Кількість елементів множини — основна аксіома комбінаторики.

Григорій Чарльзович Курінний

жовтень, 2010

Зміст

1 Взаємно однозначна відповідність

1.1 Означення відповідності та взаємно-однозначної відповідності

Підмножину декартового добутку множини A на множину B називають відповідністю — відповідністю між елементами множин A та B.

Коли f — відповідність і $(a,b) \in f$, то кажемо, що a знаходиться у відповідності f з b, і, відповідно, b знаходиться у відповідності f з a — є певна симетрія у слововжитку.

> Відповідність C між елементами множин A та B називають взаємно однозначною (або одно-однозначною), коли виконуються дві вимоги:
>
> - для кожного елемента $a \in A$ існує і до того ж єдиний елемент $b \in B$ такий, що $(a,b) \in C$;
> - для кожного елемента $b \in B$ існує і до того ж єдиний елемент $a \in A$ такий, що $(a,b) \in C$;
>
> Синонімом до словосполуки "взаємно однозначна відповідність" є "бієкція".

Менш формально — взаємно однозначна відповідність, між елементами двох множин (можна також казати — між двома множинами) A та B — це розташування всіх елементів із A та B по парах, де перший елемент із пари береться із A, а другий — із B, причому виконуються дві умови:

> 1) кожен елемент із A знаходиться в парі з одним і тільки з одним елементом множини B;
>
> 2) кожен елемент із B знаходиться в парі з одним і тільки з одним елементом множини A.

1.2 Приклади взаємно однозначної відповідності

Нехай

$$A = \{a, b, c\}, \quad B = \{1, 2, 3\}$$

дві множини. Утворивши пари $(a,1), (b,2), (c,3)$, ми одержуємо одно-однозначну відповідність між A та B.

Якщо є декілька студентів і декілька комп'ютерів, причому

- кожен студент сидить за одним комп'ютером;
- вільних комп'ютерів не лишилось;
- перед комп'ютером сидить лише один студент,

то між студентами та комп'ютерам встановлено одно-однозначну відповідність. Множина пар $(x, \ln x), \quad x \in \mathbb{R}^+$ є взаємно однозначною відповідністю між додатніми дійсними числами і всіма дійсними числами.

Коли всі студенти однієї групи мають різні імена, то між студентами та їх іменами встановлено одно-однозначну відповідність.

Автомобілі, що рухаються по місту, мають номери. Причому на різних автомобілях стоять різні номери. Таким чином, між автомобілями, що рухаються по місту, та їх номерами є одно-однозначна відповідність.

Взаємно однозначну відповідність між множинами можна встановлювати і графічно, зобразивши елементи множин на площині і з'єднавши елементи, що утворюють одну пару, лінією. Роз'яснимо сказане прикладом, встановивши одно-однозначну відповідність між множинами A, B, C, D та a, b, c, d:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d] & B \arrow[dr] & C \arrow[dr] & D \arrow[dll] \\
a & b & c & d
\end{tikzcd}$$

Оскільки часто неважливо, яка множина перша, а яка — друга, то стрілочки у графічному зображенні можна замінити на лінії, або замінити на стрілочки протилежного напрямку.

Утворивши пари

$$(n, 2n), \quad n \in \mathbb{N}$$

ми встановлюємо взаємно однозначну відповідність між усіма натуральними числами і парними натуральними числами. Утворивши пари

$$(n, n+2) \quad \text{при} \quad n \in \mathbb{N}, \quad \text{та} \quad (0, 2), \quad (-1, 1),$$

ми одержуємо взаємно однозначну відповідність між множиною натуральних чисел та множиною цілих чисел, що більше -2.

1.3 Канонічні взаємно однозначні відповідності

Один раз вибрані, природні взаємно однозначні відповідності називають канонічними.

Відповідність між іменами студентів в групі та самими студентами є канонічною. При канонічній відповідності між функціями та їх графіками функції відповідає саме її графік.

Канонічні відповідності дозволяють в роботі кажен елемент заміняти для зручності тим елементом, який йому відповідає, не наголошуючи на цьому особливо. Коли в міркуваннях вільно елементи замінюються їх відповідниками при канонічних відповідностях, то кажуть, що міркування ведуться з точністю до цієї відповідності. Звичайна практика — казати, що точка на числовій прямій це дійсне число, хоч тут мається на увазі, що кожному дійсному числу відповідає певна точка числової прямої. Також десятковий запис натурального числа можна назвати числом — така практика не є помилкою чи неточністю, це зручність мови, зручність робти, це прийнята практика. Порівняйте два тексти,

“ Візьмемо число 25“

“ Візьмемо натуральне число, яке має десятковий запис 25“.

