В. А. МАРЧЕНКО (Харьков)

О ФУНКЦИЯХ, НОРМАЛЬНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО СИММЕТРИЧЕСКОЙ ОПЕРАЦИИ СДВИГА

I. Пусть $f(x)$ — непрерывная комплекснозначная функция, определённая на бесконечном интервале $-\infty < x < \infty$. Обычная операция сдвига T_s (s — действительный параметр) задаётся по формуле

$$T_s f(x) = f(x+s).$$

Функция $f(x)$ называется нормальной, если семейство функций $\{T_s f(x)\}$ $(-\infty < s < \infty)$ компактно в смысле равномерной сходимости на интервале $-\infty < x < \infty$ (везде в дальнейшем компактность будет пониматься в смысле равномерной сходимости на всём интервале $-\infty < x < \infty$).

С. Бохнер доказал следующую теорему, которая даёт очень удобную характеристику почти периодических функций (п. п. функций):

Для того чтобы непрерывная функция $f(x)$ была п. п. функцией необходимо и достаточно, чтобы она была нормальна.[1]

Рассмотрим симметрическую операцию обобщённого сдвига L_s, определённую по формуле

$$L_s f(x) = \frac{1}{2}(T_s + T_{-s}) f(x) = \frac{1}{2}\left[f(x+s) + f(x-s) \right].$$

Назовём функцию $f(x)$ нормальной относительно операции L_s, если семейство функций $\{L_s f(x)\}$ $(-\infty < s < \infty)$ компактно.

В работе[2], посвящённой обобщению операции сдвига, Б. М Левитан доказал, что *равномерно непрерывная чётная функция $f(x)$, нормальная относительно операции L_s, является п. п. функцией.* Но чётными п. п. функциями не исчерпываются все функции, нормальные относительно операции L_s, так как, например, нечётные п. п. функции, согласно теореме Бохнера, нормальны относительно операции T_s и, тем более, относительно операции L_s.

В этой заметке мы дадим полную характеристику функций, нормальных относительно операции L_s, которая вытекает из следующей общей теоремы:

Теорема. *Для того чтобы непрерывная функция $f(x)$ была нормальна относительно операции L_s, необходимо и достаточно, чтобы она имела следующий вид:*

$$f(x) = ax + \varphi(x),$$

где a — некоторая комплексная константа, а $\varphi(x)$ — п. п. функция.

Достаточность. Если $\varphi(x)$ — п. п. функция, то согласно теореме Бохнера она нормальна относительно операции T_s и, тем более, относительно операции L_s. Функция ax вообще не меняется при действии операции L_s, так как

$$L_s ax = aL_s x = a\frac{1}{2}(x+s+x-s) = ax.$$

Значит, ax тоже нормальна относительно операции L_s. Отсюда следует, что функция $f(x)$, равная сумме двух нормальных относительно операции L_s функций, тоже нормальна относительно операции L_s.

Необходимость. Разобьём доказательство необходимости условия теоремы на две части.

В первой части мы докажем, что если непрерывная функция $f(x)$ нормальна относительно операции L_s, то существует такая константа a, что функция

$$\varphi(x) = f(x) - ax$$

ограничена (она, очевидно, тоже нормальна относительно операции L_s).

Во второй части мы докажем, что непрерывная, нормальная относительно операции L_s и ограниченная функция $\varphi(x)$ есть п. п. функция.

1. Заметим, прежде всего, что если функция $f(x)$ нормальна относительно операции L_s, то функция $f(-x)$ тоже нормальна относительно операции L_s. Значит, функцию $f(x)$, нормальную относительно операции L_s, можно представить в виде суммы чётной $f_1(x)$ и нечётной $f_2(x)$ функций:

$$f_1(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}; \quad f_2(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

каждая из которых нормальна относительно операции L_s. Чётная функция $f_1(x)$ ограничена, так как если бы $\lim\limits_{n\to\infty} |f_1(s_n)| = \infty$, то

$$\lim_{n\to\infty} |L_{s_n} f_1(0)| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} |f_1(s_n) + f_1(-s_n)| = \lim_{n\to\infty} |f_1(s_n)| = \infty,$$

что противоречит компактности семейства функций $\{L_{s_n} f_1(x)\}$. Поэтому, если при некотором a функция $f_2(x) - ax$ ограничена, то функция $f(x) - ax$ тоже ограничена.

