - \frac{\partial H_1}{\partial x} = \frac{A\varepsilon}{\mu}\left(\frac{\partial\eta}{\partial z} - \frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)$$

или, если примемъ въ разсчетъ обозначенія (r):

$$A\mu\frac{\partial u}{\partial t} + 4\pi A\mu\varkappa(u - u_0) = \frac{\partial\eta}{\partial z} - \frac{\partial\zeta}{\partial y}\,,$$

и два подобныхъ уравненія для v и w.

Въ нихъ положено:

$$\frac{\partial H_1}{\partial x} = 4\pi A^2\lambda u_0\,,$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial y} = 4\pi A^2\lambda v_0\,,$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial z} = 4\pi A^2\lambda w_0\,.$$

Такимъ образомъ, получимъ уравненія (X) стр. 9; кромѣ того, видимъ, что

$$H_1 = 4\pi A^2 \lambda \psi.$$

Хотя, какъ показано дальше, при

$$X = Y = Z = 0$$

функція $H = 0$, но функція H_1 будетъ существовать, и она будетъ функціей только координатъ (x, y, z); въ этомъ убѣждаемся прямымъ интегрированіемъ по t уравненій (A): H_1 явится какъ постоянное интегрированія.

Займемся теперь уравненіями (B). Исключая изъ нихъ H, найдемъ:

$$\frac{\alpha}{A_1} = \frac{\beta}{B_1} = \frac{\gamma}{C_1}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \text{(u)}$$

что показываетъ, что вращеніе элемента эфира происходитъ въ плоскости касательной къ поверхности, ограничивающей средину.

Равенства (u) показываютъ, что если средина безпредѣльна, то

$$H = 0$$

на границѣ средины. Если силы X, Y, Z удовлетворяютъ условію:

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0,$$

то тогда

$$H = 0$$

вездѣ.

Равенства (u) даютъ для ξ, η, ζ подобныя же соотношенія:

$$\frac{\xi}{A_1} = \frac{\eta}{B_1} = \frac{\zeta}{C_1} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \text{(v)}$$

II.

Хотя мы и получили вполнѣ опредѣленныя рѣшенія, но во всякомъ случаѣ нашъ анализъ не полонъ, ибо несомнѣнно, что на границѣ срединъ дѣйствуютъ нѣкоторыя силы, къ разсмотрѣнію которыхъ и перейдемъ.

Пусть

$$X_n, \quad Y_n, \quad Z_n$$

будутъ проекціи силъ приложенныхъ къ каждому элементу dS поверхности, ограничивающей средину; въ такомъ случаѣ работа этихъ силъ за безконечно-малый элементъ времени будетъ:

$$dt\int dS(X_n u' + Y_n v' + Z_n w') \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\alpha)$$

и въ уравненіяхъ (f) и (f′) прибавится въ лѣвой части этотъ членъ (α).

Преобразуя эти уравненія такъ же, какъ и выше, мы найдемъ для всякой точки *внутри* средины тѣ же уравненія (A), а для точекъ на границахъ получимъ новую систему, а именно:

$$\left.\begin{aligned} C_1\beta - B_1\gamma - A_1 H\mu + X_n\mu = 0 \\ A_1\gamma - C_1\alpha - B_1 H\mu + Y_n\mu = 0 \\ B_1\alpha - A_1\beta - C_1 H\mu + Z_n\mu = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\mathrm{B\ bis})$$

Если умножимъ эти равенства на dt и возьмемъ интегралъ отъ 0 до t, то эти уравненія дадутъ при помощи (n):

$$\left.\begin{aligned} C_1\eta - B_1\zeta - A_1 H_1 + \Xi = 0 \\ A_1\zeta - C_1\xi - B_1 H_1 + H = 0 \\ B_1\xi - A_1\eta - C_1 H_1 + Z = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\mathrm{C})$$

гдѣ положено:

$$\int_0^t H\mu dt = A\varepsilon H_1 ,$$

$$\frac{1}{A\varepsilon}\int_0^t X_n\mu dt = \Xi , \quad \frac{1}{A\varepsilon}\int_0^t Y_n\mu dt = H , \quad \frac{1}{A\varepsilon}\int_0^t Z_n\mu dt = Z . \quad . \; . \; (\beta)$$

Не трудно видѣть, что Ξ, H, Z суть проекціи нѣкотораго вектора P, т. е., что

$$\Xi = P\cos(Px) , \quad H = P\cos(Py) , \quad Z = P\cos(Pz) . \quad . \; . \; . \; (\gamma)$$

Выведемъ слѣдствія изъ условій (C).

Сначала напишемъ уравненія (C) въ болѣе ясномъ видѣ.

Пусть

$$\varrho = + \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$$

и

$$\frac{\xi}{\varrho} = \cos(\varrho x) , \quad \frac{\eta}{\varrho} = \cos(\varrho y) , \quad \frac{\zeta}{\varrho} = \cos(\varrho z) .$$

Введемъ два направленія: S и T; первое перпендикулярное къ плоскости nMP, а другое перпендикулярное къ плоскости nMS, тогда для косинусовъ угловъ этихъ перпендикуляровъ получимъ:

$$\left.\begin{aligned}\cos(Sx)\sin(Pn) &= C_1\cos(Py) - B_1\cos(Pz)\\ \cos(Sy)\sin(Pn) &= A_1\cos(Pz) - C_1\cos(Px)\\ \cos(Sz)\sin(Pn) &= B_1\cos(Px) - A_1\cos(Py)\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots(\delta)$$

затѣмъ

$$\left.\begin{aligned}\cos(Tx) &= B_1\cos(Sz) - C_1\cos(Sy)\\ \cos(Ty) &= C_1\cos(Sx) - A_1\cos(Sz)\\ \cos(Tz) &= A_1\cos(Sy) - B_1\cos(Sx)\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots(\varepsilon)$$

Напишемъ уравненія (C) въ такомъ видѣ:

$$\left.\begin{aligned}\Xi = P\cos(Px) &= A_1H_1 + \varrho\,[B_1\cos(\varrho z) - C_1\cos(\varrho y)]\\ H = P\cos(Py) &= B_1H_1 + \varrho\,[C_1\cos(\varrho x) - A_1\cos(\varrho z)]\\ Z = P\cos(Pz) &= C_1H_1 + \varrho\,[A_1\cos(\varrho y) - B_1\cos(\varrho x)]\end{aligned}\right\}\ldots(\text{C bis})$$

Умножимъ эти равенства сначала на A_1, B_1, C_1, а потомъ на $\cos(\varrho x)$, $\cos(\varrho y)$, $\cos(\varrho z)$, и складывая результаты, получимъ:

$$P\cos(Pn) = H_1\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\varkappa)$$

$$P\cos(P\varrho) = H_1\cos(\varrho n)\ldots\ldots\ldots\ldots(\lambda)$$

Уравненіе $(\varkappa)$ показываетъ, что функція H_1 численно равна проекціи давленія P на нормалъ къ поверхности.

Умножимъ тѣ же уравненія (C bis) на $\cos(Sx)$, $\cos(Sy)$ и $\cos(Sz)$ и результаты сложимъ; найдемъ:

$$P\cos(PS) = \varrho\,\{\cos(\varrho x)\,[C_1\cos(Sy) - B_1\cos(Sz)] + \ldots\}$$

или при помощи (ε):

$$P\cos(PS) = -\varrho\cos(\varrho T).$$

Но по условію

$$\cos(PS) = 0\,,$$

слѣдовательно:

$$\cos(\varrho T) = 0\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\mu)$$

т. е. прямая T перпендикулярна къ ϱ: значитъ, векторъ ϱ лежитъ въ плоскости nMS.

Итакъ, векторы P и ϱ лежатъ въ взаимно-перпендикулярныхъ плоскостяхъ, что видно и изъ сравненія равенствъ ($\varkappa$) и (λ), которыя даютъ по исключеніи H_1:

$$\cos(P\varrho) = \cos(Pn)\cos(\varrho n).$$

Умножая уравненія (ε) на $\cos(Px)$, $\cos(Py)$ и $\cos(Pz)$, по сложеніи получимъ:

$$\cos(PT) = \cos(Sx)\left[C_1\cos(Py) - B_1\cos(Pz)\right] +$$
$$+\cos(Sy)\left[A_1\cos(Pz) - C_1\cos(Px)\right] + \cos(Sz)\left[B_1\cos(Px) - A_1\cos(P_1y)\right]$$

или, при помощи (δ):

$$\cos(PT) = \sin(Pn). \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\nu)$$

Умножимъ теперь уравненія (C bis) на $\cos(Px)$, $\cos(Py)$ и $\cos(Pz)$; получимъ по сложеніи результатовъ:

$$P = H_1\cos(Pn) + \varrho\left\{\cos(\varrho x)\left[C_1\cos(Py) - B_1\cos(Pz)\right] + \ldots\right\},$$

т. е.

$$P = H_1\cos(Pn) + \varrho\sin(Pn)\cos(\varrho S). \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\omega)$$

Подставляя сюда значеніе H_1 изъ равенства ($\varkappa$), получимъ:

$$P\sin^2(Pn) = \varrho\sin(Pn)\cos(\varrho S)$$

или, если P не совпадаетъ съ n:

$$P\sin(Pn) = \varrho\cos(\varrho S). \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\pi)$$

Возведемъ уравненія (C bis) въ квадратъ и результаты сложимъ; найдемъ:

$$P^2 = H_1^2 + \varrho^2\sin^2(\varrho n). \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\varrho)$$

Складывая же квадраты ($\varkappa$) и (π), получимъ:

$$P^2 = H_1^2 + \varrho^2\cos^2(\varrho S). \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\tau)$$

Сравнивая съ (ϱ), находимъ:

$$\cos(\varrho S) = \pm\sin(\varrho n). \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\sigma)$$

Къ тѣмъ же результатамъ мы пришли бы, если бы представили формулы (C bis) въ иной формѣ. Съ этой цѣлью умножимъ второе изъ уравненій (C bis) на C_1, третье на $-B_1$ и сложимъ результаты; найдемъ при помощи (σ) первое изъ нижеписанныхъ уравненій; остальныя два получатся подобнымъ же образомъ:

$$P \sin(Pn) \cos(Sx) = \varrho\,[\cos(\varrho x) - A_1 \cos(\varrho n)]\,,$$
$$P \sin(Pn) \cos(Sy) = \varrho\,[\cos(\varrho y) - B_1 \cos(\varrho n)]\,,$$
$$P \sin(Pn) \cos(Sz) = \varrho\,[\cos(\varrho z) - C_1 \cos(\varrho n)]\,.$$

Отсюда, умножая на $\cos(\varrho x)$, $\cos(\varrho y)$, $\cos(\varrho z)$, получимъ по сложеніи результатовъ:

$$P \sin(Pn) \cos(S\varrho) = \varrho \sin^2(\varrho n)\,.$$

Умножимъ на $\cos(Sx)$, $\cos(Sy)$, $\cos(Sz)$ и сложимъ; найдемъ:

$$P \sin(Pn) = \varrho\,\{\cos(\varrho S) - \cos(\varrho n)\cos(nS)\}\,,$$

т. е.

$$P \sin(Pn) = \varrho \cos(\varrho S)\,.$$

Сравнивая съ предыдущимъ, получимъ равенство (σ).

Умножимъ на $\cos(Tx)$, $\cos(Ty)$, $\cos(Tz)$, получимъ по сложеніи результатовъ:

$$P \sin(Pn) \cos(ST) = \varrho\,\{\cos(\varrho T) - \cos(\varrho n)\cos(Tn)\}\,,$$

т. е.

$$\cos(\varrho T) = 0\,.$$

Умножимъ на $\cos(Px)$, $\cos(Py)$, $\cos(Pz)$; получимъ:

$$P \sin(Pn) \cos(PS) = \varrho\,\{\cos(P\varrho) - \cos(\varrho n)\cos(Pn)\}\,,$$

т. е.

$$\cos(\varrho P) = \cos(nP)\cos(n\varrho)\,,$$

или: плоскости nMP и $nM\varrho$ взаимно перпендикулярны.

Если давленіе P перпендикулярно къ поверхности, то предыдущія соотношенія дадутъ:

$$\cos(\varrho S) = 0\,,$$

т. е. и векторъ ϱ совпадаетъ съ нормаломъ къ поверхности; другими словами, частицы среды вращаются въ плоскостяхъ касательныхъ къ поверхности. Затѣмъ находимъ, что

$$H_1 = P\,.$$

До сихъ поръ мы разсматривали условія на границахъ по отношенію къ одной средѣ; разсмотримъ ихъ по отношенію къ обѣимъ срединамъ, раздѣленнымъ поверхностью, нормалъ къ которой мы теперь обозначимъ знакомъ N. Возьмемъ на касательной плоскости двѣ ортогоналеныя прямыя MP и MQ; въ такомъ случаѣ система прямыхъ:

$$MP, \quad MQ, \quad MN$$

будетъ ортогональная система и пусть косинусы направленія MP будутъ A'', B'', C'', а $MQ - A_{\prime\prime}$, $B_{\prime\prime}$, $C_{\prime\prime}$. Пусть проекціи ξ, η, ζ на прямыя MP, MQ и MN будутъ: ξ', η', ζ'; тогда, умножая уравненія (C) сначала на A'', B'', C'', потомъ на $A_{\prime\prime}$, $B_{\prime\prime}$, $C_{\prime\prime}$ и наконецъ на A_1, B_1, C_1 и складывая результаты, получимъ:

$$\left.\begin{aligned} \eta' + P\cos(PP) &= 0 \\ \xi' - P\cos(PQ) &= 0 \\ H_1 - P\cos(PN) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(D)}$$

ибо

$$B_1C'' - C_1B'' = A_{\prime\prime} \text{ и т. п.}$$
$$B_1C_{\prime\prime} - C_1B_{\prime\prime} = -A'' \text{ и т. п.}$$

Но по физическому смыслу силъ давленія на поверхности, имѣемъ:

$$(X_n)_1 = (X_n)_2, \quad (Y_n)_1 = (Y_n)_2, \quad (Z_n)_1 = (Z_n)_2, \quad \ldots\ldots \text{(E)}$$

да при помощи равенства (β) находимъ:

$$P\cos(PP) = \frac{\mu}{A\varepsilon}\int_0^t X'_n dt, \quad P\cos(PQ) = \frac{\mu}{A\varepsilon}\int_0^t Y'_n dt;$$

поэтому, обозначая указателями (1) и (2) принадлежность количества *первой* или *второй* средѣ получимъ:

$$\frac{\varepsilon_1}{\mu_1} P_1 \cos(P_1P) = \frac{\varepsilon_2}{\mu_2} P_2 \cos(P_2P),$$

$$\frac{\varepsilon_1}{\mu_1} P_1 \cos(P_1Q) = \frac{\varepsilon_2}{\mu_2} P_2 \cos(P_2Q),$$

если μ отъ времени не зависитъ. Подставляя въ первыя уравненія (D), получаемъ:

$$\left.\begin{aligned} \left[\frac{\varepsilon}{\mu}\eta'\right]_1 &= \left[\frac{\varepsilon}{\mu}\eta'\right]_2 \\ \left[\frac{\varepsilon}{\mu}\xi'\right]_1 &= \left[\frac{\varepsilon}{\mu}\xi'\right]_2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(F)}$$

Третье уравненіе въ системѣ (D) по равенству ($\varkappa$) есть тождество.

