ЗАПИСКИ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА
ХАРЬКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА им. А. М. ГОРЬКОГО
И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXIX. Серия 4 1963

ОБ ОДНОМ УРАВНЕНИИ ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ НА ПОЛУОСИ

Н. И. Ахиезер

1. В недавней статье [1] я рассматривал один частный, но, как мне кажется, важный случай обратной задачи Штурма — Лиувилля на полуоси. В этом случае спектральная функция $\sigma(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ абсолютно непрерывна, а ее производная $\sigma'(\lambda) = \frac{1}{\pi} w(\lambda)$ задается равенствами

$$w(\lambda) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{P(\lambda)}{Q(\lambda)}} & (\lambda \in E) \\ 0 & (\lambda \,\overline{\in}\, E), \end{cases} \tag{1}$$

где E — точечное множество, образованное интервалами

$$(0, \alpha_1),\ (\beta_1, \alpha_2),\ (\beta_2, \alpha_3),\ \ldots\ (\beta_\rho, \infty),$$

а многочлены $P(\lambda)$ и $Q(\lambda)$ имеют вид:

$$P(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)(\lambda - \alpha_2)\ldots(\lambda - \alpha_\rho), \quad Q(\lambda) = \lambda(\lambda - \beta_1)(\lambda - \beta_2)\ldots(\lambda - \beta_\rho).$$

Согласно общей теории обратной задачи Штурма — Лиувилля существует уравнение*

$$-y'' + q(x)\,y = \lambda y \tag{2}$$

и краевое условие

$$y'(0) = h, \quad y(0) = 1, \tag{2'}$$

которым отвечает указанная спектральная функция. Удовлетворяющее условию (2′) решение уравнения (2) обозначим $\varphi(x, \lambda)$. Второе решение уравнения (2) назовем $\psi(x, \lambda)$. Оно по определению удовлетворяет краевому условию

$$\psi(0, \lambda) = 0, \quad \psi'(0, \lambda) = 1.$$

Опираясь на методы статей [2,3], посвященных ортогональным многочленам на системе интервалов, я сформулировал в статье [1] одну проблему, относящуюся к гиперэллиптическим интегралам, и, не входя в детали, показал, что решение этой проблемы приводит к явному выражению для функции $\varphi(x, \lambda)$.

Основной задачей настоящей статьи является доказательство теоремы, которую можно рассматривать как алгебраическую базу упомянутых построений.

---

* Составляя «переходную» функцию

$$\Phi(u) = \frac{1}{\pi}\int_E \frac{1 - \cos(u\sqrt{\lambda})}{\lambda}\sqrt{\frac{P(\lambda)}{Q(\lambda)}}\,d\lambda, \quad (u \geqslant 0),$$

можно показать на основании одной общей теоремы М. Г. Крейна [7], что в нашем случае функция $q(x)$ имеет производные любого порядка.

Как известно, у П. Л. Чебышева, Е. И. Золотарева и А. А. Маркова многие задачи на нахождение многочленов (наименее уклоняющихся от нуля, ортогональных, минимизирующих интеграл от модуля) сводились к неопределенному уравнению вида

$$a(x)[\Phi(x)]^2 + b(x)[\Psi(x)]^2 = c(x),$$

где $\Phi(x)$, $\Psi(x)$ — искомые многочлены (сколь угодно высокой степени n, $n-1$), а $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ — некоторые фиксированные многочлены (обычно степени не выше второй).

Аналогичное уравнение получается и в рассматриваемом нами континуальном случае, а именно, справедлива следующая

Теорема. *При любом $x > 0$ имеет место соотношение*

$$P(\lambda)[\varphi(x, \lambda)]^2 + Q(\lambda)[\psi(x, \lambda)]^2 = S(\lambda),$$

где $S(\lambda)$ — многочлен степени ρ с коэффициентами, зависящими от x. Корни многочлена $S(\lambda)$ лежат по одному в интервалах $[\alpha_j, \beta_j]$.

2. Остановимся вначале на некоторых известных фактах, относящихся к произвольному уравнению Штурма — Лиувилля на полуоси. Таким образом, мы пока не будем предполагать, что спектральная функция $\sigma(\lambda)$ определяется с помощью равенств (1). Однако сохраним предположение, что она равна нулю при $\lambda < 0$. Одним из следствий этого предположения является единственность спектральной функции проблемы (2), (2′).

