УДК 517.5+517.9

Д. З. АРОВ

γ-ПРОИЗВОДЯЩИЕ МАТРИЦЫ, *J*-ВНУТРЕННИЕ МАТРИЦЫ-ФУНКЦИИ И СВЯЗАННЫЕ С НИМИ ЗАДАЧИ ЭКСТРАПОЛЯЦИИ. Ч. 2*

§ 2. Формулировка результатов о j-внутренних матрицах-функциях

1. Сформулированные результаты о γ-производящих матрицах ($A \in M(n, m)$) и задаче $N(n, m)$ в работе применяются для получения

* Первая часть работы опубликована в вып. 51 настоящего сборника. Список литературы во второй части является продолжением списка первой части.

соответствующих результатов о j-внутренних (м. ф.) W ($\in U(n, m)$) и задаче $SNP(n, m)$. Эти применения основаны на использовании представления (1.1) и на сведении задачи $SNP(n, m)$ к соответствующей задаче $N(n, m)$. Имеются различные сведения о j-внутренних м. ф., их роли в ряде задач математического анализа и его приложениях (например, [11—13]). В дальнейшем остановимся на некоторых из них. Пусть J-самосопряженная и унитарная матрица ($J = J^*$, $J^2 = I$). Мероморфная в D м. ф. $W(z)$ называется J-сжимающей, если во всех ее точках голоморфности

$$W^*(z)\,JW(z) \leqslant J,\ W(z)\,JW^*z \leqslant (J)\ (z \in D).$$

(Эти два неравенства эквиваленты). Класс таких м.-ф. обозначим через B_J.

Известно, что W из B_J имеют граничные значения почти всюду на ∂D (они ограниченного вида в D).

М. ф. W из B_J называется J — внутренней, если она имеет J-унитарные граничные значения $W(\zeta)$ п. в. на ∂D.

Для J-внутренней м. ф. W можно рассматривать ее псевдопродолжение в $D_e = \{z : 1 < |z| \leqslant \infty\}$, определяемое по принципу симметрии $W(z) = J\,[W^*(1/\bar{z})]^{-1}\,J$.

Если $J \neq \pm I$, а n и m — кратности собственных значений 1 и -1 матрицы J, то J унитарно эквивалентна матрице j, так что при $J \neq \pm I$ вместо B_J можно рассматривать класс B_j.

Полугруппа (мультипликативная) j-внутренних м-ф. обозначается через $U(n, m)$.

2. Теория м. ф. класса B_J разработана в фундаментальной работе В П. Потапова [14]. В ней получено далеко идущее обобщение известного мультипликативного представления скалярных функций класса B_1 на м. ф. класса B_j. Эта теория развивалась в связи с запросами теории характеристических функций операторов и во взаимодействии с последней. Произвольная голоморфная при $z = 0$ м. ф. $W(z)$ класса B_J является характеристической м. ф. неунитарного ограниченного оператора T в гильбертовом пространстве с $\operatorname{rang}(I - T^*T) = \operatorname{rang}(I - TT^*) = n + m$ и таким, что $I - T^*T$ и $I - TT^*$ имеют по n положительных и m отрицательных собственных значений с учетом их кратности. По существу характеристическая функция такого оператора является передаточной м. ф. консервативной системы прохождения с основным оператором T; к классу B_j относятся и передаточные м. ф. диссипативных систем прохождения [15]. Если же W ($\in B_j$) имеет j-унитарные граничные значения, т. е. является j-внутренней, то этим свойством характеризуются передаточные м. ф. пассивных систем прохождения без потерь каналов рассеяния. С другой стороны, к классу B_J при $J = \begin{bmatrix} 0 & iI_n \\ -iI_n & 0 \end{bmatrix}$ принадлежат резольвентные матрицы $A(z) = \| a_{jk}(z) \|_1^2$ изометрических (симметрических) операторов с индексом дефекта (n, n), введенные М. Г. Крейном для описания обобщенных резольвентов этих операторов на «масштабных подпространствах» [16]. После перехода от B_J к классу B_j

это описание сводится к рассмотрению семейства м. ф.

$$s(z) = F_W(E) = [w_{11}(z) E(z) + w_{12}(z)] [w_{21}(z) E(z) + w_{22}(z)]^{-1}$$
$$(E \in B_{n\times m}) \tag{2.1}$$

(при $m = n$) с «резольвентной матрицей» $W = [w_{jk}]_1^2 \in B_j$.