Условія (B bis), обработанныя такимъ же образомъ, дадутъ:

$$\left.\begin{aligned} \beta' + \mu X'_n &= 0 \\ \alpha' - \mu Y'_n &= 0 \\ H - Z'_n &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{G})$$

Отсюда найдемъ:

$$\left.\begin{aligned} \left[\frac{\alpha'}{\mu}\right]_1 &= \left[\frac{\alpha'}{\mu}\right]_2 \\ \left[\frac{\beta'}{\mu}\right]_1 &= \left[\frac{\beta'}{\mu}\right]_2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{H})$$

Имѣя условія относительно ξ' и η', или для α' и β', безъ труда составимъ условія для u', v' и w'.

Именно при помощи уравненій (H) и (n) или уравненій (F) и (t) получаемъ равенства:

$$\left.\begin{aligned} \left[\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial w'}{\partial y'} - \frac{\partial v'}{\partial z'}\right)\right]_1 &= \left[\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial w'}{\partial y'} - \frac{\partial v'}{\partial z'}\right)\right]_2 \\ \left[\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial u'}{\partial z'} - \frac{\partial w'}{\partial x'}\right)\right]_1 &= \left[\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial u'}{\partial z'} - \frac{\partial w'}{\partial x'}\right)\right]_2, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (\mathrm{K})$$

гдѣ u', v', w' суть проекціи u, v, w на прямыя MP, MQ и MN, а x', y', z' координаты точки поверхности по отношенію тѣхъ же осей: MP, MQ, MN.

Такимъ образомъ теорія Больтцмана, надлежащимъ образомъ разработанная, приводитъ къ условіямъ на границахъ въ видѣ системы условій Фрэнэля, т. е. или (F) или (H) и ихъ слѣдствій. Что касается третьихъ уравненій въ системахъ (D) и (G), то они опредѣляютъ измѣняемость функцій H или H_1 на поверхности двухъ срединъ въ видѣ условій

$$\left.\begin{aligned} [H]_1 &= [H]_2 \\ \left[\frac{\varepsilon}{\mu} H_1\right]_1 &= \left[\frac{\varepsilon}{\mu} H_1\right]_2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{I})$$

Эти условія необходимы для полнаго опредѣленія функцій H и H_1.

Всѣ эти условія суть слѣдствія положеній (E); если же мы не примемъ этихъ положеній, то и условія на границахъ будутъ иными.

23 Сентября 1894 г.

Нахожденіе алгебраическихъ раціональныхъ рѣшеній линейныхъ дифференціальныхъ уравненій съ алгебраическими раціональными коэффиціентами.

П. А. Некрасова *).

Труды академика *В. Г. Имшенецкаго* и вызванный ими оживленный обмѣнъ мыслей между многими русскими математиками привели къ тому, что указанная въ заглавіи задача получила полное и всестороннее разъясненіе въ нашей литературѣ **). Въ настоящее время задача на столько исчерпана, что дѣло можетъ касаться улучшенія развѣ лишь изложенія теоріи.

*) Статья эта была предметомъ сообщенія автора Московскому Математическому Обществу въ засѣданіи 20 сентября 1894 г. и затѣмъ въ извлеченіи доложена Харьковскому Математическому Обществу въ засѣданіи 4 ноября 1894 г.

**) Привожу здѣсь эту литературу въ слѣдующемъ спискѣ:

В. Г. Имшенецкій. 1. Общій способъ нахожденія раціональныхъ дробныхъ частныхъ интеграловъ линейныхъ уравненій съ раціональными коэффиціентами. (Записки Имп. Академіи Наукъ, т. LV, прилож. № 9. 1887).

2. Дополненіе теоріи и одно приложеніе общаго способа нахожденія раціональныхъ дробныхъ рѣшеній линейныхъ уравненій съ раціональными коэффиціентами. (Записки Имп. Академіи Наукъ, т. LVIII. 1888).

3. Сообщеніе академика В. Г. Имшенецкаго въ засѣданіи Моск. Матем. Общества 19 мая 1892 года. (Матем. Сборн., т. XVII, вып. 2, стр. 391—398. 1893).

К. А. Поссе. Извлеченіе изъ письма проф. К. А. Поссе (отъ него лично и отъ имени проф. А. Н. Коркина и проф. Д. К. Бобылева). (Математич. Сборн., т. XVII, вып. 2, стр. 386—391. 1893).

П. А. Некрасовъ. Способъ В. Г. Имшенецкаго для нахожденія алгебраическихъ раціональныхъ дробныхъ рѣшеній линейнаго дифференціальнаго уравненія. (Матем. Сб., т. XVII, вып. 2, стр. 341—382. 1893).

К. А. Андреевъ. О разысканіи раціональныхъ частныхъ интеграловъ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій при помощи интегрирующаго множителя. (Сообщенія Харьк. Матем. Общества, т. IV. 1894).

Н. Гюнтеръ. О нахожденіи дробныхъ раціональныхъ интеграловъ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій. (Матем. Сб., т. XVII, в. 4, 1894). Статья Н. Гюнтера рекомендована академикомъ А. А. Марковымъ.

Въ предлагаемой статьѣ я намѣренъ представить новое изложеніе, не смотря на существованіе нѣскольких изложеній.

Имѣя дѣло въ настоящемъ изложеніи съ уравненіемъ:

$$P_0\frac{d^ny}{dx^n}+P_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+P_ny=V, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

гдѣ $P_0, P_1, \ldots, P_n$ и V суть цѣлые полиномы, не имѣющіе общаго дѣлителя, я не буду прибѣгать здѣсь къ посредствующей формѣ:

$$\frac{d^n(Q_0y)}{dx^n}+\frac{d^{n-1}(Q_1y)}{dx^{n-1}}+\ldots+Q_ny=V, \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (A)$$

которую избралъ В. Г. Имшенецкій и съ которою мнѣ, какъ комментатору В. Г. Имшенецкаго, пришлось имѣть дѣло въ статьѣ: „Способъ В. Г. Имшенецкаго...“ *).

Далѣе въ настоящемъ изложеніи я не намѣренъ слѣдовать безусловно одному какому-либо направленію, а напротивъ буду относиться свободно ко всѣмъ направленіямъ, отовсюду извлекая то, что мнѣ представляется заслуживающимъ вниманія, и приводя это въ такія сочетанія, какія мнѣ кажутся болѣе удобными.

Въ §§ 2, 3 и 4 изложены основанія теоріи безъ посредства интегрирующаго множителя. Въ это изложеніе я по возможности переношу всѣ тѣ усовершенствованія, которыя были достигнуты при другомъ изложеніи теоріи, основанномъ на употребленіи интегрирующаго множителя В. Г. Имшенецкаго **). Такимъ образомъ я широко пользуюсь здѣсь свойствами полиномовъ ζ_n, на которые распадается полиномъ σ_n В. Г. Имшенецкаго ***) и которые теперь я обозначаю короче чрезъ ζ. Эти полиномы могли бы быть взяты прямо изъ моей статьи: „Способъ В. Г. Имшенецкаго...“ при $m=n+\alpha-\beta-1$; но здѣсь я получаю ихъ независимо, основываясь непосредственно на формѣ (1) дифференціальнаго уравненія и придавая имъ соотвѣтствующій этой формѣ видъ ****). Вмѣстѣ съ тѣмъ я разсматриваю здѣсь полиномъ σ, который по своему

---

*) Пріемы вычисленія, изложенные въ этой моей статьѣ, удобнѣе всего примѣняются тогда, когда дифференціальное уравненіе дано непосредственно въ формѣ (A). Но если дифференціальное уравненіе дано въ общеупотребительной формѣ (1), то, какъ видно изъ статьи проф. К. А. Андреева, предварительное приведеніе уравненія (1) къ формѣ (A) является безполезнымъ и ненужнымъ осложненіемъ въ способѣ В. Г. Имшенецкаго.

**) Отчасти это перенесеніе уже осуществлено въ статьѣ Н. Гюнтера, рекомендованной академикомъ А. А. Марковымъ.

***) См. Матем. Сборн., т. XVII, вып. 2, стр. 355, 366, 376 и 382. Собственно говоря, В. Г. Имшенецкій употребляетъ въ своемъ мемуарѣ полиномъ S_n, а не σ_n; но полиномъ σ_n отличается отъ S_n лишь множителемъ, не играющимъ существенной роли въ нашемъ изложеніи.

****) Полиномы ζ_n, какъ въ теоріи сравненій, могутъ являться въ различныхъ видахъ, сравнимыхъ другъ съ другомъ по извѣстному модулю. Это замѣчаніе надлежитъ имѣть въ виду при сопоставленіи полиномовъ ζ_n съ приводимыми здѣсь полиномами ζ.

значенію соотвѣтствуетъ полиному σ_n, а по составу болѣе соотвѣтствуетъ формѣ (1).

Полиномы ζ суть только различныя видоизмѣненія полинома σ, соотвѣтствующія различнымъ обстоятельствамъ.

Содержаніе §§ 2, 3 и 4 предлагаемой статьи, кажется, достаточно убѣждаетъ, что какимъ бы порядкомъ ни рѣшалась задача о нахожденіи раціональныхъ интеграловъ уравненія (1), полиномъ σ В. Г. Имшенецкаго и его видоизмѣненіе ζ всегда вносятъ въ теорію такую стройность, какой не было въ изложеніи Ліувилля *).

Въ § 5 предлагаемой статьи показано, что способъ, основанный на употребленіи интегрирующаго множителя, имѣетъ особое преимущество. Способъ этотъ даетъ возможность при изысканіи числителя дробнаго рѣшенія уничтожать въ дифференціальномъ уравненіи дроби подъ знакомъ дифференцированія. Интегрирующій множитель этого рода составляется порядкомъ, указаннымъ въ статьѣ проф. К. А. Андреева.

Укажу еще на слѣдующую особенность настоящей статьи.

Въ предлагаемой статьѣ, какъ и въ статьѣ: „Способъ В. Г. Имшенецкаго...“, я, по примѣру Ліувилля, внимательно отношусь не только къ составу знаменателя дробнаго рѣшенія, но и къ составу числителя, выдѣляя въ немъ, по возможности, множители вида $(x+a)^m$, гдѣ $x+a$ есть линейный дѣлитель полинома P_0. Это выдѣленіе облегчаетъ послѣдующее вычисленіе числителя дробнаго рѣшенія, нисколько не осложняя труда въ остальныхъ отношеніяхъ, такъ какъ всѣ данныя для этого облегченія, когда оно возможно, являются сами собою въ процессѣ изысканія состава знаменателя. Въ связи съ этимъ облегченіемъ необходимо слѣдить за низшими предѣлами α' показателей α.

§ 1. Обозначенія; цѣлые частные интегралы.

Пусть данное линейное дифференціальное уравненіе будетъ:

$$P_0\frac{d^ny}{dx^n}+P_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\dots+P_ny=V, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

гдѣ $P_0, P_1, \dots, P_n$ и V суть цѣлые полиномы, не имѣющіе общаго дѣлителя.

---

*) Не слѣдуетъ думать, что сущность изслѣдованій В. Г. Имшенецкаго сводится только къ пріему, состоящему въ употребленіи интегрирующаго множителя. Кромѣ этого примѣчательнаго *средства* рѣшеніе задачи В. Г. Имшенецкій подмѣтилъ *правило*, данное на страницѣ 28 перваго мемуара его и точнѣе выраженное по указаніямъ его сообщенія въ § 2 моей статьи „Способъ В. Г. Имшенецкаго...“. Правило это примѣчательно по чрезвычайной простотѣ его выраженія и лишь даетъ знаменатель въ формѣ недостаточно простой; но и этотъ недочетъ правила В. Г. Имшенецкаго легко пополненъ естественнымъ его продолженіемъ, указаннымъ въ § 3 статьи „Способъ В. Г. Имшенецкаго...“. Такимъ образомъ съ именемъ В. Г. Имшенецкаго связаны въ отношеніи рѣшенія данной задачи не только извѣстнаго рода средства, но и правила, неизмѣнно сохраняющіяся при любыхъ средствахъ ихъ полученія.

Пусть $\triangle$ есть общій наибольшій дѣлитель полиномовъ P_0 и $\frac{dP_0}{dx}$.

Буквой p будемъ обозначать полиномъ, опредѣляемый равенствомъ:

$$p = \frac{P_0}{\triangle}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Всевозможные различные линейные дѣлители (т. е. дѣлители $x + a$) полинома P_0 будемъ обозначать такъ:

$$x + a_1,\ x + a_2, \ldots,\ x + a_\nu. \ldots\ldots\ldots (3)$$

Очевидно, будемъ имѣть:

$$p = (x + a_1)(x + a_2)\ldots(x + a_\nu). \ldots\ldots (4)$$

Буквой D будемъ обозначать общій наибольшій дѣлитель полиномовъ:

$$P_0 p^{-1},\ P_1,\ P_2 p, \ldots,\ P_n p^{n-1} \ldots\ldots (5)$$

Разлагая D на линейные множители, будемъ это разложеніе обозначать такъ:

$$D = (x + a_1)^{\beta_1}(x + x_2)^{\beta_2}\ldots(x + a_\nu)^{\beta_\nu}, \ldots\ldots (6)$$

гдѣ $\beta_1,\ \beta_2, \ldots,\ \beta_\nu$ суть цѣлыя положительныя числа.