Положим $\lambda = s^2$, $t = \operatorname{Im} s$ и будем символ O понимать всегда в одном смысле, а именно: равномерно по x в каждом конечном интервале полуоси $x > 0$ для $|s| \to \infty$. Одной буквой C будем обозначать различные величины, зависящие только от $\varepsilon > 0$ и x, которые при фиксированном ε ограничены в каждом конечном интервале полуоси $x > 0$.

Условившись в этом, заметим, что $\varphi(x, \lambda)$ и $\psi(x, \lambda)$ являются относительно s четными целыми трансцендентными функциями конечной степени, точнее — степени x. При этом

$$\left\{\begin{aligned} \varphi(x, \lambda) &= \cos(sx) + e^{|t|x} O\left(\frac{1}{|s|}\right) \\ \psi(x, \lambda) &= \frac{\sin(sx)}{s} + e^{|t|x} O\left(\frac{1}{|s|^2}\right) \end{aligned}\right. . \tag{3}$$

Один из способов получения спектральной функции проблемы (2), (2′) связан с введением мероморфной функции от λ (с параметром $x > 0$)

$$f_x(\lambda) = \frac{\psi(x, \lambda)}{\varphi(x, \lambda)}.$$

Эта функция в области $\operatorname{Im} \lambda > 0$ регулярна и имеет положительную мнимую часть. Опираясь на формулы (3), можно получить ее разложение в ряд Миттаг-Лефлера, который удобно записать в виде интеграла Стилтьеса

$$f_x(\lambda) = \int \frac{d\sigma_x(\mu)}{\mu - \lambda}.$$

Здесь $\sigma_x(\mu)$ есть неубывающая функция, единственными точками роста которой являются корни $\lambda_k = \lambda_k(x)$ целой функции $\varphi(x, \lambda)$. Хорошо известно, что при любом вещественном θ и любом $x > 0$ уравнение

$$\varphi(x, \lambda) + \theta\varphi'(x, \lambda) = 0$$

относительно λ имеет не более одного отрицательного корня. Поэтому в написанном здесь интеграле Стилтьеса нижний передел конечен. Однако в нашем случае, когда $\theta = 0$, нижним переделом является 0, так что*

$$f_x(\lambda) = \int_0^\infty \frac{d\sigma_x(\mu)}{\mu - \lambda}.$$

Заметим еще, что при любом $\alpha > \frac{1}{2}$

$$\int_0^\infty \frac{d\sigma_x(\mu)}{1 + \mu^\alpha} < \infty.$$

Этот факт устанавливается в процессе разложения функции $f_x(\lambda)$ в ряд Миттаг — Лефлера. Он вытекает также из одной теоремы И. Каца [5], так как на основании асимптотических формул (3) при любом $\alpha > \frac{1}{2}$

$$\int_1^\infty \frac{\operatorname{Im} f_x(i\eta)}{\eta^\alpha} d\eta < \infty.$$

Пусть $\mu \geqslant 0$. Тогда при $t = \operatorname{Im}\sqrt{\lambda} > 0$ справедливо тождество

$$\frac{1}{\mu - \lambda} = -i\sqrt{\lambda}\int_0^\infty e^{i\sqrt{\lambda}u} \frac{1 - \cos(u\sqrt{\mu})}{\mu} du,$$

с помощью которого функцию $f_x(\lambda)$ можно представить в виде

$$f_x(\lambda) = -i\sqrt{\lambda}\int_0^\infty e^{i\sqrt{\lambda}u}\Phi_x(u)\,du, \quad (t > 0), \tag{4}$$

где

$$\Phi_x(u) = \int_0^\infty \frac{1 - \cos(u\sqrt{\mu})}{\mu} d\sigma_x(\mu). \tag{4'}$$

