ЗАПИСКИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА ХАРЬКОВСКОГО ГОСУНИВЕРСИТЕТА имени А. М. ГОРЬКОГО И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXVII. Серия 4 1961

О ГЛАДКОСТИ НЕКОТОРЫХ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ

Н. С. Ландкоф

ВВЕДЕНИЕ

Предметом настоящей статьи являются случайные функции $\psi(x, \omega)$ (ω — точка выборочного пространства Ω), представимые в виде тригонометрического ряда

$$\psi(x, \omega) = \sum_{-\infty}^{\infty} X_n(\omega)\, e^{inx} \tag{0.1}$$

с независимыми случайными коэффициентами $X_n(\omega)$. В работах Пейли, Винера и Зигмунда [1], результаты которых (в той части, которая нас интересует) изложены в известной монографии Пейли и Винера [2], ряд (0. 1) рассматривался при следующих предположениях:

1) $M[X_n] = 0$,

2) $M[|X_n|^2] = \frac{1}{n^2}$,

3) $X_n(\omega)$ распределены по двумерному нормальному симметричному закону.

Основные результаты Пейли, Винера и Зигмунда можно сформулировать в двух предложениях

(L). *При любом положительном* $\lambda < \frac{1}{2}$ *с вероятностью 1 можно утверждать, что* $\psi(x, \omega)$ *принадлежит к классу* $\mathrm{Lip}\,\lambda$, то есть

$$|\psi(x', \omega) - \psi(x'', \omega)| < K\,|x' - x''|^{\lambda}.$$

($\overline{L}$). *При любом* $\lambda > \frac{1}{2}$ *с вероятностью 1 можно утверждать, что* $\psi(x, \omega)$ *ни при каком* x *не удовлетворяет условию Липшица с показателем* λ.

В 1951 г. Хант [3] получил значительные обобщения и уточнения теоремы (L). В частности, он установил, что требование нормального распределения для коэффициентов $X_n(\omega)$ не является существенным для этой теоремы. Приведем одну его теорему, сформулированную нами специально для рядов вида (0. 1).

(H). *Пусть в ряде (0. 1) коэффициенты* $X_n(\omega)$ *независимы,* $M[X_n] = 0$, $M[|X_n|^2] < \infty$ *и при некотором* β, $0 < \beta \leq 1$ *сходится ряд*

$$\sum_{-\infty}^{\infty} M[|X_n|^2]\;|n|^{2\beta}. \tag{0.2}$$

Тогда с вероятностью 1 для всех x

$$|\psi(x+h,\ \omega)-\psi(x,\ \omega)|<Ch^{\beta}\left(\ln\frac{D}{h}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{0.3}$$

где C и D положительные константы, зависящие от ω.

Эта теорема представляет собой, очевидно, существенное усиление теоремы (L).

Усиление же теоремы ($\overline{L}$) является, по-видимому, более трудной задачей. Из других результатов Ханта, содержащихся в той же работе, можно лишь усмотреть, что если $X_n(\omega)$ имеют *нормальное* симметрическое распределение и

$$M[|X_n|^2]>\frac{C}{|n|^{2-2\gamma}},\ C>0,$$

то *при фиксированном x* неравенство (0,3) с вероятностью 1 не будет выполняться при $\beta>\frac{1}{2}-\gamma$. Между тем, в теореме ($\overline{L}$) речь идет о свойстве выборочных функций, имеющем место с вероятностью 1 *для всех x*. Таким образом, этот результат нельзя рассматривать, как обобщение теоремы ($\overline{L}$).

Целью настоящей статьи является обобщение теоремы ($\overline{L}$). Нам удастся получить его, предположив, что коэффициенты $X_n(\omega)$ удовлетворяют следующим условиям:

(S_1). *Случайные величины* $\mathbf{R}X_n(\omega)$, $\mathbf{I}X_n(\omega)$, $n=0,\ \pm1,\ \ldots$ *независимы;*

(S_2). *Все они распределены по устойчивому закону с плотностью*

$$s(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-c|t|^{\alpha}+ixt}\,dt,\ 1<\alpha<2,\ c>0, \tag{0.4}$$

$$(S_3)\qquad M[|\mathbf{R}X_n|^p]=M[|IX_n|^p]=\frac{A}{|n|^p},\quad 1<p<\alpha.$$

При этих предположениях справедлива следующая теорема.

Теорема. *Каково бы ни было число* $\lambda>\frac{1}{\alpha'}$, $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha'}=1$, *функция* $\psi(x,\omega)$ *с вероятностью 1 не удовлетворяет ни в одной точке x условию Липшица с показателем* λ.

Заметим, что для рассматриваемого ряда теорема типа (L), т. е. утверждение о принадлежности $\psi(x,\ \omega)$ с вероятностью 1 классу $\mathrm{Lip}\,\lambda$ при $\lambda<\frac{1}{\alpha'}$, может быть получена из теоремы Ханта (H).

Это делается следующим образом. Положим, для удобства

$$a_0(\omega)=X_0(\omega),\ a_n(\omega)=inX_n(\omega)\,^*. \tag{0.5}$$

Тогда величины $\mathbf{R}a_n(\omega)$, $\mathbf{I}a_n(\omega)$ будут распределены по устойчивому закону (0,4) с одним и тем же параметром c и

$$\psi(x,\ \omega)=a_0+\sum_{-\infty}^{\infty}{}'\frac{a_n}{in}e^{inx}.$$

* Этими обозначениями мы будем пользоваться и в дальнейшем.

