УДК 539.3:004.94

Геометрически нелинейная решеточная модель консольной балки под действием сосредоточенной силы

Д. Н. Колесник, А. Д. Шамровский

Запорожская государственная инженерная академия, Украина

В данной работе освещен вопрос применения дискретной решетчатой модели разработанной авторами для решения задачи изгиба консольной балки сосредоточенной силой. Рассматривается геометрически нелинейный вариант данной задачи, как с фиксированной силой, так и со следящей силой. Полученные безразмерные перемещения конца балки приведены в табличном виде. Результаты решения задачи сравниваются с результатами, полученными другими авторами.

Ключевые слова: *консольная балка, сосредоточенная сила, геометрическая нелинейность, дискретная модель, решетчатая модель.*

В цій роботі розглянуто питання застосування дискретної гратчастої моделі розробленої авторами для розв'язання задачі згинання консольної балки зосередженою силою. Розглянуто геометрично нелінійний варіант цієї задачі, як з фіксованою силою так і з слідкуючою силою. Отримані безрозмірні результати переміщень кінця балки приведено в табличному виді. Результати розв'язку задачі порівняно з результатами отриманими іншими авторами.

Ключові слова: *консольна балка, зосереджена сила, геометрична не лінійність, дискретна модель, ґратчаста модель.*

The large deflection of a cantilever beam with an arbitrarily directed tip load is considered in this article. The possibility of applying authors' discrete lattice model for solving this kind of problems is regarded in this article. The two types of an arbitrarily directed tip load are observed: vertical tip load and follower tip load. For both of them were obtained dimensionless deflection of the tip what presented in a table form. Figures of load-stiffness parameter as a function of vertical and horizontal tip deflection are also presented. The deflection curves of a cantilever beam discrete model are also plotted. Comparisons of obtained results with results from the literature show that they are accurate.

Key words: *cantilever beam, tip load, geometrical nonlinearity, discrete model, lattice model.*

1. Введение

В настоящее время, с развитием технологий и возрастающей потребностью в разработке оптимальных и легковесных конструкционных решений, остро встает вопрос о применении нелинейной теории для расчета гибких конструкций [1-3].

Геометрически нелинейный анализ гибких балок, являющихся составными частями современных конструкций, представляет собой практический интерес для таких научных и инженерных областей как робототехническая, биомеханическая, авиационная промышленность и другие [1-8].

На данный момент для решения задач прочности и жесткости конструкций используют методы двух типов. Первый — это методы сопротивления материалов и полученные в их развитие методы теории пластин и оболочек [9,10]. Второй — методы математической теории упругости [11]. Эти методы развивались во многом независимо друг от друга и только в XX веке появились

© Колесник Д. Н., Шамровский А. Д., 2013

исследования с целью объединения таких двух разных подходов [10,12]. Несомненным преимуществом подходов первого типа является их высокая практическая направленность [9,10].

Одной из основных задач решаемых методами первого типа является задача об изгибе балки, в частности задача об изгибе консольной балки с сосредоточенной на ее конце силой. Еще Галилей, в своих «Диалогах» [13], рассматривал такую задачу. Неоднократно к этой задаче возвращались такие ученые как Мариотти, Лейбниц, Эйлер, Бернулли, Навье, Сен-Венан, Тимошенко и другие [1,10,12].

Особой проблемой при решении данной задачи является необходимость учета ее нелинейности, проявляемой как в физическом, так и в геометрическом смысле. Для последнего случая, когда отношение высоты балки к ее длине достаточно мало и возможны значительны перемещения без возникновения пластических деформаций, существует аналитическое решение представленное Бишопом и Дракером [14]. Несмотря на это данная задача остается актуальной и поныне, об этом может свидетельствовать множество работ, в которых она рассматривается [1,2,5-8]. Она служит эталоном для проверки новых методов расчета, как аналитических, так и численных, базирующихся на различных подходах, в том числе и основанных на уравнениях теории упругости [2,5-8,15-17].

2. Постановка задачи

В данной работе предлагается для решения задачи о нагрузке консольной балки сосредоточенной на ее конце силой применить разработанную авторами дискретную модель сплошной среды [18]. Особенностью данной дискретной модели является возможность решать геометрически нелинейные задачи.

В частности рассматриваются два случая нагружения: под действием постоянно направленной силы и следящей силы. В обоих случаях проводится сравнение с результатами, полученными численно и аналитически другими авторами [15,17].

Графически, задача изгиба консольной балки сосредоточенной силой, направленной вертикально вниз, представлена на Рис.1.

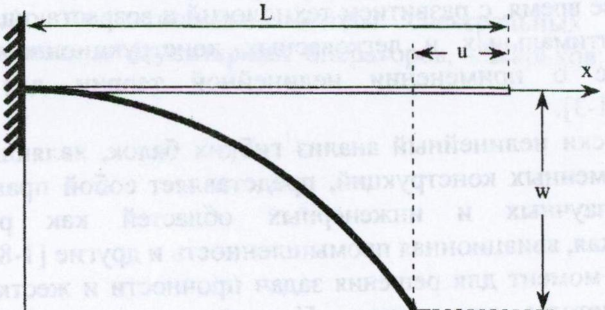

Рис.1. Консольная балка под действием сосредоточенной на ее конце силы с учетом больших перемещений.

Классическое уравнение изгиба балки, даваемое балочной теорией [9], выглядит следующим образом:

$$\frac{d\psi}{ds} = \frac{M}{EI}, \tag{1}$$

где s — координата нейтральной оси балки;
ψ — угол между нормалью к нейтральной оси балки и осью x;
E — модуль упругости материала балки;
I — момент инерции поперечного сечения;
M — величина изгибающего момента.

Уравнение (1) является геометрически линейным, его нелинейный вариант для случая сосредоточенной на конце силы направленной вертикальной вниз выглядит следующим образом [14]:

$$\frac{d^2\psi}{ds^2} = \frac{P}{EI}\cos\psi, \tag{2}$$

где P — величина сосредоточенной силы.

В случае, когда балка нагружена на конце сосредоточенной следящей силой (Рис. 2).

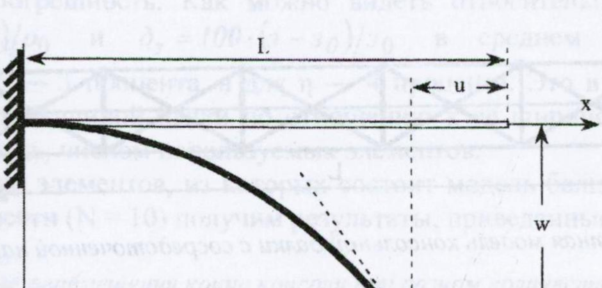

Рис.2. Консольная балка под действием сосредоточенной на ее конце следящей силы с учетом больших перемещений.

Уравнение (2) примет следующий вид [17]:

$$\frac{d^2\psi}{ds^2} = \frac{P}{EI}\left(\sin\zeta\cos\psi + \cos\zeta\cos\psi\right), \tag{3}$$

где ζ — угол между направлением сосредоточенной силы и осью y.

Или же в безразмерном виде [17]:

$$\frac{d^2ш}{d\bar{s}^2} = -A(\sin ж\cos ш + \cos ж\cos ш) , \qquad (4)$$

где $\bar{s} = s/L$, а $A = PL^2/EI$.

Уравнения (2) может быть решено аналитически, как это продемонстрировано в работах [1,6,14] так и численно [15,17]. Уравнения (3) и (4) можно решить численно, что представлены в [17].

Так же описываемые этими уравнениями задачи можно решить с помощью разного рода дискретных подходов, к примеру, методом конечных элементов [16].

3. Метод решения

Для решения данной задачи с помощью предложенного дискретного элемента [18] необходимо вначале построить ее дискретную модель. При этом следует учитывать, что результаты решения данной задачи, даваемые балочной теорией с которыми предполагается сравнение, строятся на идее отсутствия в балке поперечных деформаций. Для того чтобы учесть это в дискретной модели будем использовать только один элемент в ширину и коэффициент Пуассона возьмем равным нулю. На Рис. 3 представлена дискретная модель балки из пяти элементов.

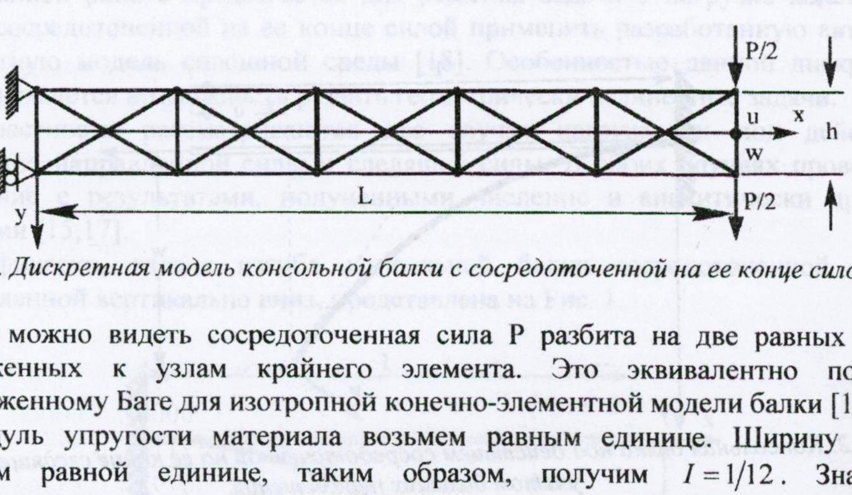

Рис.3. Дискретная модель консольной балки с сосредоточенной на ее конце силой P.

Как можно видеть сосредоточенная сила P разбита на две равных части приложенных к узлам крайнего элемента. Это эквивалентно подходу предложенному Бате для изотропной конечно-элементной модели балки [16].

Модуль упругости материала возьмем равным единице. Ширину балки возьмем равной единице, таким образом, получим $I = 1/12$. Значение коэффициента γ, используемого в методе последовательных перемещений, возьмем равным 0,1. Точность вычислений зададим равной 10e-8.

Число используемых элементов — N, величину прикладываемой сосредоточенной силы — P, а так же длину балки — L, будем варьировать. Результаты приведем к безразмерному виду по аналогии с аналитическим решением [17], таким образом, что $о = w/L$ и $з = (L-u)/L$.

Силу P будем изменять таким образом, что бы $A = PL^2/EI$ изменялось от нуля до десяти с шагом один, то есть $P = A \cdot EI/L^2$, где $A = 1,2 \ldots ,10$.

4. Полученные результаты. Сила направлена вертикально вниз

Таким образом, для балки длиной 10 м. (L = 10 м.) моделируемой тремя элементами (N = 3) получим результаты, представленные в таблице 1.

Табл.1. Сравнение дискретных и аналитических перемещений конца консоли.

A	Аналитическое [15]		Дискретное, N = 3, L = 10 м.			
	ξ_0	η_0	ξ	δ_ξ, %	η	δ_η, %
0	0,00000	1,00000	0,00000	0,00000	1,00000	0,00000
1	0,30172	0,94357	0,29905	0,88389	0,94578	0,23437
2	0,49346	0,83936	0,49892	1,10551	0,83949	0,01513
3	0,60325	0,74558	0,61715	2,30396	0,73923	0,85110
4	0,66996	0,67106	0,68988	2,97348	0,65764	2,00054
5	0,71379	0,61237	0,73794	3,38332	0,59256	3,23455
6	0,74457	0,56541	0,77189	3,66987	0,54007	4,48180
7	0,76737	0,52707	0,79726	3,89555	0,49693	5,71845
8	0,78498	0,49517	0,81710	4,09120	0,46081	6,93998
9	0,79906	0,46818	0,83318	4,26946	0,43003	8,14767
10	0,81061	0,44500	0,84660	4,44042	0,40343	9,34240

Так же в таблице 1 приведены результаты решения данной задачи, полученные Маттиассоном [15]. Для полученных результатов вычислена относительная погрешность. Как можно видеть относительная погрешность $\partial_o = 100 \cdot (o - o_0)/o_0$ и $\partial_з = 100 \cdot (з - з_0)/з_0$ в среднем приблизительно составляет для ξ — 3 процента, а для η — 4 процента. Это в первую очередь обусловлено малой длиной балки по отношению к ее ширине, а так же, не в последнюю очередь, числом используемых элементов.