Если $t \geqslant \varepsilon > 0$, то в силу (3)

$$|f_x(\lambda)| \leqslant \frac{C}{|s|}.$$

Отсюда, благодаря известной теореме о преобразовании Фурье в комплексной области,

$$\int_0^\infty e^{-\varepsilon u} |\Phi_x(u)|^2 du = C.$$

---

* Это замечание, которым я обязан В. А. Марченко, вносит некоторые упрощения в промежуточные выкладки и формулировки дальнейших рассмотрений. Поэтому приведем доказательство. Оно основано на том, что в силу положительности спектра проблемы (2), (2′) для любой дважды непрерывно дифференцируемой финитной функции $y(x)$, удовлетворяющей условию (2′), справедливо неравенство

$$(*) \qquad J[y] \equiv h[y(0)]^2 + \int_0^\infty [y'^2(x) + q(x)y^2(x)]\,dx \geqslant 0$$

Действительно, если допустить, что при некотором $a > 0$ функция $\varphi(a, \lambda)$ имеет отрицательный корень μ, то на функции

$$z(x) = \begin{cases} \varphi(x, \mu) & (0 \leqslant x \leqslant a) \\ 0 & (x > a) \end{cases}$$

функционал J будет иметь значение

$$J[z] = \mu \int_0^\infty [\varphi(x, \mu)]^2 dx < 0,$$

и знак функционала сохранится после применения к функции $z(x)$ достаточно аккуратной операции округления углов, что несовместимо с неравенством (*).

Из представления (4′), между прочим, следует, что $\Phi_x(u)$ на оси $-\infty < u < \infty$ непрерывна, удовлетворяет неравенству

$$0 \leqslant \Phi_x(u) \leqslant \frac{u^2}{2}\int_0^1 d\sigma_x(\mu) + 2\int_1^\infty \frac{d\sigma_x(\mu)}{\mu}$$

и обращается в 0 при $u = 0$. Отметим еще, что из того же представления вытекает неравенство

$$\int_0^1 d\sigma_x(\mu) + \int_1^\infty \frac{d\sigma_x(\mu)}{\mu} \leqslant \frac{1}{2}\Phi_x(\pi) + \int_0^2 \Phi_x(u)\,du. \tag{5}$$

Важное для нас свойство функции $\Phi_x(u)$ состоит в том, что при $0 < a < b < \infty$

$$\Phi_b(u) = \Phi_a(u) \quad (0 \leqslant u \leqslant 2a). \tag{6}$$

Это свойство вытекает из общих построений М. Г. Крейна [6], относящихся к произвольной струне. Приведем здесь доказательство равенства (6), не выходя за рамки наших рассмотрений.

С этой целью заметим, что

$$\frac{d}{dx}f_x(\lambda) = \frac{\varphi(x,\lambda)\psi'(x,\lambda) - \varphi'(x,\lambda)\psi(x,\lambda)}{[\varphi(x,\lambda)]^2} =$$
$$= \frac{1}{[\varphi(x,\lambda)]^2} = 4e^{2i\sqrt{\lambda}x}\left\{1 + O\left(\frac{1}{|s|}\right)\right\}.$$

Значит, при $t \geqslant \varepsilon > 0$

$$\left|\frac{1}{\sqrt{\lambda}}e^{-2ix\sqrt{\lambda}}\frac{d}{dx}f_x(\lambda)\right| \leqslant \frac{C}{|s|}. \tag{7}$$

Благодаря упомянутой выше теореме о преобразовании Фурье в комплексной области, из соотношения (7) вытекает, что

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}e^{-2ix\sqrt{\lambda}}\frac{d}{dx}f_x(\lambda) = -i\int_0^\infty e^{i\sqrt{\lambda}u}G_x(u)\,du,$$

где

$$\int_0^\infty e^{-\varepsilon u}|G_x(u)|^2\,du = C.$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dx}f_x(\lambda) = -i\sqrt{\lambda}\int_{2x}^\infty e^{i\sqrt{\lambda}u}H_x(u)\,du, \tag{8}$$

где

$$\int_0^\infty e^{-\varepsilon u}|H_x(u)|^2\,du = C.$$

Интегрируя равенство (8) от $x = a > 0$ до $x = b > a$, находим, что

$$f_b(\lambda) - f_a(\lambda) = -i\sqrt{\lambda}\int_{2a}^\infty e^{i\sqrt{\lambda}u}H_{a,b}(u)\,du. \tag{8′}$$

С другой стороны, благодаря (4)

$$f_b(\lambda) - f_a(\lambda) = -i\sqrt{\lambda}\int_0^\infty e^{i\sqrt{\lambda}u}\{\Phi_b(u) - \Phi_a(u)\}\,du. \tag{8″}$$

Сравнение (8′) с (8″) и приводит к равенству (6).