Введем «срезанные» коэффициенты

$$a_n^* = \begin{cases} a_n, & \text{если } |a_n| \leqslant M_n, \\ 0 & \text{если } |a_n| > M_n, \end{cases}$$

причем константы M_n выберем так, чтобы сходился ряд

$$\sum_{-\infty}^{\infty} P(a_n \neq a_n^*) = \sum_{-\infty}^{\infty} P(|a_n| > M_n).$$

Так как, в силу условия (S_3)

$$P(|a_n| > M_n) \leqslant P\left(|\mathbf{R}a_n| > \frac{M_n}{\sqrt{2}}\right) + P\left(|\mathbf{I}a_n| > \frac{M_n}{\sqrt{2}}\right) \leqslant 2A\left(\frac{\sqrt{2}}{M_n}\right)^p, \quad p < \alpha,$$

и p можно взять как угодно близко к α, то достаточно положить $M_n = n^{\alpha^{-1}(1+\delta)}$, $\delta > 0$.

Заметим теперь, что случайная функция

$$\psi^*(x, \omega) = a_0^* + \sum_{-\infty}^{\infty}{}' \frac{a_n^*}{in} e^{inx}$$

с вероятностью 1 обладает той же гладкостью, что и $\psi(x, \omega)$. Действительно, взяв $\xi > 0$ и положив

$$E_m = \bigcup_{n=m}^{\infty} \boldsymbol{E}\{a_n(\omega) \neq a_n^*(\omega)\},$$

будем иметь при достаточно большом m

$$P(E_m) \leqslant \sum_{n=m}^{\infty} P(a_n \neq a_n^*) < \varepsilon,$$

и если $\omega \overline{\in} E_m$, то $\psi(x, \omega) - \psi^*(x, \omega)$ есть тригонометрический полином степени меньше m. Следовательно, с вероятностью 1 разность $\psi(x, \omega) - \psi^*(x, \omega)$ является тригонометрическим полиномом.

С другой стороны, функция $\psi^*(x, \omega)$ удовлетворяет условиям теоремы (H) при любом $\beta < \frac{1}{\alpha'}$. В самом деле, при $p < \alpha$

$$M\left[\left|\frac{a_n^*}{in}\right|^2\right] = \frac{1}{n^2} M[|a_n^*|^2] \leqslant \frac{M_n^{2-p}}{n^2} M[|a_n^*|^p] \leqslant A\, n^{\alpha^{-1}(1+\delta)(2-p)-2+2\beta}$$

так что

$$\sum_{-\infty}^{\infty} M\left[\left|\frac{a_n^*}{in}\right|^2\right] \cdot n^{2\beta} \leqslant A \sum_{-\infty}^{\infty}{}' n^{\alpha^{-1}(1+\delta)(2-p)-2+2\beta}.$$

Выбрав $\delta > 0$ достаточно малым, а p достаточно близким к α, убедимся в сходимости ряда при $\beta < \frac{1}{\alpha'}$.

Для доказательства сформулированной выше теоремы, обобщающей теорему $(\bar{L})$, мы будем следовать идее Пейли, Винера и Зигмунда и изучать закон распределения приращения $\psi(x + \delta, \omega) - \psi(x, \omega)$. При этом мы встретимся с одной трудностью, отличающей рассматриваемый случай от случая Пейли, Винера и Зигмунда. Если коэффициенты $X_n(\omega)$ распределены нормально, то $\psi(x, \omega)$ представляет собой периодический процесс Винера, имеющий независимые приращения на неперекрывающихся интервалах, принадлежащих одному периоду. В нашем же случае это будет не так, и нам придется определить многомерный закон распределения системы приращений функции $\psi(x, \omega)$. (§ 2).

§ 1. Закон распределения приращения

Как было показано во введении, $\psi(x, \omega)$ с вероятностью 1 является непрерывной функцией. Исключая множество значений ω нулевой вероятностной меры, будем считать $\psi(x, \omega)$ непрерывной функцией. Ее приращение *) $\psi(x+\delta, \omega)-\psi(x, \omega)$ можно представить в форме

$$\psi(x+\delta, \omega)-\psi(x, \omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_x(t)\, d\psi(t, \omega)=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(t, \omega)\, d D_x(t), \tag{1.1}$$

где

$$D_x(t)=\begin{cases}2\pi \text{ при } x\leqslant t\leqslant x+\delta,\\ 0 \text{ в других точках } [-\pi, \pi].\end{cases}$$

Устойчивый характер закона распределения коэффициентов ряда (0.6) позволит нам найти закон распределения некоторых линейных функционалов вида

$$F[\psi]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\, d\psi(t, \omega) \tag{1.2}$$

и в дальнейшем изучить закон распределения приращения (1.1).

Для наших целей достаточно рассмотреть функции $F(t)$, имеющие ограниченную вариацию и период 2π. В этом случае имеет место следующая лемма.

Лемма 1.1. *Если*

$$F(x)\sim\sum_{-\infty}^{\infty} f_n e^{inx} \tag{1.3}$$

— ряд Фурье функции $F(x)$, то с вероятностью 1

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\, d\psi(t, \omega)=\sum_{-\infty}^{\infty}{}' f_{-n}a_n(\omega) \quad {}^{**}. \tag{1.4}$$

Доказательство. Так как

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\, d\psi(t, \omega)=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(t, \omega)\, dF(t),$$

и ряды Фурье для непрерывных функций и для дифференциалов функций ограниченной вариации входят во взаимно дополнительные (в смысле

---

* Без ограничения общности будем считать, что $-\pi\leqslant x<x+\delta<\pi$.

** Так как все интересующие нас вопросы не связаны с величиной $a_0(\omega)$, то мы будем считать ее равной нулю и в дальнейшем опускать штрих над знаком суммы.