Повысив число элементов, из которых состоит модель балки с L = 10 м. до пяти (N = 5) и десяти (N = 10) получим результаты, приведенные в таблице 2.

Табл.2. Дискретные перемещения конца консоли при разном количестве элементов.

A	Дискретное, N=5, L=10 м.				Дискретное, N=10, L=10 м.			
	ξ	δ_ξ, %	η	δ_η, %	ξ	δ_ξ, %	η	δ_η, %
0	0,00000	0,00000	1,00000	0,00000	0,00000	0,00000	1,00000	0,00000
1	0,30177	0,01677	0,94422	0,06891	0,30284	0,37111	0,94360	0,00272
2	0,49739	0,79737	0,83888	0,05764	0,49676	0,66793	0,83865	0,08422
3	0,61096	1,27829	0,74248	0,41543	0,60849	0,86858	0,74375	0,24561
4	0,68052	1,57584	0,66525	0,86640	0,67678	1,01844	0,66815	0,43383
5	0,72655	1,78761	0,60416	1,34108	0,72196	1,14415	0,60855	0,62391
6	0,75918	1,96172	0,55513	1,81879	0,75395	1,26000	0,56083	0,81053
7	0,78363	2,11877	0,51498	2,29379	0,77789	1,37118	0,52184	0,99190
8	0,80279	2,26936	0,48147	2,76749	0,79661	1,48101	0,48938	1,16926
9	0,81837	2,41598	0,45300	3,24242	0,81175	1,58852	0,46189	1,34379
10	0,83139	2,56344	0,42845	3,71910	0,82436	1,69679	0,43826	1,51421

Как можно видеть точность результатов возросла. Об этом свидетельствует уменьшение относительной погрешности, в среднем, приблизительно до 1,7 процента при N = 5 и 1 процента при N = 10.

Графически деформация балки, в безразмерной форме, представлена на рис. 4.

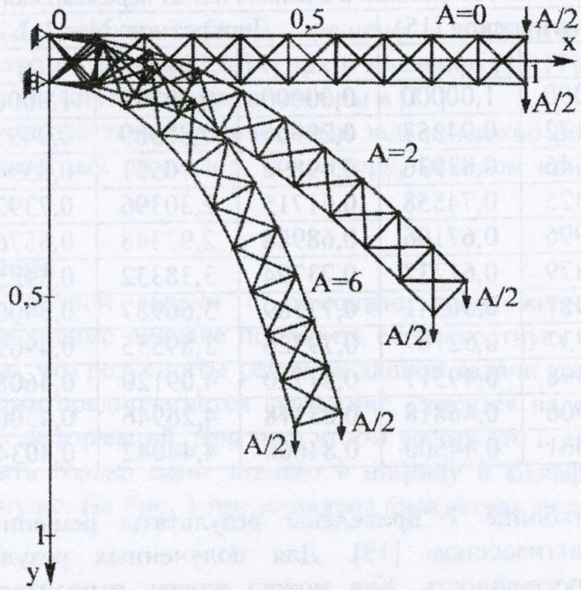

Рис.4. Формы изгиба консольной балки для разных величин сосредоточенной силы А, в безразмерном виде.

В свою очередь увеличение горизонтальных размеров элементов и соответственно рост общей длины балки приводит к еще большему увеличению точности (Таблица 3).

Табл.3. Дискретные перемещения конца консоли для балок разной длины.

A	Дискретное, N=10, L=20 м.				Дискретное, N=10, L=40 м.			
	ξ	δ_ξ, %	η	δ_η, %	ξ	δ_ξ, %	η	δ_η, %
0	0,00000	0,00000	1,00000	0,00000	0,00000	0,00000	1,00000	0,00000
1	0,30097	0,24942	0,94402	0,04787	0,29822	1,15964	0,94499	0,15037
2	0,49386	0,08044	0,83966	0,03556	0,49136	0,42575	0,84116	0,21485
3	0,60471	0,24166	0,74529	0,03867	0,60234	0,15064	0,74708	0,20076
4	0,67226	0,34375	0,67006	0,14913	0,67015	0,02814	0,67174	0,10134
5	0,71671	0,40948	0,61076	0,26334	0,71467	0,12288	0,61236	0,00237
6	0,74799	0,45927	0,56328	0,37598	0,74591	0,18040	0,56483	0,10237
7	0,77122	0,50114	0,52451	0,48513	0,76906	0,21975	0,52603	0,19760
8	0,78922	0,53979	0,49224	0,59158	0,78694	0,25025	0,49374	0,28928
9	0,80365	0,57504	0,46492	0,69607	0,80125	0,27404	0,46641	0,37836
10	0,81556	0,61040	0,44145	0,79692	0,81301	0,29582	0,44294	0,46326

Как можно видеть из Таблицы 3 увеличение длины балки до 20 м. привело к уменьшению относительной погрешности в среднем до 0,38 процента при этом увеличение длины балки до 40 м. уменьшило ее до 0,26 процента. Дальнейшее увеличение длины балки будет приводить еще к большему уменьшению отличия дискретных результатов от аналитических, для высоких значений нагрузок.

Если графически отобразить зависимость величины безразмерных перемещений ξ и η от величины безразмерной нагрузки A, то можно построить график изображенный на Рис. 5.

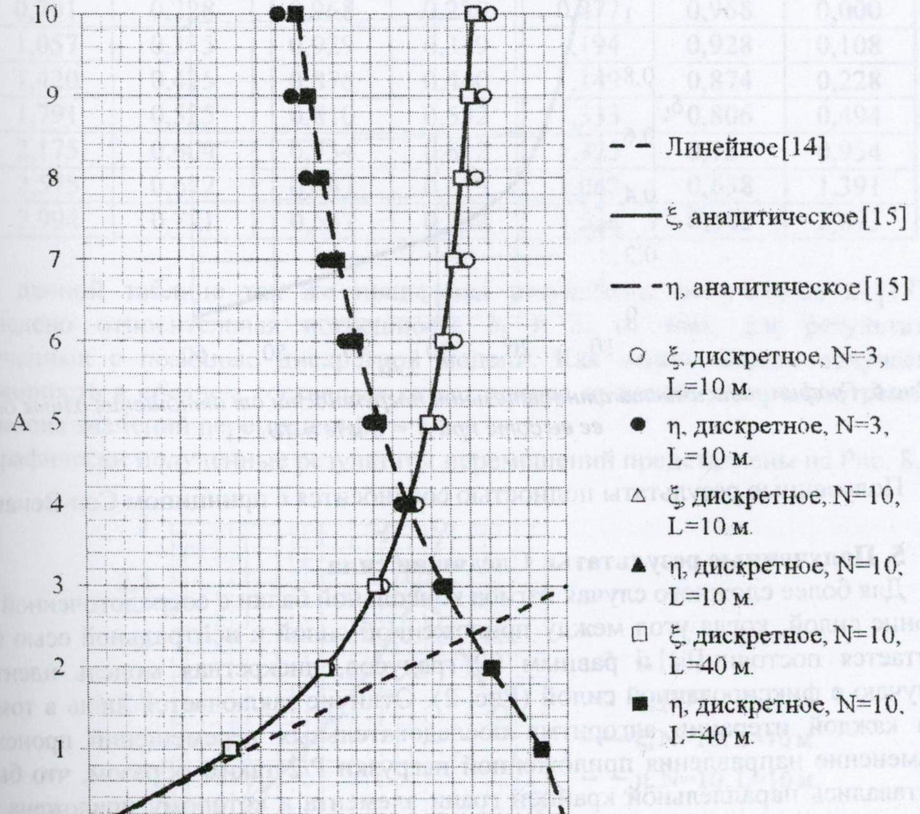

Рис.5. График зависимости перемещений конца консольной балки от величины сосредоточенной на ее конце силы.

Из данного графика видно, что при значениях A < 1 результаты близки к линейным, а при A < 3 результаты дискретного решения, в не зависимости от числа элементов, практически совпадают с аналитическим решением. В то же время, следует отметить, что с ростом A растет и отклонение получаемого результата от аналитического решения для коротких балок и небольшого числа элементов. В случае, увеличения длины балки (N = 10, L = 40), дискретный результат будет практически совпадать с аналитическим результатом без увеличения числа используемых элементов.

Такое уменьшение погрешности можно изобразить графически, если построить график зависимости относительной погрешности от отношения геометрической длины балки к ее высоте для фиксированной величины нагрузки при одинаковом количестве используемых дискретных элементов. Так на Рис. 6 представлен график зависимости δ_ξ от L/h при A = 6 и N =10.

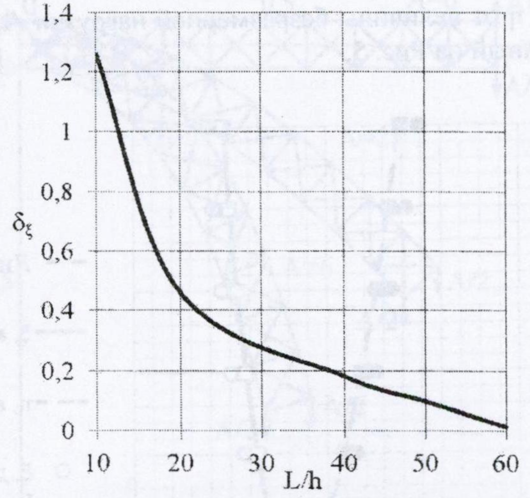

Рис.6. График зависимости относительной погрешности от отношения длины балки к ее высоте при A = 6 и N = 10.

Полученные результаты полностью соотносится с принципом Сен-Венана.

5. Полученные результаты. Следящая сила

Для более сложного случая изгиба консольной балки с сосредоточенной на ее конце силой, когда угол между приложенной силой и нейтральной осью балки остается постоянным и равным 90 градусов, дискретная модель идентична случаю с фиксированной силой (Рис. 2). Отличие заключается лишь в том, что на каждой итерации алгоритма последовательных перемещений происходит изменение направления приложенной нагрузки P/2 таким образом, что бы она оставались параллельной крайней грани элемента к которому приложена (Рис. 7).

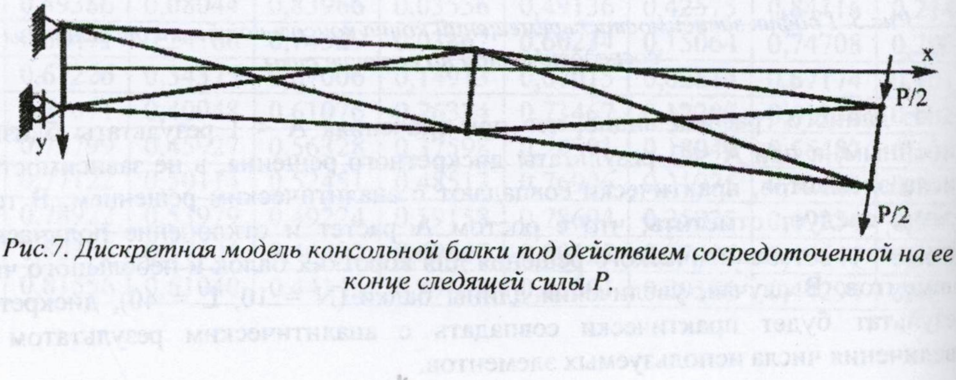

Рис.7. Дискретная модель консольной балки под действием сосредоточенной на ее конце следящей силы P.

Проведя расчет методом последовательных перемещений с использованием тех же параметров модели, что и для предыдущего случая, при N = 10 и L = 10 м., получим результаты, приведенные в Таблице 4.