Буквой σ обозначается полиномъ

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-i-1)\frac{P_i p^{i-1}}{D}\left(\frac{dp}{dx}\right)^{n-i} =$$

$$= (-1)^n \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\frac{P_0 p^{-1}}{D}\left(\frac{dp}{dx}\right)^n + \ldots + \alpha(\alpha+1)\frac{P_{n-2}p^{n-3}}{D}\left(\frac{dp}{dx}\right)^2$$

$$- \alpha\frac{P_{n-1}p^{n-2}}{D}\frac{dp}{dx} + \frac{P_n p^{n-1}}{D} \ldots\ldots\ldots (7)$$

Этотъ полиномъ по значенію своему вполнѣ аналогиченъ полиному σ_n В. Г. Имшенецкаго.

Полиномъ σ при произвольномъ α, очевидно, не имѣетъ общихъ дѣлителей съ полиномомъ p или P_0.

Полиномъ V представимъ подъ формой:

$$V = (x + a_1)^{\varepsilon_1}(x + a_2)^{\varepsilon_2}\ldots(x + a_\nu)^{\varepsilon_\nu}.\,U, \quad \ldots\ldots (8)$$

гдѣ $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2, \ldots,\ \varepsilon_\nu$ суть цѣлыя числа и U есть цѣлый полиномъ, не имѣющій съ p общихъ дѣлителей.

Другія обозначенія выяснятся впослѣдствіи.

Изъ раціональныхъ интеграловъ уравненія (1) съ наибольшею простотою находятся цѣлые, если таковые существуютъ. Въ самомъ дѣлѣ, представивъ цѣлое рѣшеніе подъ формой:

$$y = B_0 x^m + B_1 x^{m-1} + \ldots + B_m,$$

мы можемъ внести это выраженіе y въ уравненіе (1) и опредѣлить показатель m по извѣстному правилу, которое Н. В. Бугаевъ называетъ началомъ наибольшихъ показателей и которое состоитъ въ сопоставленіи членовъ высшихъ степеней. Послѣ опредѣленія m находятся коэффиціенты B_0, $B_1, \ldots, B_m$ по способу неопредѣленныхъ коэффиціентовъ.

Указанными ниже пріемами сама общая задача о нахожденіи раціональныхъ рѣшеній уравненія (1) приводится къ нахожденію цѣлыхъ рѣшеній преобразованнаго уравненія.

§ 2. Теорема Ліувилля; форма, подъ которою изыскиваются всѣ раціональныя рѣшенія.

Алгебраическое раціональное рѣшеніе уравненія (1), если таковое существуетъ, обозначимъ такъ:

$$y=\frac{X}{Y}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8')$$

разумѣя подъ X и Y цѣлые полиномы, не имѣющіе общихъ дѣлителей.

Представимъ то же самое раціональное рѣшеніе такъ:

$$y=\frac{K}{(x+a)^{\alpha}L}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

гдѣ a—цѣлое число, K и L—цѣлые полиномы, не дѣлящіеся на $x+a$. Зимѣтимъ притомъ, что при $a>0$ сумма $x+a$ есть дѣлитель знаменателя Y раціональнаго рѣшенія (8′), а при $a<0$ сумма $x+a$ есть дѣлитель числителя X того же рѣшенія.

Дифференцируя равенство (9) послѣдовательно n разъ, находимъ:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dy}{dx}&=-\frac{\alpha K}{L(x+a)^{\alpha+1}}+\frac{K_2}{L^2(x+a)^{\alpha}},\\
\frac{d^2y}{dx^2}&=\frac{\alpha(\alpha+1)K}{L(x+a)^{\alpha+2}}+\frac{K_2}{L^3(x+a)^{\alpha+1}},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{d^ny}{dx^n}&=\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)K}{(-1)^nL(x+a)^{\alpha+n}}+\frac{K_n}{L^{n+1}(x+a)^{\alpha+n-1}},
\end{aligned}\right\} \quad (9')$$

гдѣ K_1, $K_2, \ldots, K_n$ означаютъ цѣлыя функціи.

Подставивъ найденныя выраженія y, $\frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}$ въ уравненіе (1) и умноживъ обѣ части полученнаго равенства на

$$L^{n+1}(x+a)^{\alpha+n-1},$$

мы получимъ

$$\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)P_0L^nK}{(x+a)}+H=L^{n+1}V(x+a)^{\alpha+n-1}, \quad (9'')$$

гдѣ H есть цѣлая функція.

Отсюда видно, что сумма $(x+a)$ должна быть дѣлителемъ полинома P_0 въ двухъ случаяхъ: 1) когда $\alpha > 0$ и 2) когда $-(\varepsilon+n-1) \leqq \alpha < -(n-1)$, гдѣ ε опредѣляется при помощи равенства

$$V = v(x+a)^{\varepsilon},$$

въ которомъ v есть цѣлый полиномъ, не дѣлящійся на $(x+a)$.

Первый изъ этихъ случаевъ представляетъ теорему Ліувилля, утверждающую, что каждый линейный дѣлитель (т. е. дѣлитель вида $x+a$) знаменателя Y раціональнаго рѣшенія есть въ то же время дѣлитель полинома P_0.

Второй случай распространяетъ теорему Ліувилля, показывая, что линейный дѣлитель $(x+a)$ числителя X, дѣлящій его не менѣе n разъ и не болѣе $(\varepsilon+n-1)$ разъ, также долженъ быть дѣлителемъ полинома P_0. Это обстоятельство даетъ достаточныя основанія обращать вниманіе на связь линейныхъ дѣлителей полинома P_0 не только съ знаменателемъ Y, но и съ числителемъ X. Выдѣленіе въ числителѣ указанныхъ дѣлителей, когда къ тому представляется какая-либо возможность, полезно потому, что оно, какъ ниже увидимъ, облегчаетъ вычисленіе числителя по способу неопредѣленныхъ коэффиціентовъ и въ тоже время не осложняетъ остальныхъ вычисленій. Такое упрощеніе, если оно окажется возможнымъ, полезно даже тогда, когда искомое раціональное рѣшеніе оказывается цѣлымъ.

Въ томъ случаѣ, когда P_0 есть количество постоянное, уравненіе (1) не можетъ имѣть иныхъ раціональныхъ рѣшеній, кромѣ цѣлыхъ. Замѣтивъ это, мы въ дальнѣйшемъ изложеніи устранимъ изъ разсмотрѣнія случай, когда P_0 есть постоянное.

Легко видѣть, что разлагая на множители знаменатель Y раціональнаго рѣшенія, а также выдѣляя въ числителѣ всѣ его множители, общіе съ дѣлителями полинома P_0 (или p), и перенося эти множители въ знаменатель съ отрицательными показателями, мы можемъ представить раціональное рѣшеніе такъ:

$$y = \frac{Z}{(x+a_1)^{\alpha_1}(x+a_2)^{\alpha_2}\ldots(x+a_\nu)^{\alpha_\nu}}, \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

гдѣ Z есть цѣлый полиномъ, не имѣющій общихъ дѣлителей съ полиномомъ p. Задача о нахожденіи раціональныхъ рѣшеній линейнаго уравненія сводится затѣмъ къ нахожденію показателей $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$, которые должны быть числами цѣлыми.

Какъ увидимъ ниже, при изысканіи показателей $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ обнаруживается, что каждый изъ нихъ можетъ имѣть по одному, а иногда по нѣскольку значеній, и если $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ представляютъ соотвѣтственно высшіе предѣлы этихъ значеній (т. е. $\alpha_i \leqq A_i$, гдѣ $i = 1, 2, \ldots, \nu$), то очевидно, всѣ раціональныя рѣшенія уравненія (1) могутъ быть изыскиваемы подъ общей формой:

$$y = \frac{\xi}{(x + a_1)^{A_1}(x + a_2)^{A_2} \ldots (x + a_\nu)^{A_\nu}}, \quad \ldots \ldots \quad (11)$$

гдѣ ξ есть цѣлый полиномъ.

Изыскивая ниже всевозможныя значенія показателей $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ и затѣмъ опредѣляя ихъ высшіе предѣлы $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ мы будемъ по возможности избѣгать излишнихъ повышеній этихъ предѣловъ, напримѣръ, не будемъ замѣнять нулями тѣ изъ нихъ, которые окажутся отрицательными (такъ какъ всякое повышеніе этихъ предѣловъ ведетъ къ повышенію степени полинома ξ и осложняетъ его вычисленіе). Если предѣлы $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ выбраны съ указанными предосторожностями, то форму (11), подъ которой изыскиваются всѣ раціональныя рѣшенія уравненія (1), будемъ называть *наипростѣйшею* общею формою раціональныхъ рѣшеній.

Можно спросить между прочимъ, не представляется-ли выгоднымъ, для упрощенія вычисленія числителя раціональнаго рѣшенія уравненія (1), вводить въ знаменатель формы (11) факторы вида $(x + a)^A$, когда $(x + a)$ не есть дѣлитель полинома P_0. На этотъ вопросъ приходится отвѣтить отрицательно. Въ самомъ дѣлѣ, если P_0 не дѣлится на $(x + a)$, то равенство (9″), не представляетъ противорѣчія лишь въ томъ случаѣ, когда α имѣетъ одно изъ значеній:

$$-(n + \varepsilon), \quad -(n - 1), \quad -(n - 2), \ldots \quad -2, \; -1, \; 0.$$

Притомъ α можетъ совпадать съ каждымъ изъ этихъ чиселъ. Поэтому высшій предѣлъ A возможныхъ значеній α есть $A = 0$ и слѣдовательно знаменатель формы (11) не требуетъ включенія факторовъ вида $(x + a)^A$ при $(x + a)$ не дѣлящемъ полинома P_0.

§ 3. Нахожденіе всѣхъ раціональныхъ рѣшеній уравненія (1) въ томъ случаѣ, когда дано полное разложеніе полинома p на линейные множители. Примѣры.

Будемъ ниже разумѣть подъ $x + a$ одинъ изъ линейныхъ дѣлителей полинома p, подъ α соотвѣтственный изъ показателей $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$, входящихъ въ знаменатель второй части равенства (10), подъ β соотвѣтственный изъ показателей $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu$, входящихъ во вторую часть равенства (6), и подъ ε соотвѣтственный изъ показателей $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\nu$, входящихъ во вторую часть равенства (8). Изъ опредѣленія числа β слѣдуетъ, что функціи

$$P_0(x + a)^{-1-\beta}, \; P_1(x + a)^{-\beta}, \; P_2(x + a)^{1-\beta}, \ldots, \; P_n(x + a)^{n-1-\beta} \quad (12)$$

суть цѣлыя и не имѣютъ общаго дѣлителя $(x + a)$.

Представивъ искомое дробное рѣшеніе y и его производныя подъ формами (9) и (9′) и внеся эти ихъ выраженія въ уравненіе (1), мы получимъ:

$$\frac{K\zeta}{(x+a)^{\alpha+n-\beta-1}L}+\frac{H}{(x+a)^{\alpha+n-\beta-2}L^{n+1}}=V, \quad \ldots \quad (13)$$

гдѣ ζ и H суть цѣлые полиномы, изъ которыхъ первый представляется такъ:

$$\zeta=(-1)^n\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\,P_0(x+a)^{-1-\beta}+\ldots$$

$$\ldots+\alpha(\alpha+1)\,P_{n-2}(x+a)^{n-3-\beta}-\alpha P_{n-1}(x+a)^{n-2-\beta}+P_n(x+a)^{n-1-\beta}=$$

$$=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-i-1)\,P_i(x+a)^{i-1-\beta}. \quad . \quad (14)$$

Представивъ полиномъ V подъ формой

$$V=v.(x+a)^{\varepsilon}, \quad \ldots \quad (15)$$

гдѣ v есть цѣлая функція, не дѣлящаяся не $(x+a)$, и умноживъ обѣ части равенства (13) на

$$(x+a)^{\alpha+n-\beta-1}L^{n+1},$$

будемъ имѣть:

$$KL^n\zeta+r(x+a)=L^{n+1}v(x+a)^{\alpha+n-\beta-1+\varepsilon} \quad \ldots \quad (16)$$

гдѣ r есть цѣлый полиномъ.

Разсмотримъ, во первыхъ, тотъ случай, когда показатель $\alpha+n-\beta-1+\varepsilon$ при $(x+a)$ во второй части равенства (16) *положительный*, т. е. когда

$$\alpha>\alpha', \quad \ldots \quad (17)$$

гдѣ

$$\alpha'=1+\beta-n-\varepsilon. \quad \ldots \quad (18)$$

Въ этомъ случаѣ равенство (16) получаетъ видъ:

$$KL^n\zeta=R(x+a), \quad \ldots \quad (19)$$

гдѣ R есть цѣлый полиномъ. Такъ какъ K и L, по условію, не дѣлятся на $x+a$, то, какъ показываетъ равенство (19), полиномъ ζ долженъ дѣлиться на $x+a$. Этимъ необходимымъ признакомъ въ достаточной мѣрѣ характеризуются значенія α, удовлетворяющія условію (17). Въ самомъ дѣлѣ, по свойству полиномовъ (12) функція ζ при произвольномъ значеніи α не можетъ дѣлиться на $x+a$. Чтобы ζ дѣлилось на $x+a$, количество α должно удовлетворять условію:

$$\Phi(\alpha)=0, \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (20)$$

гдѣ $\Phi(\alpha)$ есть значеніе ζ при $x=-a$ или, иначе, первый членъ въ разложеніи ζ по восходящимъ степенямъ $x+a$.

Цѣлыя значенія α, удовлетворяющія условіямъ (17) и (20), будемъ ниже обозначать чрезъ α'', α''',....

Разсмотримъ, во вторыхъ, тотъ случай, когда показатель $\alpha+n-\beta-1+\varepsilon$ при $(x+a)$ во второй части равенства (16) равенъ *нулю*, т. е. когда

$$\alpha=\alpha'=1+\beta-n-\varepsilon. \quad . \ . \ . \ . \ . \ (21)$$

Въ этомъ случаѣ равенство (16) приводится къ виду:

$$L^n[Lv-K\zeta]=r(x+a)$$

и показываетъ, что полиномъ

$$Lv-K\zeta$$

дѣлится на $x+a$, т. е. имѣетъ мѣсто условіе:

$$[Lv-K\zeta]_{x=-a}=0.$$

Условіе это можетъ быть удовлетворено на счетъ неопредѣленныхъ коэффиціентовъ числителя Z во второй части равенства (10). Поэтому число α' нужно присоединить къ значеніямъ, которыя можетъ принимать показатель α.