равенства Парсеваля) классы (см. [4], стр. 93) то формула (1.4) имеет место с вероятностью 1, если сумму в правой части понимать в смысле Чезаро. Лемма будет доказана, если мы убедимся в том, что для почти всех ω ряд

$$\sum_{-\infty}^{\infty} f_{-n} a_n(\omega) \tag{1.5}$$

сходится в обычном смысле.

Но это вытекает из известной теоремы о трёх рядах (см., например [6], стр. 105). Действительно, положив

$$y_n(\omega) = \begin{cases} f_{-n} a_n(\omega) & \text{при } \left| f_{-n} a_n(\omega) \right| < c \\ c & \text{при } \left| f_{-n} a_n(\omega) \right| \geqslant c, \end{cases}$$

получим в силу симметричности закона распределения $a_n(\omega)$, что $M[y_n(\omega)] = 0$, и далее

$$\sum_{-\infty}^{\infty} M[y_n^2(\omega)] \leqslant c^{2-p} \sum_{-\infty}^{\infty} M[|y_n(\omega)|^p] \leqslant c^{2-p} \sum_{-\infty}^{\infty} |f_{-n}|^p M|a_n(\omega)|^p] < \infty,$$

так как $f_{-n} = 0\left(\frac{1}{n}\right)$, а $M[|a_n(\omega)|^p] = \text{const}$.

Кроме того,

$$\sum_{-\infty}^{\infty} P\{y_n(\omega) \neq f_{-n} a_n(\omega)\} = \sum_{-\infty}^{\infty} P\left\{|a_n(\omega)| \geqslant \frac{c}{|f_{-n}|}\right\} \leqslant \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{M[|a_n(\omega)|^p] |f_{-n}|^p}{c^p} < \infty$$

и, таким образом, из теоремы о трёх рядах следует, что ряд $\sum_{-\infty}^{\infty} f_{-n} a_n(\omega)$ сходится с вероятностью 1.

С помощью доказанной леммы мы сумеем получить закон распределения некоторых случайных величин вида (1.2).

Теорема 1.2. *Пусть*

$$F(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} f_n e^{inx}$$

— периодическая функция ограниченной вариации, причём либо все f_n вещественны ($F(x)$ — эрмитова функция: $F(-x) = \overline{F(x)}$), либо все f_n чисто мнимые ($F(x)$ — косоэрмитова: $F(-x) = -\overline{F(x)}$). Тогда вещественная и мнимая части случайной величины

$$\boldsymbol{F}[\psi] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t)\, d\psi(t, \omega) \tag{1.2}$$

независимы и распределены по одному и тому же закону с плотностью вероятности

$$W(x) = \frac{1}{\|F\|} s\left(\frac{x}{\|F\|}\right), \tag{1.6}$$

где $s(x)$ определена формулой (0.4), а норма $\|F\|$ — равенством

$$\|F\| = \left(\sum_{-\infty}^{\infty} |F_k|^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}. \tag{1.7}$$

Доказательство. Так как всякая косоэрмитова функция получается из эрмитовой умножением на i, то достаточно доказать теорему, считая $F(x)$ эрмитовой и, следовательно, все коэффициенты Фурье f_k вещественными. Пусть сначала

$$F(x)=\sum_{-n}^{n} f_k e^{ikx}.$$

Тогда

$$\mathbf{F}[\psi]=\sum_{-n}^{n} f_{-k}a_k,$$

$$u(\omega)=\mathbf{RF}[\psi]=\sum_{-n}^{n} f_{-k}\mathbf{R}a_k;\quad v(\omega)=\mathbf{IF}[\psi]=\sum_{-n}^{n} f_{-k}\mathbf{I}a_k.$$

Из предположения (S_1) вытекает независимость $u(\omega)$ и $v(\omega)$, а также отдельных слагаемых, входящих в $u(\omega)$ и $v(\omega)$. Так как случайной величине $f_{-k}\mathbf{R}a_k$ (или $f_{-k}\mathbf{I}a_k$) соответствует характеристическая функция $e^{-c|f_{-k}t|^\alpha}$, то характеристические функции $u(\omega)$ и $v(\omega)$ будут равны

$$\exp\left[-c|t|^\alpha\sum_{-n}^{n}|f_{-k}|^\alpha\right]=\exp\left[-c\|F\|^\alpha|t|^\alpha\right].$$

Следовательно,

$$W(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-c\|F\|^\alpha|t|^\alpha}e^{itx}dt=\frac{1}{\|F\|}s\left(\frac{x}{\|F\|}\right),$$

и для тригонометрического многочлена теорема доказана. В общем случае по лемме 1.1 имеем

$$\mathbf{F}[\psi]=\lim_{n\to\infty}\mathbf{G}_n[\psi],$$

где

$$\mathbf{G}_n[\psi]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sigma_n(t)\,d\psi(t,\omega);\quad \sigma_n(x)=\sum_{-n}^{n} f_k e^{ikx}.$$