Табл. 4. Сравнение дискретных и аналитических перемещений конца консоли.

A	Аналитическое [17]		Дискретное, N=10, L=10 м.			
	ξ_0	η_0	ξ	δ_ξ, %	η	δ_η, %
0,000	0,000	1,000	0,000	0,000	1,000	0,000
0,349	0,115	0,992	0,116	0,870	0,992	0,000
0,701	0,228	0,968	0,230	0,877	0,968	0,000
1,057	0,335	0,929	0,339	1,194	0,928	0,108
1,420	0,435	0,876	0,440	1,149	0,874	0,228
1,791	0,525	0,810	0,532	1,333	0,806	0,494
2,175	0,604	0,734	0,612	1,325	0,727	0,954
2,575	0,672	0,647	0,679	1,042	0,638	1,391
2,994	0,721	0,557	0,732	1,526	0,542	2,693

В данной таблице так же приведены результаты, полученные в [17] и вычислено относительная погрешность δ_ξ и δ_η от них, для результатов, полученных с помощью дискретной модели. Как можно видеть получаемая погрешность в среднем составляет около одного процента для рассмотренного диапазона значений перемещений.

Графически полученные результаты перемещений представлены на Рис. 8.

Рис.8. График зависимости перемещений конца консольной балки от величины сосредоточенной на ее конце следящей силы.

На данном графике наглядно видно совпадение результатов, получаемых разными методами.

В случае дальнейшего увеличения силы, до A = 40, можно получить сложную нелинейную зависимость, изображенную на Рис. 9.

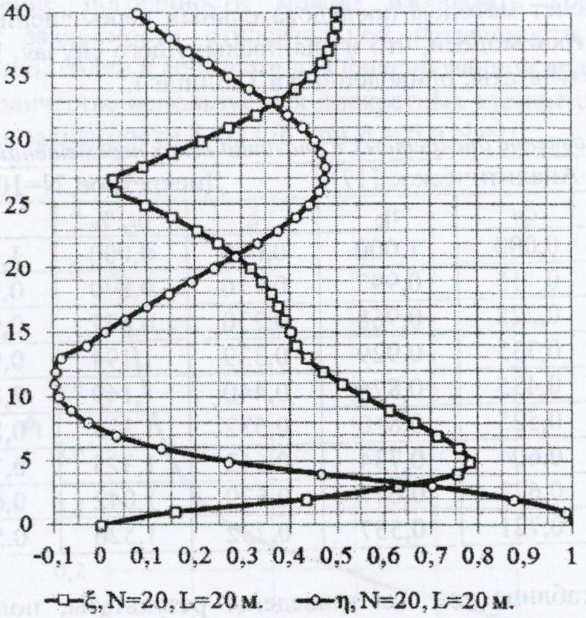

Рис.9. График зависимости перемещений конца консольной балки от величины сосредоточенной на ее конце следящей силы.

В данном случае точность вычислений была задана равной 10е-6. Соответствующие данному случаю нагружения формы изгиба балки, приведенные к безразмерному виду, изображены на Рис. 10-11.

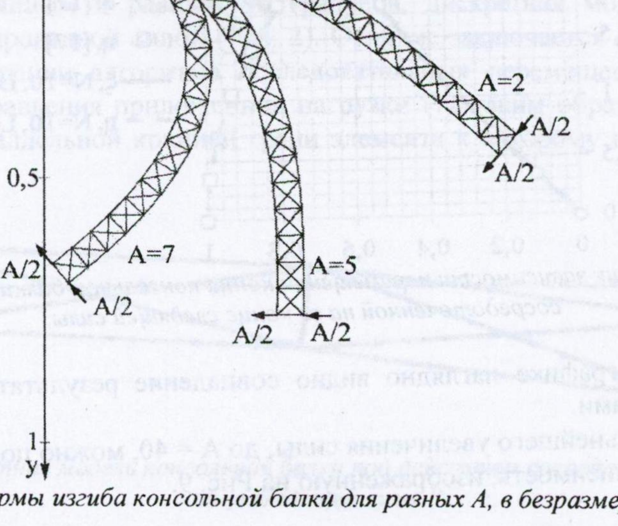

Рис.10. Формы изгиба консольной балки для разных А, в безразмерном виде.

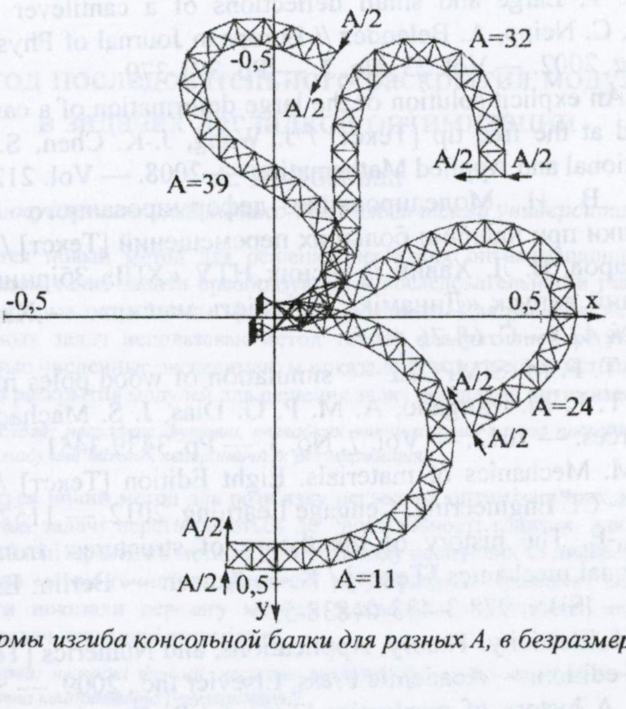

Рис.11. Формы изгиба консольной балки для разных А, в безразмерном виде.

6. Выводы

Получаемые с помощью предложенной дискретной модели [18] результаты качественно и количественно близки к результатам получаемым аналитически.

Увеличение горизонтальных размеров элементов дискретной модели ведет к уточнению получаемых результатов, так же как и увеличение количества самих дискретных элементов.

Дискретная модель [18], с учетом приведенных в статье уточнений, годится для расчета геометрически нелинейных задач допускающих упрощения балочной теории. При этом решение находится на основании зависимостей теории упругости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Fertis, D. G. Nonlinear structural engineering. With unique theories and methods to solve effectively complex nonlinear problems [Текст] / D. G. Fertis. — Springer, 2006. — 339 p.
2. Kocatürk, T. Large deflection static analysis of a cantilever beam subjected to a point load [Текст] / T. Kocatürk, Ş. D. Akbaş, M. Şimşek. // International journal of engineering and applied science. — 2010. — Vol. 2, Issue 4. — Pp. 1-13.
3. Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures. Second Edition [Текст] / R. de Borst, M. A. Crisfield, J. J. C. Remmers, C. V. Verhoosel. — 2nd ed. — L: John Wiley & Sons, Ltd., 2012. — 540 p. — ISBN: 978-0-470-66644-9.
4. Merli, R. Comparison of two linearization schemes for the nonlinear bending problem of a beam pinned at both ends [Текст] / R. Merli, C. Lazaro, S. Monleon, F. Domingo. // International journal of solids and structures. — Elsevier, 2010. — Vol. 47. — Pp. 865-874.

5. Beléndez. T. Large and small deflections of a cantilever beam [Текст] / T. Beléndez, C. Neipp, A. Beléndez // European Journal of Physics. — Bristol: IOP Publishing, 2002. — Vol. 23, No. 3. — Pp. 371-379.
6. Wang, J. An explicit solution of the large deformation of a cantilever beam under point load at the free tip [Текст] / J. Wang, J.-K. Chen, S. Liao // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 2008. — Vol. 212. — Pp. 320–330.
7. Конохов, В. И. Моделирование деформированного состояния ствола гидропушки при наличии больших перемещений [Текст] / В. И. Конохов, Д. Б. Пивоваров, В. Л. Хавин // Вісник НТУ «ХПІ» Збірник наукових праць. Тематичний випуск «Динаміка і міцність машин». — Харків: НТУ «ХПІ», 2009. — № 42. — С. 68-76.
8. Morgado, T. F. M. SIMPOLE — simulation of wood poles mechanical behavior [Текст] / T. F. M. Morgado, A. M. P. G. Dias, J. S. Machado, J. H. Negrao. // BioResources. — 2012. — Vol. 7, No. 3. — Pp. 3439-3451.
9. Gere, J. M. Mechanics of materials. Eight Edition [Текст] / J. M. Gere, B. J. Goodno. — CL Engineering, Cengage Learning, 2012. — 1152 p.
10. Kurrer, K.-E. The history of the theory of structures: from arch analysis to computational mechanics [Текст] / K.-E. Kurrer. — Berlin: Ernst & Sohn, 2008. — 848 p. — ISBN: 978-3-433-01838-5.
11. Saad, M. H. Elasticity. Theory, Applications, and Numerics [Текст] / M. H. Saad. — Second edition. — Academic Press, Elsevier Inc., 2009. — 552 p.
12. Dugas, R. A history of mechanics [Текст] / R. Dugas. — Dover Publications, 2011. — 688 p.
13. Galilei, G. Dialogues Concerning Two New Sciences [Текст] / G. Galilei. — HardPress Publishing, 2013. — 342 p.
14. Bisshopp, K. E. Large deflections of cantilever beams [Текст] / K. E. Bisshopp, D. C. Drucker // Quarterly of Applied Mathematics. — 1945. — Vol. 3. — Pp. 272–275.
15. Mattiasson, K. Numerical results from large deflection beam and frame problems analyzed by means of elliptic integrals [Текст] / K. Mattiasson // Int. J. Numer. Methods Eng. — 1981. — Vol. 17. — Pp. 145–153.
16. Bathe, K.-J. Large displacement analysis of three-dimensional beam structures [Текст] / K.-J. Bathe, S. Bolourchi // International journal for numerical methods in engineering. — 1979. — Vol. 14. — Pp. 961-986.
17. McComb H. G. Jr. Large deflections of a cantilever beam under arbitrarily directed tip load [микрофильм] : тех. отч. / H. G. McComb Jr., Langley Research Center. — Hampton, Va.: Langley Research Center. — 1985. — 22 p.
18. Шамровський А.Д. Решение плоских статических задач механики деформируемого твердого тела при помощи дискретных моделей, получаемых на основе экспериментальных данных [Текст] / А.Д. Шамровский, Ю.А. Лымаренко, Д.Н. Колесник // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: збірник наукових праць / Дніпропетровський національний університет. — Дніпропетровськ: Ліра, 2011. — Вип. 17. — С. 274-288.

Надійшла у першій редакції 08.04.2013, в останній - 12.04.2013.

УДК 519.85

Метод последовательного раскрытия модулей в задачах негладкой оптимизации

А. И. Косолап

Украинский государственный химико-технологический университет, Украина

Предлагается новый метод для решения негладких оптимизационных задач. Этим методом такие задачи преобразуются к последовательности гладких, для решения которых разработаны эффективные методы. Для решения невыпуклых и дискретных задач использован метод точной квадратичной регуляризации. Проведенные численные эксперименты показали преимущества метода последовательного раскрытия модулей для решения задач негладкой оптимизации.

Ключевые слова: *негладкие функции, негладкая оптимизация, метод последовательного раскрытия модулей, точная квадратичная регуляризация.*

Пропонується новий метод для розв'язку негладких оптимізаційних задач. Цим методом такі задачі перетворюються до послідовності гладких, для розв'язку яких розроблені ефективні методи. Для розв'язку неопуклих та дискретних задач використано метод точної квадратичної регуляризації. Проведені чисельні експерименти показали перевагу методу послідовного раскриття модулів для розв'язку задач негладкої оптимізації.