Легко наконецъ видѣть, что показатель $\alpha+n-\beta-1+\varepsilon$ при $(x+a)$ во второй части равенства (16) не можетъ быть отрицательнымъ, такъ какъ въ противномъ случаѣ равенство (16) было бы противорѣчивымъ. Поэтому число α' есть *низшій* предѣлъ показателя α.

Итакъ, вышеуказанными числами α', α'', α''',... исчерпываются всѣ возможныя значенія показателя α въ раціональномъ рѣшеніи (9). Наибольшее изъ чиселъ α', α'', α''',... опредѣлитъ *высшій* предѣлъ значеній α. Этотъ предѣлъ обозначимъ буквой A.

Можетъ иногда случиться, что не существуетъ цѣлыхъ значеній α, удовлетворяющихъ условіямъ (17) и (20). Въ этомъ случаѣ высшій предѣлъ A показателя α и его низшій предѣлъ α', очевидно, должны совпадать. Такимъ образомъ, даже при отсутствіи цѣлыхъ значеній α, удовлетворяющихъ вышеуказаннымъ условіямъ, раціональное рѣшеніе уравненія (1) можетъ существовать; лишь для уравненія безъ второй части при этихъ обстоятельствахъ представляется особенность, разъясненная ниже.

Примѣняя указанный порядокъ вычисленія къ каждому изъ линейныхъ дѣлителей

$$x+a_1,\ x+a_2, \ldots, x+a_\nu$$

полинома p, получимъ всѣ соотвѣтственные высшіе предѣлы A_1, $A_2, \ldots, A_\nu$ показателей $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$. Зная эти предѣлы, мы можемъ отыскать наконецъ всѣ раціональныя рѣшенія уравненія (1) при посредствѣ равенства (11), въ которомъ числитель ξ при существованіи раціональныхъ рѣшеній долженъ быть цѣлымъ полиномомъ, опредѣляемымъ какъ цѣлое рѣшеніе преобразованнаго при посредствѣ равенства (11) дифференціальнаго уравненія.

Такимъ образомъ, при разсматриваемыхъ данныхъ задачу о нахожденіи раціональныхъ интеграловъ уравненія (1) можно считать разрѣшенною.

Теперь остановимся на разсмотрѣніи нѣкоторыхъ заслуживающихъ особаго вниманія свойствахъ полиномовъ ζ. Начнемъ съ указанія связи этихъ полиномовъ съ полиномомъ σ.

Замѣтивъ, что

$$\frac{dp}{dx}=\frac{p}{x+a}+\varrho(x+a),$$

гдѣ ϱ есть цѣлый полиномъ, затѣмъ внеся это выраженіе $\frac{dp}{dx}$ во вторую часть равенства (7) и принявъ во вниманіе равенство (14), находимъ:

$$G\sigma=H\zeta+U(x+a), \quad \ldots\ldots\ldots (22)$$

гдѣ G, H и U суть цѣлые полиномы, изъ которыхъ первый и второй выражаются слѣдующимъ образомъ:

$$G=\frac{D}{(x+a)^\beta} \quad \text{и} \quad H=\left(\frac{p}{x+a}\right)^{n-1}.$$

Такъ какъ полиномы G и H не могутъ дѣлиться на $x+a$, то связь между полиномами σ и ζ, выражаемая равенствомъ (22), показываетъ, что *значенія a, при которыхъ полиномъ ζ дѣлится на $(x+a)$, вполнѣ совпадаютъ съ значеніями a, при которыхъ полиномъ σ дѣлится на тотъ же дѣлитель $(x+a)$ полинома p*. Такимъ образомъ разсмотрѣніе всѣхъ полиномовъ ζ, опредѣляемыхъ при помощи равенства (14), сводится къ разсмотрѣнію одного только полинома σ.

Этому свойству полинома σ, вполнѣ аналогичному со свойствомъ полинома σ_n В. Г. Имшенецкаго, мы дадимъ примѣненіе въ теоріи, которая изложена въ § 4.

Далѣе перейдемъ къ другимъ свойствамъ полиномовъ ζ.

Изыскивая условіе (20), при выполненіи котораго ζ дѣлится на $x+a$, можно полиномъ ζ упрощать, отбрасывая или прибавляя въ немъ члены, кратные $x+a$, и множители, которые ни при какомъ значеніи α не дѣлятся на $x+a$.

Эти отбрасыванія и прибавленія членовъ и множителей ведутъ къ многочисленнымъ видоизмѣненіямъ формы полинома ζ. Разсмотримъ важнѣйшія изъ этихъ видоизмѣненій.

Если эти видоизмѣненія привели отъ полинома ζ къ полиному ς, то эту связь между полиномами ζ и ς будемъ обозначать такъ:

$$\zeta \equiv \varsigma.$$

Между прочимъ при $\beta=0$ будемъ имѣть:

$$\sigma \equiv \zeta \equiv \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-2)\left[(\alpha+n-1)\,P_0(x+a)^{-1}-P_1\right];$$

при $\beta=1$ будемъ имѣть:

$$\sigma \equiv \zeta \equiv \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-3)\left[(\alpha+n-2)(\alpha+n-1)\,P_0(x+a)^{-2} - (\alpha+n-2)\,P_1(x+a)^{-1}+P_2\right];$$

и т. д. Если условимся полагать: $k=\beta+1$ при $\beta<n-1$ и $k=n$ при $\beta \geqq n-1$, то будемъ имѣть вообще:

$$\sigma \equiv \zeta \equiv \sum_{i=0}^{k}(-1)^{n-1}\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-i-1)\,P_i(x+a)^{i-1-\beta}.$$

Отсюда вытекаетъ слѣдующая форма полинома ζ, данная при другихъ обозначеніяхъ проф. К. А. Андреевымъ:

$$\sigma \equiv \zeta \equiv \sum_{i=0}^{k}(-1)^{n-i}\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-i-1)}{(1+\beta-i)!}\frac{d^{1+\beta-i}P_i}{dx^{1+\beta-i}}. \quad (22')$$

Послѣ всевозможныхъ отбрасываній въ полиномѣ ζ членовъ, кратныхъ $x+a$, и множителей, не дѣлящихся на $x+a$ ни при какомъ значеніи α, въ концѣ концовъ получимъ:

$$\sigma \equiv \zeta \equiv \Phi(\alpha),$$

гдѣ $\Phi(\alpha)$ лишь постояннымъ множителемъ можетъ отличаться отъ первой части равенства (20).

Остановимъ вниманіе на случаѣ, когда уравненіе (1) не имѣетъ второй части, т. е. имѣетъ видъ:

$$P_0\frac{d^n y}{dx^n}+P_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+P_n y=0. \quad \ldots\ldots (23)$$

Въ этомъ случаѣ цѣлое положительное число ε, которое для уравненія (1) опредѣлялось равенствомъ (15), нужно считать равнымъ $+\infty$. Слѣдовательно, $\alpha' = -\infty$ и низшій предѣлъ α' самъ собою отпадаетъ. Такимъ образомъ, въ случаѣ уравненія (23) условіе (17) для всякаго конечнаго α само собою выполняется, значеніе α, опредѣляемое равенствомъ (21), отпадаетъ и всѣ значенія показателя α опредѣляются всевозможными цѣлыми числами, удовлетворяющими только уравненію (20). Отсутствіе таковыхъ цѣлыхъ чиселъ есть рѣшительный признакъ того, что уравненіе (23) не имѣетъ раціональныхъ рѣшеній.

Приведемъ для поясненія теоріи три примѣра.

Примѣръ 1. Данное уравненіе пусть будетъ:

$$x^7 \frac{d^2y}{dx^2} + 4x^4 \frac{dy}{dx} + 2(2-3x^2)xy = 2(2-5x^2+x^4).$$

Въ этомъ случаѣ $p = x$, $D = x^2$, $\beta = 2$, $\varepsilon = 0$, $\alpha' = 1$,

$$\zeta = \alpha(\alpha+1)x^4 - 4\alpha x^2 + 2(2-3x^2) \equiv 4.$$

Очевидно, не существуетъ значеній α, при которыхъ полиномъ ζ дѣлится на x. Поэтому $A = \alpha' = 1$ и раціональное рѣшеніе изыскивается подъ формой:

$$y = \frac{\xi}{x^A} = \frac{\xi}{x},$$

гдѣ ξ есть цѣлый полиномъ. Отыскивая этотъ полиномъ, получимъ: $\xi = 1$, т. е. данное уравненіе допускаетъ раціональное рѣшеніе

$$y = \frac{1}{x}.$$

Примѣръ 2. Данное уравненіе пусть будетъ:

$$(1+x)^3 [x^6 \frac{d^2y}{dx^2} + 2(45-80x+36x^2)y] =$$
$$= 2x^{10}(45-80x+36x^2)[(1+x)^2+x^4].$$

Въ этомъ случаѣ будемъ имѣть:

$$P_0 = x^6(1+x)^3,\ \ P_1 = 0,\ \ P_2 = 2(1+x)^3(45-80x+36x^2);$$
$$p = x(1+x),\ \ D = x(1+x)^2.$$

Для дѣлителя $x + a_1 = x$ полинома p имѣемъ:

$$\beta_1 = 1,\ \ \varepsilon_1 = 10,\ \ \alpha'_1 = -10,$$
$$\zeta = [\alpha(\alpha+1)x^4 + 2(45-80x+36x^2)](1+x)^3 \equiv 90.$$

Очевидно, не существуетъ значеній α, при которыхъ этотъ полиномъ ζ дѣлится на $x+a_1$. Слѣдовательно, $A_1=\alpha_1'=-10$.

Далѣе, для дѣлителя $x+a_2=1+x$ полинома p имѣемъ:

$$\beta_2=2\,,\ \ \varepsilon_2=0\,,\ \ \alpha_2'=1\,,$$

$$\zeta=\alpha(\alpha+1)x^6+2(1+x)^2(45-80x+36x^2)\equiv\alpha(\alpha+1).$$

Этотъ полиномъ дѣлится на $x+a_2=1+x$ при $\alpha=0$ и при $\alpha=-1$; но эти значенія не годятся, такъ какъ они ниже низшаго предѣла α_2'. Выше же этого предѣла не существуетъ цѣлыхъ значеній α, при которыхъ ζ дѣлится на $x+a_2$. Поэтому $A_2=\alpha_2'=1$.

Итакъ, раціональное рѣшеніе изыскивается подъ формой:

$$y=\frac{\xi}{x^{A_1}(1+x)^{A_2}}=\frac{x^{10}.\xi}{1+x}\,,$$

гдѣ ξ есть полиномъ. Отыскивая этотъ полиномъ, получаемъ: $\xi=1$, т. е. данное уравненіе допускаетъ раціональное рѣшеніе:

$$y=\frac{x^{10}}{1+x}\,.$$

Примѣръ 3. Дано дифференціальное уравненіе:

$$(x-1)^2\frac{d^3y}{dx^3}+10\,(x-1)\frac{d^2y}{dx^2}-(x^2-2x-19)\frac{dy}{dx}$$
$$-2\,(x-1)y=0.$$

Въ этомъ случаѣ имѣемъ:

$$p=x-1\,,\ \ D=x-1\,,\ \ \beta=1\,,\ \ \varepsilon=+\infty\,,\ \ \alpha'=-\infty\,,$$

$$\zeta=-\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)+10\alpha(\alpha+1)+\alpha(x^2-2x-19)-2\,(x-1)^2\equiv$$
$$\equiv-\alpha(\alpha-3)(\alpha-4).$$

Этотъ полиномъ ζ дѣлится на $x-1$ при слѣдующихъ значеніяхъ α:

$$\alpha''=0\,,\ \ \alpha'''=3\,,\ \ \alpha''''=4.$$

Поэтому $A=4$ и раціональное рѣшеніе даннаго уравненія изыскивается подъ формой:

$$y=\frac{\xi}{(x-1)^4}\,,$$

гдѣ ξ есть цѣлый полиномъ. Опредѣляя ξ, находимъ: $\xi = x^2 - 2x + 3$, т. е. данное уравненіе имѣетъ раціональное рѣшеніе

$$y = \frac{x^2 - 2x + 3}{(x-1)^4}.$$

Примѣръ этотъ заимствованъ изъ перваго мемуара В. Г. Имшенецкаго.

§ 4. Нахожденіе раціональныхъ рѣшеній въ томъ случаѣ, когда не дано полнаго рѣшенія уравненія $P_0 = 0$. Примѣры.

Въ этомъ случаѣ полиномъ p находится при помощи формулы (2), представленіе же его подъ формой (4) не считается даннымъ.

Будемъ предполагать, что требуется не только избѣгнуть полнаго рѣшенія уравненія $p = 0$, но также требуется: 1) избѣгнуть обязательности имѣть напередъ заданное полное разложеніе полинома p на неприводимые множители, такъ какъ это дѣйствіе иногда сопряжено съ затрудненіями *) и 2) при этихъ обстоятельствахъ составить *наипростѣйшую* форму, при помощи которой изыскиваютя всѣ раціональныя рѣшенія уравненія (1) **), т. е. форму, совпадающую въ сущности съ формой (11), найденной по указаннымъ въ § 3 правиламъ.

Предлагаемый процессъ вычисленія, основанный на разсмотрѣніи общихъ наибольшихъ дѣлителей различныхъ данныхъ полиномовъ, даже при полномъ незнаніи неприводимыхъ дѣлителей полинома p самъ собою приводитъ къ разложенію полинома p на такіе именно множители, какіе нужны при составленіи искомой наипростѣйшей общей формы всѣхъ раціональныхъ рѣшеній уравненія (1). Если же мы знаемъ напередъ нѣкоторые изъ неприводимыхъ дѣлителей полинома p, то при помощи ихъ предлагаемый процессъ еще болѣе облегчается (что и понятно въ виду связи этого процесса съ теоріей общихъ дѣлителей). Переходя къ изложенію этого процесса, условимся всякій полиномъ, не имѣющій кратныхъ корней, называть *первичнымъ* ***).

Прежде всего отыскиваемъ общій наибольшій дѣлитель D полиномовъ (5). Затѣмъ извѣстнымъ способомъ, сводящимся въ сущности къ повторенію процесса нахожденія общаго наибольшаго дѣлителя данной

---

*) Затрудненія эти нельзя считать маловажными, такъ какъ не существуетъ общей схемы вычисленій съ конечнымъ числомъ дѣйствій, которая всегда рѣшала бы вопросъ о разложеніи даннаго полинома на неприводимые множители.