Другий текст недоречно обтяжений, хоч в деякому розумінні точніший.

Вільна заміна елементів їх відповідниками вимагає наявності здорового глузду, без якого такі заміни можуть бути вельми сумнівними. Ми кажемо, що $\sin x$ це функція, хоч це тільки ім'я функції; ми показуємо на графік функції і кажемо, що це функція, не дуже переймаючись гризотою щодо коректності сказаного. Така мовна розкутість доречна, коли є здоровий глузд і при цьому ми одержуємо певні зручності (стислість, наприклад).

Григорій є сивим викладачем. Григорій це слово із 8 букв. Отже сивий викладач це слово із 8 букв. Це приклад міркувань, де міркування “з точністю до канонічної відповідності між людьми та їх іменами“ при відсутності здорового глузду приводить до безглуздя.

Підсумуємо: вирази

- елементу a відповідає елемент b при взаємно однозначній відповідності f;
- $(a, b) \in f$, де f — бієкція;
- $a \leftrightarrow b$ при взаємно однозначній відповідності f;
- f взаємно однозначна відповідність і $f(a) = b$;
- f бієкція і $f(a) = b$;

означають одне і те ж. По різному розуміючи в різних місцях міркувань словосполуку “взаємно однозначна відповідність“ ми порушуємо закон тотожності в прийнятних межах.

2 Правило рівності

2.1 Аксіома рівності.

Аксіома рівності: Множини мають одну і ту ж кількість елементів тоді і тільки тоді, коли між ними можна встановити взаємно однозначну відповідність.

Наведену аксіому можна вважати означенням поняття "*множини мають одну і ту ж кількість елементів*".

Зауважимо, що ми не давали точного означення поняття "кількість". Зауважимо також, що популярна література, уникаючи означень та аксіом, називає наведену аксіому (чи означення — залежно від ситуації) "правилом".

2.2 Приклади доведення того, що дві множини мають одну і ту ж кількість елементів

У множині

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

ми можемо розглядати триелементні підмножини (такі, як

$$\{1, 2, 3\}, \quad \{1, 5, 6\}, \quad \{2, 4, 7\}, \quad \{4, 5, 7\}$$

і т.п.) та чотириелементні підмножини (такі як

$$\{1, 2, 3, 4\}, \quad \{2, 4, 6, 7\}$$

і т.п.) . І тих, і других множин досить багато. Ми можемо довести, що кількість множин першого типу і кількість множин другого типу одна і та ж, не знаходячи цих кількостей явно.

Справді, кожній 3-елементній множині $B \subset A$ поставимо у відповідність (з'єднаємо у пару) множину $A \setminus B$. Оскільки множина A має три елементи, то в множині $A \setminus B$ знаходяться решта — 4 елементи. Так парами будуть

$$(\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6, 7\}),$$

$$(\{2, 3, 7\}, \{1, 4, 5, 6\}),$$

$$(\{5, 6, 7\}, \{1, 2, 3, 4\}$$

і т.п.. Тоді кожній 3-елементній множині $C \subset A$ буде відповідати (буде знаходитися з нею в парі) одна і тільки одна 4-елементна множина $A \setminus C$. І для кожної 4-елементної множини C є одна і тільки одна 3-елементна множина (а саме $A \setminus C$), що знаходиться з нею в парі. Таким чином між 3-елементними і 4-елементними підмножинами в A існує взаємно однозначна відповідність. В результаті використання правила рівності одержуємо, що триелементних підмножин в A стільки ж, скільки і 4-елементних. Зауважимо, що ніяких обчислень при цьому ми не вели.

Притуливши пальці лівої руки до пальців правої руки, ми між цими пальцями встановлюємо одно-однозначну відповідність. Тим самим ми без підраховувань доводимо, що на лівій руці стільки ж пальців, скільки і на правій.