Ключові слова: *негладкі функції, негладка оптимізація, метод послідовного розкриття модулів. точна квадратична регуляризація.*

We offer the new method for the solution of nonsmooth optimization problems. Such problems are transformed into the sequence of smooth problems. Effective methods for their solution are already developed. We also use the method of exact quadratic regularization for the solution of nonconvex and discrete problems. Numerical experiments have shown the advantages of the method of successive modules expansion for the solution of nonsmooth optimization problems.

Key words: *nonsmooth functions, nonsmooth optimization, method of successive modules expansion, exact quadratic regularization.*

1. Общая постановка задачи и её актуальность

Оптимизационные модели возникают в любой сфере человеческой деятельности. Выбор оптимальных решений в инженерном проектировании, совершенствовании технологий, распределении ограниченных ресурсов, искусственном интеллекте и т.п. приводит к построению оптимизационных моделей. В таких моделях требуется найти максимум или минимум целевой функции при наличии ограничений на переменные. Число переменных может быть достаточно большим. Однако если целевая функция и функции в ограничениях оптимизационной задачи являются гладкими, то для нее разработаны достаточно эффективные оптимизационные методы, позволяющие находить оптимальные значения переменных, число которых может быть достаточно большим [1–2]. При решении сложных задач целевая функция или функции в ограничениях могут быть негладкими [3]. Например, задачи оптимизации с негладкими нормами. Существующие методы решения таких задач недостаточно эффективны [4], но многочисленные приложения негладкой оптимизации требуют поиска новых методов.

© Косолап А. И., 2013

2. Постановка задачи и метод ее решения

В задаче оптимизации

$$\min\{f_0(x) \mid f_i(x) \le 0, i = 1,..., m, x \in E^n\} \quad (1)$$

предполагается, что все функции $f_i(x)$ – выпуклые и непрерывные, x – n-мерный вектор, а E^n – евклидово пространство. При данных предположениях задача имеет решение (если ее допустимое множество не пусто), и ее точка локального минимума x^* будет также глобальным минимумом. Большинство методов для решения задачи (1) использует градиенты функций $f_i(x)$, которые указывают на направления их наибольшего возрастания. В случае, когда функции $f_i(x)$ – негладкие, градиенты заменяются субградиентами. Субградиент функции в точке определяется неоднозначно, что порождает многочисленные алгоритмы негладкой оптимизации. Если обратное направление к градиенту указывает на наибольшее убывание функции, то для субградиента это условие не выполняется.

Большинство негладких функций можно представить в виде суперпозиций гладких функций, которые содержат модули. Например, если допустимым множеством задачи (1) есть выпуклый многогранник, то его можно представить в виде

$$\{x \mid \sum_{j=1}^{m} | a_{ij}^T x + b_{ij} \le d_i, i = 1,..., m\},$$

где a_{ij}, x – n-мерные векторы, а b_{ij}, d_i – числа. Такой многогранник невозможно представить системой линейных неравенств, так как число его граней может быть больше 2^n. Часто требуется минимизировать функцию $f(x) = \max_{1 \le i \le m}\{f_i(x)\}$. Такую функцию также можно представить выражением содержащим модули, учитывая, что

$$\max\{f_1(x), f_2(x)\} = \frac{|f_1(x) - f_2(x)| + f_1(x) + f_2(x)}{2}.$$

Это равенство можно использовать для представления функции $f(x)$ суперпозициями модулей для любого m. Большое число прикладных задач содержит целочисленные переменные. Это условие может быть задано неравенством

$$||||...|x| - 1| - 1|... - 1| - 0{,}5| - 0{,}5| \le 0.$$

График функции, определяющей это неравенство приведен на Рис. 1.

Существует много задач на перестановках, в которых каждая переменная задачи (1) принимает только одно из значений $1, 2, ..., n$ и $x_i \ne x_j, \forall i \ne j$. К этому классу относятся задачи теории расписаний, коммивояжера. Приведенное условие может быть задано в виде

$$\sum_{i=1}^{n} g_i(t, x_i) \le 1, \forall t \ge 0, \sum_{i=1}^{n} x_i = n(n+1)/2, \quad (2)$$

где функции $g_i(t, x_i)$ равны

$$g_i(t,x_i)=\frac{1}{2}|t-x_i|-|t-x_i-1|+\frac{1}{2}|t-x_i-2|.$$

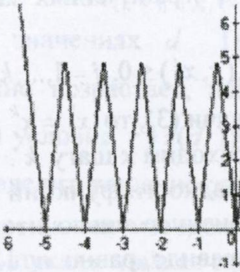

Рис. 1. Функция содержит 7 модулей

Условие (2) содержит континуум ограничений, но оно эквивалентно конечной системе неравенств (достаточно, чтобы ограничения (2) выполнялись в точках максимума функций $g_i(t,x_i)$)

$$\sum_{i=1}^{n} g_i(j,x_i)\le 1, \forall t\ge 0,\ j=1,\dots,n, \sum_{i=1}^{n} x_i = n(n+1)/2.$$

В дальнейшем будем предполагать, что функции задачи (1) содержат суперпозиции модульных выражений. Будем называть такие функции – *модульными*. Преобразуем задачу (1) к виду

$$\min\{x_{n+1} \mid f_0(x)\le x_{n+1}, f_i(x)\le 0, i=1,\dots,m, x\in E^n\}. \tag{3}$$

При подстановке фиксированного значения x в ограничения задачи (3) модульные выражения раскрываются и задача (3) становится гладкой. Таким образом, пространство E^n можно разбить на непересекающиеся области, в каждой из которых ограничения задачи (3) будут определяться гладкими функциями. Так как число таких областей будет большим, рассмотрим метод последовательного раскрытия модулей для решения задачи (3). Обозначим функции $f_i(x)$ после раскрытия модулей в точке x^0 через $f_i(x,x^0)$. Алгоритм метода будет следующим.

Шаг 1. Выберем произвольную начальную точку x^0 и раскроем в ней модули ограничений задачи (3). Решим гладкую задачу

$$\min\{x_{n+1} \mid f_0(x,x^0)\le x_{n+1}, f_i(x,x^0)\le 0, i=1,\dots,m\}.$$

Пусть x^1 – ее решение.

Шаг 2. Проверим выполнимость ограничений задачи (3) в точке x^1. Если она допустима, то решение задачи (3) найдено, оно достигается в точке x^1. В противном случае, раскроем модули в ограничениях задачи (3) в точке x^1 и решим гладкую задачу

$$\min\{x_{n+1} \mid f_0(x,x^0)\le x_{n+1}, f_0(x,x^1)\le x_{n+1}, f_i(x,x^0)\le 0, f_i(x,x^1)\le 0, i=1,\dots,m\}.$$

Обозначим ее решение через x^2.

Шаг k. Проверим выполнимость ограничений задачи (3) в точке x^{k-1}. Если она допустима, то решение задачи (3) найдено, оно достигается в точке x^{k-1}. В противном случае, раскроем модули в ограничениях задачи (3) в точке x^{k-1} и режим гладкую задачу

$$\min\{x_{n+1} \mid f_0(x, x^j) \le x_{n+1}, f_i(x, x^j) \le 0, j = 1,..., k-1, i = 1,..., m\}.$$

Если ее решение x^k допустимо для задачи (3), то $x^* = x^k$.

Шаг $k+1$. Полагаем $k = k+1$ и переходим к шагу k.

Учитывая то, что число областей гладкости функций задачи (3) конечно, рассмотренный алгоритм сходится за конечное число итераций. Число активных ограничений в точке минимума, как правило, равно n. Поэтому в среднем необходимо n итераций для достижения точки минимума.

3. Невыпуклые задачи негладкой оптимизации

Во многих прикладных задачах функции в задаче (1) является невыпуклыми. Тогда эта задача имеет множество локальных минимумов. Используем для ее решения метод точной квадратичной регуляризации [5]. Суть этого метода в следующем. Преобразуем задачу (1) к виду

$$\min\{x_{n+1} \mid f_0(x) + s \le x_{n+1}, f_i(x) \le 0, i = 1,..., m, x \in E^{n+1}\}, \quad (4)$$

где параметр s удовлетворяет условию

$$f_0(x^*) + s \ge \|x^*\|^2,$$

x^* – решение задачи (1). Далее, используем преобразование пространства $x = Az$, где матрица A порядка $(n+1)\times(n+1)$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ z_1 & z_2 & ... & z_{n+1} \end{pmatrix},$$

что сводит задачу (4) к следующей

$$\min\{\| z \|^2 \mid f_0(\bar{z}) + s \le \| z \|^2, f_i(\bar{z}) \le 0, i = 1,..., m, z \in E^{n+1}\}, \quad (5)$$

где $\bar{z} = (z_1,..., z_n)$ $z = (\bar{z}, z_{n+1})$.

Тогда существует такое значение $r > 0$, что все функции

$$g_0(z) = f_0(\bar{z}) + s + (r-1)\| z \|^2, g_i(z) = f_i(\bar{z}) + r \| z \|^2, i = 1,..., m$$

будут выпуклыми для допустимых значений z.

Таким образом, задача (5) сведена к виду

$$\min\{\|z\|^2 \mid g_i(z) \le d, i=0,..., m, r\|z\|^2 = d\}, \quad (6)$$

где все $g_i(z)$ – выпуклые функции. Следовательно, задача (1) преобразована к минимизации квадрата нормы вектора z, где переменными задачи (6) есть (z, d) – $(n + 2)$-мерный вектор. Решим методом последовательного раскрытия модулей соответствующую (6) выпуклую задачу

$$\min\{d \mid g_i(z) \le d, i = 0,..., m, r \| z \|^2 \le d\}. \quad (7)$$

Если (z^*, d^*) – решение задачи (7), то $x^* = \bar{z}^*$ – точка глобального минимума задачи (1). В противном случае, решаем задачу

$$\max\{\| z \|^2 | \, g_i(z) \le d, i = 0,...,m\} \tag{8}$$

при фиксированных значениях d. При увеличении переменной d значение $r\| z(d) \|^2 - d$ монотонно возрастает, поэтому минимальное значение d^*, при котором выполняется условие $r\| z(d^*) \|^2 = d$, находим методом дихотомии. Таким образом, d^* определит решение задачи (1) $x^* = \bar{z}(d^*)$. Задача (8) при различных значениях d решалась методом последовательного раскрытия модулей, а соответствующая выпуклая гладкая задача модифицированным методом внутренней точки [1].

4. Численные эксперименты

Для рассмотренного метода разработано программное обеспечение и проведены численные эксперименты. Для сравнения использовался пакет Risk Solver, который решает оптимизационные задачи до 2000 переменных и реализует следующие методы глобальной оптимизации: мультистарт, интервальный анализ, методы ветвей и границ, генетические и эволюционные методы, табу и метод рассеяния. Численные эксперименты показали значительное преимущество метода последовательного раскрытия модулей. Негладкая задача

$$\min\{\sum_{i=1}^{10} | a_i^T x + b_i |\}, \tag{9}$$

где ее параметры заданы Табл. 1, решалась с помощью пакета Risk Solver, было получено значение функции равное 30.