2. Нечётная, непрерывная и нормальная относительно операции L_s функция $f_2(x)$ равномерно непрерывна. Действительно, в противном случае существовали бы последовательности

$$s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots; \ x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots; \ \lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

и положительное число $\delta > 0$ такие, что

$$|f_2(x_n + s_n) - f_2(s_n - x_n)| > \delta$$

или, учитывая нечётность функции $f_2(x)$,

$$|f_2(x_n + s_n) + f_2(x_n - s_n)| > \delta. \tag{1}$$

Так как семейство функций $\{L_{s_n} f_2(x)\}$ компактно, то существует такая последовательность $\{n_i\}$, такие числа N и s, что если $n_i > N$, то

$$\sup_{-\infty < x < \infty} |L_s f_2(x) - L_{s_{n_i}} f_2(x)| < \frac{1}{4}\delta,$$

т. е. при всех x имеет место неравенство

$$|L_s f_2(x)| > |L_{s_{n_i}} f_2(x)| - \frac{1}{4}\delta.$$

В частности, при $x = x_{n_i}$ отсюда получим

$$|f_2(x_{n_i} + s) + f_2(x_{n_i} - s)| > |f_2(x_{n_i} + s_{n_i}) + f_2(x_{n_i} - s_{n_i})| - \frac{1}{2}\delta,$$

если $n_i > N$. Поэтому, учитывая неравенство (1), имеем

$$\overline{\lim_{n_i\to\infty}} |f_2(x_{n_i}+s)+f_2(x_{n_i}-s)| > \frac{1}{2}\delta.$$

Так как $\lim\limits_{n_i\to\infty} x_{n_i}=0$, а функция $f_2(s)$ непрерывна, то отсюда следует неравенство

$$|f_2(s)+f_2(-s)| > \frac{1}{2}\delta,$$

которое противоречит нечётности функции $f_2(s)$.

3. Пусть $f(x)$ — непрерывная, нормальная относительно операции L_s функция. Рассмотрим семейство функций $\{\psi_x(t)\}$:

$$\psi_x(t) = \frac{1}{2}[f(x+t) - f(-x+t)],$$

зависящих от параметра x $(-\infty < x < \infty)$.

Каждая функция из этого семейства есть п. п. функция от t. Действительно, согласно теореме Бохнера для этого достаточно доказать, что при любом фиксированном $x=x_0$ семейство функций $\{T_s\psi_{x_0}(t)\}$ (s — параметр) компактно. Имеем

$$T_s\psi_{x_0}(t) = \frac{1}{2}[f(x_0+t+s) - f(-x_0+t+s)] =$$
$$= \frac{1}{2}[f(x_0+t+s)+f(x_0+t-s)] - \frac{1}{2}[f(t+s-x_0)+f(t-s+x_0)],$$

т. е.

$$T_s\psi_{x_0}(t) = L_s f(x_0+t) - L_{s-x_0} f(t).$$

Так как функция $f(t)$ нормальна относительно операции L_s, то семейства функций $\{L_s f(x_0+t)\}$ и $\{L_{s-x_0} f(t)\}$ (s — параметр) компактны, откуда следует компактность семейства функций $\{T_s\psi_{x_0}(t)\}$.