Известно, что для произвольной м. ф. $W = [w_{jk}]_1^2 \in B_j$ м. ф. $F_W(E) \in B_{n\times m}$ при $E \in B_{n\times m}$, т. е. $F_W(B_{n\times m}) \subset B_{n\times m}$. Это свойство является по существу характеристическим для B_j: если $W = [w_{jk}]_1^2$ — произвольная мероморфная в D м. ф. такая, что $F_W(B_{n\times m}) \subset B_{n\times m}$ и $\det W(z) \not\equiv 0$, то существует скалярная мероморфная в D функция $\rho(z)$ такая, что $\rho W \in B_j$ (теорема Л. А. Симаковой); очевидно, $F_{\rho W}(B_{n\times m}) = F_W(B_{n\times m})$. Известно также, что $W (\in B_j)$ является j-внутренней м. ф. тогда и только тогда, когда м. ф. $F_W(E)$ является внутренней ($\divideontimes$ — внутренней при $n < m$) для произвольной внутренней ($\divideontimes$ — внутренней) м. ф. E из $B_{n\times m}$ (м. ф. E называется $\divideontimes$ — внутренней, если $E^*(\bar{z})$ — внутренняя м. ф.).

Резольвентная матрица М. Г. Крейна $A(z)$ является J-внутренней, если унитарные расширения рассматриваемого изометрического оператора без выхода из пространства имеют чисто сингулярный спектр. Такое же справедливо и для резольвентной матрицы симметрического оператора, где вместо D естественнее рассматривать верхнюю или правую полуплоскость.

Впервые в виде (2.1) было описано множество решений неопределенной задачи Шура [17] путем последовательного применения леммы Шварца. Затем в таком же виде (2.1) было получено описание решений неопределенной задачи Неванлинны — Пика в классической работе Р. Неванлинны [18] путем применения алгоритма Шура и последующего предельного перехода (в сингулярном случае, с бесконечным числом узлов интерполяции). В этой работе, в частности, был получен результат, по существу означающий, что в рассмотренной задаче резольвентная матрица $W(z)$ является j-внутренней м. ф. В аналогичном виде там же было описано семейство функций, дающих спектральные функции неопределенной степенной проблемы моментов Гамбургера, а в работе Г. Вейля [19] таким же образом были описаны спектральные функции задачи Штурма — Лиувилля на полуоси. М. Г. Крейну удалось своим методом не только переполучить эти результаты, но и решить ряд новых важных задач и, в частности, задачи продолжения с отрезка винтовых и положительно определенных функций, а также рассмотреть задачи экстраполяции в специальных классах не только скалярных, но и матричнозначных функций.

Впоследствии В. П. Потапов предложил свой метод исследования задач этого круга, имея в виду, что резольвентные матрицы этих задач принадлежат к классу B_J. Им и его учениками и последователями (И. В. Ковалишиной, В. Э. Кацнельсоном и др.) был исследован ряд дискретных и континуальных вполне неопределенных задач экстраполяции м. ф. в специальных классах (Шура, Неванлинны, Крейна, проблемы моментов Гамбургера и Стилтьеса и других) и обратных задач спектральной теории дифференциальных операторов