Табл. 1. Параметры задачи (9)

a_1	1	1	1	5	1	2	3	6	–2	–5	b_1	56
a_2	2	–3	0	0	0	0	–12	–52	15	25,3	b_2	15
a_3	5	–55	6	–5	25	12	4	2	14	–52	b_3	58
a_4	–12	24	–55	64	0	0	0	0	–1	–22	b_4	–55
a_5	3	–3	12	1	–10	–5	5	–95	4	–74	b_5	–100
a_6	–1	1	0	2	–1	0	1	1	2	1	b_6	1
a_7	–56	5	1	3	–25	2	4	–4	12	–14	b_7	15
a_8	12	1	0	1	0	–11	–2	1	9	0	b_8	1
a_9	14	36	–33	–52	–15	–5	–3	1	0	0	b_9	8
a_{10}	5	12	0	0	0	–5	–5	–5	1	14	b_{10}	12

Методом последовательного раскрытия модулей решалась эквивалентная задача

$$\min\{e^T x \sum_{i=1}^{10} | a_i^T x + b_i \le r\},$$

где $e = (1,...,1)$, а r убывало до нуля. Найдено решение задачи (9) $r = 0{,}00001$ в точке

$$x^* = (-19{,}3879764; -3{,}284240132; -13{,}57045411; -9{,}310577672; 38.1118518; -42{,}98323925; 60{,}65556767; -11{,}58242605; -10{,}6301706; 11{,}81646044).$$

4. Выводы и направления дальнейших исследований

Предложен новый метод последовательного раскрытия модулей для преобразования негладких задач к последовательности гладких. Численные эксперименты показали его эффективность для решения данного класса задач. При использовании точной квадратичной регуляризации этот метод применим также для решения невыпуклых и негладких задач, в частности дискретных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Nocedal J., Wright S.J. Numerical optimization. – Springer, 2006. – 685 p.
2. Luenberger D.G., Ye Y. Linear and nonlinear programming. – Springer, 2008. – 546 p.
3. Шор Н.З. Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения. – К.: Наук. думка, 1979. – 200 с.
4. Нестеров Ю.Е. Методы выпуклой оптимизации. – М.: Изд. МЦНМ, 2010. – 281 с.
5. Косолап А.И. Метод квадратичной регуляризации для решения систем нелинейных уравнений // Журн. обчислювальної та прикладної математики. – 2010. – № 4. – С.44–50.

Надійшла у першій редакції 25.03.2013, в останній - 05.04.2013.

УДК 519.9

Сплайн-інтерфлетація та обчислення 3 D коефіцієнтів Фур'є на класі диференційовних функцій

О. М. Литвин, О. П. Нечуйвітер
Українська інженерно-педагогічна академія, Україна

В статье исследуются кубатурные формулы вычисления коэффициентов Фурье функций трех переменных f(x,y,z), которые используют в своем построении операторы сплайн-интерфлетации. Такие кубатурные формулы на классе дифференцированных функций имеют преимущество над известными, так как для достижения заданой точности используют меньше значений функции f(x,y,z).

Ключевые слова: *интерфлетация, сплайн-интерполяция, кубатурная формула, 3 D коэффициенты Фурье.*

В статті досліджуються кубатурні формули обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій трьох змінних f(x,y,z), які використовують в своїй побудові оператори сплайн-інтерфлетації функції. Такі кубатурні формули на класі диференційовних функцій мають перевагу над відомими, так як для досягнення заданої точності використовують менше значень функції f(x,y,z).

Ключові слова: *інтерфлетація, сплайн-інтерполяція, кубатура формула,32 D коефіцієнти Фур'є.*

In work on the class of differentiable functions formulas of the evaluating of 3 D Fourier's coefficients with using spline-interflatation were submitted. The main advantages of of this formulas are high exactness of approximation, less amount of information of function during the calculation .

Key words: *Interflatation, spline-interpolation, cubature formula, 3 D Fourier's coefficients.*

1. Загальна постановка задачі та її актуальність

При наближені функцій двох та трьох змінних симетричними відрізками ряду Фур'є виникає задача обчислення коефіцієнтів цього ряду за допомогою інформаційних операторів різних типів. В якості даних можуть бути значення функції у вузлових точках, слідами функції на лініях або площинах, інтеграли від наближуваної функції вздовж вибраної системи ліній або площин, що перетинають досліджуваний об'єкт. Задачу наближеного обчислення 3 D коефіцієнтів Фур'є у випадках, коли початкова інформація задається різними інформаційними операторами, дозволяє ефективно розв'язувати апарат інтерлінації та інтерфлетації функцій [1] на різних класах функцій. В даній роботі мова піде про наближене обчислення 3 D коефіцієнтів Фур'є, коли в якості даних є значення функції у вузлових точках.

2. Дослідження авторів

В [2]-[4] був викладений загальний підхід до побудови операторів фінітного тривимірного дискретно-неперервного і дискретного перетворення Фур'є на основі методу Файлона, трилінійних сплайнів (лінійних за кожною змінною) та сплайн-інтерфлетації на класі диференційовних функцій у випадку, коли задані значення функції у вузлах. В [5], [6] наведений алгоритм для отримання більш

© Литвин О. М., Нечуйвітер О. П., 2013

точної оцінки похибки наближення 3 D коефіцієнтів Фур'є кубатурними формулами, що в своїй побудові використовують оператори сплайн-інтерфлетації. Повна реалізація цього алгоритму пропонується в даній статті.

3. Нерозв'язані проблеми та цілі роботи

Метою даної роботи є представлення та дослідження кубатурних формул наближеного обчислення 3 D коефіцієнтів Фур'є

$$I_1^3(m,n,p)=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 f(x,y,z)\sin 2\pi mx \sin 2\pi ny \sin 2\pi pz dxdydz,$$

$$I_2^3(m,n,p)=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 f(x,y,z)\cos 2\pi mx \cos 2\pi ny \cos 2\pi pz dxdydz,$$

$$I_3^3(m,n,p)=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 f(x,y,z)e^{-i2\pi mx}e^{-i2\pi ny}e^{-i2\pi pz}dxdydz,$$

побудованих на основі сплайн-інтерфлетації функцій, у випадках, коли в якості даних задані значення функції у вузлах, на класі дійсних функцій трьох змінних, визначених на $G=[0,1]^3$ і таких, що $\left|f^{(r,0,0)}(x,y,z)\right|\le M$, $\left|f^{(0,r,0)}(x,y,z)\right|\le M$, $\left|f^{(0,0,r)}(x,y,z)\right|\le M$, $\left|f^{(r,r,0)}(x,y,z)\right|\le \tilde{M}$, $\left|f^{(r,0,r)}(x,y,z)\right|\le \tilde{M}$, $\left|f^{(0,r,r)}(x,y,z)\right|\le \tilde{M}$, $\left|f^{(r,r,r)}(x,y,z)\right|\le \tilde{\tilde{M}}$, $r=1,2$. Для досягнення цієї мети поставлені наступні задачі: отримати оцінку похибки наближення запропонованих кубатурних формул через похибку наближення оператора інтерфлетації оператором інтерлінації (що побудований на основі інтерфлетації) та похибку наближення оператора інтерлінації оператором інтерполяції (що також побудований на основі інтерфлетації), а також порівняти їх з класичними за таким параметром, як кількість використаних значень функції $f(x,y,z)$ для досягнення заданої точності.

4. Оператори сплайн-інтерполяції, сплайн-інтерлінації та сплайн-інтерфлетації

Введемо позначення

$$h_{10}(x)=\begin{cases}\frac{x-x_1}{-\Delta}, & x_0\le x<x_1,\\ 0, & x\ge x_1,\end{cases}\qquad h_\ell(x)=\begin{cases}0, & x\le x_{\ell-1},\\ \frac{x-x_\ell}{\Delta}, & x_{\ell-1}<x\le x_\ell,\end{cases}$$

$$h_{1k}(x)=\begin{cases}0, & x\le x_{k-1}\\ \dfrac{x-x_k}{\Delta}, & x_{k-1}<x<x_k\\ \dfrac{x-x_{k+1}}{-\Delta}, & x_k\le x<x_{k+1},\\ 0, & x\ge x_{k+1}\end{cases}\qquad k=\overline{1,\ell-1};\ x_k=k\Delta,\ \Delta=\frac{1}{\ell},$$

$$\tilde h_{10}(x)=\begin{cases}\dfrac{x-\tilde x_1}{-\Delta_1}, & \tilde x_0\le x<\tilde x_1,\\ 0, & x\ge\tilde x_1,\end{cases}\quad \tilde h_{1\ell^{3/2}}(x)=\begin{cases}0, & x\le\tilde x_{\ell^{3/2}-1},\\ \dfrac{x-x_\ell}{\Delta}, & \tilde x_{\ell^{3/2}-1}<x\le\tilde x_{\ell^{3/2}},\end{cases}$$

$$\tilde h_{1\tilde k}(x)=\begin{cases}0, & x\le\tilde x_{\tilde k-1},\\ \dfrac{x-\tilde x_{\tilde k}}{\Delta_1}, & \tilde x_{\tilde k-1}<x<\tilde x_{\tilde k},\\ \dfrac{x-\tilde x_{\tilde k+1}}{-\Delta_1}, & \tilde x_{\tilde k}\le x<\tilde x_{\tilde k+1},\\ 0, & x\ge\tilde x_{\tilde k+1},\end{cases}\quad \tilde k=\overline{1,\ell^{3/2}-1},\ \tilde x_{\tilde k}=\tilde k\Delta_1,\ \tilde k=\overline{0,\ell^{3/2}},\ \Delta_1=\frac{1}{\ell^{3/2}},$$

$$\bar h_{10}(x)=\begin{cases}\dfrac{x-\bar x_1}{-\Delta_2}, & \bar x_0\le x<\bar x_1,\\ 0, & x\ge\bar x_1,\end{cases}\quad \bar h_{1\ell^3}(x)=\begin{cases}0, & x\le\bar x_{\ell^3-1},\\ \dfrac{x-x_\ell}{\Delta_2}, & \bar x_{\ell^3-1}<x\le\bar x_{\ell^3},\end{cases}$$

$$\bar h_{1\bar k}(x)=\begin{cases}0, & x\le\bar x_{\bar k-1},\\ \dfrac{x-\bar x_{\bar k}}{\Delta_2}, & \bar x_{\bar k-1}<x<\bar x_{\bar k},\\ \dfrac{x-\bar x_{\bar k+1}}{-\Delta_2}, & \bar x_{\bar k}\le x<\bar x_{\bar k+1},\\ 0, & x\ge\bar x_{\bar k+1},\end{cases}\quad \bar k=\overline{1,\ell^3-1},\ \bar x_{\bar k}=\bar k\Delta_2,\ \bar k=\overline{0,\ell^3},\ \Delta_2=\frac{1}{\ell^3}.$$

Аналогічно визначаються функції

$$1.\ h_{2j}(y),\quad j=\overline{0,\ell},\quad h_{3s}(z),\quad s=\overline{0,\ell},\ \ y_j=j\Delta,\ z_s=s\Delta,\quad \Delta=\frac{1}{\ell};$$

$$2.\ \tilde h_{2\tilde j}(y)\quad \tilde j=\overline{0,\ell^{3/2}},\ \ \tilde h_{3\tilde s}(z)\quad \tilde s=\overline{0,\ell^{3/2}},$$

$$\tilde y_{\tilde j}=\tilde j\Delta_1,\ \tilde z_{\tilde s}=\tilde j\Delta_1,\ \Delta_1=\frac{1}{\ell^{3/2}};$$

$$3.\ \bar h_{2\bar j}(y)\quad \bar j=\overline{0,\ell^3},\ \ \bar h_{3\bar s}(z)\ \bar s=\overline{0,\ell^3}$$

$$\bar y_{\bar j}=\bar j\Delta_2,\ \bar z_{\bar s}=\bar s\Delta_2,\quad \Delta_2=\frac{1}{\ell^3}.$$

Розглянемо оператори

$$O_1 f(x,y,z) = \sum_{k=0}^{\ell} f(x_k, y, z) h_{1k}(x)\ ,\ O_2 f(x,y,z) = \sum_{j=0}^{\ell} f(x, y_j, z) h_{2j}(y)\ ,$$

$$O_3 f(x,y,z) = \sum_{s=0}^{\ell} f(x, y, z_s) h_{3s}(z)\ ,$$

$$\tilde{O}_1 f(x,y,z) = \sum_{\tilde{k}=0}^{\ell^{3/2}} f(\tilde{x}_{\tilde{k}}, y, z) h_{1\tilde{k}}(x)\ ,\ \tilde{O}_2 f(x,y,z) = \sum_{\tilde{j}=0}^{\ell^{3/2}} f(x, \tilde{y}_{\tilde{j}}, z) \tilde{h}_{2\tilde{j}}(y)\ ,$$

$$\tilde{O}_3 f(x,y,z) = \sum_{\tilde{s}=0}^{\ell^{3/2}} f(x, y, \tilde{z}_{\tilde{s}}) \tilde{h}_{3\tilde{s}}(z)\ ,$$

$$\bar{O}_1 f(x,y,z) = \sum_{\bar{k}=0}^{\ell^3} f(\bar{x}_{\bar{k}}, y, z) h_{1\bar{k}}(x)\ ,\ \bar{O}_2 f(x,y,z) = \sum_{\bar{j}=0}^{\ell^3} f(x, \bar{y}_{\bar{j}}, z) \bar{h}_{2\bar{j}}(y)\ ,$$

$$\bar{O}_3 f(x,y,z) = \sum_{\bar{s}=0}^{\ell^3} f(x, y, \bar{z}_{\bar{s}}) \bar{h}_{3\bar{s}}(z)$$

Лема 1. [1] Оператор сплайн-інтерфлетації

$$Of(x,y,z) = O_1 f(x,y,z) + O_2 f(x,y,z) + O_3 f(x,y,z) -$$
$$- O_1 O_2 f(x,y,z) - O_2 O_3 f(x,y,z) - O_1 O_3 f(x,y,z) + O_1 O_2 O_3 f(x,y,z)$$

має властивість $\left| f(x,y,z) - Of(x,y,z) \right| = O\left(\dfrac{1}{\ell^{3r}} \right)$.