Так как сходимость случайных величин $\mathbf{G}_n[\psi]$ к $\mathbf{F}[\psi]$ имеет место для почти всех ω, то отсюда вытекает сходимость $\mathbf{G}_n[\psi]$ к $\mathbf{F}[\psi]$ по вероятности, что в свою очередь (см. [5], стр. 45) влечет за собой сходимость функций распределения. По предыдущему плотность распределения $\mathbf{G}_n[\psi]$ дается формулой

$$W_n(x)=\frac{1}{\|\sigma_n\|}s\left(\frac{x}{\|\sigma_n\|}\right),$$

и остается лишь заметить, что

$$\lim_{n\to\infty}\|\sigma_n\|=\|F\|.$$

Для того, чтобы перейти к приращению (1.1), введём функции

$$\Delta_x(t)=\begin{cases}2\pi, & \text{если } |x|\leqslant|t|\leqslant|x|+\delta,\\ 0 & \text{в остальных точках } [-\pi,\pi].\end{cases}$$

$$\tilde{\Delta}_x(t)=\begin{cases}2\pi, & \text{если } x\leqslant t\leqslant x+\delta,\\ -2\pi, & \text{если } -x-\delta\leqslant t\leqslant -x,\\ 0 & \text{в остальных точках } [-\pi,\pi];\end{cases}\qquad(1.8)$$

и соответствующие им симметрические и кососимметрические приращения $\psi(x, \omega)$:

$$\Delta_x = [\psi(x+\delta, \omega) - \psi(x, \omega)] + [\psi(-x, \omega) - \psi(-x-\delta, \omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Delta_x(t)\, d\psi(t, \omega);$$

$$\tilde{\Delta}_x = [\psi(x+\delta, \omega) - \psi(x, \omega)] - [\psi(-x, \omega) - \psi(-x-\delta, \omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{\Delta}_x(t)\, d\psi(t, \omega).$$

Тогда

$$D_x(t) = \frac{1}{2}\{\Delta_x(t) + \tilde{\Delta}_x(t)\},$$

причём $\Delta_x(t)$ — эрмитова (чётная), а $\tilde{\Delta}_x(t)$ — косоэрмитова (нечётная) функция.

Применяя теорему 1.2, получим, что плотности распределения независимых случайных величин $\mathbf{R}\Delta$ и $\mathbf{I}\Delta$ определяются формулой

$$W_\Delta(x) = \frac{1}{\|\Delta_x(t)\|} s\left(\frac{x}{\|\Delta_x(t)\|}\right), \tag{1.9}$$

плотности распределения $\mathbf{R}\tilde{\Delta}$ и $\mathbf{I}\tilde{\Delta}$ — формулой

$$W'_{\Delta}(x) = \frac{1}{\|\tilde{\Delta}_x(t)\|} s\left(\frac{x}{\|\tilde{\Delta}_x(t)\|}\right). \tag{1.10}$$

Плотность вероятности самого приращения $\psi(x+\delta, \omega) - \psi(x, \omega)$ мы здесь выписывать не будем, поскольку в следующем параграфе, будет решена более общая задача.

Замечание. Нетрудно получить, что при $\delta \to 0$

$$\|\Delta_x(t)\| = 0(\delta^{\frac{1}{\alpha'}}), \quad \|\tilde{\Delta}_x(t)\| = 0(\delta^{\frac{1}{\alpha'}}),$$

и это обстоятельство позволяет, повторяя с некоторыми усложнениями ход доказательства Пейли-Винера ([2], стр. 161), получить теорему типа (L) для $\psi(x, \omega)$.

§ 2. Многомерные распределения, связанные со случайной функцией $\psi(x, \omega)$

Функция $\psi(x, \omega)$, как было указано во введении, в отличие от винеровского процесса не обладает независимыми приращениями. Поэтому для дальнейшего важно рассмотреть многомерный закон распределения системы величин вида $\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\, d\psi(x, \omega)$, где $F(x)$ — эрмитова или косоэрмитова функция. Для этого докажем следующую теорему.

Теорема 2.1. *Пусть даны n эрмитовых функций*

$$F_1(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} f_k^{(1)} e^{ikx}, \ \ldots, \ F_n(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} f_k^{(n)} e^{ikx}$$

($f_k^{(j)}$ — *вещественны*), *и* $\tilde{n}$ *косоэрмитовых функций*

$$\tilde{F}_1(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} i \tilde{f}_k^{(1)} e^{ikx}, \ \ldots, \ \tilde{F}_{(n)}(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} i \tilde{f}_k^{(\tilde{n})} e^{ikx},$$

($\tilde{f}_k^{(j)}$ — *вещественны*) *ограниченной вариации, и все эти* $n+\tilde{n}$ *функций линейно независимы.*

Рассмотрим $(n+\tilde{n})$-*мерный комплексный случайный вектор*

$$\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_1(x)\, d\psi(x, \omega), \ \ldots, \ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(x)\, d\psi(x, \omega), \right.$$

$$\left. \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{F}_1(x)\, d\psi(x, \omega), \ \ldots, \ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{F}_{\tilde{n}}(x)\, d\psi(x, \omega) \right\}$$

положим

$$u_j + iv_j = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_j(x)\, d\psi(x, \omega), \ \tilde{u}_j + i\tilde{v}_j = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{F}_j(x)\, d\psi(x, \omega),$$

и обозначим $W(u_j, v_j, \tilde{u}_j, \tilde{v}_j)$ * *его* $2(n+\tilde{n})$-*мерную плотность. Тогда*

$$W(u_j, v_j, \tilde{u}_j, \tilde{v}_j) = W'(u_j, \tilde{v}_j), \ W''(v_j, \tilde{u}_j), \tag{2.1}$$

где

$$W'(u_j, \tilde{v}_j) = \frac{1}{(2\pi)^{n+\tilde{n}}} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-c \left\| \sum_1^n t_j F_j + \sum_1^{\tilde{n}} t_{n+j} \tilde{F}_j \right\|^{\alpha}} e^{-i \left(\sum_1^n t_j u_j + \sum_1^{\tilde{n}} t_{n+j} \tilde{v}_j \right)} dt_1 \ldots dt_{n+\tilde{n}}, \tag{2.2}$$

$$W''(v_j, \tilde{u}_j) = \frac{1}{(2\pi)^{n+\tilde{n}}} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-c \left\| \sum_1^n t_j F_j - \sum_1^{\tilde{n}} t_{n+j} \tilde{F}_j \right\|^{\alpha}} e^{-i \left(\sum_1^n t_j v_j + \sum_1^{\tilde{n}} t_{n+j} \tilde{u}_j \right)} dt_1 \ldots dt_{n+\tilde{n}}. \tag{2.3}$$