**) Въ моей статьѣ: „Способъ В. Г. Имшенецкаго...“ указанъ способъ составленія этой формы въ предположеніи, что не дано полнаго рѣшенія уравненія $p = 0$, но дано разложеніе полинома p на *неприводимые* дѣлители. Это ограниченіе теперь устраняется если разложеніе полинома p на неприводимые множители по какой либо причинѣ затруднено.

***) Этотъ терминъ заимствую изъ теоріи чиселъ, именно изъ сочиненія Н. В. Бугаева: „Ученіе о числовыхъ производныхъ“.

цѣлой функціи и ея производной, достигаемъ представленія функціи D подъ формой:

$$D = D_1^{d_1} D_2^{d_2} \dots D_{k-1}^{d_{k-1}},$$

гдѣ $d_1, d_2, \dots, d_{k-1}$ суть различныя цѣлыя положительныя числа и $D_1, D_2, \dots, D_{k-1}$ суть цѣлые первичные полиномы, не имѣющіе попарно общихъ дѣлителей. Если къ этимъ полиномамъ присоединимъ цѣлый полиномъ:

$$D_k = \frac{p}{D_1 D_2 \dots D_{k-1}},$$

то будемъ имѣть:

$$D = D_1^{d_1} D_2^{d_2} \dots D_{k-1}^{d_{k-1}} D_k^{d_k}, \quad \dots\dots\dots \quad (24)$$
$$d_k = 0, \quad D_1 D_2 \dots D_{k-1} D_k = p.$$

Далѣе и полиномъ V можемъ представить такъ:

$$V = V_1^{b_1} V_2^{b_2} \dots V_{s-1}^{b_{s-1}},$$

гдѣ $b_1, b_2, \dots, b_{s-1}$ суть различныя цѣлыя положительныя числа и $V_1, V_2, \dots, V_{s-1}$ суть первичные полиномы, не имѣющіе попарно общихъ дѣлителей. Въ этихъ полиномахъ насъ должны интересовать особенно лишь общіе наибольшіе дѣлители каждаго изъ нихъ съ полиномомъ p, которые пусть соотвѣтственно будутъ:

$$W_1, W_2, \dots, W_{s-1}.$$

Къ этимъ полиномамъ присоединимъ еще полиномъ

$$W_s = \frac{p}{W_1 W_2 \dots W_{s-1}}.$$

Затѣмъ полиномъ V представимъ такъ:

$$V = W_1^{b_1} W_2^{b_2} \dots W_{s-1}^{b_{s-1}} W_s^{b_s} \cdot U, \quad \dots\dots\dots \quad (25)$$
$$b_s = 0, \quad W_1 W_2 \dots W_s = p,$$

при чемъ U есть цѣлый полиномъ, не имѣющій общихъ дѣлителей съ полиномомъ p.

Равенства:

$$p = D_1 D_2 \dots D_k = W_1 W_2 \dots W_s$$

показываютъ, что каждый изъ полиномовъ $D_1, D_2, \dots, D_k$ долженъ имѣть общихъ наибольшихъ дѣлителей съ нѣкоторыми изъ полиномовъ W_1, $W_2, \ldots, W_s$ и наоборотъ. Разсмотрѣніе и выдѣленіе этихъ дѣлителей иногда ведетъ къ дальнѣйшему распаденію полиномовъ D_1, $D_2, \ldots, D_k$, а также полиномовъ W_1, $W_2, \ldots, W_s$ на множители представляемые полиномами низшихъ степеней. Выдѣленіе этихъ множителей необходимо для дальнѣйшаго.

Сверхъ того рекомендуется достигать всякими другими способами разложенія полиномовъ $D_1, \ldots, D_k$, $W_1, \ldots, W_s$ на приводимые и, еще лучше, неприводимые множители, но это добавочное разложеніе, весьма полезное для облегченія послѣдующихъ дѣйствій, теоретически вовсе не обязательно.

Изъ числа полученныхъ такимъ образомъ полиномовъ $D_1, \ldots, D_k$, $W_1, \ldots, W_s$ и ихъ найденныхъ дѣлителей надлежитъ выбрать полиномы $F_1, F_2, \ldots, F_t$, которые удовлетворяютъ условію

$$p = F_1 F_2 \ldots F_t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (26)$$

и чрезъ которые сверхъ того представляются въ видѣ произведеній каждый изъ полиномовъ $D_1, D_2, \ldots, D_k$, W_1, $W_2, \ldots, W_s$ и каждый изъ ихъ дѣлителей, на которые они распались.

Внеся выраженія полиномовъ $D_1, \ldots, D_k$, $W_1, \ldots, W_s$ чрезъ полиномы $F_1, F_2, \ldots, F_t$ въ равенства (24) и (25), получимъ:

$$D = F_1^{\beta_1} F_2^{\beta_2} \ldots F_t^{\beta t}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (27)$$

$$V = F_1^{\varepsilon_1} F_2^{\varepsilon_2} \ldots F_t^{\varepsilon t} . U. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (28)$$

Равенство (27) опредѣляетъ показатели $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t$, котоорые при другомъ порядкѣ обозначеній входятъ, какъ показатели, во вторую часть равенства (6). Равенство (28) опредѣляетъ показатели $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_t$, которые при другомъ порядкѣ обозначеній опредѣлялись равенствомъ (8). Опредѣленіе показателей β и ε важно для полученія низшихъ предѣловъ α' значеній показателей α, каковые предѣлы опредѣляются равенствомъ вида (18).

Пусть F есть одинъ изъ полиномовъ $F_1, F_2, \ldots, F_t$ и пусть β и ε будутъ показатели во вторыхъ частяхъ равенствъ (27) и (28), соотвѣтствующіе полиному F. Затѣмъ вообразимъ, что $x + a$ есть одинъ изъ линейныхъ дѣлителей полинома F. Мы можемъ не знать разложенія полинома F на дѣлители этого рода, но мы беремъ дѣлитель $x + a$ лишь для теоретическихъ соображеній. Соотвѣтствующій дѣлителю $x + a$ показатель α, входящій въ раціональное рѣшеніе, представленное подъ видомъ (9), какъ видно изъ предшествующаго §, либо опредѣляется равенствомъ:

$$\alpha = \alpha' = 1 + \beta - n - \varepsilon, \quad \ldots\ldots\ldots (29)$$

либо долженъ удовлетворять неравенству

$$\alpha > \alpha' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

и притомъ характеризуется тѣмъ свойствомъ, что полиномъ σ, опредѣляемый равенствомъ (7), долженъ дѣлиться на $x+a$. Слѣдовательно, въ случаѣ, когда имѣетъ мѣсто условіе (30), *полиномы* σ *и* F *должны имѣть общій дѣлитель.*

Этимъ признакомъ сразу охарактеризованы и удовлетворяющіе условію (30) показатели α, соотвѣтствующіе дѣлителямъ полинома F, и самые эти дѣлители. Въ самомъ дѣлѣ, для существованія общихъ дѣлителей полиномовъ σ и F цѣлое число α должно удовлетворять уравненію:

$$\Theta(\alpha)=0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

гдѣ $\Theta(\alpha)$ представляетъ собою послѣдній остатокъ въ процессѣ послѣдовательнаго дѣленія полиномовъ σ и F, посредствомъ котораго находится ихъ общій наибольшій дѣлитель *). Затѣмъ, при найденномъ изъ условій (30) и (31) цѣломъ значеніи α, тотчасъ же опредѣляется и соотвѣтствующій общій наибольшій дѣлитель δ полиномовъ σ и F. Притомъ въ силу равенства (22) найденный показатель α соотвѣтствуетъ *каждому* изъ линейныхъ дѣлителей полинома δ (этихъ линейныхъ дѣлителей мы можемъ даже и не имѣть въ явной формѣ). Слѣдовательно, среди раціональныхъ рѣшеній можетъ существовать такое, которое представляется подъ формой:

$$y=\frac{K}{\delta^{\alpha}L}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

гдѣ K и L суть цѣлые полиномы, не имѣющіе общихъ дѣлителей съ полиномомъ δ.

Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ будутъ *всѣ* цѣлыя значенія α, удовлетворяющія условіямъ (30) и (31). Соотвѣтствующіе этимъ значеніямъ α общіе наибольшіе дѣлители полиномовъ σ и F пусть будутъ $\delta_1, \delta_2, \ldots$

Полиномы $\delta_1, \delta_2, \ldots$ надлежитъ сопоставить попарно другъ съ другомъ, отыскивая у каждой пары, если окажется возможнымъ, общаго наибольшаго дѣлителя, каковые дѣлители поведутъ къ дальнѣйшему распаденію полиномовъ $\delta_1, \delta_2, \ldots$ на множители пониженныхъ степеней. Затѣмъ изъ числа всѣхъ полученныхъ такимъ образомъ полиномовъ $\delta_1 . \delta_2, \ldots$ и множителей ихъ, на которые они распались, мы можемъ выдѣлить рядъ такихъ полиномовъ

$$X_1, X_2, \ldots, X_{m-1}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

---

*) Условіе (31) иначе получается какъ результатъ исключенія x изъ уравненій: $\sigma=0$ и $F=0$.

которые попарно не имѣютъ общихъ дѣлителей и чрезъ которые выражаются въ видѣ произведенiй каждый изъ полиномовъ $\delta_1, \delta_2, \ldots$

Присоединимъ къ полиномамъ (33) еще полиномъ

$$X_m = \frac{F}{X_1 X_2 \ldots X_{m-1}}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (34)$$

который не можетъ имѣть съ полиномами $\delta_1, \delta_2, \ldots$ общихъ дѣлителей. Полиномъ X_m (если онъ не приводится къ виду: $X_m = 1$) примѣчателенъ въ томъ отношенiи, что для его дѣлителей не существуетъ соотвѣтствующихъ значенiй α, удовлетворяющихъ условiямъ (30) и (31). Слѣдовательно, дѣлители полинома X_m должны входить въ рацiональное рѣшенiе не иначе, какъ подъ формой, приводимой къ виду:

$$y = \frac{K}{X_m^{\alpha'} L}, \quad \ldots \ldots \ldots (35)$$

гдѣ K и L суть цѣлые полиномы, не имѣющiе общихъ дѣлителей съ X_m. Если же уравненiе (1) не имѣетъ второй части, т. е. совпадаетъ съ уравненiемъ (26), то $\alpha' = -\infty$ и, если X_m не приводится къ виду: $X_m = 1$, уравненiе (27) не допускаетъ никакихъ рацiональныхъ рѣшенiй.

Для дѣлителей полинома X_m (если онъ не приводится къ виду: $X_m = 1$) высшiй предѣлъ A_m показателя α совпадаетъ съ низшимъ предѣломъ α', т. е.

$$A_m = \alpha'.$$

Высшiе предѣлы $A_1, A_2, \ldots, A_{m-1}$ значенiй показателя α для дѣлителей каждаго изъ полиномовъ (33) будутъ болѣе α' и могутъ быть получены изъ предшествующихъ вычисленiй слѣдующимъ порядкомъ. Пусть X есть одинъ изъ полиномовъ (33). Изъ числа полиномовъ

$$\delta_1, \delta_2, \ldots$$

отмѣтимъ всѣ тѣ, которые дѣлятся на X, и изъ вышеуказанныхъ показателей $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ выберемъ тѣ, которые соотвѣтствуютъ отмѣченнымъ полиномамъ δ. Пусть эти показатели будутъ: $\alpha'', \alpha''', \ldots$ Наибольшее изъ чиселъ $\alpha'', \alpha''', \ldots$ и представитъ высшiй предѣлъ A показателя α, соотвѣтствующаго полиному X. По этому плану получатся всѣ высшiе предѣлы $A_1, A_2, \ldots, A_{m-1}$.

Составимъ затѣмъ выраженiе N, опредѣляемое такъ:

$$N = X_1^{A_1} X_2^{A_2} \ldots X_m^{A_m} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (36)$$

Это выраженiе представляетъ ту часть знаменателя формы, служащей для изысканiя всѣхъ рацiональныхъ рѣшенiй уравненiя (1), которая соотвѣтствуетъ дѣлителямъ полинома F. Выраженіе N этого рода нужно составить для каждаго изъ полиномовъ $F_1, F_2, \ldots, F_t$. Пусть эти выраженія N соотвѣтственно будутъ; $N_1, N_2, \ldots, N_t$. Всѣ раціональныя рѣшенія уравненія (1) изыскиваются подъ формой:

$$y = \frac{\S}{N_1 N_2 \ldots N_t}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (37)$$

гдѣ $\S$ есть цѣлый полиномъ.

Форма (37) должна по существу совпадать съ формой (11), опредѣляемой по правиламъ, изложеннымъ въ § 3. Но особенность формы (37) въ томъ, что для составленія ея не только не нужно знать полнаго рѣшенія уравненія $P_0 = 0$, но не требуется имѣть и разложенія полинома P_0 на неприводимые множители (хотя, какъ сейчасъ увидимъ, знать неприводимые множители полинома P_0 или p весьма полезно).

Въ изложенномъ процессѣ играетъ существенную роль изысканіе условія (31) существованія общаго наибольшаго дѣлителя полиномовъ σ и F, а также, если это условіе и условіе (30) выполнены, изысканіе общаго наибольшаго дѣлителя δ тѣхъ же полиномовъ. Въ этихъ изысканіяхъ полиномъ σ можно замѣнять болѣе простыми полиномами, отбрасывая или прибавляя въ немъ члены, кратные полиному F, и устраняя или присоединяя множители, не имѣющіе съ F общихъ дѣлителей ни при какихъ значеніяхъ α. Основываясь на этомъ свойствѣ, мы можемъ подвергать полиномъ σ различнымъ видоизмѣненіямъ.

Если при этихъ видоизмѣненіяхъ полиномъ σ приводится къ полиному ς, то эту связь полиномовъ σ и ς будемъ обозначать такъ:

$$\sigma \equiv \varsigma .$$

Докажемъ затѣмъ, что

$$\sigma \equiv \zeta ,$$

гдѣ *)

$$\zeta = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \alpha(\alpha+1) \ldots (\alpha+n-i-1) P_i F^{i-1-\beta} \left(\frac{dF}{dx}\right)^{n-i} =$$

$$= (-1)^n \alpha(\alpha+1) \ldots (\alpha+n-1) P_0 F^{-1-\beta} \left(\frac{dF}{dx}\right)^n + \ldots +$$

$$+ \alpha(\alpha+1) P_{n-2} F^{n-3-\beta} \left(\frac{dF}{dx}\right)^2 - \alpha P_{n-1} F^{n-2-\beta} \left(\frac{dF}{dx}\right) + P_n F^{n-1-\beta} . \quad (38)$$

*) Этотъ полиномъ ζ соотвѣтствуетъ полиному ζ_n, который въ статьѣ „Способъ В. Г. Имшенецкаго...“ опредѣляется равенствомъ (68). Очевидно, полиномъ ζ, опредѣляемый равенствомъ (14), есть частный случай полинома ζ, опредѣляемаго равенствомъ (38).