Каждой п. п. функции $\psi_x(t)$ соответствует ряд Фурье:

$$\psi_x(t) \sim a_0(x) + a_{\lambda_1}(x)e^{i\lambda_1 t} + \ldots + a_{\lambda_k}(x)e^{i\lambda_k t} + \ldots,$$

где

$$a_\lambda(x) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\psi_x(t)e^{-i\lambda t}dt. \tag{2}$$

4. Пусть функция $f(x)$, фигурирующая в п. 3 (I), есть функция $f_2(x)$. Соответствующее семейство функций обозначим через $\{\psi_x^{(2)}(t)\}$. Так как $f_2(x)$ — нечётная функция, то

$$\psi_x^{(2)}(t) = \frac{1}{2}[f_2(x+t) - f_2(-x+t)] = \frac{1}{2}[f_2(x+t)+f_2(x-t)].$$

Свободный член ряда Фурье функции $\psi_x^{(2)}(t)$ равен

$$a_0^{(2)}(x) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\frac{1}{2}[f_2(x+t)+f_2(x-t)]\,dt,$$

причём, так как функция $f_2(x)$ равномерно непрерывна, то $a_0^{(2)}(x)$ — тоже равномерно непрерывная функция от x $(-\infty < x < \infty)$. Далее,

$$\psi_x^{(2)}(t) = \frac{1}{2}[f_2(x+t)+f_2(x-t)] =$$
$$= -\frac{1}{2}[f_2(-x-t)=f_2(-x+t)] = -\psi_{-x}^{(2)}(t),$$

следовательно,

$$a_0^{(2)}(x) = -a_0^{(2)}(-x).$$

Наконец, имеем

$$\psi_{x+b}^{(2)}(t) + \psi_{x-b}^{(2)}(t) = \frac{1}{2}[f_2(x+b+t)+f_2(x+b-t)+f_2(x-b+t)+f(x-b-t)] = \\ = \psi_x^{(2)}(b+t) + \psi_x^{(2)}(-b+t),$$

что приводит к тождеству

$$a_0^{(2)}(x+b) + a_0^{(2)}(x-b) = 2a_0^{(2)}(x).$$

Непрерывная и нечётная функция $a_0^{(2)}(x)$, удовлетворяющая этому тождеству, имеет следующий вид:

$$a_0^{(2)}(x) = ax,$$

где a — некоторая комплексная константа.

5. Рассмотрим функции $\psi_x^{(2)}(t) - f_2(x)$; согласно п. 3 (I) эти функции являются п. п. функциями от t при каждом фиксированном x.

Свободный член ряда Фурье функции $\psi_x^{(2)}(t) - f_2(x)$ равен

$$ax - f_2(x).$$

Из неравенства Бесселя получим

$$|ax - f_2(x)|^2 \leqslant \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |\psi_x^{(2)}(t) - f_2(x)|^2\,dt.$$

Значит, доказав, что

$$\sup_{\substack{-\infty<x<\infty \\ -\infty<t<\infty}} |\psi_x^{(2)}(t) - f_2(x)| = M < \infty,$$

мы тем самым докажем ограниченность функции $f_2(x) - ax$, откуда, согласно п. 1 (I) следует ограниченность функции $f(x) - ax$.

Пусть последовательности

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots; \quad t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$$

такие, что

$$\lim_{n\to\infty} |\psi_{x_n}^{(2)}(t_n) - f_2(x_n)| = M,$$

т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{2}[f_2(x_n+t_n) + f_2(x_n-t_n)] - f_2(x_n)\right| = M.$$

Семейство функций $\left\{\frac{1}{2}[f_2(x+t_n) + f_2(x-t_n)]\right\}$ компактно. Значит, существует такая последовательность $\{t_{n_i}\}$, такие числа N и s, что

$$\sup_{-\infty<x<\infty} \frac{1}{2}|f_2(x+t_{n_i}) + f_2(x-t_{n_i}) - f_2(x+s) - f_2(x-s)| < 1,$$

