ЗАПИСКИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА ХАРЬКОВСКОГО ГОСУНИВЕРСИТЕТА имени А. М. ГОРЬКОГО И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXVII. Серия 4 1961

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ПРИНЦИПА ЛОКАЛИЗАЦИИ

Ю. И. Любич

Принципом локализации в теории тригонометрических рядов называют следующее предложение, принадлежащее Риману.

Пусть коэффициенты тригонометрического ряда

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{ikx} \quad (\alpha_0 = 0) \tag{1}$$

стремятся к нулю при $|k| \to \infty$. Если при этом функция

$$E(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_k e^{ikx}}{(ik)^2}$$

линейна в некотором интервале, то ряд (1) в этом интервале сходится к нулю.

Иными словами, если двум рядам вида (1) соответствуют две функции $E_1(x)$ и $E_2(x)$, такие, что $\{E_1(x) - E_2(x)\}'' = 0$ в некотором интервале, то в этом интервале ряды будут равносходящимися. В этом смысле поведение частичных сумм ряда (1) в какой-нибудь точке определяется значениями функции $E''(x)$ в произвольно малой окрестности этой точки.

Естественным обобщением принципа локализации являются тауберовы теоремы Б. М. Левитана [1]—[3], В. А. Марченко [4] и автора [5], [6], выясняющие зависимость асимптотики функции обложения от дифференциальных свойств преобразования Бохнера-Стилтьеса этой функции.

В настоящей заметке устанавливается следующая.

Теорема. *Пусть функция $\alpha(\lambda)$ имеет ограниченную вариацию в каждом конечном интервале и удовлетворяет условию*

$$\alpha_n^*(\lambda) \equiv \overline{\lim_{|a| \to \infty}} \, |a|^{-n} \operatorname*{var}_{a}^{a+\lambda} \{\alpha(\mu)\} < \infty$$

при некотором $n \geqslant 0$. Пусть, далее, преобразование Бохнера-Стилтьеса

$$E_{[n+2]}(x;\ \alpha) = \int\limits_{|\lambda|>1} \frac{e^{i\lambda x} d\alpha(\lambda)}{(i\lambda)^{[n+2]}} + \int\limits_{|\lambda| \leqslant 1} \frac{e^{i\lambda x} - \sum\limits_{j=0}^{[n+1]} \frac{(i\lambda x)^j}{j!}}{(i\lambda)^{[n+2]}} d\alpha(\lambda)$$

принадлежит некоторому классу $D_p(-h, h)$ $(p \geqslant [n+2] - n)$.*

---

* Класс $D_\alpha(a, b)$ ($\alpha \geqslant 0$, a, b — конечные) состоит из всех функций, обладающих в интервале (a, b) производной порядка α (не обязательного целого) в определенном смысле. Точное определение см. в [5] и в [6].

Если ядро $T(N, \lambda)$ типа M соответствует данному n, $m=n$, $k=n+p-[n+2]$, то*

$$\varlimsup_{N\to\infty} \frac{\left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} T(N, \lambda)\, d\alpha(\lambda) - \sum\limits_{j=0}^{[p]-[n+2]} \frac{T^{(j)}(N, 0)\,(-i)^j}{j!} E_{[n+2]}^{([n+2]+j)}(0; \alpha) \right|}{M_{n,\, n+p-[n+2]}} \leqslant$$

$$\leqslant Cp^5 h^{[n+2]-n-p} \alpha_n^*\left(\frac{1}{h}\right).$$

Здесь

$$M_{n,k}(N) = \int\limits_{-\infty}^{0} (1+|\lambda|^n)\,(|d_\lambda T^{(k)}(N, \lambda)| + |d_\lambda \{T(N, -\lambda)\}^k|),$$

$E_{[n+2]}^{([n+2]+j)}(0; \alpha)$ — сумма ряда Фурье функции $E_{[n+2]}^{([n+2]+j)}(x; \alpha)$ в точке $x=0$ и *C — абсолютная константа.*

При целых n, p эта теорема была получена В. А. Марченко [4]. Для доказательства теоремы в общем случае понадобятся некоторые вспомогательные предложения о функциях класса $D_\alpha(a, b)$.

Лемма 1. *Если $f(x) \in D_\alpha(a, b)$* и *$0 \leqslant \beta < \alpha$, то $f(x) \in D_\beta(a, b)$ и производная $f_{[a,b]}^{(\beta)}(x)$ в смысле класса $D_\beta(a, b)$ принадлежит классу $D_{\alpha-\beta}(a', b)$ при любом a', $a < a' < b$. При этом производная порядка $\alpha - \beta$ от $f_{[a,b]}^{(\beta)}(x)$ в классе $D_{\alpha-\beta}(a', b)$ отличается от $f_{[a,b]}^{(\alpha)}(x)$ на функцию, аналитическую в (a', b).*

Лемма 2. *Если α — целое и положительное, то производная порядка $\alpha - \beta$ $(0 \leqslant \beta < \alpha)$ функции, равной $f_{[a,b]}^{(\beta)}(x)$ при $a \leqslant x \leqslant b$ и равной нулю при $x < a$, равна $f^{(\alpha)}(x)$ в интервале (a, b).*

Доказательство этих лемм основано на интегральном представлении функций класса $D_\alpha(a, b)$ (см. [6]).