Доказательство. Предположим сначала, что все функции $F_j(x)$, $\tilde{F}_j(x)$ суть тригонометрические полиномы порядка N. Тогда по лемме 1.1

---

* Так для краткости будем писать вместо $W(u_1, v_1, \ldots, u_n, v_n, \tilde{u}_1, \tilde{v}_1, \ldots, \tilde{u}_{\tilde{n}}, \tilde{v}_{\tilde{n}})$.

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_j(x)\,d\psi(x,\ \omega)=\sum_{-N}^{N} f_{-k}^{(j)} a_k;\quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{F}_j(x)\,d\psi(x,\ \omega)=\sum_{-N}^{N} i\,\widetilde{f}_{-k}^{(j)} a_k$$

и

$$u_j=\sum_{-N}^{N} f_{-k}^{(j)}\ \mathbf{R}a_k,\qquad v_j=\sum_{-N}^{N} f_{-k}^{(j)}\ \mathbf{I}a_k,$$

$$\widetilde{u}_j=\sum_{-N}^{N} -\ \widetilde{f}_{-k}^{(j)}\ \mathbf{I}a_k,\qquad \widetilde{v}_j=\sum_{-N}^{N} \widetilde{f}_{-k}^{(j)}\ \mathbf{R}a_k.$$

Это показывает, что в $2(n+\widetilde{n})$-мерном вещественном векторе $(u_j,\ v_j,\ \widetilde{u}_j,\ \widetilde{v}_j)$ компоненты $u_j,\ \widetilde{v}_j$ независимы от компонент $v_j,\ \widetilde{u}_j$. Поэтому достаточно найти $(n+\widetilde{n})$-мерную плотность $W'(u_j,\ \widetilde{v}_j)$ для вектора $(u_j,\ \widetilde{v}_j)$ и $(n+\widetilde{n})$-мерную плотность $W''(v_j,\ \widetilde{u}_j)$ для вектора $(v_j,\ \widetilde{u}_j)$. Представим вектор $(u_j,\ \widetilde{v}_j)$ как сумму $2N+1$ $(n+\widetilde{n})$-мерных независимых векторов

$$\bar{g}_k=\{f_{-k}^{(1)}\mathbf{R}a_k,\quad \ldots,\ f_{-k}^{(n)}\mathbf{R}a_k,\qquad \widetilde{f}_{-k}^{(1)}\ \mathbf{R}a_k,\ \ldots,\ \widetilde{f}_{-k}^{(\widetilde{n})}\mathbf{R}a_k\},$$
$$(k=-N,\ -N+1,\ \ldots,\ N)$$

и запишем характеристическую функцию χ_k вектора g_k. Очевидно,

$$\chi_k(t_1,\ \ldots,\ t_{n+\widetilde{n}})=Me^{i\left(\sum_1^n t_j f_{-k}^{(j)}+\sum_1^{\widetilde{n}} t_{n+j}\widetilde{f}_{-k}^{(j)}\right)\mathbf{R}a_k}=e^{-c\left|\sum_1^n t_j f_{-k}^{(j)}+\sum_1^{\widetilde{n}} t_{n+j}\widetilde{f}_{-k}^{(j)}\right|^\alpha}$$

и поэтому характеристическая функция случайного вектора $(u_j,\widetilde{v}_j)$ есть

$$X(t_1,\ \ldots,\ t_{n+\widetilde{n}})=\prod_{k=-N}^{N}\chi_k(t_1,\ \ldots,\ t_{n+\widetilde{n}})=$$

$$=e^{-c\sum_{k=-N}^{N}\left|\sum_{j=1}^{n} t_j f_{-k}^{(j)}+\sum_{j=1}^{\widetilde{n}} t_{n+j}\widetilde{f}_{-k}^{(j)}\right|^\alpha}=e^{-c\left\|\sum_1^n t_j F_j+\sum_1^{\widetilde{n}} t_{n+j}\widetilde{F}_j\right\|^\alpha}.$$

Это доказывает формулу (2.2). Формула (2.3) проверяется аналогично и таким образом теорема доказана для случая, когда $F_j(x)$, $\widetilde{F}_j(x)$—тригонометрические полиномы.

Предельный переход к любым $F_j(x)$, $\widetilde{F}_j(x)$ ограниченной вариации проводится аналогично тому, как было показано в § 1 при доказательстве теоремы 1.2. Нужно лишь заметить, что в силу линейной независимости функций $F_1,\ \ldots,\ \widetilde{F}_{\widetilde{n}}$ интегралы в формулах (2.2) и (2.3), записанные для отрезков ряда Фурье, будут равномерно сходиться относительно индекса предельного перехода.

Рассмотрим теперь n попарно несовпадающих интервалов $(x_1,\ x_1+\delta_1)$, $\ldots$, $(x_n,\ x_n+\delta_n)$ внутри $(-\pi,\ \pi)$.