Лема 2. [1] Оператор сплайн-інтерлінації, побудований на основі інтерфлетації

$$\tilde{O}f(x,y,z) = O_1 \tilde{O}_2 f(x,y,z) + O_1 \tilde{O}_3 f(x,y,z) - O_1 \tilde{O}_2 \tilde{O}_3 f(x,y,z) +$$
$$+ O_2 \tilde{O}_1 f(x,y,z) + O_2 \tilde{O}_3 f(x,y,z) - O_2 \tilde{O}_1 \tilde{O}_3 f(x,y,z) +$$
$$+ O_3 \tilde{O}_1 f(x,y,z) + O_3 \tilde{O}_2 f(x,y,z) - O_3 \tilde{O}_1 \tilde{O}_2 f(x,y,z) -$$
$$- O_1 O_2 f(x,y,z) - O_1 O_3 f(x,y,z) - O_2 O_3 f(x,y,z) + O_1 O_2 O_3 f(x,y,z)$$

має властивість $\left| f(x,y,z) - \tilde{O}f(x,y,z) \right| = O\left(\dfrac{1}{\ell^{3r}} \right)$.

Лема 3. [1] Оператор сплайн-інтерполяції, побудований на основі інтерфлетації

$$\bar{O}f(x,y,z) = O_1 \tilde{O}_2 \bar{O}_3 f(x,y,z) + O_1 \tilde{O}_3 \bar{O}_2 f(x,y,z) - O_1 \tilde{O}_2 \tilde{O}_3 f(x,y,z) +$$
$$+ O_2 \tilde{O}_1 \bar{O}_3 f(x,y,z) + O_2 \tilde{O}_3 \bar{O}_1 f(x,y,z) - O_2 \tilde{O}_1 \tilde{O}_3 f(x,y,z) +$$
$$+ O_3 \tilde{O}_1 \bar{O}_2 f(x,y,z) + O_3 \tilde{O}_2 \bar{O}_1 f(x,y,z) - O_3 \tilde{O}_1 \tilde{O}_2 f(x,y,z) -$$
$$- O_1 O_2 \bar{O}_3 f(x,y,z) - O_1 O_3 \bar{O}_2 f(x,y,z) - O_2 O_3 \bar{O}_1 f(x,y,z) + O_1 O_2 O_3 f(x,y,z)$$

має властивість $\left| f(x,y,z) - \bar{O}f(x,y,z) \right| = O\left(\dfrac{1}{\ell^{3r}} \right)$.

Нехай

$$G_{1k}(x,\xi,r)=\begin{cases}\dfrac{x_{k+1}-x}{x_{k+1}-x_k}\dfrac{(x_k-\xi)^{r-1}}{(r-1)!}, & x_k<\xi<x,\\[2mm] \dfrac{x_k-x}{x_{k+1}-x_k}\dfrac{(x_{k+1}-\xi)^{r-1}}{(r-1)!}, & x<\xi<x_{k+1},\end{cases}$$

$$\tilde{G}_{1\tilde{k}}(x,\xi,r)=\begin{cases}\dfrac{\tilde{x}_{\tilde{k}+1}-x}{\tilde{x}_{\tilde{k}+1}-\tilde{x}_{\tilde{k}}}\dfrac{(\tilde{x}_{\tilde{k}}-\xi)^{r-1}}{(r-1)!}, & \tilde{x}_{\tilde{k}}<\xi<x,\\[2mm] \dfrac{\tilde{x}_{\tilde{k}}-x}{\tilde{x}_{\tilde{k}+1}-\tilde{x}_{\tilde{k}}}\dfrac{(x_{k+1}-\xi)^{r-1}}{(r-1)!}, & x<\xi<\tilde{x}_{\tilde{k}+1},\end{cases}$$

$$\bar{G}_{1\bar{k}}(x,\xi,r)=\begin{cases}\dfrac{\bar{x}_{\bar{k}+1}-x}{\bar{x}_{\bar{k}+1}-\bar{x}_{\bar{k}}}\dfrac{(\bar{x}_{\bar{k}}-\xi)^{r-1}}{(r-1)!}, & \bar{x}_{\bar{k}}<\xi<x,\\[2mm] \dfrac{\bar{x}_{\bar{k}}-x}{\bar{x}_{\bar{k}+1}-\bar{x}_{\bar{k}}}\dfrac{(\bar{x}_{\bar{k}+1}-\xi)^{r-1}}{(r-1)!}, & x<\xi<\bar{x}_{\bar{k}+1},\end{cases}$$

а функції $G_{2j}(y,\eta,r)$, $\tilde{G}_{2\tilde{j}}(y,\eta,r)$, $\bar{G}_{2\bar{j}}(y,\eta,r)$, $G_{3s}(z,\varsigma,r)$, $\tilde{G}_{3\tilde{s}}(z,\varsigma,r)$, $\bar{G}_{3\bar{s}}(z,\varsigma,r)$, $r=1,2$ визначаються аналогічно.

Лема 4. [1] Справедливі наступні рівності

$$1.\ f(x,y,z)-Of(x,y,z)=$$

$$=\int_{x_k}^{x_{k+1}}\int_{y_j}^{y_{j+1}}\int_{z_s}^{z_{s+1}} f^{(r,r,r)}(\xi,\eta,\varsigma)G_{1k}(x,\xi,r)G_{2j}(y,\eta,r)G_{3s}(x,\varsigma,r)\,d\xi d\eta d\zeta\,;$$

$$2.\ \left(O_1-O_1\tilde{O}_2-O_1\tilde{O}_3+O_1\tilde{O}_2\tilde{O}_3\right)f(x,y,z)=$$

$$=\int_{\tilde{y}_{\tilde{j}}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+1}}\int_{\tilde{z}_{\tilde{s}}}^{\tilde{z}_{\tilde{s}+1}} f^{(0,r,r)}(x_k,\eta,\zeta)\tilde{G}_{2\tilde{j}}(y,\eta,r)\tilde{G}_{3\tilde{s}}(z,\zeta,r)\,d\eta d\zeta\,;$$

$$3.\ \left(O_1O_2-O_1O_2\bar{O}_3\right)f(x,y,z)=\int_{\bar{x}_{\bar{k}}}^{\bar{x}_{\bar{k}+1}} f^{(r,0,0)}(\xi,y_j,\tilde{z}_{\tilde{s}})\bar{G}_{1\bar{k}}(x,\xi,r)\,d\xi\,.$$

Лема 5. [7] Справедливі наступні нерівності

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\left|G_1(x,\xi,r)\right|d\xi dx\le\frac{2\Delta^{r+1}}{(r+2)!},$$

$$\int_{y_j}^{y_{j+1}}\int_{y_j}^{y_{j+1}}\left|G_{2j}(y,\eta,r)\right|d\eta dy\le\frac{2\Delta^{r+1}}{(r+2)!},\qquad \int_{z_s}^{z_{s+1}}\int_{z_s}^{z_{s+1}}\left|G_{3s}(z,\varsigma,r)\right|d\varsigma dz\le\frac{2\Delta^{r+1}}{(r+2)!}.$$

5. Кубатурна формула обчислення 3 D коефіцієнтів Фур'є з використанням операторів сплайн-інтерполяції, побудованих на основі інтерфлетації

Для обчислення інтегралів $I_{\mu}^{3}(m,n,p)$, $\mu = 1,2,3$ пропонуються формули :

$$\bar{\Phi}_1^3(m,n,p) = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \bar{O}f(x,y,z)\sin 2\pi mx \sin 2\pi ny \sin 2\pi pz dxdydz ,$$

$$\bar{\Phi}_2^3(m,n,p) = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \bar{O}f(x,y,z)\cos 2\pi mx \cos 2\pi ny \cos 2\pi pz dxdydz ,$$

$$\bar{\Phi}_3^3(m,n,p) = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \bar{O}f(x,y,z)e^{-i2\pi mx}e^{-i2\pi ny}e^{-i2\pi pz} dxdydz .$$

Теорема 1. Нехай $f(x,y,z) \in H_1^{3,1}(M)$. Справедлива наступна оцінка:

$$\left|I_1^3(m,n,p) - \bar{\Phi}_1^3(m,n,p)\right| \le \left(\frac{8\tilde{M}}{[(r+2)!]^3} + \frac{12\bar{M}}{[(r+2)!]^2} + \frac{18M}{(r+2)!}\right)\frac{1}{\ell^{3r}} .$$

Доведення. Доведення теореми відбувається за наступною схемою:

$$\left|I_1^3(m,n,p) - \bar{\Phi}_1^3(m,n,p)\right| =$$

$$= \left|\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left(f(x,y,z) - \bar{O}f(x,y,z)\right)\sin 2\pi mx \sin 2\pi ny \sin 2\pi pz dxdydz\right| \le$$

$$\le \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left|f(x,y,z) - \bar{O}f(x,y,z)\right| dxdydz \le$$

$$\le \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left|f(x,y,z) - Of(x,y,z)\right| dxdydz + \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left|Of(x,y,z) - \tilde{O}f(x,y,z)\right| dxdydz +$$

$$+ \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left|\tilde{O}f(x,y,z) - \bar{O}f(x,y,z)\right| dxdydz = I_1 + I_2 + I_3 .$$

Оцінимо кожний з доданків.