если $n_i > N$. В частности, при $x = x_{n_i}$ имеем

$$\left|\left\{\frac{1}{2}[f_2(x_{n_i}+t_{n_i}) + f_2(x_{n_i}-t_{n_i})] - f_2(x_{n_i})\right\} - \right. \\ \left. - \left\{\frac{1}{2}[f_2(x_{n_i}+s) + f_2(x_{n_i}-s)] - f_2(x_{n_i})\right\}\right| < 1,$$

т. е.

$$M = \lim_{n_i\to\infty} \left|\frac{1}{2}[f_2(x_{n_i}+t_{n_i}) + f_2(x_{n_i}-t_{n_i})] - f_2(x_{n_i})\right| < \\ < 1 + \overline{\lim_{n_i\to\infty}} \left|\frac{1}{2}[f_2(x_{n_i}+s) + f_2(x_{n_i}-s)] - f_2(x_{n_i})\right|. \tag{3}$$

Имеем, далее:

$$\frac{1}{2}[f_2(x_{n_i}+s)+f_2(x_{n_i}-s)]-f_2(x_{n_i})=\frac{1}{2}\Big[f_2\Big(\frac{s}{2}+\frac{s}{2}+x_{n_i}\Big)+$$
$$+f_2\Big(\frac{s}{2}-\frac{s}{2}-x_{n_i}\Big)\Big]+\frac{1}{2}\Big[f_2\Big(-\frac{s}{2}-\frac{s}{2}+x_{n_i}\Big)+f_2\Big(-\frac{s}{2}+\frac{s}{2}-x_{n_i}\Big)\Big],$$

т. е.

$$\frac{1}{2}[f_2(x_{n_i}+s)+f_2(x_{n_i}-s)]-f_2(x_{n_i})=L_{x_{n_i}+\frac{s}{2}}f_2\Big(\frac{s}{2}\Big)+L_{x_{n_i}-\frac{s}{2}}f_2\Big(-\frac{s}{2}\Big). \quad (4)$$

Так как семейства функций $\{L_{x_{n_i}+\frac{s}{2}}f_2(x)\}$ и $\{L_{x_{n_i}-\frac{s}{2}}f_2(-x)\}$ компактны, то

$$\left.\begin{aligned}\overline{\lim_{n_i\to\infty}}\Big|L_{x_{n_i}+\frac{s}{2}}f_2\Big(\frac{s}{2}\Big)\Big|=M_1<\infty,\\ \overline{\lim_{n_i\to\infty}}\Big|L_{x_{n_i}-\frac{s}{2}}f_2\Big(-\frac{s}{2}\Big)\Big|=M_2<\infty.\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Сравнивая соотношения (3), (4), (5), получим

$$M<1+M_1+M_2<\infty,$$

и доказательство первой части закончено.

II. 1. В части I мы установили, что функция $\varphi(x)=f(x)-ax$ непрерывна, ограничена и нормальна относительно операции L_s. Согласно п. 3 (I) семейство функций $\{\psi_x(t)\}$

$$\psi_x(t)=\frac{1}{2}[\varphi(x+t)-\varphi(-x+t)]$$

состоит из п. п. функций от t. Найдём коэффициенты Фурье функций $\psi_x(t)$. Согласно (2) имеем

$$a_\lambda(x)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\psi_x(t)e^{-i\lambda t}dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\frac{1}{2}[\varphi(x+t)-\varphi(-x+t)]\,e^{-i\lambda t}dt.$$

Далее

$$\int_{-T}^{T}\varphi(x+t)\,e^{-i\lambda t}dt=e^{i\lambda x}\int_{-T+x}^{T+x}\varphi(u)\,e^{-i\lambda u}du=$$
$$=e^{i\lambda x}\Big[\int_{-T}^{T}+\int_{T}^{T+x}-\int_{-T}^{-T+x}\varphi(u)e^{-i\lambda u}du\Big].$$

Аналогично

$$\int_{-T}^{T}\varphi(-x+t)\,e^{-i\lambda t}dt=e^{-i\lambda x}\Big[\int_{-T}^{T}+\int_{-T-x}^{-T}-\int_{T-x}^{T}\varphi(u)\,e^{-i\lambda u}du\Big].$$