[20—24]. При этом, в частности, алгоритм Шура переоформлен так, что на каждом шагу этого алгоритма резольвентная матрица очередной «усеченной задачи» получается путем умножения резольвентной матрицы предыдущей усеченной задачи справа на элементарный множитель Бляшке — Потапова. В зависимости от места расположения полюса ($z_k \in D$, $z_k \in D_e$ или $z_k \in \partial D$) элементарный множитель может быть 1-, 2- или 3-го рода и имеет вид

$$a)\ W_k(z) = \left(Q_k + \frac{1-\bar{z}_k z}{z_k - z} P_k\right) U_k,\ P_k^2 = P_k,\quad Q_k = I - P_k,$$
$$(1 - |z_k|) P_k J \leqslant 0;$$
$$в)\ W_k(z) = \left(I + \frac{z_k + z}{z_k - z} E_k\right) U_k,\ E_k^2 = 0,\ E_k J \geqslant 0,\ U_k^* J U_k = J$$

соответственно при а) $|z_k| \neq 1$ и б) $|z_k| = 1$.

При рассмотрении задачи Неванлинны-Пика для м. ф. n-го порядка (В. П. Потапов и И. В. Ковалишина [20] получались $W_k(z)$ с различными полюсами z_k из D и $\operatorname{rang} P_k = n$, а у задачи Шура (И. В. Ковалишина) — с $z_k = 0$ (или $z_k = \infty$) и $\operatorname{rang} P_k = n$; при рассмотрении касательной задачи Шура—Неванлинны—Пика (И. П. Федчина [6]) получались $W_k(z)$ с z_k из D без каких-либо других дополнительных ограничений (возможно, чтобы $z_k = z_j$ при $k \neq j$ и чтобы $\operatorname{rang} P_k < n$). В итоге был получен важный результат Потапова—Ковалишиной—Федчиной: 1) решения s произвольной вполне неопределенной касательной задачи Шура—Неванлинны—Пика описываются формулой (2.1) с резольвентной матрицей $W(z) = [w_{jk}(z)]_1^2$, являющейся произведением элементарных множителей Бляшке—Потапова 1-го рода; 2) произвольное сходящееся произведение $W(z)$ таких множителей — резольвентная матрица некоторой вполне неопределенной задачи Шура—Неванлинны—Пика. В работе [26] показано, что произвольное сходящееся произведение элементарных множителей Бляшке—Потапова является J-внутренней м. ф. Представляет интерес получение условий, при которых W из $U(n, m)$ — произведение Бляшке—Потапова. Для теории операторов это важно в связи с тем, что, как известно, неунитарный оператор с характеристической функцией $W (\in B_J)$, не имеющий собственных значений на ∂D, является полным тогда и только тогда, когда W — произведение множителей Бляшке—Потапова 1- и 2-рода. Необходимые и достаточные условия, когда м. ф. W является такой. установлены в сформулированной ниже теореме 12.

Для континуальных задач экстраполяции м. ф., обратных задач спектральной теории дифференциальных операторов вместо D рассматривают правую (или верхнюю) полуплоскость.

Согласно теореме В. П. Потапова [14], в которой для того чтобы W являлась целой J-внутренней в Π м. ф., нормированной условием $W(0) = I$, необходимо и достаточно, чтобы она была представимой в виде мультипликативного интеграла $W(z) = \overset{\frown}{\int_0^l} \exp\{-zJH(x)\}\, dx$, т. е., чтобы $W(z)$ была матрицей монодромии регулярной канонической дифференциальной системы $W(z) = W(l, z)$, где $W(x, z)$ — фундаментальная матрица системы

$$\frac{dy}{dx} = -zJH(x)y, \quad (0 \leqslant x \leqslant l)$$

при некотором $H(x) \geqslant 0$ с $\int\limits_0^e \| H(x) \| dx < \infty$. Целые J-внутренние в П м. ф. W рассматривались М. Г. Крейном в качестве резольвентных матриц в разработанной им теории представлений целых симметрических операторов; не только целые, но и мероморфные J-внутренние в П м. ф. рассматривались Луи де Бранжем.

В другом месте будут изложены результаты о целых j-внутренних в П м. ф., связанные с настоящей работой.