Доказанная теорема позволяет без труда найти плотность распределения n-мерного комплексного вектора

$$\{\psi(x_1+\delta_1,\ \omega)-\psi(x_1,\ \omega),\ \ldots,\ \psi(x_n+\delta_n,\ \omega)-\psi(x_n,\ \omega)\}.$$

Положим, в обозначениях § 1,

$$\psi(x_j+\delta_j,\ \omega)-\psi(x_j,\ \omega)=u^{(j)}+iv^{(j)}=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\Delta_{x_j,\,x_{j+\delta_j}}+\widetilde{\Delta}_{x_j,\,x_{j+\delta_j}}\right)=(u_j+\widetilde{u}_j)+i\,(v_j+\widetilde{v}_j).$$

$4n$-мерную плотность вектора $(u_j,\ v_j,\ \widetilde{u}_j,\ \widetilde{v}_j)$ можно записать по формуле (2.1) в виде

$$W(u_j,\ v_j,\ u_j,\ \widetilde{v}_j)=W'(u_j,\widetilde{v}_j)\,W''(v_j,\widetilde{u}_j),$$

причем в (2.2), (2.3) нужно положить $\widetilde{n}=n$ и

$$F_j(x)=\frac{1}{2}\Delta_j(x)=\begin{cases}\pi \text{ при } |x_j|\leqslant|x|\leqslant|x_j|+\delta_j,\\ 0 \text{ в остальных точках } (-\pi,\ \pi);\end{cases}$$

$$\widetilde{F}_j(x)=\frac{1}{2}\widetilde{\Delta}_j(x)=\begin{cases}\pi \text{ при } x_j\leqslant x\leqslant x_j+\delta_j,\\ -\pi \text{ при } -x_j-\delta_j\leqslant x\leqslant -x_j,\\ 0 \text{ в остальных точках } (-\pi,\ \pi).\end{cases}$$

Для искомой $2n$-мерной плотности $W_0(u^{(j)},\ v^{(j)})$ имеем, очевидно,

$$W_0(u^{(j)},\ v^{(j)})=\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty}W(u^{(j)}-s_j,\ v^{(j)}-r_j,\ s_j,\ r_j)\,ds_1\dots ds_n\,dr_1\dots dr_n,$$

откуда без труда получаем окончательную формулу

$$W_0(u^{(j)},\ v^{(j)})=\frac{1}{(2\pi)^{2n}}\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty}e^{-c\left\{\left\|\sum\limits_1^n t_j\Delta_j+\sum\limits_1^n t_{n+j}\widetilde{\Delta}_j\right\|^{\alpha}+\left\|\sum\limits_1^n t_{n+j}\Delta_j-\sum\limits_1^n t_j\widetilde{\Delta}_j\right\|^{\alpha}\right\}}\times$$
$$\times e^{-i\left(\sum\limits_1^n t_j u^{(j)}+\sum\limits_1^n t_{n+j}v^{(j)}\right)}\,dt_1\dots dt_{2n}. \qquad (2.4)$$

§ 3. Доказательство основной теоремы

Теорема 3.1. *Если* $\lambda>\frac{1}{\alpha'}$, *то для почти всех* ω *(т. е. с вероятностью 1)*

$$\varlimsup_{\delta\to 0}\frac{|\psi(x+\delta,\ \omega)-\psi(x,\ \omega)|}{\delta^{\lambda}}=\infty \text{ при любом } x. \qquad (3.1)$$

Доказательство. Пусть при некотором x и ω

$$\varlimsup_{\delta\to 0}\frac{|\psi(x+\delta,\ \omega)-\psi(x,\ \omega)|}{\delta^{\lambda}}<\infty \qquad (3.2)$$

Положив $x=\alpha_0+\frac{\alpha_1}{2}+\dots+\frac{\alpha^n}{2^n}+\dots$ ($\alpha_n=0$ или 1 при $n\geqslant 1$) получаем, что существует такое положительное A, что для любого m

$$\left|\psi(x,\ \omega)-\psi\left(\alpha_0+\frac{\alpha_1}{2}+\dots+\frac{\alpha_m}{2^m},\ \omega\right)\right|<A\cdot 2^{-\lambda m}$$

$$\left|\psi(x,\omega)-\psi\left(\alpha_0+\frac{\alpha_1}{2}+\dots+\frac{\alpha_m+1}{2^m},\ \omega\right)\right|<A2^{-\lambda m}$$

и таким образом,

$$\left|\psi\left(\alpha_0+\frac{\alpha_1}{2}+\ldots+\frac{\alpha_m+1}{2^m},\omega\right)-\psi\left(\alpha_0+\frac{\alpha_1}{2}+\ldots+\frac{\alpha_m}{2^m},\omega\right)\right|<2A.2^{-\lambda m}. \quad (3.4)$$

Следовательно, для всяких x и ω, для которых имеет место (3.2), существует $A>0$ и последовательность вложенных отрезков (цепочка) $I_m=\left|\alpha_0+\frac{\alpha_1}{2}+\ldots+\frac{\alpha_m}{2^m},\alpha_0+\frac{\alpha_1}{2}+\ldots+\frac{\alpha_m+1}{2^m}\right|$ длины 2^{-m}, содержащих x, для каждого из которых справедливо (3.4).

Оценим вероятность одновременного выполнения неравенств (3.4) хотя бы для одной конечной цепочки интервалов $\{I_m\}_{m=q_0+1}^{q}$. Для этого положим в формуле (2.4) $n=q-q_0$. за $\Delta_j(x),\tilde{\Delta}_j(x)$ возьмем функции, относящиеся к отрезку I_{q_0+j} длины 2^{-q_0-j}, и оценим величину W_0.