Теперь определим четную функцию $\Phi(u)$, которая при любом $x > 0$ удовлетворяет соотношению

$$\Phi(u) = \Phi_x(u) \quad (0 \leqslant u \leqslant 2x).$$

Попутно будем применять к семейству функций $\sigma_x(\mu)$ теоремы Хелли, что возможно в силу оценки (5) и приведет к некоторой неубывающей функции $\Sigma(\mu)$, удовлетворяющей условию

$$\int_0^\infty \frac{d\Sigma(\mu)}{1+\mu} < \infty.$$

Эта функция $\Sigma(\mu)$ будет спектральной функцией проблемы (2), (2′), а потому совпадает с $\sigma(\mu)$. В результате мы получаем равенство

$$\Phi(u) = \int_0^\infty \frac{1 - \cos(u\sqrt{\mu})}{\mu} d\sigma(\mu),$$

из которого следует, что

$$\int_0^\infty \frac{d\sigma(\mu)}{\mu - \lambda} = -i\sqrt{\lambda}\int_0^\infty e^{i\sqrt{\lambda}u}\Phi(u)\,du.$$

Поэтому

$$f_x(\lambda) - \int_0^\infty \frac{d\sigma(\mu)}{\mu-\lambda} = i\sqrt{\lambda}\int_{2x}^\infty e^{i\sqrt{\lambda}u}\{\Phi(u) - \Phi_x(u)\}\,du.$$

Отсюда для $t \geqslant \varepsilon > 0$

$$\left| f_x(\lambda) - \int_0^\infty \frac{d\sigma(\mu)}{\mu-\lambda}\right| \leqslant C|\sqrt{\lambda}|\,e^{-2xt} \tag{9}$$

Наконец, отметим еще важную формулу *

$$\psi(x,\zeta) = -\int_0^\infty \frac{\varphi(x,\lambda) - \varphi(x,\zeta)}{\lambda - \zeta} d\sigma(\lambda), \tag{10}$$

которая нам понадобится в последнем n^0. Для доказательства этой формулы возьмем выражение

$$s\,\frac{\varphi(x,s^2) - \varphi(x,\zeta)}{s^2 - \zeta},$$

представляющее нечетную целую функцию степени x от s, принадлежащую $L^2(-\infty, \infty)$. По теореме Винер — Палей

$$s\,\frac{\varphi(x,s^2) - \varphi(x,\zeta)}{s^2 - \zeta} = \int_0^x N_\zeta(x,u)\sin(su)\,du,$$

где

$$\int_0^x |N_\zeta(x,u)|^2\,du < \infty.$$

Следовательно,

$$\frac{\varphi(x,\lambda) - \varphi(x,\zeta)}{\lambda - \zeta} = \int_0^x N_\zeta(x,u)\,\frac{\sin(u\sqrt{\lambda})}{\sqrt{\lambda}}\,du$$

* По-видимому, впервые эту формулу получил Б. М. Левитан [8]. Его доказательство отличается от приводимого здесь.

и поэтому при любом $a>0$

$$\int_0^\infty \frac{\varphi(x,\lambda)-\varphi(x,\zeta)}{\lambda-\zeta}\frac{\sin(a\sqrt{\lambda})}{a\sqrt{\lambda}}\,d\sigma(\lambda)=\int_0^x N_\zeta(x,u)\frac{du}{a}\int_0^\infty \frac{\sin(u\sqrt{\lambda})\sin(a\sqrt{\lambda})}{\lambda}\,d\sigma(\lambda)=$$

$$=\int_0^x N_\zeta(x,u)\{\Phi(u+a)-\Phi(u-a)\}\frac{du}{2a}.$$

Принимая, что $a\leqslant x$, найдем, что под знаком последнего интеграла

$$\Phi(u+a)-\Phi(u-a)=\Phi_x(u+a)-\Phi_x(u-a).$$

Следовательно, при $0<a\leqslant x$

$$\int_0^\infty \frac{\varphi(x,\lambda)-\varphi(x,\zeta)}{\lambda-\zeta}\frac{\sin(a\sqrt{\lambda})}{a\sqrt{\lambda}}\,d\sigma(\lambda)=\int_0^\infty \frac{\varphi(x,\lambda)-\varphi(x,\zeta)}{\lambda-\zeta}\frac{\sin(a\sqrt{\lambda})}{a\sqrt{\lambda}}\,d\sigma_x(\lambda).$$