Таким образом имеем

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\psi_x(t)\,e^{-i\lambda t}dt=\lim_{T\to\infty}\Big[\frac{e^{i\lambda x}-e^{-i\lambda x}}{2}\,\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\varphi(u)\,e^{-i\lambda u}du+\frac{1}{2T}\mu_x(T)\Big],$$

где

$$\mu_x(T)=\frac{e^{i\lambda x}}{2}\Big[\int_{T}^{T+x}-\int_{-T}^{-T+x}\varphi(u)\,e^{-i\lambda u}du\Big]-\frac{e^{-i\lambda x}}{2}\Big[\int_{-T-x}^{-T}-\int_{T-x}^{T}\varphi(u)\,e^{-i\lambda u}du\Big].$$

Пусть $\sup\limits_{-\infty<u<\infty} |\varphi(u)| = M$ (согласно I части $M < \infty$); тогда

$$|\mu_x(T)| \leqslant 2|x|M,$$

откуда следует, что $\lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\mu_x(T)$ существует и равен нулю. Поэтому

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \psi_x(t)\, e^{-i\lambda t}dt = \frac{e^{i\lambda x} - e^{-i\lambda x}}{2}\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \varphi(u)\, e^{-i\lambda u}du,$$

и предел справа существует. Введя обозначение

$$a(\lambda) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \varphi(u)\, e^{-i\lambda u}du, \tag{6}$$

получим

$$a_\lambda(x) = ia(\lambda)\sin\lambda x.$$

Поэтому п. п. функциям $\psi_x(t)$ соответствуют следующие ряды Фурье:

$$\psi_x(t) \sim i\sum_{k=1}^{\infty} a(\lambda_k)\sin\lambda_k x\, e^{i\lambda_k t}. \tag{7}$$

2. Рассмотрим функции $L_y\psi_x(t)$:

$$L_y\psi_x(t) = \frac{1}{2}[\psi_x(t+y) + \psi_x(t-y)]$$

(y и x — параметры). Они, очевидно, тоже являются п. п. функциями от t, и согласно (7) им соответствуют следующие ряды Фурье:

$$L_y\psi_x(t) \sim i\sum_{k=1}^{\infty} a(\lambda_k)\sin\lambda_k x\,(e^{i\lambda_k y} + e^{-i\lambda_k y})\,\frac{e^{i\lambda_k t}}{2},$$

т. е.

$$L_y\psi_x(t) \sim i\sum_{k=1}^{\infty} a(\lambda_k)\sin\lambda_k x\cos\lambda_k y e^{i\lambda_k t}. \tag{8}$$

Далее

$$\frac{1}{2}[\psi_x(t+y) + \psi_x(t-y)] =$$

$$= \frac{1}{2}[\varphi(x+t+y) - \varphi(-x+t+y) + \varphi(x+t-y) - \varphi(-x+t-y)] =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}[\varphi(x+t+y) + \varphi(x+t-y)] - \frac{1}{2}[\varphi(-x+t+y) + \varphi(-x+t-y)]\right\},$$

т. е.

$$L_y\psi_x(t) = \frac{1}{2}[L_y\varphi(x+t) - L_y\varphi(-x+t)]. \tag{9}$$

Так как семейство функций $\{L_y\varphi(u)\}$ (y — параметр) компактно, то согласно известной теореме (см.[1], стр. 91, теорему 2) *для любого положительного числа* ε *можно построить конечную* ε-сеть:

$$L_{y_1}\varphi(u),\ L_{y_2}\varphi(u),\ \ldots,\ L_{y_n}\varphi(u),$$

такую, что каково бы ни было y $(-\infty < y < \infty)$, найдётся такое y_i, для которого выполнено неравенство

$$\sup_{-\infty<u<\infty} |L_{y_i}\varphi(u) - L_y\varphi(u)| < \varepsilon.$$

Разобьём весь интервал $-\infty < y < \infty$ на множества $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n$ следующим образом: $y \in \mathfrak{A}_i$, если

$$\sup_{-\infty<u<\infty} |L_{y_i}\varphi(u) - L_y\varphi(u)| < \varepsilon. \tag{10}$$