3. В следующей теореме установлена связь между классами $\boldsymbol{M}(n, m)$ и $\boldsymbol{U}(n, m)$.

Теорема 7. а) *Произвольная j-внутренняя м. ф. $W(z)$ в существенном однозначно представима в виде* (1.1), *причем, если $f_0 = F_A(0)$,* то $b_1 f_0 b_2 \in B_{n\times m}$, *где A, b_1, b_2 взяты из представления* (1.1).

б) *Произвольная м. ф. W, представимая в виде* (1.1) *с $b_1 f_0 b_2 \in B_{n\times m}$, где $f_0 = F_A(0)$, является j-внутренней м. ф.*

Следствие. $\boldsymbol{M}_s(n, m) \subset \boldsymbol{U}(n, m)$.

Через D_+ обозначим класс голоморфных в D м. ф. h, представимых в виде $h = h_2^{-1} h_1$, где $h_1 \in H^\infty_{n\times m}$ при некоторых n и m, а h_2 — скалярная внешняя функция из H^∞_1; если в таком представлении и м. ф. h_1 является внешней, то м. ф. h из D_+ называется *внешней*.

Будет показано, что класс $\boldsymbol{M}_s(n, m)$ состоит из тех и только тех j-внутренних м. ф., которые являются внешними м. ф.

Назовем такие м. ф. *сингулярными j-внутренними м. ф.*:

$$\boldsymbol{U}_s(n, m) \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{M}_s(n, m).$$

М. ф. W из $\boldsymbol{U}(n, m)$ назовем *регулярной j-внутренней м. ф.*, если не существует непостоянной м. ф. $W_s \in U_s(n, m)$ такой, что $WW_s^{-1} \in \boldsymbol{U}(n, m)$. Множество регулярных j-внутренних м. ф. обозначим через $\boldsymbol{U}_r(n, m)$.

Теорема 8. *Пусть $W \in U(n, m)$ и A — м. ф., рассматриваемая в представлении $\boldsymbol{W}$ в виде* (1.1). *Тогда**

$$W \in \boldsymbol{U}_r(n, m) \leftrightarrow A \in \boldsymbol{M}_r(n, m).$$

Теорема 9. *Произвольная j-внутренняя м. ф. $W (\in \boldsymbol{U}(n, m))$ в существенном однозначно представима в виде $W = W_r W_s$, где $W_r \in \boldsymbol{U}_r(n, m)$, $W_s \in \boldsymbol{U}_s(n, m)$.*

---

* В заметке [2] критерий того, что для $W (\in U(n, n))$ имеем $W \in U(n, n)$ следовало бы сформулировать иначе: достаточно, чтобы $\operatorname{ind}(b_1^{-1} F_W(\pm J)\, b_2^{-1}) = 0$ и необходимо, чтобы $\operatorname{ind}(b_1^{-1} F_W(E)\, b_2^{-1}) = 0$ при любой $E = \text{const}$, $E^*E = J_n$.

Теорема 10. 1. *Пусть* $W = [w_{jk}]_1^2 \in U(n, m)$, $s_0 = F_W(0)$ $(= w_{12} w_{22}^{-1})$, b_1 и b_2 — *внутренние м. ф., рассматриваемые в представлении* W *в виде* (1.1). *Тогда* а) *задача* (1.3) *с этими* s_0, b_1 и b_2 *является вполне неопределенной*; б) $F_W(B_{n\times m}) \subset F_{s_0, b_1, b_2}$, где F_{s_0, b_1, b_2} — *множество решений этой задачи*; в) $F_W(B_{n\times m}) = F_{s_0, b_1, b_2} \Leftrightarrow W \in U_r(n, m)$.