Введя в $2n$-мерном пространстве $t_1, \ldots, t_{2n}$ сферические координаты $r, \Theta_1, \ldots, \Theta_{2n-1}$, обозначив do элемент площади единичной гиперсферы S_1 и положив

$$\mu(\theta_1, \ldots \theta_{2n-1})=c\left\{\left\|\sum_1^n t_j\tilde{\Delta}_j+\sum_1^n t_{n+j}\tilde{\Delta}_j\right\|^\alpha+\left\|\sum_1^n t_{n+j}\Delta_j-\sum_1^n t_j\tilde{\Delta}_j\right\|^\alpha\right\}_{r=1}$$

получим

$$W_0(u^{(j)}, v^{(j)})\leqslant\frac{1}{(2\pi)^{2n}}\int\limits_{S_1} do\int\limits_0^\infty e^{-\mu(\Theta)r^\alpha}r^{2n-1}\,dr.$$

Для оценки $\mu(\theta)$ воспользуемся теоремой Хаусдорфа — Юнга ([4], стр. 191), согласно которой

$$\left\{\sum_{-\infty}^{\infty}|c_n|^\alpha\right\}^{\frac{1}{\alpha}}\geqslant\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^{\alpha'}dx\right\}^{\frac{1}{\alpha'}}, \quad \left(c_n=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}\,dx\right)$$

при условии конечности левой части. Для функций

$$\sum_1^n t_j\Delta_j(x)+\sum_1^n t_{n+j}\tilde{\Delta}_j(x),\ \sum_1^n t_{n+j}\Delta_j(x)-\sum_1^n t_j\tilde{\Delta}_j(x)$$

это условие, конечно, выполнено, ибо для них $c_n=O\left(\frac{1}{n}\right)$, и поэтому

$$\frac{1}{c}\mu(\theta_1, \ldots, \theta_{2n-1})\geqslant\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_1^n t_j\Delta_j(x)+\sum_1^n t_{n+j}\tilde{\Delta}_j(x)\right|^{\alpha'}dx\right\}^{\frac{\alpha}{\alpha'}}+$$

$$+\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_1^n t_{n+j}\Delta_j(x)-\sum_1^n t_j\tilde{\Delta}_j(x)\right|^{\alpha'}dx\right\}^{\frac{\alpha}{\alpha'}}.$$

Покажем теперь, что при выполнении условия $\sum\limits_1^{2n} t_j^2=1$

$$\begin{aligned}&\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_1^n t_j\Delta_j(x)+\sum_1^n t_{n+j}\tilde{\Delta}_j(x)\right|^{\alpha'}dx>\pi^{\alpha'}n^{1-\frac{\alpha'}{2}}2^{-q},\\ &\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_1^n t_{n+j}\Delta_j(x)-\sum_1^n t_j\tilde{\Delta}_j(x)\right|^{\alpha'}dx>\pi^{\alpha'}n^{1-\frac{\alpha'}{2}}2^{-q}.\end{aligned} \quad (3.5)$$

Будем доказывать первое из неравенств (3.5), так как по существу между ними различия нет. Положив $\sigma_j = t_j + t_{n+j}$, $\delta_j = t_j - t_{n+j}$ и обозначив I'_m интервал, симметрический с I_m относительно точки нуль, получим, в силу определения функций $\Delta_j(x)$, $\widetilde{\Delta}(x)$, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_1^n t_j \Delta_j(x) + \sum_1^n t_{n+j} \widetilde{\Delta}_j(x) \right|^{\alpha'} dx =$$

$$= \int_{I_q} + \int_{I_{q-1}-I_q} + \ldots + \int_{I_{q_0+2}-I_{q_0+1}} + \int_{I'_q} + \int_{I'_{q-1}-I'_q} + \ldots +$$

$$+ \int_{I'_{q_0+2}-I'_{q_0+1}} >$$

$$> (2\pi)^{\alpha'} 2^{-q} \left\{ \left| \sum_1^n \sigma_j \right|^{\alpha'} + \left| \sum_1^{n-1} \sigma_j \right|^{\alpha'} + \ldots + |\sigma_1|^{\alpha'} + \right.$$

$$\left. + \left| \sum_1^n \delta_j \right|^{\alpha'} + \left| \sum_1^{n-1} \delta_j \right|^{\alpha'} + \ldots + |\delta_1|^{\alpha'} \right\}.$$

Заметив, что условие $\sum_1^{2n} t_j^2 = 1$ равносильно $\sum_1^n \sigma_j^2 + \sum_1^n \delta_j^2 = 2$, и таким образом, либо $\sum_1^n \sigma_j^2 \geqslant 1$, либо $\sum_1^n \delta_j^2 \geqslant 1$, мы видим, что достаточно оценить снизу выражение

$$\left| \sum_1^n x_j \right|^{\alpha'} + \left| \sum_1^{n-1} x_j \right|^{\alpha'} + \ldots + |x_1|^{\alpha'}$$

при условии, что $\sum_1^n x_j^2 = 1$.

Неравенство Гёльдера дает

$$\left| \sum_1^n x_j \right|^{\alpha'} + \left| \sum_1^{n-1} x_j \right|^{\alpha'} + \ldots + |x_1|^{\alpha'} \geqslant n^{1-\frac{\alpha'}{2}} \left\{ \left(\sum_1^n x_j \right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\sum_1^{n-1} x_j \right)^2 + \ldots + x_j^2 \right\}^{\frac{\alpha'}{2}}.$$

Если через λ обозначить минимум квадратичной формы

$$\left(\sum_1^n x_j \right)^2 + \left(\sum_1^{n-1} x_j \right)^2 + \ldots + x_1^2$$

при условии $\sum_1^n x_j^2 = 1$, то $\frac{1}{\lambda}$ будет максимумом формы $\sum_1^n x_j^2$ при условии, что $\left(\sum_1^n x_j \right)^2 + \left(\sum_1^{n-1} x_j \right)^2 + \ldots + x_1^2 = 1$.