Замѣтивъ, что

$$\frac{dp}{dx}=\frac{p}{F}\frac{dF}{dx}+\varrho . F,$$

гдѣ ϱ есть цѣлый полиномъ, затѣмъ внеся это выраженіе $\frac{dp}{dx}$ во вторую часть равенстта (7) и принявъ во вниманіе равенство (38), находимъ:

$$G.\sigma=H.\zeta+F.U, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

гдѣ G, H и U суть цѣлые полиномы, изъ которыхъ первый и второй выражаются такъ:

$$G=\frac{D}{F^{\beta}} \quad \text{и} \quad H=\left(\frac{p}{F}\right)^{n-1}.$$

Такъ какъ полиномы G и H не имѣютъ общихъ дѣлителей съ полиномомъ F, то равенство (39) непосредственно показываетъ, что $\sigma\equiv\zeta$, что̀ и требовалось доказать. Такимъ образомъ, въ разсматриваемомъ процессѣ вмѣсто полинома σ можно брать полиномъ ζ, опредѣляемый равенствомъ (38).

Это замѣчаніе относится къ каждому изъ полиномовъ $F_1, F_2, \ldots, F_t$, которымъ соотвѣтствуетъ t полиномовъ ζ, вводимыхъ вмѣсто одного только полинома σ. Эта замѣна полинома σ нѣсколькими полиномами ζ можетъ оказаться полезною, такъ какъ на практикѣ въ разныхъ случаяхъ могутъ имѣть значеніе разныя видоизмѣненія функціи σ. Прослѣдимъ нѣкоторыя изъ дальнѣйшихъ видоизмѣненій этого рода.

При $\beta=0$ находимъ:

$$\sigma\equiv\zeta\equiv\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-2)\left[(\alpha+n-1)P_0F^{-1}\frac{dF}{dx}-P_1\right],$$

при $\beta=1$ находимъ:

$$\sigma\equiv\zeta\equiv\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-3)\left[(\alpha+n-2)(\alpha+n-1)P_0F^{-2}\left(\frac{dF}{dx}\right)^2\right.$$

$$\left.-(\alpha+n-2)P_1F^{-1}\frac{dF}{dx}+P_2\right],$$

и т. д. Если условимся полагать: $k=\beta+1$ при $\beta<n-1$ и $k=n$ при $\beta\geqq n$, то будемъ имѣть вообще:

$$\sigma\equiv\zeta\equiv\sum_{i=0}^{k}(-1)^{n-i}\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-i-1)P_iF^{i-1-\beta}\left(\frac{dF}{dx}\right)^{n-i}. \quad (40)$$

Отсюда легко усмотрѣть, что полиномъ ζ, опредѣляемый равенствомъ (38), можно привести къ указанному въ статьѣ проф. К. А. Андреева виду (22′), т. е.

$$\sigma \equiv \zeta \equiv \sum_{i=0}^{k}(-1)^{n-1} \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-i-1)}{(1+\beta-i)!} \frac{d^{1+\beta-i}P_i}{dx^{1+\beta-i}}. \quad (41)$$

Изъ этого разнообразія формъ, къ которымъ приводятся полиномы σ и ζ, можно выбирать любую, смотря по обстоятельствамъ.

Покажемъ наконецъ, что въ отношеніи легкости разсматриваемаго процесса вычисленія идеальнымъ случаемъ будетъ тотъ, когда полиномъ F есть *неприводимый*. Въ самомъ дѣлѣ, если имѣетъ мѣсто этотъ случай и если α есть цѣлое число, удовлетворяющее условію (31), то общій наибольшій дѣлитель δ полиномовъ ζ и F непремѣнно долженъ совпадать съ F; полиномы X_1, $X_2, \ldots$ въ формулахъ (33), (34) и (36) должны сводиться къ одному только полиному F, и сверхъ того будемъ имѣть:

$$\sigma \equiv \zeta \equiv \Theta(\alpha),$$

т. е. первая часть равенства (31) получается посредствомъ однихъ только отбрасываній въ полиномѣ σ или ζ членовъ, кратныхъ F, и множителей, которые ни при какомъ значеніи α не дѣлятся на F. Въ виду этихъ упрощеній на практикѣ никогда не слѣдуетъ упускать случаевъ выдѣлять изъ полинома p его неприводимые дѣлители и вводить ихъ въ число полиномовъ $F_1, F_2, \ldots, F_t$, входящихъ въ равенства (26), (27) и (28). Но окончательная форма (37) не будетъ однако зависѣть отъ этихъ промежуточныхъ упрощеній.

Примѣнимъ изложенную теорію къ двумъ примѣрамъ.

Примѣръ 1. Данное уравненіе пусть будетъ:

$$(x^2+gx+h)^2x^5\frac{d^2y}{dx^2} - 6(x^3-hx-gh)x^4y =$$
$$= 12h(x^2+gx+h)^3(gx+h).$$

Имѣемъ:

$$P_0 = (x^2+gx+h)^2x^5, \quad P_1 = 0, \quad P_2 = -6(x^3-hx-gh)x^4,$$
$$V = 12h(x^2+gx+h)^3(gx+h).$$

Отыскивая раціональныя рѣшенія, удовлетворяющія данному уравненію при произвольныхъ g и h, получаемъ:

$$p = (x^2+gx+h)x, \quad D = (x^2+gx+h)x^4,$$

$$F_1 = x^2+gx+h, \quad F_2 = x, \quad D = F_1F_2^4, \quad V = F_1^3F_2^0 \cdot 12h(gx+h).$$

Дѣлители F_1 и F_2 полинома p неприводимые, что̀ служитъ къ облегченію вычисленій.

Для дѣлителя F_1 полинома p имѣемъ:

$$\beta_1 = 1\,,\ \varepsilon_1 = 3\,,\ \alpha_1' = -3\,,$$

$$\zeta = x^4\,[\alpha(\alpha+1)\,x(2x+g)^2 - 6(x^3 - hx - gh)] \equiv$$

$$\equiv \alpha(\alpha+1)\,x(2x+g)^2 - 6(x^3 - hx - gh) \equiv$$

$$\equiv (g^2 - 4h)\,\alpha(\alpha+1) - 6(g^2 - 2h).$$

Условіе (31) при этихъ данныхъ получаетъ видъ:

$$(g^2 - 4h)\,\alpha(\alpha+1) - 6(g^2 - 2h) = 0\,.$$

Получаемыя отсюда значенія α, при произвольныхъ g и h, не будутъ вообще цѣлыми и, слѣдовательно, должно полагать: $A_1 = \alpha_1' = -3$.

Для дѣлителя $F_2 = x$ полинома p имѣемъ:

$$\beta_2 = 4\,,\ \varepsilon_2 = 0\,,\ \alpha_2' = 3\,,$$

$$\zeta = \alpha(\alpha+1)(x^2+gx+h)^2 - 6x(x^3 - hx - gh) \equiv \alpha(\alpha+1)\,h^2\,.$$

Очевидно, ζ не можетъ дѣлиться на F_2 ни при какихъ значеніяхъ α, бо̀льшихъ предѣла α_2'. Поэтому $A_2 = \alpha_2' = 3$.

Раціональное рѣшеніе даннаго уравненія изыскивается подъ формой:

$$y = \frac{\xi}{F_1^{A_1}\,F_2^{A_2}} = \frac{(x^2+gx+h)^3\,\xi}{x^3}\,,$$

гдѣ ξ есть цѣлый полиномъ. Изыскивая ξ, получаемъ: $\xi = 1$ и, слѣдовательно, при произвольныхъ g и h существуетъ раціональное рѣшеніе:

$$y = \left(\frac{x^2+gx+h}{x}\right)^3.$$

Примѣръ 2. Данное уравненіе пусть будетъ:

$$x(x^5 - h)(x^5 + 5gx + 4h)\,\frac{d^2y}{dx^2} +$$

$$+ (7x^{10} - 5gx^6 - 24hx^5 - 20ghx - 8h^2)\,\frac{dy}{dx} +$$

$$+ (5x^9 - 15gx^5 - 30hx^4 - 10gh)\,y = 0\,.$$

Имѣемъ:

$$P_0 = x(x^5 - h)(x^5 + 5gx + 4h),$$

$$P_1 = 7x^{10} - 5gx^6 - 24hx^5 - 20ghx - 8h^2,$$

$$P_2 = 5x^9 - 15gx^5 - 30hx^4 - 10gh, \quad V = 0.$$

Отыскивая раціональныя рѣшенія, удовлетворяющія данному уравненію при произвольныхъ g и h, находимъ:

$$p = P_0 = F_1 F_2 F_3,$$

гдѣ F_1, F_2, F_3 суть неприводимые полиномы, опредѣляемые такъ:

$$F_1 = x, \; H_2 = x^5 - h, \; F_3 = x^5 + 5gx + 4h.$$

Далѣе находимъ: $D = 1$, т. е. для всѣхъ дѣлителей полинома p имѣемъ: $\beta = 0$. Сверхъ того для тѣхъ же дѣлителей имѣемъ: $\varepsilon = +\infty$ и, слѣдовательно, $\alpha' = -\infty$.

Для дѣлителя $F_1 = x$ полинома p имѣемъ:

$$\zeta \equiv -4h^2\alpha(\alpha - 1) \equiv \alpha(\alpha - 1).$$

Отсюда видно, что ζ дѣлится на $F_1 = x$ при слѣдующихъ цѣлыхъ значеніяхъ α:

$$\alpha_1'' = 0, \; \alpha_1''' = 1.$$

Слѣдовательно, $A_1 = \alpha_1''' = 1$.

Для дѣлителя $F_2 = x^5 - h$ полинома p имѣемъ:

$$\zeta \equiv 5x^4[5\alpha(\alpha + 1)x(x^5 + 5gx + 4h) - \alpha P_1] \equiv \alpha(\alpha + 2).$$

Отсюда видно, что ζ будетъ дѣлиться на F_2 при слѣдующихъ цѣлыхъ значеніяхъ α:

$$\alpha_2'' = -2, \; \alpha_2''' = 0.$$

Слѣдовательно, $A_2 = \alpha_2''' = 0$.

Для дѣлителя $F_3 = x^5 + 5gx + 4h$ полинома p находимъ:

$$\zeta \equiv 5(x^4 + g)\alpha[5(\alpha + 1)x(x^5 - 1)(x^4 + g) - P_1] \equiv$$

$$\equiv \alpha[5(\alpha + 1)x(x^5 - 1)(x^4 + g) - P_1] \equiv$$

$$\equiv 5\alpha(\alpha - 1)x(x^5 - h)(x^4 + g) \equiv \alpha(\alpha - 1).$$

Очевидно, ξ дѣлится на F_3 при слѣдующихъ значеніяхъ α:

$$\alpha_3'' = 0\,, \quad \alpha_3''' = 1\,.$$

Поэтому $A_3 = \alpha_3''' = 1$.

Всѣ искомыя раціональныя рѣшенія даннаго уравненія опредѣляются при посредствѣ формы:

$$y = \frac{\xi}{F_1^{A_1} F_2^{A_2} F_3^{A_3}} = \frac{\xi}{x(x^5 + 5gx + 4h)}\,,$$

гдѣ ξ есть цѣлый полиномъ. Опредѣляя полиномъ ξ, находимъ:

$$\xi = C_1 x^5 + C_2 x + 4C_1 q\,,$$

гдѣ C_1 и C_2 суть произвольныя постоянныя. Слѣдовательно общій интегралъ даннаго уравненія представляется въ раціональной формѣ:

$$y = \frac{C_1(x^5 + 4q) + C_2 x}{x(x^5 + 5gx + 4h)}\,.$$

Примѣръ этотъ съ небольшою перемѣною въ обозначеніяхъ заимствованъ изъ перваго мемуара В. Г. Имшенецкаго.

§ 5. Особое преимущество способа, основаннаго на употребленіи интегрирующаго множителя.

Изложеніе теоріи, основанное на употребленіи интегрирующаго множителя В. Г. Имшенецкаго, представлено въ статьѣ проф. К. А. Андреева и въ моей статьѣ: „Способъ В. Г. Имшенецкаго..." съ такою полнотою, что считаю излишнимъ излагать здѣсь эту теорію и коснусь лишь одной ея особенности.

Послѣ перенесенія всѣхъ усовершенствованій изъ этой теоріи въ вышеприведенную теорію, изложенную безъ посредства интегрирующаго множителя, обѣ эти теоріи почти сливаются, такъ какъ различіе между ними остается главнымъ образомъ только формальное, исключая одного пункта, касающагося вычисленія числителя ξ въ равенствѣ (11) или (37).

Представивъ равенство (11) или (37) въ формѣ:

$$y = \frac{M_1 \xi}{M}\,, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (42)$$

гдѣ M_1 и M суть цѣлые полиномы, не имѣющіе общаго дѣлителя, мы должны внести это выраженіе y въ уравненіе (1). Если не прибѣгать къ интегрирующему множителю, то послѣ указанной замѣны получимъ уравненіе вида:

$$\Phi_0 \frac{d^n \xi}{dx^n} + \Phi_1 \frac{d^{n-1}\xi}{dx^{n-1}} + \cdots + \Phi_n \xi = V\,, \quad \ldots\ldots \quad (43)$$

гдѣ вообще

$$\Phi_i = P_i + \binom{n-i+1}{1} P_{i-1} \frac{d}{dx}\left(\frac{M_1}{M}\right) + \ldots$$

$$+ \binom{n-i+s}{s} P_{i-s} \frac{d^s}{dx^s}\left(\frac{M_1}{M}\right) + \ldots + \binom{n}{i} P_0 \frac{d^i}{dx^i}\left(\frac{M_1}{M}\right), \quad . \ . (44)$$

при чемъ

$$\binom{k}{s} = \frac{k(k-1)\ldots(k-s+1)}{1.2\ldots s}.$$

При вычисленіи выраженій $\Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_n$ приходится, такимъ образомъ, производить дифференцированіе дроби $\frac{M_1}{M}$.