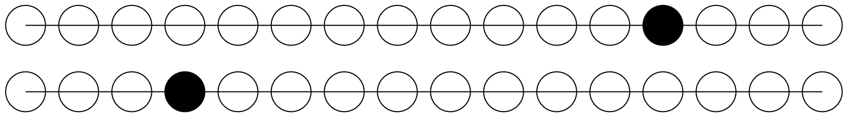


Рис. 1: 16 кіл і відрізок, які відповідають разку намиста, що в свою чергу відповідає сумі $15 = a + b, \quad a < b, \quad a = 3, b = 12$

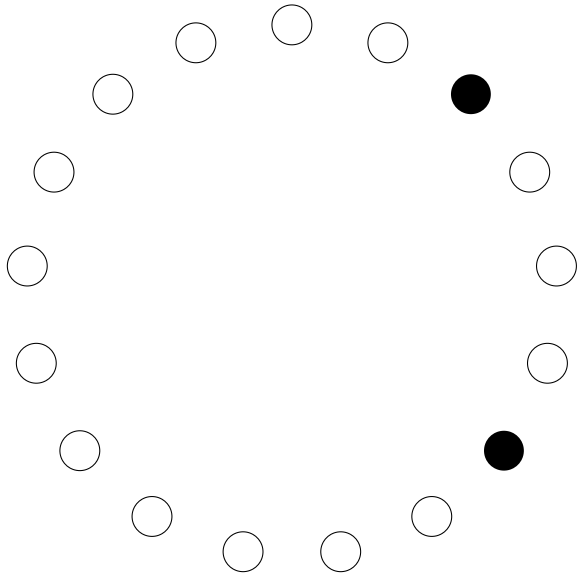


Рис. 2: 17 кіл, які відповідають разку намиста із зв'язаними кінцями, що відповідає сумі $15 = 3 + 12, \quad a = 3, b = 12$

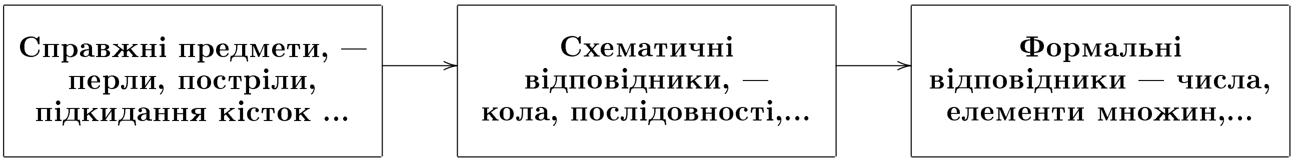
Із 15 однакових перлинок і однієї перлини, що від них відрізняється, можна створити стільки ж разків намиста (з двома кінцями), скільки є способів представити число 15 у вигляді суми двох доданків:

$$15 = a + b, \qquad 0 \leq a \leq b \leq 15, \tag{1}$$

тому що відмінна від інших перлина на разку розділяє 15 однакових перлин на дві частини — меншу (в ній a перлин) та більшу (в ній b перлин) (див рис. 1)

Подібним чином із 15 однакових перлин одного гатунку та 2 перлин другого гатунку можна скласти стільки ж разків намиста із зв'язаними кінцями, скільки є розбиттів (1) числа 15 на два доданки: дві перлини другого гатунку розділяють коло із 15 перлин на дві частини — меншу та більшу (див. рис. 2).

На згаданих рисунках є схематичне (примітивно грубе) зображення намиста із перлів, а відповідна сума - це елемент потрібної множини, кількість елементів в якій ми підраховуємо. Звернемо увагу на звичайну схему розв'язування комбінаторної задачі:



2.3 Модельні задачі, урнові схеми

В комбінаториці задачі, відповіді до яких часто використовують, називають модельними. Такі задачі часто стосуються дуже конкретних речей — шляхів у місті, розташування куль в ящиках (урнах) та подібного. Відповіді до модельних задач називають комбінаторними числами. Те, що певна кількість збігається із комбінаторним числом, доводиться за допомогою правила рівності, тобто встановлюється взаємно однозначна відповідність між предметами, які потрібно перерахувати в задачі, та з предметами, які перераховані в модельній задачі. Після цього стверджують, що відповіддю до нашої задачі є комбінаторне число, тобто відповідь до уже розв'язаної задачі. Зазвичай, розв'язування комбінаторної задачі розбивається на кроки, кожен із яких зводиться до розв'язування модельної задачі.

Модельні задачі грають в комбінаториці ту ж роль що і теореми в інших розділах математики. Такий стан речей незвичний для інших розділів математикки.

Коли всі модельні задачі стосуються розташування куль в урнах, то говорять про урнову схему.