Пусть $\chi_i(y)$ — характеристическая функция множества $\mathfrak{A}_i$. Так как каждое число из интервала $-\infty < y < \infty$ попадёт хотя бы в одно множество $\mathfrak{A}_i$, то имеет место неравенство

$$\chi_1(y) + \chi_2(y) + \ldots + \chi_n(y) \geqslant 1.$$

Значит,

$$\overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} [\chi_1(y) + \chi_2(y) + \ldots + \chi_n(y)]\, dy \geqslant 1,$$

и хотя бы для одного $i = i_0$

$$\overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \chi_{i_0}(y)\, dy = \delta > 0.$$

Поэтому, если ввести обозначение

$$K(y) = \frac{1}{\delta}\chi_{i_0}(y),$$

то существует такая последовательность $T_1, T_2, \ldots, T_n, \ldots;\ \lim_{n\to\infty} T_n = \infty$, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2T_n} \int_{-T_n}^{T_n} K(y)\, dy = 1. \tag{11}$$

3. Рассмотрим последовательность функций $\psi_n(x;t)$:

$$\psi_n(x;t) = \frac{1}{2T_n} \int_{-T_n}^{T_n} L_y\psi_x(t) K(y)\, dy. \tag{12}$$

Очевидно, функции последовательности $\{\psi_n(x;t)\}$ равностепенно ограничены. Далее, если $E_x(\varepsilon)$ есть множество ε-сдвигов функции $\psi_x(t)$, то при $\tau \in E_x(\varepsilon)$ имеем

$$\sup_{-\infty<t<\infty} |\psi_n(x;t+\tau) - \psi_n(x;t)| \leqslant \sup_{-\infty<t<\infty} \frac{1}{2T_n} \int_{-T_n}^{T_n} |L_y\psi_x(t+\tau) -$$

$$- L_y\psi_x(t)|\, K(y)\, dy \leqslant \sup_{-\infty<t<\infty} \frac{1}{2T_n} \int_{-T_n}^{T_n} \frac{1}{2}[\,|\psi_x(t+y+\tau) - \psi_x(t+y)| +$$

$$+ |\psi_x(t-y+\tau) - \psi_x(t-y)|\,]\, K(y)\, dy \leqslant \varepsilon \frac{1}{2T_n} \int_{-T_n}^{T_n} K(y)\, dy.$$

Поэтому п. п. функции $\psi_n(x;t)$ при фиксированном x образуют равностепенно ограниченную, непрерывную и п. п. последовательность.

В силу известной теоремы (см.[1], стр. 98, теорема 4) отсюда следует, что при каждом фиксированном x последовательность п. п. функций $\{\psi_n(x; t)\}$ компактна.

Диагональным процессом можно выделить из семейства $\{\psi_n(x; t)\}$ последовательность $\{\psi_{n_i}(x; t)\}$ функций, сходящуюся на счётном, всюду плотном в интервале $-\infty < x < \infty$ множестве R к п. п. функциям $\psi(x; t)$ равномерно относительно t при каждом фиксированном $x \in R$.