2. *Для произвольной вполне неопределенной задачи* (1.3) *существует* $W \in U_r(n, m)$, *имеющая в представлении* (1.1) те же b_1 *и* b_2, *что и в задаче* (1.3), *и такая, что* $F_W(B_{n\times m}) = F_{s_0, b_1, b_2}$. *Эта м. ф.* W *опрефеляется по задаче* (1.3) *с точностью до постоянного правого* j-*унитарного множителя.*

Теорема 11. *Пусть* $W \in U(n, m)$, $s_0 = F_W(0)$ $(= w_{12} w_{22}^{-1})$; $(1 - \| s_0(\zeta) \|^{-1} \in L^1$. *Тогда* $W \in U_r(n, m)$.

Теорема 12. *Для того чтобы* j-*внутренняя м. ф.* W *была произведением множителей Бляшке — Потапова* а) *1-го или 2-го рода*, б) *только первого*, в) *только 2-го рода*, необходимо и достаточно, чтобы

1) $W \in U_r(n, m)$; 2) *м. ф.* b_1 *и* b_2, *рассматриваемые в представлении* (I.I), *были произведениями Бляшке — Потапова* (*и, соответственно, б*) $b_1 = \text{const}$, в) $b_2 = \text{const}$). *Для выполнения условия* 2) *необходимо и достаточно, чтобы соответственно*

а)
$$\lim_{r \uparrow 1} \int_{|\zeta|=1} \ln |\det w_{22}(r\zeta)| \, |d\zeta| = \int_{|\zeta|=1} \ln |\det w_{22}(\zeta)| \, |d\zeta|; \tag{1.14}$$

$$\lim_{r \to 1} \int_{|\zeta| \to 1} \ln |\det w_{11}(r\zeta)| \, |d\zeta| = \int_{|\zeta|=1} \ln |\det w_{11}(\zeta)| \, |d\zeta|; \tag{1.15}$$

б) *выполнялось условие* (1.4) *и*

$$\ln |\det w_{11}(\infty)| = \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=1} \ln |\det w_{11}(\zeta)| \, |d\zeta|; \tag{1.16}$$

в) *выполнялось условие* (1.15) *и*

$$\ln |\det w_{22}(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=1} \ln |\det w_{22}(\zeta)| \, |d\zeta|. \tag{1.17}$$

Следствие. *Пусть* $W = [w_{jk}]_1^2 \in U(n, m)$, $s = w_{12} w_{22}^{-1}$, $(1 - \| s_0(\zeta) \|)^{-1} \in L^1$ *и выполняются условия* а) (1.14), (1.15) *или б*) (1.14), (1.16), *или в*) (1.15), (1.17). *Тогда* W — *произведение Бляшке—Потапова элементарных множителей соответственно а*) *1- или 2-го рода*, б) только 1-го рода, в) только 2-го рода.

4. В связи с синтезом пассивных систем с потерями методом Дарлингтона интересна задача представления заданной м. ф. s_0 $(\in B_{n\times m})$ в виде

$$s_0 = F_W(E_0), \quad W \in U(n, m), \quad E_0 = \text{const}, \quad E_0^* E_0 \leqslant I. \tag{1.18}$$

Эта задача исследована в работах автора [11, 12]. Она также рассматривалась Хелтоном, Девилдом и др. Было, в частности, выяснено, что для ее разрешимости необходимо и достаточно, чтобы для s_0 существовало псевдопродолжение ограниченного вида во внешности D_e

круга D. Это условие эквивалентно существованию скалярной внутренней функции b такой, что $b(\zeta)s_0^*(\zeta)\in B_{n\times m}$. В работе [27] автором было указано, как можно получить для скалярной функции $s^0(\in B_1)$, удовлетворяющей этому условию и имеющей $\|s_0\|_\infty<1$, представление (1.18) путем рассмотрения соотвествующей задачи (1.3) (с $b_1=1$).