Вибір того чи іншого набору предметів, які будуть підраховуватися (кулі, події, гральні карти, відображення,...) суттєво залежить від смаку викладача. Часто модельні задачі (особливо при обчисленні ймовірностей) стосуються подій, які можуть відбуватися.

3 Кількість і потужність

3.1 Кардинальне число

Замість слова “кількість“ стосовно нескінченних множин вживають слово *“потужність”*. Якщо множини нескінченні і між їх елементами можна встановити вза'ємно однозначну відповідність, то кажуть, що ці *множини мають однакову потужність* або *рівнопотужні* .

Отже множина натуральних чисел рівнопотужна множині натуральних чисел з приєднаними двома елементами 0 та -1 і рівнопотужна множині парних натуральних чисел.

Беруть клас множин, що мають одну і ту ж кількість (чи потужність) елементів. Далі в цьому класі тим чи іншим чином вибирають одну. От оцю множину (або її назву) і називають кількістю елементів кожної множини із вибраного класу. Звичайно, вибір множини є взаємоузгодженим, природним (кому природним, а кому і ні). Так множина пальців на одній руці має стільки ж елементів, що і множина

$$\{0, 1, 2, 3, 4\},$$

яку називають п'ять і позначають 5. Серед нескінченних множин такими еталонними, канонізованими множинами є множина натуральних чисел і множина дійсних чисел. Якщо множина рівнопотужна множині натуральних чисел, то вона зліченна, а якщо множина рівнопотужна множині дійсних чисел, то вона континуальна, або має потужність континуум. Замість кількість (для скінченних множин) та потужність (для нескінченних множин) вживають спільну назву — кардинальне число або кардинал.

Скінченні множини, це ті, які рівнопотужні множині $\{0, 1, 2, \ldots, n$ для деякого натурального n. Також порожню множину називають скінченною. Кількість елементів порожньої множини дорівнює нулю. Ті множини, які не є скінченними, називають нескінченними.

Кількість елементів множини A позначають через $|A|$ та $\mathrm{card}(A)$. Інколи для позначення кількості елементів множини A використовують позначення $\#(A)$.

Потужність елементів зліченної множини $\mathrm{card}(\mathbb{N}) = \omega$, а для континуальної множини $\mathrm{card}(\mathbb{R}) = \aleph^1$.

3.1.1 Порожня множина і нуль

Ми домовились, що кількість це або еталонна множина, або клас усіх множин, що мають одну і ту ж кількість. І ми вибрали перший варіант. Із сказаного випливає, що порожня множина є нулем. Ситуацію потрібно розуміти так. Якщо порожня множина використовуєтсья як еталонна для підраховування кількостей, то вана називається нулем. А якщо порожня множина розглядається в інших ситуаціях, то вона так і називається — порожня множина.

Кажемо, що кількість дійсних розв'язків рівняння $x^2+1 = 0$ є і вона дорівнює нулю, а множина ров'язків є порожньою і елементів в ній немає. Така мовна практика.

3.1.2 Скінченні множини

Уже домовились, що еталонними скінченними множинами є

$$\emptyset = 0, \quad \{0\} = 1, \quad \{0, 1\} = 2, \ldots \{0, 1, \ldots n-1\} = n \ldots$$

[1] Букву $\aleph$ називають алеф, це перша буква семітських алфавітів (фінікійського, єврейського, арабського).

Відповідно, множина скінченна тоді і тільки тоді, коли вона рівнопотужна одній із цих еталонних множин. Існування взаємно однозначної відповідності між заданою множиною і еталонною дозволяє записати елементи заданої множини в послідовність

$$A = \{a_0, a_1, a_2, \dots a_{n-1}\}. \tag{2}$$

Коли $n = 0$, множина A порожня.

Теорема 3.1 *Для будь-якого $n = 0, 1, 2, \dots$ скінченна множина (2) не рівнопотужна своїй власній підмножині.*

Доведення.

Доведення проводимо математичною індукцією за кількістю елементів множини.

База індукції. Порожня множина не має власних підмножин, тому при $n = 0$ теорема правильна.

Між порожньою множиною і заданою непорожньою множиною взаємно однозначної відповідності не може бути, оскільки при взаємно однозначній відповідності елементу непорожньої множини повинен відповідати певний елемент порожньої, якого немає. А оскільки при $n = 1$ множина (2) має єдину власну підмножину — порожню, то і при $n = 1$ множина (2) не може бути рівнопотужною власній підмножині. База індукції проведена.