Из соотношений (8) и (12) следует, что п. п. функции $\psi(x; t)$ $(x \in R)$ имеют следующие ряды Фурье:

$$\psi(x; t) \sim i \sum_{k=1}^{\infty} a(\lambda_k) b(\lambda_k) \sin \lambda_k x e^{i\lambda_k t}, \tag{13}$$

где

$$b(\lambda) = \lim_{n_i \to \infty} \frac{1}{2T_{n_i}} \int_{-T_{n_i}}^{T_{n_i}} \cos \lambda_y K(y)\, dy. \tag{14}$$

Из равенств (6) и (14) согласно неравенству Бесселя следует

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a(\lambda_k)|^2 \leqslant \overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |\varphi(u)|^2 du < \infty;$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b(\lambda_k)|^2 \leqslant \overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |K(y)|^2 dy < \infty.$$

Поэтому ряд, стоящий справа в (13), сходится абсолютно и равномерно относительно x и t, так как

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |a(\lambda_k)||b(\lambda_k)| \leqslant \frac{1}{2}\left[\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |a(\lambda_k)|^2 + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |b(\lambda_k)|^2 \right] < \infty.$$

Таким образом п. п. функции от t $\psi(x; t)$ имеют абсолютно сходящиеся ряды Фурье, откуда следует, что в соответствии с (13) можно поставить знак равенства:

$$\psi(x; t) = i \sum_{k=1}^{\infty} a(\lambda_k) b(\lambda_k) \sin \lambda_k x e^{i\lambda_k t}$$

$(x \in R$, а t — произвольно).

4. Оценим величину $\eta(x; t)$ $(x \in R)$:

$$\eta(x; t) = L_{y_{t_0}} \psi_x(t) - \psi(x; t);$$

согласно (11) и (12) имеем

$$|\eta(x; t)| \leqslant \overline{\lim_{T_{n_i}\to\infty}} \frac{1}{2T_{n_i}} \int_{-T_{n_i}}^{T_{n_i}} |L_{y_{t_0}} \psi_x(t) - L_y \psi_x(t)| K(y)\, dy.$$

Так как $K(y) = \frac{1}{\delta} \chi_{t_0}(y)$, то $K(y) = 0$ при $y \overline{\in} \mathfrak{A}_{t_0}$. Если $y \in \mathfrak{A}_{t_0}$, то согласно (9) имеем

$$|L_{y_{t_0}} \psi_x(t) - L_y \psi_x(t)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}[\,|L_{y_{t_0}} \varphi(x+t) - L_y \varphi(x+t)| + |L_{y_{t_0}} \varphi(-x+t) - L_y \varphi(-x+t)|\,],$$

и согласно (10) отсюда следует

$$\sup_{\substack{-\infty<x<\infty \\ -\infty<t<\infty}} | L_{y_{i_0}} \psi_x(t) - L_y \psi_x(t) | < \varepsilon.$$

Поэтому

$$\sup_{\substack{-\infty<t<\infty \\ x \in R}} |\eta(x; t)| \leqslant \overline{\lim_{T_{n_i} \to \infty}} \frac{1}{2T_{n_i}} \int_{-T_{n_i}}^{T_{n_i}} \varepsilon K(y)\, dy = \varepsilon,$$

т. е.

$$\sup_{\substack{-\infty<t<\infty \\ x \in R}} \left| L y_{i_0} \psi_x(t) - i \sum_{k=1}^{\infty} a(\lambda_k)\, b(\lambda_k) \sin \lambda_k x e^{i\lambda_k t} \right| < \varepsilon. \tag{15}$$

Функции, стоящие в левой части этого неравенства, непрерывны относительно x ($L_{y_{i_0}} \psi_x(t)$ — по условию, а непрерывность функции, определённой рядом $i \sum_{k=1}^{\infty} a(\lambda_k)\, b(\lambda_k) \sin \lambda_k x e^{i\lambda_k t}$, следует из равномерной сходимости этого ряда), множество R всюду плотно в интервале $-\infty < x < \infty$. Поэтому неравенство (15) справедливо для всех x, т. е.

$$\sup_{\substack{-\infty<x<\infty \\ -\infty<t<\infty}} \left| L_{y_{i_0}} \psi_x(t) - i \sum_{k=1}^{\infty} a(\lambda_k)\, b(\lambda_k) \sin \lambda_k x e^{i\lambda_k t} \right| < \varepsilon. \tag{16}$$