При употребленіи интегрирующаго множителя μ можно вовсе избѣгнуть дифференцированія дробей. Въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ случаѣ мы имѣемъ дѣло съ уравненіемъ:

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{S_0 M_1}{M}\xi\right) + \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\frac{S_1 M_1}{M}\xi\right) + \ldots + \frac{S_n M_1}{M}\xi = V\mu, \ . \ . (45)$$

гдѣ вообще

$$S_i = \mu P_i - \binom{n-i+1}{1} \frac{d(\mu P_{i-1})}{dx} + \ldots +$$

$$+ (-1)^s \binom{n-i+s}{s} \frac{d^s(\mu P_{i-s})}{dx^s} + \ldots + (-1)^i \binom{n}{i} \frac{d^i(\mu P_0)}{dx^i}. \quad (46)$$

Существуетъ множество способовъ выбрать интегрирующій множитель μ такъ, чтобы онъ представлялъ функцію *цѣлую* и чтобы вмѣстѣ съ тѣмъ полиномы $S_0, S_1, \ldots, S_n$ имѣли общій дѣлитель M. Если множитель μ выбранъ съ соблюденіемъ этихъ условій, то функціи

$$\frac{S_0}{M}, \frac{S_1}{M}, \ldots, \frac{S_n}{M}$$

должны быть цѣлыми и ни въ формулахъ (46), ни въ коэффиціентахъ уравненія (45) не будетъ дробныхъ выраженій *).

Итакъ, интегрирующій множитель μ, надлежащимъ образомъ выбранный, уничтожаетъ въ дифференціальномъ уравненіи (45) дроби подъ знаками дифференцированія.

---

*) Форма (45) сама по себѣ удобна также для дальнѣйшаго вычисленія полинома ξ по способу неопредѣленныхъ коэффиціентовъ и не нуждается въ приведеніи ея къ виду:

$$f_0 \frac{d^n\xi}{dx^n} + f_1 \frac{d^{n-1}\xi}{dx^{n-1}} + \ldots + f_n\xi = V.\mu.$$

Это преимущество неотъемлемо принадлежитъ способу, основанному на употребленіи интегрирующаго множителя. Вмѣстѣ съ тѣмъ выборъ цѣлаго множителя μ, уничтожающаго въ уравненіи (45) дроби, представлялъ съ самаго начала одну изъ существенныхъ особенностей способа В. Г. Имшенецкаго, которую впослѣдствіи съ наибольшею полнотою развилъ въ своей статьѣ проф. К. А. Андреевъ.

Слѣдуя схемѣ проф. К. А. Андреева, займемся составленіемъ болѣе простаго множителя μ, уничтожающаго въ уравненіи (45) дроби и представляемаго цѣлою функціей.

Замѣтимъ прежде всего, что въ функцію μ, удовлетворяющую предъявленнымъ къ ней требованіямъ, нужно вводить лишь такіе множители вида $(x+a)^\gamma$, для которыхъ $x+a$ есть дѣлитель знаменателя M. Поэтому линейные дѣлители полинома p, на которые не дѣлится полиномъ M, вовсе устранимъ изъ дальнѣйшаго разсмотрѣнія.

Пусть $x+a$ есть дѣлитель полинома M и пусть A есть соотвѣтствующій изъ показателей $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$, входящихъ въ знаменатель второй части равенства (11). Очевидно, будемъ имѣть:

$$A>0 \quad \text{и} \quad M=(x+a)^A \cdot H, \quad \ldots \ldots \ldots (47)$$

гдѣ H есть цѣлый полиномъ, не дѣлящійся на $x+a$. Далѣе представимъ искомый интегрирующій множитель μ такъ:

$$\mu=(x+a)^\gamma \cdot G, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (48)$$

гдѣ G есть цѣлый полиномъ, не дѣлящійся на $x+a$. Цѣлое число γ надлежитъ опредѣлить.

Очевидно, число γ, удовлетворяя условію:

$$\gamma \geqq 0, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (49)$$

вмѣстѣ съ тѣмъ должно быть таково, чтобы полиномы

$$S_0, S_1, \ldots, S_{n-1}, S_n$$

дѣлились на $(x+a)^A$. Но для выполненія этого послѣдняго требованія необходимо и достаточно, чтобы только полиномы

$$S_0, S_1, \ldots, S_{n-1} \ldots \ldots \ldots \ldots (50)$$

дѣлились на $(x+a)^A$, такъ какъ при этомъ условіи полиномъ S_n непремѣнно раздѣлится на $(x+a)^A$ (иначе уравненіе (45) привело бы къ противорѣчію). Замѣтивъ при этомъ, что на основаніи равенствъ (46) и (48) и свойствъ функцій (12) должно имѣть силу равенство:

$$S_i=(x+a)^{\gamma+1+\beta-i}\, T_i, \ (i=0, 1, \ldots, n)$$

гдѣ T_1 есть цѣлый полиномъ, усматриваемъ, что функціи (50) дѣлятся нацѣло на

$$(x+a)^{\gamma+2+\beta-n}.$$

Поэтому число γ удовлетворитъ указанному требованію, если положимъ:

$$\gamma+2+\beta-n=A+\omega, \quad \ldots \ldots \ldots (51)$$

гдѣ ω есть цѣлое число, не меньшее нуля и выбираемое такъ, чтобы имѣло силу неравенство (49). При соблюденіи этихъ условій число ω выгодно брать наименьшимъ.

Выбирая число ω, предположимъ во-первыхъ, что имѣетъ мѣсто совпаденіе A съ α', т. е.

$$A=\alpha'=1+\beta-n-\varepsilon.$$

Имѣя въ виду, что $A>0$, убѣждаемся, что $1+\beta-n>0$. Отсюда и изъ разсмотрѣнія полиномовъ (12) вытекаетъ, что полиномы P_0, $P_1, \ldots, P_n$ имѣютъ общій дѣлитель $x+a$. Слѣдовательно, полиномъ V не дѣлится $x+a$ или, иначе, $\varepsilon=0$. Поэтому $A=\alpha'=1+\beta-n$ и $\gamma=\omega-1$. Отсюда видно, что наименьшее положительное ω, удовлетворяющее условію (49), будетъ: $\omega=1$, и слѣдовательно

$$\gamma=0. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (52)$$

Этотъ результатъ показываетъ, что $x+a$ не будетъ дѣлителемъ искомаго полинома μ въ томъ случаѣ, когда $A=\alpha'$.

Во-вторыхъ предположимъ, что A не совпадаетъ съ α' и слѣдовательно $A>\alpha'$. Покажемъ, что въ этомъ случаѣ условіе (49) соблюдается при $\omega=0$, т. е. число

$$\gamma=A+n-\beta-2 \quad \ldots \ldots \ldots (53)$$

удовлетворяетъ условію: $A+n-\beta-2\geqq 0$. Если допустимъ противное, то помня, что $A>0$, будемъ имѣть:

$$0<A<\beta+2-n$$

и, слѣдовательно, $1+\beta-n>0$. Отсюда и изъ разсмотрѣнія полиномовъ (12) убѣждаемся, что полиномы $P_0, P_1, \ldots, P_n$ имѣютъ общаго дѣлителя $x+a$ и, слѣдовательно, полиномъ V не дѣлится на $x+a$, иначе, $\varepsilon=0$. Поэтому $\alpha'=1+\beta-n$ и неравенство $A>\alpha'$ получаетъ видъ: $\beta+1-n<A$. Такимъ образомъ приходимъ къ противорѣчивымъ для цѣлаго числа A неравенствамъ:

$$\beta+1-n<A<\beta+2-n.$$

Поэтому нельзя допустить неравенства $A+n-\beta-2<0$ и, слѣдовательно, число γ, опредѣляемое равенствомъ (53), удовлетворитъ неравенству (49).

Распространяя указанный порядокъ вычисленія показателя γ на всѣ линейные дѣлители $x+a$ полинома M, вполнѣ опредѣлимъ цѣлый интегрирующій множитель μ, уничтожающій въ уравненіи (45) дроби.

Если не дано разложенія полинома p на линейные дѣлители, то вмѣсто этихъ дѣлителей можно брать дѣлители вида (33) и (34), находимые процессомъ вычисленія, указаннымъ въ § 4.

Выясненное сейчасъ преимущество способа, основаннаго на употребленіи интегрирующаго множителя, приводитъ къ заключенію, что вообще этотъ способъ безусловно превосходитъ всѣ остальные, если поставить себѣ главной задачей только свести нахожденіе всѣхъ раціональныхъ рѣшеній уравненія (1) къ нахожденію цѣлыхъ рѣшеній преобразованнаго уравненія, каковая задача находится въ связи съ опредѣленіемъ лишь знаменателя M.

Что же касается опредѣленія полинома M_1, то интегрирующій множитель при этомъ опредѣленіи теряетъ свои преимущества *), уступая въ своихъ достоинствахъ другимъ пріемамъ вычисленія, изложеннымъ выше въ §§ 3 и 4.

Само собою разумѣется, что теорія нахожденія раціональныхъ рѣшеній уравненія (1) не нуждается въ опредѣленіи полинома M_1, какъ въ неизбѣжной необходимости. Но выдѣленіе полинома M_1 вообще приноситъ существенное и естественное облегченіе, благодаря пониженію степени того цѣлаго рѣшенія, къ которому задача приводится. Подобнымъ облегченіемъ теорія не должна пренебрегать.

Если при рѣшеніи задачи о нахожденіи раціональныхъ рѣшеній уравненія (1) нужно дорожить всѣми упрощеніями, какія допускаются характеромъ данныхъ, то, мнѣ кажется, удобнѣе всего отыскивать сначала знаменатель формы (11) или (37), опредѣляющій полиномы M и M_1, по указаннымъ въ § 3 или 4 правиламъ. Затѣмъ указаннымъ сейчасъ порядкомъ опредѣлять цѣлый интегрирующій множитель μ. Очевидно, вычисленіе множителя μ не представляется уже никакихъ затрудненій, послѣ того какъ найдены полиномы M и M_1. Наконецъ слѣдуетъ вычислять полиномъ ξ при посредствѣ уравненія (45).

---

*) Въ § 3 моей статьи „Способъ В. Г. Имшенецкаго...“ даны средства опредѣлять при помощи интегрирующаго множителя всѣ показатели $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и слѣдовательно оба полинома M и M_1. Но при опредѣленіи состава полинома M_1 и соотвѣтствующихъ факторовъ множителя μ приходится брать отрицательные показатели, т. е. считать множитель μ дробнымъ. Пользуясь этимъ множителемъ, можно было бы достигнуть сокращенія въ уравненіи (45) не только полинома M, но и полинома M_1. Но невыгода этого вычисленія въ томъ, что формулы (46) осложняются, содержа дифференцированіе дробнаго выраженія μ.

Объ автоморфной функціи, аналогичной экспонентной.

В. П. Алексѣевскаго.

Періодическія функціи обладаютъ автоморфизмомъ, т. е. не измѣняются отъ замѣны перемѣннаго простѣйшею группою линейныхъ подстановокъ. Однако, не однѣ періодическія, но и автоморфныя функціи въ собственномъ смыслѣ слова, встрѣчаются очень часто, но ихъ основное свойство оставалось незамѣченнымъ; напр. выраженіе

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n,$$

служащее исходнымъ пунктомъ для вывода строки e^x, есть автоморфная функція и, при томъ, аналогичная e^x.

Не лишено интереса опредѣлить самый общій видъ функціи, обладающей тѣми-же свойствами.

Задачу можно формулировать такимъ образомъ:

Опредѣлить функцію $F(x)$, обладающую слѣдующими свойствами: 1) при всѣхъ линейныхъ преобразованіяхъ независимаго перемѣннаго x, составляющихъ группу,

$$F\left(\frac{\alpha_i x+\beta_i}{\gamma_i x+\delta_i}\right)=F(x),$$

2) для нѣкоторой функціи z перемѣнныхъ x и y

$$F(z)=F(x)\,.\,F(y).$$

Группа линейныхъ подстановокъ должна быть прерывной; въ противномъ случаѣ искомая функція была-бы постоянной. Но можно къ искомой функціи присоединить непрерывную группу, по отношенію къ которой прерывная будетъ подгруппой. Успѣхъ рѣшенія и зависитъ отъ способа введенія этой непрерывной группы. Мы достигаемъ этого слѣдующимъ *опредѣленіемъ* функціи z.

Функція

$$z = \Phi(x, y)$$

отъ *всякаго* линейнаго преобразованія x преобразуется *такимъ-же* образомъ, т. е.

$$\Phi\left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}, y\right) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},$$

и z обращается въ y, когда x равно нѣкоторому постоянному c.

Такое опредѣленіе отнюдь не исключаетъ непрерывности линейной подстановки и, слѣдовательно, допускаетъ существованіе безконечно-малыхъ преобразованій.

Всякая линейная подстановка обладаетъ двумя инваріантными точками. Называя ихъ чрезъ a и b и подвергая нашу функцію безконечно-малому преобразованію, получимъ:

$$l(z-a)(z-b) = \frac{dz}{dx}\, l(x-a)(x-b),$$

гдѣ l—нѣкоторое постоянное.

Интегрируя это уравненіе, предполагая, что l не равно нулю, и опредѣляя произвольную функцію, вводимую интегрированіемъ съ помощью вышеупомянутыхъ начальныхъ условій, получимъ:

$$\frac{z-a}{z-b} \cdot \frac{c-a}{c-b} = \frac{x-a}{x-b} \cdot \frac{y-a}{y-b}.$$

Отсюда

$$z = \frac{ab(x+y-c) - (a+b-c)xy}{ab - xy + c(x+y-a-b)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

До сихъ поръ мы предполагали, что a и b различны, а l не равно нулю, но формула распространяется и на эти случаи; относительно допущенія $l = 0$ слѣдуетъ замѣтить, что оно эквивалентно удаленію одной или обѣихъ точекъ въ безконечность.

Полагая въ формулѣ (1) $c = a$, находимъ

$$z = b,$$

т. е. при совпаденіи постояннаго c съ одной изъ инваріантныхъ точекъ, z совпадаетъ съ другой; поэтому дальше мы должны предполагать, что c *отлично отъ каждой изъ инваріантныхъ точекъ*.

Итакъ, выраженіе (1) замѣняетъ для искомой функціи $F(x)$ сумму $x+y$, характерную для экспонентной. Но послѣдняя удовлетворяетъ требованіямъ нашей задачи, слѣдовательно и

$$z = x + y$$

должно быть частнымъ случаемъ выраженія (1). И дѣйствительно, формула (1) обращается въ предыдущую, когда $c=0$, а инваріантныя точки a и b удаляются въ безконечность.