Індуктивне припущення. Припустимо, нам відомо, що множина $A = \{a_0, a_1, \dots, a_{n-1}\}$ не рівнопотужна ніякій власній підмножині B.

Індуктивний перехід. Використовуємо метод від протилежного. Нехай множина $A' = \{a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n\}$ рівнопотужна власній підмножині $B' \supset A, B' \neq A$. Не втрачаючи загальності ми можемо вважати, що $a_0 \notin B'$. Нехай f — взаємно однозначна відповідність між A' і B'.

Може бути два варіанти — $a_n \notin B'$ і $a_n \in B'$.

Розглянемо перший варіант $a_n \notin B'$. Тоді $a_n, q) \in f$ для деякого $q \in B'$ і $g = f\{(a_n, q)\}$ є взаємно однозначною відповідністю між множиною $A = \{a_0, a_1, \dots, a_{n-1}\} = n$ і її власною підмножиною $B = B' \setminus \{q\}$. Підмножина $B \subset A$ є власною підмножиною, тому що $a_0 \in A, a_0 \notin B$. Така відповідність не може існувати за індуктивним припущенням. Тому лишився другий варіант — $a_n \in B'$.

Нехай $a_n \in B'$. Тоді для деяких $p \in A', q \in B'$ можна записати $(a_n, q), (p, a_n) \in f$. Будуємо нову взаємно однозначну відповідність g, ка складається із пар $(a_n, a_n), (p, q)$ і тих пар (x, y) відповідності f, для яких $x \notin \{a_n, p\}, \quad y \notin \{a_n, q\}$. Тепер третя відповідність $h = g \setminus \{(a_n, a_n)\}$ буде неможливою взаємно однозначною відповідністю між $A = A' \setminus \{a_n\}$ і $B = B' \setminus \{a_n\}$.

Теорема доведена.

■

Ця теорема дає нову характеристику скінченних множин. Оскільки нескінченні множини допускають взамно однозначну відповідність між усією множиною і власною підмножиною, то тепер можна вважати обгрунтованою наступну теорему.

Теорема 3.2 (Визначальна властивість скінченних множин) *Множина скінченна тоді і тільки тоді, коли існує взаємно однозначна відповідність між усією множиною і її власною підмножиною.*

3.2 Властивості бінарного відношення "бути рівнопотужними"

Відношення рівнопотужності рефлексивне, тобто кожна множина A має сама з собою одну і ту ж потужність. Це доводиться встановленням взаємно однозначної відповідності між множиною A і нею ж. Це канонічна взаємно однозначна відповідність id_A, $\mathrm{id}_A(x) = x$.

Відношення рівнопотужності симетричне, тобто коли множина A має ту ж потужність, що і множина B, то множина B має ту ж птужність, що і множина A. Це випливає з того, що коли f — бієкція, то f^{-1} також бієкція.

Відношення рівнопотужності транзитивне, тобто коли множина A рівнопотужна множині B, а множина B рівнопотужна мноині C, то множина A рівнопотужна множині C. Це випливає з того, що добуток бієкцій є бієкцією.

3.3 Відношення порядку на кардиналах

Якщо існує ін'єктивне відображення $f : A \to B$ із множини A в множину B , то кажемо що $|A| \leq |B|$. Із того, що добуток ін'єктивних відображень є ін'єктивним відображенням, випливає транзитивність відношення нестрогого порядку $\leq$, тобто коли $|A| \leq |B|$ і $|B| \leq |C|$, то $|A| \leq |C|$.

Оскільки для кожної підмножини $B \subseteq A$ існує канонічне ін'єктивне відображення $f : B \to A, \quad f(x) = x$, то для кожної підмножини $B \subseteq A$ можна писати $|B| \leq |A|$.

Теорема 3.3 *Відношення $\leq$ антисиметричне в тому розумінні, що коли $|A| \leq |B|$ і $|B| \leq |A|$ тоді $|A| = |B|$.*

Доведення. Припустимо, що $|A| \leq |B|$, $|B| \leq |A|$ і $f : A \to B, \quad g : \to A$ — два ін'єктивні відображення. Наше завдання полягає в побудові бієктивного відображення із B в A.