Устремляя a к 0 и используя тот факт, что в точках роста функции $\sigma_x(\lambda)$ функция $\varphi(x,\lambda)$ равна 0, приходим к равенству

$$\int_0^\infty \frac{\varphi(x,\lambda)-\varphi(x,\zeta)}{\lambda-\zeta}\,d\sigma(\lambda)=-\int_0^\infty \frac{\varphi(x,\zeta)}{\lambda-\zeta}\,d\sigma_x(\lambda)=-\psi(x,\zeta),$$

что и требовалось доказать.

3. Теперь обратимся к нашему конкретному случаю обратной задачи, определенному в n° 1. В этом случае нетрудно установить, что

$$\int_0^\infty \frac{d\sigma(\mu)}{\mu-\lambda}\equiv\frac{1}{\pi}\int_E\sqrt{\frac{P(\mu)}{Q(\mu)}}\frac{d\mu}{\mu-\lambda}=\sqrt{-\frac{P(\lambda)}{Q(\lambda)}},$$

где λ пробегает плоскость, разрезанную вдоль отрезков системы E, а радикал $\sqrt{-\frac{P(\lambda)}{Q(\lambda)}}$ выбран так, что он положителен на отрицательной половине вещественной оси. Неравенство (9) теперь принимает вид

$$\left|\frac{\psi(x,\lambda)}{\varphi(x,\lambda)}-\sqrt{-\frac{P(\lambda)}{Q(\lambda)}}\right|\leqslant C\,|\sqrt{\lambda}\,|\,e^{-2xt}. \tag{9'}$$

При $t\geqslant\varepsilon>0$ справедливо также неравенство

$$\left|\frac{\psi(x,\lambda)}{\varphi(x,\lambda)}+\sqrt{-\frac{P(\lambda)}{Q(\lambda)}}\right|\leqslant C\frac{1}{|\sqrt{\lambda}|}. \tag{9''}$$

Перемножая (9′) и (9″), получаем

$$\left|\left[\frac{\psi(x,\lambda)}{\varphi(x,\lambda)}\right]^2+\frac{P(\lambda)}{Q(\lambda)}\right|\leqslant Ce^{-2xt}.$$

Отсюда следует, что при $t\geqslant\varepsilon>0$

$$|P(\lambda)[\varphi(x,\lambda)]^2+Q(\lambda)[\psi(x,\lambda)]^2|\leqslant C\,|Q(\lambda)|. \tag{12}$$

Целая функция от λ

$$P(\lambda)[\varphi(x,\lambda)]^2+Q(\lambda)[\psi(x,\lambda)]^2$$

на концах каждого из интегралов $[\alpha_j,\beta_j]$ принимает значения противоположных знаков. Поэтому она имеет по корню в каждом из этих интервалов. Следовательно, она делится на некоторый многочлен $S(\lambda)$ степени ρ. После деления на модуль этого многочлена неравенство (12) принимает вид

$$\left|\frac{P(\lambda)[\varphi(x,\lambda)]^2+Q(\lambda)[\psi(x,\lambda]^2}{S(\lambda)}\right|\leqslant C\,|\lambda|. \tag{12'}$$

Так как

$$g(s) \equiv \frac{P(\lambda)[\varphi(x,\lambda)]^2 + Q(\lambda)[\psi(x,\lambda)]^2}{S(\lambda)}$$

есть четная функция от s, то неравенство (12′) означает, что

$$|g(s)| \leqslant C|s|^2$$

как при $t \geqslant \varepsilon > 0$, так и при $t \leqslant -\varepsilon$, то есть вне полосы $|\operatorname{Im} s| \leqslant \varepsilon$. А так как $g(s)$ — целая функция конечной степени, то в силу принципа Фрагмена-Линделёфа она может быть только многочленом второй степени от s, а благодаря четности она является линейной функцией от λ:

$$\frac{P(\lambda)[\varphi(x,\lambda)]^2 + Q(\lambda)[\psi(x,\lambda)]^2}{S(\lambda)} = A\lambda + B.$$

Эта функция очевидно вещественна и может быть только константой (то есть $A = 0$), так как вещественные корни левой части возможны только в пустых интервалах $[\alpha_1, \beta_1]$, $[\alpha_2, \beta_2]$, $\ldots$, $[\alpha_\rho, \beta_\rho]$, но число их в каждом из этих интервалов должно быть четным.