Полагая на время $z=x_1$, напишемъ формулу (1) такимъ образомъ:

$$x_1 = \Phi_1(x, y).$$

Составимъ теперь рядъ выраженій:

$$x_2 = \Phi_1(x_1, y), \quad x_3 = \Phi_1(x_2, y) \ldots .$$

По исключеніи изъ нихъ промежуточныхъ величинъ $x_1, x_2, \ldots$, найдемъ

$$x_1 = \Phi_1(x, y), \quad x_2 = \Phi_2(x, y), \quad x_3 = \Phi_3(x, y) \ldots$$

гдѣ правыя части будутъ линейныя функціи относительно x; слѣдовательно, онѣ представляютъ группу, въ которой y—параметръ. Эту группу мы и желали присоединить.

Подставляя теперь $x_1, x_2, x_3 \ldots$ въ искомую функцію $F(x)$, по второму ея свойству найдемъ:

$$F(x_1) = F(x)\,F(y), \quad F(x_2) = F(x)\,F^2(y), \quad F(x_3) = F(x)\,F^3(y)$$

и т. д.

Отсюда ясно, что если y будетъ корнемъ уравненія

$$F(x) = 1,$$

то

$$F(x_i) = F(x).$$

Итакъ, непрерывная группа линейныхъ подстановокъ обращается въ прерывную, когда положимъ y равнымъ корню вышеупомянутаго уравненія.

Переходимъ къ составленію дифференціальнаго уравненія, которому удовлетворяетъ функція $F(x)$.

Съ этою цѣлью составимъ выраженіе

$$F(z) - F(x).$$

На основаніи условія

$$F(z) = F(x)\, F(y)$$

имѣемъ

$$F(z) - F(x) = F(x)\, [F(y) - 1].$$

Съ другой стороны

$$F(z) - F(x) = \frac{F(z) - F(x)}{z - x} \cdot (z - x).$$

Вычисливъ $(z - x)$ изъ формулы (1), находимъ:

$$z - x = \frac{(y - c)\,(x - a)\,(x - b)}{(c - a)\,(c - b) - (c - x)\,(c - y)}.$$

Подставляя это выраженіе въ предыдущее тождество и сравнивая результатъ съ первымъ выраженіемъ, по раздѣленіи на $(y - c)$, получимъ:

$$\frac{(x - a)\,(x - b)}{(c - a)\,(c - b) - (c - x)\,(c - y)} \cdot \frac{F(z) - F(x)}{z - x} = F(x) \cdot \frac{F(y) - 1}{y - c}.$$

Допустивъ теперь, что c есть корень уравненія

$$F(x) = 1$$

и замѣтивъ, что когда $y = c$, то $z = x$, найдемъ:

$$\frac{(x - a)\,(x - b)}{(c - a)\,(c - b)}\, F'(x) = F(x) \cdot F'(c) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

Таково искомое дифференціальное уравненіе.

Изъ него видимъ: 1) что функція $F(x)$ зависитъ отъ значенія $F'(c)$, 2) что послѣдняя величина есть произвольное постоянное количество, 3) что для существованія $F(x)$ вообще $F'(c)$ должна быть отлична отъ нуля (въ противномъ случаѣ $F(x)$ будетъ постоянной), и наконецъ 4) что когда $c = \infty$, $F'(c)$ должна быть нулемъ 2-го порядка, такъ какъ произведеніе

$$(c - a)\,(c - b)\, F'(c)$$

должно быть постоянной величиной.

Съ точки зрѣнія теоріи непрерывныхъ группъ найденный результатъ получаетъ новое толкованіе. Дѣйствительно, просматривая ходъ предыдущихъ разсужденій, видимъ, что лѣвая часть уравненія (2) представляетъ символъ U (С. Ли) безконечно-малаго преобразованія функціи

$F(x)$ относительно группы. Слѣдовательно, уравненіе (2) эквивалентно слѣдующему:

$$UF(x) = F(x) \cdot F'(c) \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, (3)$$

т. е. *символъ безконечно-малаго преобразованія $F(x)$ пропорціоналенъ самой функціи.*

Этотъ результатъ аналогиченъ извѣстному предложенію: производная экспонентной функціи пропорціональна самой функціи.

Легко убѣдиться повѣркою, что нашъ выводъ остается справедливъ и тогда, когда $c=\infty$. Для этого надо положить сначала въ равенствѣ (1) $c=\infty$ и затѣмъ повторить разсужденія, служившія для вывода дифференціальнаго уравненія.

Для нахожденія $F(x)$ остается проинтегрировать уравненіе (2).

Такимъ образомъ получимъ:

$$F(x) = \left(\frac{\dfrac{x-a}{x-b}}{\dfrac{c-a}{c-b}}\right)^{g} \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, (4)$$

гдѣ

$$g = \frac{(c-a)(c-b)\,F'(c)}{a-b}.$$

Итакъ, точки a и b суть критическія точки функціи; сама функція вообще многозначная.

Чтобы показать разнообразіе формъ функціи F мы разсмотримъ нѣкоторые частные случаи, при чемъ для упрощенія будемъ давать постояннымъ c и $F'(c)$ частныя значенія.

Полагая $c=0$, $F'(c)=1$ получимъ:

$$E(x) = \left(\frac{1-\dfrac{x}{a}}{1-\dfrac{x}{b}}\right)^{\frac{ab}{a-b}} \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, (5)$$

когда $a \lessgtr b$*); при этомъ

$$z = \frac{ab(x+y)-(a+b)xy}{ab-xy} \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, (6)$$

Полагая $a=b$, имѣемъ:

$$E(x) = e^{\frac{ax}{a-x}}$$

и

$$z = \frac{a^2(x+y)-2axy}{a^2-xy}.$$

---

*) Буквою E означаются частные виды функціи F. (*Ред.*)

Въ этомъ случаѣ функція стала однозначной. Причина понятна; предыдущая функція $E(x)$ при обходѣ перемѣннымъ замкнутаго контура, заключающаго обѣ точки a и b, не мѣняетъ своей величины, поэтому то же самое остается, когда обѣ точки совпали.

Пусть a и b *чисто мнимыя* сопряженныя количества, функція принимаетъ видъ:

$$E(x) = e^{\alpha \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\alpha}\right)},$$

гдѣ α коэффиціентъ обоихъ мнимыхъ количествъ.

Соотвѣтственная формула для z такая:

$$z = \frac{\alpha^2(x+y)}{\alpha^2 - xy}.$$

Пусть $b = \infty$; тогда

$$E(x) = \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{-a}$$

и

$$z = x + y - \frac{1}{a} xy.$$

Если $a = \infty$, $b = \infty$, то

$$E(x) = e\ .$$

Такимъ образомъ, наша *автоморфная функція обращается въ экспонентную, когда обѣ критическія точки въ безконечности.*

Когда одна изъ инваріантныхъ точекъ совпадаетъ съ нулемъ, предыдущая формула не годится, потому-что одновременное существованіе условій $c = 0$ и $b = 0$ требуетъ совпаденія c и b, что, какъ мы видѣли, нужно исключить.

Поэтому, полагая $b = 0$, принимаемъ напр. $c = 1$, $F'(c) = m$; тогда, полагая еще $a = \infty$, получаемъ

$$E(x) = x^m.$$

Если $c = \infty$, то положимъ $\lim. (c-a)(c-b)F'(c) = \lim. c^2 F'(c) = 1.$

Тогда

$$E(x) = \left(\frac{1 - \frac{a}{x}}{1 - \frac{b}{x}}\right)^{\frac{1}{a-b}},$$

$$z = \frac{xy - ab}{x + y - a - b}.$$

Слѣдовательно, когда $b=0$, то

$$E(x)=\left(1-\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{a}}$$

и

$$z=\frac{xy}{x+y-a}.$$

Если $b=0$ и $a=0$

$$E(x)=e^{-\frac{1}{x}}$$

и

$$z=\frac{xy}{x+y}.$$

Вычисленіе группы дѣлается по указанному выше правилу.

Возьмемъ напр. форму (5) для $E(x)$. Опредѣляя корни α_n уравненія

$$E(x)=1,$$

находимъ:

$$\alpha_n=\frac{ab(1-\varrho^{2n})}{b-a\varrho^{2n}},$$

гдѣ

$$\varrho=e^{\frac{\pi i(a-b)}{ab}}.$$

Полагая теперь въ формулѣ (6)

$$z=x_n\,,\quad y=\alpha_n\,,$$

находимъ прерывную группу для взятой формы $E(x)$:

$$x_n=\frac{x(a-b\varrho^{2n})-ab(1-\varrho^{2n})}{x(1-\varrho^{2n})-(b-a\varrho^{2n})}\quad\ldots\ldots\ldots\ (7)$$

Укажемъ нѣкоторыя слѣдствія.

Линейныя дифференціальныя уравненія съ перемѣнными коэффиціентами, приводимые къ виду

$$U^n y+A_1U^{n-1}y+\ldots+A_{n-1}Uy+A_n y=0,\quad\ldots\ldots\ (8)$$

интегрируются въ функціяхъ $E(x)$ такъ-же, какъ и линейныя дифференціальныя уравненія съ постоянными коэффиціентами.

*

Дѣйствительно, основаніемъ для интегрированія послѣднихъ служитъ свойство экспонентной функціи:

$$\frac{d^n e^{rx}}{dx^n} = r^n \cdot e^{rx}.$$

Пусть

$$Uy = k(x - a)(x - b)y'.$$

На основаніи предыдущаго всегда существуетъ такая функція $E(x)$, что

$$UE(x) = k(x - a)(x - b)E'(x).$$

или

$$UE(x) = E(x),$$

и слѣдовательно:

$$U^n[E(x)]^r = r^n \cdot [E(x)]^r.$$

Отсюда и явствуетъ справедливость нашего утвержденія.

Приведеніе дифференціальныхъ уравненій къ указанному типу совершается посредствомъ слѣдующихъ формулъ.

Положимъ для краткости

$$(x - a)(x - b) = t,$$

тогда

$$t' = 2x - a - b, \quad t'' = 2,$$

и

$$Uy = kty'$$

$$U^2 y = k^2(t^2 y'' + tt'y')$$

$$U^3 y = k^3[t^3 y''' + 3t^2 t' y'' + (tt'^2 + 2t^2)y']$$

. . . .

Такъ какъ мы убѣдились, что интегралы предыдущаго уравненія выражаются чрезъ $E(x)$, то замѣтивъ, что

$$E(x) = e^{\log E(x)}$$

заключаемъ, что ур. (8) приводится къ линейному дифференціальному уравненію съ постоянными коэффиціентами посредствомъ замѣны независимаго перемѣннаго, по формулѣ

$$\xi = \log E(x).$$

Изъ формы (8) легко выводятся другія извѣстныя уравненія, приводимыя къ уравненіямъ съ постоянными коэффиціентами.

Если одна изъ точекъ a или b въ безконечности, то t становится первой степени относительно x; символы упрощаются:

$$Uy = kty' , \quad U^2y = k^2t^2y'' , \quad U^3y = k^3t^3y''' , \dots$$

и уравненіе принимаетъ весьма извѣстный видъ.

Для полученія формы Гальфена (Mémoires présentés par divers savants, t. XXVIII, 1884.)

$$z^{(n)} + \frac{A}{(x-a)^n (x-b)^n} z = 0$$

надо предварительно измѣнить зависимое перемѣнное положеніемъ

$$y = (x-a)^{\mu} z$$

и затѣмъ спеціализировать постоянныя μ , A_1 , A_2 , ...

Напр. уравненіе

$$U^2y + AUy + By = 0$$

или

$$t^2y'' + t(A + t')y' + By = 0$$

при выборѣ

$$\mu = -1 , \quad A = a - b$$

обращается въ

$$z'' + \frac{B}{(x-a)^2 (x-b)^2} z = 0$$

Добавимъ къ сказанному нѣсколько словъ объ обратной функціи, которая должна быть аналогична логариѳму.

Полагая напр. въ (5)

$$E(x) = u ,$$

получаемъ обратную функцію

$$x = \lambda(u) .$$

На основаніи равенства (6) ея характерное свойство выражается равенствомъ:

$$\lambda(uv) = \frac{ab[\lambda(u) + \lambda(v)] - (a+b)\,\lambda(u)\,\lambda(v)}{ab - \lambda(u)\,\lambda(v)} .$$

Функція $E(x)$ можетъ быть и однозначна, и многозначна. Въ послѣднемъ случаѣ $\lambda(u)$ будетъ автоморфна. Дѣйствительно, общее выраженіе для $E(x)$ таково

$$k^m \cdot E(x)$$

гдѣ

$$k = e^{\frac{2\pi i a b}{a-b}},$$

а m—цѣлое число. Слѣдовательно,

$$\lambda(k^m u) = \lambda(u),$$

такъ что группа функціи $\lambda(u)$ характеризуется типичной подстановкой

$$u_m = k^m u.$$

Наоборотъ, автоморфизму $E(x)$ соотвѣтствуетъ многозначность $\lambda(u)$. Называя ея два значенія чрезъ $\lambda(u)$ и $\lambda_0(u)$, находимъ связь между ними изъ формулы (7):

$$\lambda(u) = \frac{\lambda_0(u)\,(a - b\varrho^{2n}) - ab(1-\varrho^{2n})}{\lambda_0(u)\,(1-\varrho^{2n}) - (b - a\varrho^{2n})}$$

Не останавливаясь на выводѣ различныхъ выраженій для $\lambda(u)$, отмѣтимъ только двѣ формы:

$$\lambda(u) = \log u \quad \text{при} \quad a = b = \infty$$

$$\lambda(u) = \operatorname{tg} \log u \quad \text{при} \quad a = -i,\; b = +i.$$

Такимъ образомъ, мы можемъ констатировать слѣдующее. Съ точки зрѣнія проективной геометріи равенство (6) или (1), какъ непосредственное слѣдствіе уравненія:

$$\frac{z-a}{z-b} \cdot \frac{c-a}{c-b} = \frac{x-a}{x-b} \cdot \frac{y-a}{y-b},$$

выражаетъ постоянство сложнаго отношенія четырехъ точекъ на прямой. Въ то-же время въ немъ заключается теорема сложенія функціи $\lambda(u)$, частными случаями которой являются логариѳмъ и тангенсъ.