Спочатку зауважимо, що із того, що f, g — ін'єктивні відображення, випливає, що відображення

$$f : A \to f(A) \subseteq B, \qquad g : B \to g(B) \subseteq A$$

є бієкціями. Отже $|B| = |g(B)|$. Наведене зауваження дозволяє замінити B на $g(B)$ і зразу вважати, що $B \subseteq A$ і $f(A) \subseteq B$. Таким чином ми маємо послідовність

$$A \supseteq B \supseteq f(A) \supseteq f(B) \supseteq f^2(A) \supseteq f^2(B) \supseteq \ldots$$

Перепозначимо множини в одержаній послідовності:

$$A = A_0, B = A_1, f(A) = A_2, f(B) = A_3, \ldots, f^n(A) = A_{2n}, f^n(B) = A_{2n+1}, \ldots$$

В цих позначеннях маємо послідовність

$$A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \ldots, \supseteq A_{2n} \supseteq A_{2n+1} \supseteq \ldots$$

В цій послідовності $f : A_i \to A_{i+2}$ є бієкцією. І в цих позначеннях нам потрібно побудувати бієкцію $v : A_1 \to A_0$.

Для побудови потрібної бієкції вводимо нові підмножини множини A_0:

$$C_0 = A_0 \setminus A_1, \quad C_1 = A_1 \setminus A_2, \ldots C_n = A_n \setminus A_{n+1}, \ldots \qquad D = A_0 \setminus \bigcup_{i=0}^{\infty} C_i.$$

Тепер

$$A_0 = D \cup (C_0 \cup C_1 \cup \ldots), \qquad A_1 = D \cup (C_1 \cup C_2 \cup \ldots)$$

Обмеження відображення f на множину C_i позначимо через u_i. Отже маємо бієкції $u_i : C_i \to C_{i+2}$ при $i = 0, 1, 2, \ldots$ Обернені бієкції $C_{i+2} \to C_i$ позначимо через v_i.

В одержаних позначеннях потрібна бієкція $v : A_1 \to A_0$ може бути задана формулою

$$v(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in D \\ x, & \text{якщо } x \in C_{2k} \\ v_{2k+1}(x), & \text{якщо } x \in C_{2k+3} \end{cases}$$

Доведення теореми завершили.

∎

3.4 Приклади зліченних множин

Щоб довести, що множина зліченна, досить записати всі елементи цієї множини у послідовність $a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$. Тоді $n \to a_n$ буде потрібною взаємно однозначною відповідністю.

Множина цілих чисел зліченна, тому що ми всі цілі числа можемо розташувати у послідовність

$$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \ldots, n, -n, \ldots$$

Множина раціональних чисел зліченна. Раціональні числа — 0 і нескоротні дроби $\frac{p}{q}$, де $p, q \neq 0, \quad p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$, записуємо у послідовність наступним чином. Першим елементом пишемо 0. Потім вводимо поняття висоти числа $\frac{p}{q}$. Висотою цього числа називаємо натуральне число $|p| + q$. У кожного ненульового раціонального числа висота більше або дорівнює 2. Далі виписуємо всі раціональні числа висоти 2, потім висоти 3, потім висоти 4 і т. д. Таким чином ми випишемо всі раціональні числа:

$$0, \frac{1}{1}, -\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, -\frac{1}{2}, -\frac{2}{1}, \ldots$$

Декартів квадрат зліченної множини є зліченно множиною. Справді, нехай A — зліченна множина і її елементи виписані в послідовність

$$A = \{a_1, a_2, \ldots a_n \ldots\}$$

Тепер декартів квадрат A^2 складається із пар (a_i, a_j),де $i, j \in \mathbb{N}$. Пари будемо виписувати в послідовність наступним чином. Спочатку виписуємо ті пари, в яких $i + j = 2$, Далі виписуємо ті пари, в яких $i + j = 3$, потім $i + j = 4$, і т. д. Таким чином ми випишемо всі пари, тобто всі елементи декартового квадрата.

Кожна нескінченна множина містить в собі зліченну підмножину. Справді, нехай A — нескінченна множина. Вона не порожня, тому що порожня множина скінченна. Вибираємо в цій множині елемент і виписуємо його першим у послідовність. Із множини A викидаємо виписаний елемент, і залишилася непорожня множина — інакше множина A була б скінченною. Отже в одержаній після викидання множині можна вибрати один елемент і записати його в послідовність наступним. Із множини A викидаємо виписані елементи, і залишилася непорожня множина — інакше множина A була б скінченною. Отже в одержаній після викидання множині можна вибрати один елемент і записати його в послідовність наступним. І так далі. Процес виписування елементів не закінчиться — інакше множина A буде скінченною. Таким чином, виписані в послідовність елементи утворюють зліченну підмножину множини A.