Тем самым наша теорема, сформулированная в n^0 1, доказана.

4. Теперь применим к нашему частному случаю общую формулу (10). Принимая вначале, что $\zeta \overline{\in} E$, напишем эту формулу в виде

$$\psi(x,\zeta) = -\frac{1}{\pi}\int_E \sqrt{\frac{P(\lambda)}{Q(\lambda)}}\,\frac{\varphi(x,\lambda)}{\lambda-\zeta}\,d\lambda + \sqrt{-\frac{P(\zeta)}{Q(\zeta)}}\,\varphi(x,\zeta). \tag{10′}$$

Отсюда, делая предельный переход, найдем для почти всех $\mu \in E$

$$\psi(x, \mu + iO) = \frac{1}{\pi}\int_E{}' \sqrt{\frac{P(\lambda)}{Q(\lambda)}}\,\frac{\varphi(x,\lambda)}{\mu-\lambda}\,d\lambda,$$

где штрих означает главное значение в смысле Коши. Таким образом для рассматриваемой нами конкретной спектральной функции

$$\psi(x,\mu) = \frac{1}{\pi}\int_E{}' \sqrt{\frac{P(\lambda)}{Q(\lambda)}}\,\frac{\varphi(x,\lambda)}{\mu-\lambda}\,d\lambda \quad (\mu \in E).$$

С другой стороны, как показано в моей старой статье [4], (теорема 3, стр. 284), справедливо следующее утверждение: *какова бы ни была функция $G(\lambda)$ $(\lambda \in E)$, для которой*

$$\frac{1}{\pi}\int_E \sqrt{\frac{Q(\lambda)}{P(\lambda)}}\,|G(\lambda)|^2\,d\lambda < \infty,$$

уравнение

$$G(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_E{}' \sqrt{\frac{P(\mu)}{Q(\mu)}}\,\frac{F(\mu)}{\lambda-\mu}\,d\mu \tag{13}$$

имеет (почти всюду в E) в существенном одно решение $F(\lambda)$, для которого

$$\frac{1}{\pi}\int_E \sqrt{\frac{P(\lambda)}{Q(\lambda)}}\,|F(\lambda)|^2\,d\lambda < \infty.$$

Это решение дается почти всюду в E формулой

$$F(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_E{}' \sqrt{\frac{Q(\mu)}{P(\mu)}}\,\frac{G(\mu)}{\mu-\lambda}\,d\mu. \tag{13′}$$

При этом

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_E \sqrt{\frac{P(\lambda)}{Q(\lambda)}}\,|F(\lambda)|^2\,d\lambda = \frac{1}{\pi}\int\limits_E \sqrt{\frac{Q(\lambda)}{P(\lambda)}}\,|G(\lambda)|^2\,d\lambda. \tag{14}$$

Пользуясь этим фактом, докажем, что абсолютно непрерывной спектральной функции $\tau(\lambda)$, для которой

$$\tau'(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\omega(\lambda)} & (\lambda \in E) \\ 0 & (\lambda \,\overline{\in}\, E), \end{cases}$$

отвечает то же уравнение Штурма — Лиувилля (2), что и функции $\sigma(\lambda)$, определенной равенствами (1).

Достаточно доказать соотношение Парсеваля

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_E \sqrt{\frac{Q(\mu)}{P(\mu)}}\,|G(\mu)|^2\,d\mu = \int\limits_0^\infty |h(x)|^2\,dx,$$

где

$$G(\mu) = \int\limits_0^\infty h(x)\,\psi(x,\mu)\,dx, \tag{15}$$

а $h(x)$ — произвольная непрерывная финитная функция.