Положив $y_j = \sum_{i=1}^{j} x_j$, получим, что

$$\frac{1}{\lambda} = \max\,[y_1^2 + (y_2 - y_1)^2 + \ldots + (y_n - y_{n-1})^2]$$

при условии $\sum_1^n y_j^2 = 1$. Отсюда легко следует, что $\frac{1}{\lambda} < 4$, т. е. $\lambda > \frac{1}{4}$. Итак

$$\left|\sum_1^n x_j\right|^{\alpha'} + \left|\sum_1^{n-1} x_j\right|^{\alpha'} + \ldots + |x_1|^{\alpha'} > 2^{-\alpha'} n^{1-\frac{\alpha'}{2}}$$

и, следовательно,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left|\sum_1^n t_j \Delta_j(x) + \sum_1^n t_{n+j} \tilde{\Delta}(x)\right|^{\alpha'} dx > \pi^{\alpha'} n^{1-\frac{\alpha'}{2}} 2^{-q}.$$

Таким образом

$$\mu(\theta_1, \ldots, \theta_{2n-1}) > c_0 n^{\frac{\alpha}{\alpha'} - \frac{1}{2}} \cdot 2^{-\frac{q\alpha}{\alpha'}} > c_1 n^{-\frac{1}{2}} \cdot 2^{-\frac{q\alpha}{\alpha'}},$$

где c_0 и c_1 зависят только от α.

А так как

$$\int_0^\infty e^{-\mu r^\alpha} r^{2n-1} dr = \frac{1}{\alpha} \mu^{-\frac{2n}{\alpha}} \Gamma\left(\frac{2n}{\alpha}\right) = n^{\frac{n}{\alpha}} \Gamma\left(\frac{2n}{\alpha}\right) O\left(2^{\frac{2nq}{\alpha'}}\right),$$

то

$$\begin{gathered} W_0(u^{(j)}, v^{(j)}) \leqslant n^{\frac{n}{\alpha}} \frac{\Gamma\left(\frac{2n}{\alpha}\right)}{(2\pi)^{2n}} \frac{2\pi^n}{\Gamma(n)} O\left(2^{\frac{2nq}{\alpha'}}\right) < \\ < n^{\frac{n}{\alpha}} \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\pi^n} O\left(2^{\frac{2nq}{\alpha'}}\right) = O\left(2^{\frac{2nq}{\alpha'} + 3n \ln n}\right) \end{gathered} \tag{3.6}$$

равномерно по n.

Для вероятности одновременного выполнения $n = q - q_0$ неравенств (3.4) получаем выражение

$$\iint\limits_{|u^{(1)} + iv^{(1)}| < A \cdot 2^{-\lambda(q_0+1)}} du^{(1)} dv^{(1)} \ldots \iint\limits_{|u^{(n)} + iv^{(n)}| < A \cdot 2^{-\lambda q}} W_0(u^{(j)}, v^{(j)})\, du^{(n)} dv^{(n)},$$

которое в силу (3.6) не превосходит

$$\pi^n A^{2n} \cdot 2^{-2\lambda \sum\limits_{k=q_0+1}^{q} k} O\left(2^{\frac{2nq}{\alpha'} + 3n\ln n}\right).$$

Так как всего имеется точно 2^q цепочек вложенных двоичных интервалов $I_{q_0+1} \supset \ldots \supset I_q$, то вероятность существования хотя бы одной такой цепочки, для которой выполнены неравенства (3.4) при $m = q_0 + 1, \ldots, q$, не превосходит

$$\text{Const.}\, 2^q \pi^{q-q_0} A^{2(q-q_0)} \cdot 2^{-\lambda(q+q_0+1)(q-q_0)} \cdot 2^{\frac{2(q-q_0)q}{\alpha'} + 3(q-q_0)\ln(q-q_0)}.$$

Положим $q_0 = \eta q$, $0 < \eta < 1$. Тогда коэффициент при q^2 в показателе написанного выражения будет равен

$$-\lambda(1-\eta^2) + \frac{2}{\alpha'}(1-\eta).$$

Если теперь η выбрать так, чтобы выполнялось неравенство

$$\lambda > \frac{1}{\alpha'} \frac{2}{1+\eta},$$

то выписанный коэффициент будет отрицателен, и оцениваемая вероятность при $q \to \infty$ будет стремиться к нулю.

Поэтому вероятность существования хотя бы одной бесконечной цепочки интервалов $\{I_m\}$, на которых выполнены неравенства (3.4), при фиксированном A равна нулю. Выбирая последовательность чисел A, стремящуюся к ∞, получим, что мера тех значений ω, для которых при каком-либо x имеет место (3.2), равна нулю. Теорема, таким образом, доказана.

ЛИТЕРАТУРА

[1]. Paley, Wiener, Zygmund, Notes of random functions. Math. Zeitschr., 37 (1933), 647—688,

[2]. Paley, Wiener. Fourier transforms in the complex domain. New York, 1934.

[3]. Hunt. Random Fourier transforms, Trans. Amer. Math. Soc., 71 (1951), № 1, 38—69. (Русский перевод в сб. «Математика», 2 : 6, 1958, стр. 87—114).

[4[. Зигмунд. Тригонометрические ряды, ГОНТИ, М., 1939.

[5]. Колмогоров. Основные понятия теории вероятностей. ОНТИ, М.—Л., 1936.

[6] Дуб. Вероятностные процессы. ИЛ, М., 1956.