3.5 Приклади континуальних множин

Континуальна множина це множина, що рівнопотужна одиничному інтервалу

$$\mathcal{I} = (0; 1) = \{x \in \mathbb{R} | 0 < x < 1\}.$$

Уточнення поняття “дійсне число“ залишимо іншим дисциплінам. Будемо користуватися шкільними знаннями та шкільними уявами про нього. Зокрема, будемо користуватися тим, що дійсне число має нескінченний десятковий запис, наприклад,

$$a = 55601,001212050900603450506307503453467\ldots$$

Відповідно, числа із інтервалу $\mathcal{I}$ записуються у вигляді

$$0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots \tag{3}$$

де $a_1, a_2, \dots$ цифри від 0 до 9.

Послідовності (3) назвемо десятковими записами і множину десяткових записів позначимо через $\mathcal{J}$.

Теорема 3.4 *Декартів квадрат $\mathcal{I}^2$ одиничного інтервалу має потужність континуум (є континуальною множиною).*

Доведення. Для доведення потрібно встановити взаємно однозначну відповідність між дійсними числами із інтервла $\mathcal{I}$ і парами таких чисел. Для доведення будуємо три взаємнооднозначні відповідності f, g, h

$$\mathcal{I} \xrightarrow{f} \mathcal{J} \xrightarrow{g} \mathcal{J} \times \mathcal{J} \xrightarrow{h} \mathcal{I} \times \mathcal{I}.$$

І потрібною взаємно однозначною відповідністю буде композиція $h \cdot g \cdot f$.

Числа із інтервала $\mathcal{I}$ розділимо на два типи — до першого віднесемо ті числа, які записати у вигляді

$$\frac{m}{10^n}. \tag{4}$$

при деяких натуральних $m, n \in \mathbb{N}$. До другого віднесемо решту чисел із одиничного інтервала. Таким чином ми представили одиничний інтервал у вигляді $\mathcal{I} = A \cup B$, де A множина чисел першого типу, а B — множина чисел другого типу.

Користуємося як відомим, що числа $x \in B$ мають єдиний десятковий запис — позначимо його через $f(x)$. Так

$$\frac{1}{3} = 0,33333\dots \qquad \sqrt{2} - 1 = 0,414213562\dots$$

Користуємося як відомим, що числа $x \in A$ мають рівно два десяткових записи — в одному починаючи з певного місця стоять виключно нулі, а другому, починаючи з певного місця стоять виключно дев'тки. Так,

$$\frac{12}{100} = 0,120000\dots = 0,1199999\dots$$

Приймемо до уваги, що десяткові записи $0 = 0,00000\dots$ і $1 = 0,99999\dots$ не задають ні одного числа із інтервалу $\mathcal{I}$, а решта записів задають рівно одне дійсне число.

Множина A зліченна — числа, що записуються у вигляді (4), можна записати у послідовність

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\} \tag{5}$$

— спочатку виписати числа, для яких $m+n=2$, потім виписати числа, для яких $m+n=3$, потім виписати числа, для яких $m+n=4$, ... Десятковий запис числа a_i із A, який закінчується нулями, позначимо b_{i1}, а десяковий запис цього числа, який закінчується дев'ятками, позначимо b_{i2}. Таким чином, десякові записи, які не відповідають числам із множини B можна розташувати у послідовність

$$A' = \{0, 1, b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}, b_{31}, b_{32}, \ldots, b_{n1}, b_{n2}, \ldots\} \tag{6}$$

Взаємно однозначна відповідність між елементами A та A' (друга частина взаємно однозначної відповідності f) складається із пар, що стоять у послідовностях (5),(6) на відповідних місцях:

$$(a_1, 0), (a_2, 1), (a_3, b_{11}), (a_4, b_{12}), (a_5, b_{21}) \ldots$$

Ми закінчили створення взаємно однозначної відповідності f між одиничним інтервалом $\mathcal{I}$ і множиною десякових записів $\mathcal{J}$.

Якщо

$$a = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_n \ldots \in \mathcal{J}, \qquad b = 0, b_1 b_2 b_3 \ldots b_n \ldots \in \mathcal{J}$$

— два десяткові записи, то бієкція $g : \mathcal{J} \times \mathcal{J} \to \mathcal{J}$ тавить їм у відповідність запис

$$c = 0, a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3 \ldots a_n b_n \ldots$$

Бієкція g побудована.