С этой целью возьмем подобную функцию $h(x)$ и положим

$$F(\lambda) = \int\limits_0^\infty h(x)\,\varphi(x,\lambda)\,dx.$$

В таком случае в силу равенства Парсеваля со спектральной функцией $\sigma(\lambda)$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_E \sqrt{\frac{P(\lambda)}{Q(\lambda)}}\,|F(\lambda)|^2\,d\lambda = \int\limits_0^\infty |h(x)|^2\,dx.$$

Для этой функции $F(\lambda)$ введем функцию $G(\lambda)$ по формуле (13). Тогда в силу (14)

$$\int\limits_0^\infty |h(x)|^2\,dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_E \sqrt{\frac{Q(\lambda)}{P(\lambda)}}\,|G(\lambda)|^2\,d\lambda.$$

Теперь остается доказать, что почти всюду в E имеет место равенство (15). Для этого положим вначале, что $\zeta \,\overline{\in}\, E$. Тогда в силу (10′)

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_E \sqrt{\frac{P(\lambda)}{Q(\lambda)}}\,\frac{F(\lambda)}{\zeta-\lambda}\,d\lambda = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty h(x)\,dx \int\limits_E \sqrt{\frac{P(\lambda)}{Q(\lambda)}}\,\frac{\varphi(x,\lambda)}{\zeta-\lambda}\,d\lambda =$$

$$= \int\limits_0^\infty h(x)\,\psi(x,\zeta)\,dx = \sqrt{-\frac{P(\zeta)}{Q(\zeta)}}\int\limits_0^\infty h(x)\,\varphi(x,\zeta)\,dx.$$

Отсюда, делая предельный переход, получим почти всюду в E

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_E{}' \sqrt{\frac{P(\lambda)}{Q(\lambda)}}\,\frac{F(\lambda)}{\mu-\lambda}\,d\lambda - i\sqrt{\frac{P(\mu)}{Q(\mu)}}\,F(\mu) =$$

$$= \int\limits_0^\infty h(x)\,\psi(x,\mu)\,dx - \sqrt{-\frac{P(\mu)}{Q(\mu)}}\int\limits_0^\infty h(x)\,\varphi(x,\mu)\,dx$$

или

$$\frac{1}{\pi}\int_E \sqrt{\frac{P(\lambda)}{Q(\lambda)}}\,\frac{F(\lambda)}{\mu-\lambda}\,d\lambda=\int_0^\infty h(x)\,\psi(x,\mu)\,dx,\quad (\mu\in E),$$

а это и есть равенство (15).

Условимся называть две функции $F(\lambda)$, $G(\lambda)$ $(\lambda\in E)$ сопряженными на E, если они связаны соотношением (13). Из наших рассмотрений вытекает такое

Следствие. Если $F(\lambda)$ и $G(\lambda)$ $(\lambda\in E)$ — пара сопряженных функций на E и если

$$\int_E \sqrt{\frac{P(\lambda)}{Q(\lambda)}}\,|F(\lambda)|^2\,d\lambda<\infty,$$

то $F(\lambda)$, $G(\lambda)$ допускают «параметрическое» представление

$$F(\lambda)=\underset{A\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\int_0^A h(x)\,\varphi(x,\lambda)\,dx\quad (\text{в } L^2_\sigma)$$

$$G(\lambda)=\underset{A\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\int_0^A h(x)\,\psi(x,\lambda)\,dx\quad (\text{в } L^2_\tau),$$

где роль «параметра» играет функция $h(x)\in L^2(0,\infty)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. И. Ахиезер. Континуальные аналоги ортогональных многочленов на системе интервалов. «Докл. АН СССР», 141, № 2 (1961).

2. Н. И. Ахиезер. Об ортогональных многочленах на нескольких интервалах. «Докл. АН СССР», 134, № 1 (1960).

3. Н. И. Ахиезер, Ю. Я. Томчук. К теории ортогональных многочленов на нескольких интервалах. «Докл. АН СССР», 138, № 4 (1961).

4. Н. И. Ахиезер. О некоторых формулах обращения сингулярных интервалов. «Изв АН СССР, серия матем.» 275—290 (1945).

5. И. Кац. Об интегральных представлениях аналитических функций... . «Усп. матем. наук», 69 (1956).

6. М. Г. Крейн. Об одном обобщении исследований Стилтьеса «Докл. АН СССР», 87, № 6 (1952).

7. М. Г. Крейн. О переходной функции одномерной краевой задачи второго порядка. «Докл. АН СССР», 88, № 3 (1953).

8. Б. М. Левитан. Об одной теореме Г. Вейля. «Докл. АН СССР, 82, № 5 (1952).