5. Положим в неравенстве (16) $x = t = \frac{u}{2}$, тогда

$$\sup_{-\infty<u<\infty} \left| L_{y_{i_0}} \psi_{\frac{u}{2}} \left(\frac{u}{2}\right) - i \sum_{k=1}^{\infty} a(\lambda_k)\, b(\lambda_k) \sin \lambda_k \frac{u}{2} e^{i\lambda_k \frac{u}{2}} \right| < \varepsilon. \tag{17}$$

Далее, согласно (9) имеем

$$L_{y_{i_0}} \psi_x(t) =$$
$$= \frac{1}{4} [\varphi(x + t + y_{i_0}) - \varphi(-x + t + y_{i_0}) + \varphi(x + t - y_{i_0}) - \varphi(-x + t - y_{i_0})],$$

т. е. при

$$x = t = \frac{u}{2}$$

получим

$$L_{y_{i_0}} \psi_{\frac{u}{2}} \left(\frac{u}{2}\right) = \frac{1}{4} [\varphi(u + y_{i_0}) + \varphi(u - y_{i_0}) - \varphi(y_{i_0}) - \varphi(-y_{i_0})]. \tag{18}$$

Функция $\psi(u)$:

$$\psi(u) = \frac{1}{2} [\varphi(y_{i_0}) + \varphi(-y_{i_0})] + 2i \sum_{k=1}^{\infty} a(\lambda_k)\, b(\lambda_k) \sin \frac{\lambda_k u}{2} e^{i\frac{\lambda_k u}{2}}, \tag{19}$$

есть п. п. функция, так как согласно доказанному выше

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a(\lambda_k)|\, |b(\lambda_k)| < \infty.$$

Введем обозначение

$$\delta(u)=\frac{1}{2}\left[\varphi(u+y_{i_0})+\varphi(u-y_{i_0})\right]-\psi(u).$$

Согласно (17), (18), (19) $\sup\limits_{-\infty<u<\infty}|\delta(u)|<2\varepsilon$.

Итак, имеем

$$\frac{1}{2}\left[\varphi(u+y_{i_0})+\varphi(-y_{i_0}+u)\right]=\psi(u)+\delta(u), \tag{20}$$

где $\psi(u)$ — п. п. функция, а $\sup\limits_{-\infty<u<\infty}|\delta(u)|<2\varepsilon$.

С другой стороны, согласно п. 3 (I) функция $\psi_{y_{i_0}}(u)$:

$$\psi_{y_{i_0}}(u)=\frac{1}{2}\left[\varphi(u+y_{i_0})-\varphi(-y_{i_0}+u)\right] \tag{21}$$

есть п. п. функция. Складывая равенства (20) и (21), получим

$$\varphi(u+y_{i_0})=\psi(u)+\psi_{y_{i_0}}(u)+\delta(u),$$

или

$$\varphi(x)=\left[\psi(x-y_{i_0})+\psi_{y_{i_0}}(x-y_{i_0})\right]+\delta(x-y_{i_0}),$$

где

$$\sup_{-\infty<x<\infty}|\delta(x-y_{i_0})|<2\varepsilon.$$

Так как ε — произвольно малое положительное число, а $[\psi(x-y_{i_0})+\psi_{y_{i_0}}(x-y_{i_0})]$ — п. п. функция, то последнее соотношение показывает, что функция $\varphi(x)$ есть предел равномерно сходящейся на интервале $-\infty<x<\infty$ последовательности п. п. функций. Значит, $\varphi(x)$ — тоже п. п. функция, и теорема полностью доказана.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Люстерник, Основные понятия функционального анализа, «Успехи матем. наук», 1936, вып. 1, стр. 99.
2. Б. М. Левитан, Обобщение операции сдвига, «Матем. сборник», т. 17 (59), 1, стр. 30, теорема XII («A generalization of the operation of translation»).

Примечание. В форме, которую мы привели, этот результат содержится в работе Б. М. Левитана, сданной для напечатания в «Матем. сборник».