$$I_1 \le \sum_{k=0}^{\ell-1}\sum_{j=0}^{\ell-1}\sum_{s=0}^{\ell-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}}\int_{y_j}^{y_{j+1}}\int_{z_s}^{z_{s+1}}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\int_{y_j}^{y_{j+1}}\int_{z_s}^{z_{s+1}} \left|f^{(r,r.r)}(\xi,\eta,\varsigma)\right| \times$$

$$\times \left|G_{1k}(x,\xi,r)\right|\left|G_{2j}(y,\eta,r)\right|\left|G_{3s}(x,\varsigma,r)\right| d\xi d\eta d\zeta dxdydz \le$$

$$\le \tilde{M}\sum_{k=0}^{\ell-1}\sum_{j=0}^{\ell-1}\sum_{s=0}^{\ell-1}\frac{2\Delta^{r+1}}{(r+2)!}\frac{2\Delta^{r+1}}{(r+2)!}\frac{2\Delta^{r+1}}{(r+2)!}=\tilde{M}\frac{8\Delta^{3r}}{[(r+2)!]^3}=\frac{8\tilde{M}}{[(r+2)!]^3\,\ell^{3r}}.$$

$$I_2=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \Big|O_1f(x,y,z)+O_2f(x,y,z)+O_3f(x,y,z)-$$
$$-O_1O_2f(x,y,z)-O_2O_3f(x,y,z)-O_1O_3f(x,y,z)+O_1O_2O_3f(x,y,z)-$$
$$-O_1\tilde{O}_2f(x,y,z)-O_1\tilde{O}_3f(x,y,z)+O_1\tilde{O}_2\tilde{O}_3f(x,y,z)-O_2\tilde{O}_1f(x,y,z)-$$
$$-O_2\tilde{O}_3f(x,y,z)+O_2\tilde{O}_1\tilde{O}_3f(x,y,z)-O_3\tilde{O}_1f(x,y,z)-O_3\tilde{O}_2f(x,y,z)+$$
$$+O_3\tilde{O}_1\tilde{O}_2f(x,y,z)+O_1O_2f(x,y,z)+O_1O_3f(x,y,z)+$$
$$+O_2O_3f(x,y,z)-O_1O_2O_3f(x,y,z)\Big|\,dxdydz=$$
$$=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \Big|O_1f(x,y,z)+O_2f(x,y,z)+O_3f(x,y,z)-$$
$$-O_1\tilde{O}_2f(x,y,z)-O_1\tilde{O}_3f(x,y,z)+O_1\tilde{O}_2\tilde{O}_3f(x,y,z)-O_2\tilde{O}_1f(x,y,z)-$$
$$-O_2\tilde{O}_3f(x,y,z)+O_2\tilde{O}_1\tilde{O}_3f(x,y,z)-O_3\tilde{O}_1f(x,y,z)-$$
$$-O_3\tilde{O}_2f(x,y,z)+O_3\tilde{O}_1\tilde{O}_2f(x,y,z)\Big|\,dxdydz\le$$
$$=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \Big|\left(O_1-O_1\tilde{O}_2-O_1\tilde{O}_3+O_1\tilde{O}_2\tilde{O}_3\right)f(x,y,z)\Big|\,dxdydz+$$
$$+\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \Big|\left(O_2-O_2\tilde{O}_1-O_2\tilde{O}_3+O_2\tilde{O}_1\tilde{O}_3\right)f(x,y,z)\Big|\,dxdydz+$$
$$+\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \Big|\left(O_3-O_3\tilde{O}_1-O_3\tilde{O}_2+O_3\tilde{O}_1\tilde{O}_2\right)f(x,y,z)\Big|\,dxdydz\le$$
$$\le\sum_{k=0}^{\ell-1}\sum_{\tilde{j}=0}^{\ell^{3/2}-1}\sum_{\tilde{s}=0}^{\ell^{3/2}-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\int_{\tilde{y}_{\tilde{j}}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+1}}\int_{\tilde{z}_{\tilde{s}}}^{\tilde{z}_{\tilde{s}+1}}\int_{\tilde{y}_{\tilde{j}}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+1}}\int_{\tilde{z}_{\tilde{s}}}^{\tilde{z}_{\tilde{s}+1}}\left|f^{(0,r,r)}(x_k,\eta,\zeta)\right|\times$$
$$\times\left|\tilde{G}_{2\tilde{j}}(y,\eta,r)\right|\left|\tilde{G}_{3\tilde{s}}(z,\zeta,r)\right|d\eta\, d\zeta\, dxdydz+$$
$$+\sum_{j=0}^{\ell-1}\sum_{\tilde{k}=0}^{\ell^{3/2}-1}\sum_{\tilde{s}=0}^{\ell^{3/2}-1}\int_{\tilde{x}_{\tilde{k}}}^{\tilde{x}_{\tilde{k}+1}}\int_{y_j}^{y_{j+1}}\int_{\tilde{z}_{\tilde{s}}}^{\tilde{z}_{\tilde{s}+1}}\int_{\tilde{x}_{\tilde{k}}}^{\tilde{x}_{\tilde{k}+1}}\int_{\tilde{z}_{\tilde{s}}}^{\tilde{z}_{\tilde{s}+1}}\left|f^{(r,0,r)}(\xi,y_j,\zeta)\right|\times$$
$$\times\left|\tilde{G}_{1\tilde{k}}(x,\xi,r)\right|\left|\tilde{G}_{3\tilde{s}}(z,\zeta,r)\right|d\xi\, d\zeta\, dxdydz+$$
$$+\sum_{s=0}^{\ell-1}\sum_{\tilde{k}=0}^{\ell^{3/2}-1}\sum_{\tilde{j}=0}^{\ell^{3/2}-1}\int_{\tilde{x}_{\tilde{k}}}^{\tilde{x}_{\tilde{k}+1}}\int_{\tilde{y}_{\tilde{j}}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+1}}\int_{z_s}^{z_{s+1}}\int_{\tilde{x}_{\tilde{k}}}^{\tilde{x}_{\tilde{k}+1}}\int_{\tilde{y}_{\tilde{j}}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+1}}\left|f^{(r,r,0)}(\xi,\eta,z_s)\right|\times$$
$$\times\left|\tilde{G}_{1\tilde{k}}(x,\xi,r)\right|\left|\tilde{G}_{2\tilde{j}}(y,\eta,r)\right|d\xi\, d\eta\, dxdydz\le$$

$$= \bar{M}\ell\Delta\ell^{3/2}\ell^{3/2}\frac{2\Delta_1^{r+1}}{(r+2)!}\frac{2\Delta_1^{r+1}}{(r+2)!} + \bar{M}\ell\Delta\ell^{3/2}\ell^{3/2}\frac{2\Delta_1^{r+1}}{(r+2)!}\frac{2\Delta_1^{r+1}}{(r+2)!} +$$

$$+ \bar{M}\ell\Delta\ell^{3/2}\ell^{3/2}\frac{2\Delta_1^{r+1}}{(r+2)!}\frac{2\Delta_1^{r+1}}{(r+2)!} =$$

$$= 12\bar{M}\frac{\Delta_1^{r}}{(r+2)!}\frac{\Delta_1^{r}}{(r+2)!} = \frac{12\bar{M}}{[(r+2)!]^2}\Delta_1^{2r} = \frac{12\bar{M}}{[(r+2)!]^2}\left(\frac{1}{\ell^{3/2}}\right)^{2r} = \frac{12\bar{M}}{[(r+2)!]^2}\frac{1}{\ell^{3r}}.$$

$$I_3 = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \Big| O_1\tilde{O}_2 f(x,y,z) + O_1\tilde{O}_3 f(x,y,z) - O_1\tilde{O}_2\tilde{O}_3 f(x,y,z) + O_2\tilde{O}_1 f(x,y,z) +$$
$$+ O_2\tilde{O}_3 f(x,y,z) - O_2\tilde{O}_1\tilde{O}_3 f(x,y,z) + O_3\tilde{O}_1 f(x,y,z) + O_3\tilde{O}_2 f(x,y,z) -$$
$$- O_3\tilde{O}_1\tilde{O}_2 f(x,y,z) - O_1O_2 f(x,y,z) - O_1O_3 f(x,y,z) - O_2O_3 f(x,y,z) +$$
$$+ O_1O_2O_3 f(x,y,z) - O_1O_2 f(x,y,z) - O_2O_3 f(x,y,z) - O_1O_3 f(x,y,z) +$$
$$+ O_1O_2O_3 f(x,y,z) - O_1\tilde{O}_2\bar{O}_3 f(x,y,z) - O_1\tilde{O}_3\bar{O}_2 f(x,y,z) + O_1\tilde{O}_2\bar{O}_3 f(x,y,z) -$$
$$- O_2\tilde{O}_1\bar{O}_3 f(x,y,z) - O_2\tilde{O}_3\bar{O}_1 f(x,y,z) + O_2\tilde{O}_1\bar{O}_3 f(x,y,z) --$$
$$- O_3\tilde{O}_1\bar{O}_2 f(x,y,z) - O_3\tilde{O}_2\bar{O}_1 f(x,y,z) + O_3\tilde{O}_1\bar{O}_2 f(x,y,z) + O_1O_2\bar{O}_3 f(x,y,z) +$$
$$+ O_1O_3\bar{O}_2 f(x,y,z) + O_2O_3\bar{O}_1 f(x,y,z) - O_1O_2O_3 f(x,y,z) \Big| dxdydz =$$

$$= \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \Big| O_1\tilde{O}_2 f(x,y,z) + O_1\tilde{O}_3 f(x,y,z) + O_2\tilde{O}_1 f(x,y,z) +$$
$$+ O_2\tilde{O}_3 f(x,y,z) + O_3\tilde{O}_1 f(x,y,z) + O_3\tilde{O}_2 f(x,y,z) -$$
$$- O_1O_2 f(x,y,z) - O_1O_3 f(x,y,z) - O_2O_3 f(x,y,z) +$$
$$- O_1O_2 f(x,y,z) - O_2O_3 f(x,y,z) - O_1O_3 f(x,y,z) -$$
$$- O_1\tilde{O}_2\bar{O}_3 f(x,y,z) - O_1\tilde{O}_3\bar{O}_2 f(x,y,z) -$$
$$- O_2\tilde{O}_1\bar{O}_3 f(x,y,z) - O_2\tilde{O}_3\bar{O}_1 f(x,y,z) -$$
$$- O_3\tilde{O}_1\bar{O}_2 f(x,y,z) - O_3\tilde{O}_2\bar{O}_1 f(x,y,z) +$$
$$+ O_1O_2\bar{O}_3 f(x,y,z) + O_1O_3\bar{O}_2 f(x,y,z) + O_2O_3\bar{O}_1 f(x,y,z) \Big| dxdydz \le$$

$$\le \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left| \left(O_1\tilde{O}_2 - O_1\tilde{O}_2\bar{O}_3\right) f(x,y,z) \right| dxdydz +$$
$$+ \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left| \left(O_1\tilde{O}_3 - O_1\tilde{O}_3\bar{O}_2\right) f(x,y,z) \right| dxdydz +$$
$$+ \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left| \left(O_2\tilde{O}_1 - O_2\tilde{O}_1\bar{O}_3\right) f(x,y,z) \right| dxdydz +$$

$$+\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left|\left(O_2\tilde{O}_3 - O_2\tilde{O}_3\bar{O}_1\right) f(x,y,z)\right| dxdydz +$$

$$+\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left|\left(O_3\tilde{O}_1 - O_3\tilde{O}_1\bar{O}_2\right) f(x,y,z)\right| dxdydz +$$

$$+\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left|\left(O_3\tilde{O}_2 - O_3\tilde{O}_2\bar{O}_1\right) f(x,y,z)\right| dxdydz +$$

$$+\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left|\left(O_1 O_2 - O_1 O_2\bar{O}_3\right) f(x,y,z)\right| dxdydz +$$

$$+\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left|\left(O_1 O_3 - O_1 O_3\bar{O}_2\right) f(x,y,z)\right| dxdydz +$$

$$+\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left|\left(O_2 O_3 - O_2 O_3\bar{O}_1\right) f(x,y,z)\right| dxdydz \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{\ell-1}\sum_{\tilde{j}=0}^{\ell^{3/2}-1}\sum_{\bar{s}=0}^{\ell^3-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\int_{\tilde{y}_{\tilde{j}}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+1}}\int_{\bar{z}_{\bar{s}}}^{\bar{z}_{\bar{s}+1}}\int_{\bar{z}_{\bar{s}}}^{\bar{z}_{\bar{s}+1}} \left|f^{(0,0,r)}(x_k,\tilde{y}_{\tilde{j}},\zeta)\right|\left|\bar{G}_{3\bar{s}}(z,\zeta,r)\right| d\zeta dxdydz +$$