Бієкція h, $\mathcal{J} \times \mathcal{J} \xrightarrow{h} \mathcal{I} \times \mathcal{I}$ задамо правилом

$$h((x, y)) = (f^{-1}(x), f^{-1}(y))$$

Побудовою трьох взаємно однозначних відповідностей закінчеється доведення теореми.

■

Теорема 3.5 *Інтервал* $(-\pi/2, \pi/2)$ *рівнопотужний всій дійсній прямій.*

Доведення. Потрібною бієкцією є

$$x \mapsto \operatorname{tg} x.$$

■

Теорема 3.6 *Для будь-яких* $a, b \in \mathbb{R}, \quad a, b > 0$ *інтервали* $A = (0, a)$ *та* $B = (0, b)$ *рівнопотужні.*

Доведення. Потрібна бієкція $A \to B$ встановлюється за допомогою правила

$$x \mapsto x \cdot \frac{b}{a}.$$

■

Теорема 3.7 *Якщо $\mathcal{I} = (0;1)$ і $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ — зліченна множина, $A \cap \mathcal{I} = \emptyset$, то множина $A \cup \mathcal{I}$ континуальна.*

Доведення. Для побудови бієкції $f : A \cup \mathcal{I} \to \mathcal{I}$ виділимо в $\mathcal{I}$ підмножину

$$B = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \ldots \frac{1}{2^n}, \ldots\} \tag{7}$$

Потім випишемо елементи множини $C = A \cup B$ у послідовність

$$C = A \cup B = \{a_1, \frac{1}{2}, a_2, \frac{1}{2^2}, a_3, \frac{1}{2^3}, \ldots a_n, \frac{1}{2^n}, \ldots\} \tag{8}$$

Нехай бієкція f ставить у відповідність $x \in B$, що стоїть на певному місці у послідовності (7), елемент $f(x)$ із C, який стоїть на тому ж місці у послідовності (8). Для решти елементів $x \in \mathcal{I} \setminus B$ нехай $f(x) = x$.

Потрібна бієкція встановлена.

■

Подібним чином до водиться, що об'єднання континуальної множини із скінченною множиною буде континуальною множиною, а об'єднання зліченної множини із скінченною множиною буде зліченною множиною Із сказаного випливає, що будь-який відрізок є континуальним, тобто рівнопотужним одиничному інтервалу.

Теорема 3.8 *Множина натуральних чисел не рівнопотужна інтервалу (0,1).*

Доведення. Теорема доводиться методом від протилежного. Припустимо, що інтервал рівнопотужний $\mathbb{N}$ і всі десяткові записи чисел із одиничного інтервала перенумеровані натуральними числами. Отже записами

$$a_i = 0, a_{i1}a_{i2}a_{i3} \ldots a_{in} \ldots$$

задані всі дійсні числа із інтерала $(0;1)$. Серед виписаних чисел немає числа

$$b = 0, b_1 b_2 \ldots b_n \ldots$$

яке визначене правилом

$$b_n = \begin{cases} 1, & \text{якщо } a_n \neq 1, \\ 2, & \text{якщо } a_n = 1. \end{cases}$$

■

3.6 Нескінченність множини кардиналів.

Теорема 3.9 *Для будь-якої множини A множина $\mathfrak{B}(A)$ всіх підмножин множини A, має більшу потужність ніж A, тобто*

$$|A| \neq |\mathfrak{B}(A)|, \qquad |A| < |\mathfrak{B}(A)| \tag{9}$$

Доведення. Нерівність

$$|A| \leq |\mathfrak{B}(A)|$$

випливає із існування ін'єктивного відображення

$$A \to \mathfrak{B}(A),$$

яке ставить у відповідність кожному елементу із A одноелементну підмножину, яка складається саме з цього елемента.

Ін'єктивне відображення $f : A \to \mathfrak{B}(A)$, не може бути сюр'єктивним,тому що множина M

$$x \in M \Leftrightarrow x \notin f(x).$$

не є образом жодного елемента із A. А раз ін'єктивне відображення $f : A \to \mathfrak{B}(A)$, не може бути сюр'єктивним, то множини A та $\mathfrak{B}(A)$, не рівнопотужні.

Цим закінчується доведення нерівності (9)

■

Література

[1] В.І. Андрійчук, М.Я.Комарницький, Ю.Б. Іщук "Вступ до дискретної математики)" Київ: Центр навчальної літератури 2004.

Покажчик