Перейдем к доказательству сформулированной теоремы.

По лемме 1 функция $E_{[n+2]}(x; \alpha)$ принадлежит классу $D_{[n+2]-n}(-h, h)$. Обозначим через $G(x)$ функцию, равную при $|x| < h$ производной порядка $[n+2]-n$ от $E_{[n+2]}(x; \alpha)$ в классе $D_{[n+2]-n}(-h, h)$ и равную нулю при $|x| \geqslant h$. Из доказательства теоремы 1 статьи [6] ясно, что для любой бесконечно дифференцируемой функции $f(x)$, равной нулю при $|x| \geqslant h$, будет иметь место равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} E_f(\lambda)\, d\alpha(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{(n)}(x)\, G(-x)\, dx,$$

где $E_f(\lambda)$ есть преобразование Фурье функции $f(x)$. Еще раз применяя лемму 1, видим, что функция $G(x)$ принадлежит классу $D_{n+p-[n+2]}(-\varepsilon, \varepsilon)$ при любом ε, $0 < \varepsilon < h$, и ее производная порядка $n+p-[n+2]$ в этом классе отличается от производной порядка p функции $E_{[n+2]}(x; \alpha)$ в классе $D_p(-h, h)$ на функцию, аналитическую в интервале $(-\varepsilon, \varepsilon)$.

Следовательно, здесь выполнены условия теоремы 6 [6] и, значит,

$$\varlimsup_{N\to\infty} \frac{\left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} T(N, \lambda)\, d\alpha(\lambda) - \sum\limits_{j=0}^{[k-n]} \frac{T^{(j)}(N, 0)\,(-i)^j}{j!} G^{(n+j)}(0) \right|}{M_{n,k}(N)} \leqslant C(1+k)^5 h^{-k} \alpha_n^*\left(\frac{1}{h}\right),$$

где $G^{(n+j)}(0)$ — сумма ряда Фурье функции $G^{(n+j)}(x)$ в точке $x=0$. Но согласно лемме 2 при $|x| < h$ имеют место равенства

$$G^{(n+j)}(x) = E_{[n+2]}^{([n+2]+j)}(x) \quad (j = 0, 1, \ldots, [p]-[n+2]).$$

* Определение ядер типа M дано в [6].

Остается заметить, что $1+k<p$ и теорема доказана.

Рассмотрим, в заключение, тот частный случай, когда функция $E_{[n+2]}(x;\ \alpha)$ в некоторой окрестности нуля является полиномом степени, не большей $[n+1]$. Если ядро $T(N,\ \lambda)$ типа M зависит только от отношения $\frac{\lambda}{N}$, то есть

$$T(N,\ \lambda)=T\left(\frac{\lambda}{N}\right)$$

и если оно соответствует данному n, $m=n$, $k\geqslant n$, то в силу доказанной теоремы

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} T\left(\frac{\lambda}{N}\right) d\alpha(\lambda)=O\left(N^{n-k}\right). \tag{2}$$

Если, кроме того, $\alpha_n^*(\lambda)=0$, то

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} T\left(\frac{\lambda}{N}\right) d\alpha(\lambda)=o\left(N^{n-k}\right). \tag{3}$$

Оценки (2), (3) для ядер Рисса

$$T\left(\frac{\lambda}{N}\right)=\begin{cases}\left(1-\dfrac{\lambda^2}{N^2}\right)^k & (|\lambda|\leqslant N)\\ 0 & (|\lambda|>N)\end{cases}$$

были получены при целом n Б. М. Левитаном [3].

Литература

[1]. Б. М. Левитан. Об одной специальной тауберовой теореме. «Изв. АН СССР, сер матем.», 17, (1953), 269—284.

[2]. Б. М. Левитан. О разложении по собственным функциям оператора Лапласа. Матем. сб., 35[77], (1954), 67—316.

[3]. Б. М. Левитан. О разложении по собственным функциям уравнения $\Delta u+\{q(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)-\lambda\}u=0$. «Изв. АН СССР, сер. матем.», 20 (1956), 469—484.

[4]. В. А. Марченко. Теоремы тауберова типа в спектральном анализе дифференциальных операторов. «Изв. АН СССР, сер. матем.», 19 (1955), 381—422.

[5]. Ю. И. Любич. Некоторые тауберовы теоремы для обобщенных преобразований Фурье. «ДАН СССР», 113, № 1 (1957), 32—35.

[6] Ю. И. Любич. Некоторые теоремы тауберова типа для обобщенных преобразований Фурье. «Зап. матем. отд. физ.-мат. ф-та ХГУ и Харьковского матем. об-ва», т. XXVI, сер. IV, 1960.