В настоящей работе буден показано, что справедлива

Теорема 13. *Пусть* $s_0(\in B_{n\times m})$ *представима в виде* (1.18), *где* $E_0^*E_0<I_m$, b_1 *и* b_2 — *внутренние м. ф., рассматриваемые для* W *в представлении* (1.1). *Тогда*

$$b_2(1-s_0^*s_0)^{-1}s_0^*b_1\in D_+; \qquad (1.19)$$

2. *Пусть для* $s_0(\in B_{n\times m})$ *при некоторых внутренних м. ф.* $b_1(\in B_n)$ *и* $b_2(\in B_m)$ *выполняется условие* (1.19). *Тогда* s_0 *представима в виде* (1.18) *и* $E_0^*E_0<I_m$;

3. *Если в дополнение к условию имеем* $(1-\|s_0(\zeta)\|)^{-1}\in L^1$, *то обязательно в представлении* (1.18) *имеем* $W\in U_r(n, m)$. *Это представление может быть получено путем рассмотрения задачи* (1.3), *поставленной по* s_0 *и* b_1, b_2, *взятым из условия* (1.19). *Такая задача является вполне неопределенной,* $F_{s_0;\,b_1,\,b_2}=F_W(B_{n\times m})$.

Список литературы: 11. *Аров Д. З.* Реализация матриц-функций по Дарлингтону // Изв. АН. СССР. Сер. мат. 1973. **37**, № 6. С. 1299—1331. 12. *Аров Д. З.* Реализация канонической системы с диссипативным граничным условием на одном конце сегмента по коэффициенту динамической податливости // Сиб. мат. журн. 1975. **16**, № 3. С. 540—563. 13. *Аров Д. З.* О функциях класса П // Зап. науч. сем ЛОМИ. 1984. **135**. С. 5—30. 14. *Потапов В. П.* Мультипликативная структура z-нерастягивающих матриц-функций // Тр. Моск. мат. об-ва. 1955. 4. С. 125—236. 15. *Аров Д. З.* Пассивные линейные стационарные динамические системы // Сиб. мат. журн. 1979. **19**, вып. 2. С. 211—228. 16. *Крейн М. Г., Саакян Ш. Н.* О некоторых новых результатах в теории резольвент эрмитовых операторов // Докл. АН СССР. 1966. **169**, № 6. С. 1269—1272. 17. *Schur J.* Uber Potenzreien, die in Jnnern des Einheitskreises besränkt sind // J. Reine Angew. Math. 1917. **147**. S. 205—232. 18. *Nevanlinna R.* Über beschrânkte analytische Funktionen // Ann. Akad. Sci. Ser. A. 1929. **32**, № 7. S. 1—75. 19. *Weyl H.* Über das Pick — Nevanlinna'sche Jnterpolationsproblem und sein infinitesimales Analogen // Ann. of Math. 1935. 36, N 2. S. 230—254. 20. *Ковалишина И. В., Потапов В. П.* Индефинитная метрика в проблеме Неванлинны — Пика // Докл. АН Арм. ССР. Сер. мат. 1974. **9**, № 1. С. 3—9. 21. *Кацнельсон В. Э.* Методы J-теории в континуальных интерполяционных задачах анализа. Ч. I // Х., 1982.— Деп. в ВИНИТИ 22.12.82, № 171—183. 22. *Кацнельсон В. Э.* Интегральное представление эрмитово-положительных ядер смешанного типа и обобщенная задача Нехари, I // Теория функций, функцион. анализ и их прил. Х., 1984. Вып. 43. С. 60—70. 23. *Ковалишина И. В.* Аналитическая теория одного класса интерполяционных задач // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1983. **47**, № 3. С. 455—497. 24. *Сахнович Л. А.* Об обратной задаче для систем дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. 1985. **284**, № 1. С. 57—61.26. *Аров Д. З., Симакова Л. А.* О граничных значениях сходящейся последовательности J-сжимающих матриц-функций // Мат. заметки. 1976. **19**, № 4. С. 491—500. 27. *Аров Д. З.* О методе Дарлингтона в исследовании диссипативных систем // Докл. АН СССР. 1971. 201, № 3. С. 559—562.

Поступила в редколлегию 08.01.87