$$+\sum_{k=0}^{\ell-1}\sum_{\tilde{s}=0}^{\ell^{3/2}-1}\sum_{\bar{j}=0}^{\ell^3-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\int_{\tilde{z}_{\tilde{s}}}^{\tilde{z}_{\tilde{s}+1}}\int_{\bar{y}_{\bar{j}}}^{\bar{y}_{\bar{j}+1}}\int_{\bar{y}_{\bar{j}}}^{\bar{y}_{\bar{j}+1}} \left|f^{(0,r,0)}(x_k,\eta,\tilde{z}_{\tilde{s}})\right|\left|\bar{G}_{2\bar{j}}(y,\eta,r)\right| d\eta dxdydz +$$

$$+\sum_{\tilde{k}=0}^{\ell^{3/2}-1}\sum_{j=0}^{\ell-1}\sum_{\bar{s}=0}^{\ell^3-1}\int_{\tilde{x}_{\tilde{k}}}^{\tilde{x}_{\tilde{k}+1}}\int_{y_j}^{y_{j+1}}\int_{\bar{z}_{\bar{s}}}^{\bar{z}_{\bar{s}+1}}\int_{\bar{z}_{\bar{s}}}^{\bar{z}_{\bar{s}+1}} \left|f^{(0,0,r)}(\tilde{x}_{\tilde{k}},y_j,\zeta)\right|\left|\bar{G}_{3\bar{s}}(z,\zeta,r)\right| d\zeta dxdydz +$$

$$+\sum_{j=0}^{\ell-1}\sum_{\tilde{s}=0}^{\ell^{3/2}-1}\sum_{\bar{k}=0}^{\ell^3-1}\int_{\bar{x}_{\bar{k}}}^{\bar{x}_{\bar{k}+1}}\int_{\tilde{z}_{\tilde{s}}}^{\tilde{z}_{\tilde{s}+1}}\int_{y_j}^{y_j}\int_{\bar{x}_{\bar{k}}}^{\bar{x}_{\bar{k}+1}} \left|f^{(r,0,0)}(\xi,y_j,\tilde{z}_{\tilde{s}})\right|\left|\bar{G}_{1\bar{k}}(x,\xi,r)\right| d\xi dxdydz +$$

$$+\sum_{s=0}^{\ell-1}\sum_{\tilde{k}=0}^{\ell^{3/2}-1}\sum_{\bar{j}=0}^{\ell^3-1}\int_{\tilde{x}_{\tilde{k}}}^{\tilde{x}_{\tilde{k}}}\int_{z_s}^{z_{s+1}}\int_{\bar{y}_{\bar{j}}}^{\bar{y}_{\bar{j}+1}}\int_{\bar{y}_{\bar{j}}}^{\bar{y}_{\bar{j}+1}} \left|f^{(0,r,0)}(\tilde{x}_{\tilde{k}},\eta,z_s)\right|\left|\bar{G}_{2\bar{j}}(y,\eta,r)\right| d\eta dxdydz +$$

$$+\sum_{s=0}^{\ell-1}\sum_{\tilde{j}=0}^{\ell^{3/2}-1}\sum_{\bar{k}=0}^{\ell^3-1}\int\limits_{\bar{x}_{\bar{k}}}^{\bar{x}_{\bar{k}+1}}\int\limits_{z_s}^{z_{s+1}}\int\limits_{\tilde{y}_{\tilde{j}}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+1}}\int\limits_{\bar{x}_{\bar{k}}}^{\bar{x}_{\bar{k}+1}}\left|f^{(r,0,0)}(\xi,\tilde{y}_{\tilde{j}},z_s)\right|\left|\bar{G}_{1\bar{k}}(x,\xi,r)\right|d\xi dxdydz+$$

$$=\sum_{k=0}^{\ell-1}\sum_{j=0}^{\ell^3-1}\sum_{\bar{s}=0}^{\ell^3-1}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\int\limits_{y_j}^{y_{j+1}}\int\limits_{\bar{z}_{\bar{s}}}^{\bar{z}_{\bar{s}+1}}\int\limits_{\bar{z}_{\bar{s}}}^{\bar{z}_{\bar{s}+1}}\left|f^{(0,0,r)}(x_k,y_j,\zeta)\right|\left|\bar{G}_{3\bar{s}}(z,\zeta,r)\right|d\zeta dxdydz+$$

$$+\sum_{k=0}^{\ell-1}\sum_{s=0}^{\ell-1}\sum_{\bar{j}=0}^{\ell^3-1}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\int\limits_{z_s}^{z_{s+1}}\int\limits_{\bar{y}_{\bar{j}}}^{\bar{y}_{\bar{j}+1}}\int\limits_{\bar{y}_{\bar{j}}}^{\bar{y}_{\bar{j}+1}}\left|f^{(0,r,0)}(x_k,\eta,z_s)\right|\left|\bar{G}_{2\bar{j}}(y,\eta,r)\right|d\eta dxdydz+$$

$$+\sum_{j=0}^{\ell-1}\sum_{s=0}^{\ell^3-1}\sum_{\bar{k}=0}^{\ell^3-1}\int\limits_{\bar{x}_{\bar{k}}}^{\bar{x}_{\bar{k}+1}}\int\limits_{z_s}^{z_{s+1}}\int\limits_{y_j}^{y_J}\int\limits_{\bar{x}_{\bar{k}}}^{\bar{x}_{\bar{k}+1}}\left|f^{(r,0,0)}(\xi,y_j,z_s)\right|\left|\bar{G}_{1\bar{k}}(x,\xi,r)\right|d\xi dxdydz\le$$

$$=M\ell\Delta\ell^{3/2}\Delta_1\ell^3\frac{2\Delta_2^{\;r+1}}{(r+2)!}+3M\ell\Delta\ell^{3/2}\Delta_1\ell^3\frac{2\Delta_2^{\;r+1}}{(r+2)!}+3M\ell\Delta\ell\Delta\ell^3\frac{2\Delta_2^{\;r+1}}{(r+2)!}=$$

$$=3M\frac{2\Delta_2^{\;r}}{(r+2)!}+3M\frac{2\Delta_2^{\;r}}{(r+2)!}+3M\frac{2\Delta_2^{\;r}}{(r+2)!}=\frac{6}{(r+2)!}\frac{3M}{\ell^{3r}}=\frac{18}{(r+2)!}\frac{M}{\ell^{3r}}.$$

Отже, $\left|I_1^3(m,n,p)-\bar{\Phi}_1^3(m,n,p)\right|\le\dfrac{8\tilde{M}}{[(r+2)!]^3}\dfrac{1}{\ell^{3r}}+\dfrac{12\bar{M}}{[(r+2)!]^2}\dfrac{1}{\ell^{3r}}+\dfrac{18}{(r+2)!}\dfrac{M}{\ell^{3r}}$.

Теорема доведена.

6. Кубатурна формула обчислення 3 D коефіцієнтів Фур'є з використанням класичних операторів сплайн-інтерполяції

Побудуємо кубатурну формулу наближеного обчислення $I_\mu^3(m,n,p)$, $\mu=1,2,3$ з похибкою наближення $O\left(\ell^{-3r}\right)$. Нехай є $N=\left(\ell^3+1\right)^3$ значень функції $f(x,y,z)$.

Теорема 2. Якщо $f(x,y,z)$ задовольняє умовам $\left|f^{(r,0,0)}(x,y,z)\right|\le M$, $\left|f^{(0,r,0)}(x,y,z)\right|\le M$, $\left|f^{(0,0,r)}(x,y,z)\right|\le M$ і для обчислення інтегралів $I_\mu^3(m,n,p)$, $\mu=1,2,3$ використовувати кубатурні формули $\tilde{\Phi}_\mu^3$, $\mu=1,2,3$, наприклад:

$$\widetilde{\Phi}_1^3(m,n,p)=\sum_{\overline{k}=0}^{\ell^3-1}\sum_{\overline{j}=0}^{\ell^3-1}\sum_{\overline{s}=0}^{\ell^3-1} f\left(\overline{x_{\overline{k}}},\overline{y_{\overline{j}}},\overline{z_{\overline{s}}}\right)\times$$

$$\times\int_{\overline{x_{\overline{k}}}}^{\overline{x_{\overline{k}+1}}} h_{1\overline{k}}(x)\sin 2\pi mx dx \int_{\overline{y_{\overline{j}}}}^{\overline{y_{\overline{j}+1}}} \overline{h}_{2\overline{j}}(y)\sin 2\pi ny dy \int_{\overline{z_{\overline{s}}}}^{\overline{z_{\overline{s}+1}}} \overline{h}_{3\overline{s}}(z)\sin 2\pi pz dz,$$

$$\overline{x_{\overline{k}}}=\overline{k}\Delta_2,\ \overline{y_{\overline{j}}}=\overline{j}\Delta_2,\ \overline{z_{\overline{s}}}=\overline{s}\Delta_2,\ \overline{k},\overline{j},\overline{s}=0,\ell^3,\ \Delta_2=\frac{1}{\ell^3},$$

то має місце наступна оцінка похибки

$$\left|I_1^3(m,n,p)-\widetilde{\Phi}_1^3(m,n,p)\right|\le\frac{6}{(r+2)!}M\frac{1}{\ell^{3r}}.$$

Доведення. Доведення теореми відбувається за наступною схемою:

$$\left|I_1^3(m,n,p)-\widetilde{\Phi}_1^3(m,n,p)\right|\le$$

$$\le\sum_{\overline{k}=0}^{\ell^3-1}\sum_{\overline{j}=0}^{\ell^3-1}\sum_{\overline{s}=0}^{\ell^3-1}\int_{\overline{x_{\overline{k}}}}^{\overline{x_{\overline{k}+1}}}\int_{\overline{y_{\overline{j}}}}^{\overline{y_{\overline{j}+1}}}\int_{\overline{z_{\overline{s}}}}^{\overline{z_{\overline{s}+1}}}\left|f(x,y,z)-f\left(\overline{x_{\overline{k}}},\overline{y_{\overline{j}}},\overline{z_{\overline{s}}}\right)\right|\left|h_{1\overline{k}}(x)\right|\left|\overline{h}_{2\overline{j}}(y)\right|\left|\overline{h}_{3\overline{s}}(z)\right|dxdydz=$$

$$=\sum_{\overline{k}=0}^{\ell^3-1}\sum_{\overline{j}=0}^{\ell^3-1}\sum_{\overline{s}=0}^{\ell^3-1}\int_{\overline{x_{\overline{k}}}}^{\overline{x_{\overline{k}+1}}}\int_{\overline{y_{\overline{j}}}}^{\overline{y_{\overline{j}+1}}}\int_{\overline{z_{\overline{s}}}}^{\overline{z_{\overline{s}+1}}}\left|f(x,y,z)-f\left(\overline{x_{\overline{k}}},y,z\right)+f\left(\overline{x_{\overline{k}}},y,z\right)-f\left(\overline{x_{\overline{k}}},\overline{y_{\overline{j}}},z\right)+\right.$$

$$\left.+f\left(\overline{x_{\overline{k}}},\overline{y_{\overline{j}}},z\right)-f\left(\overline{x_{\overline{k}}},\overline{y_{\overline{j}}},\overline{z_{\overline{s}}}\right)\right|\left|h_{1\overline{k}}(x)\right|\left|\overline{h}_{2\overline{j}}(y)\right|\left|\overline{h}_{3\overline{s}}(z)\right|dxdydz\le$$

$$\le\sum_{\overline{k}=0}^{\ell^3-1}\sum_{\overline{j}=0}^{\ell^3-1}\sum_{\overline{s}=0}^{\ell^3-1}\int_{\overline{x_{\overline{k}}}}^{\overline{x_{\overline{k}+1}}}\int_{\overline{y_{\overline{j}}}}^{\overline{y_{\overline{j}+1}}}\int_{\overline{z_{\overline{s}}}}^{\overline{z_{\overline{s}+1}}}\int_{\overline{x_{\overline{k}}}}^{\overline{x_{\overline{k}+1}}}\left|f^{(r,0,0)}(\xi,y,z)\right|\left|\overline{G}_{1\overline{k}}(x,\xi,r)\right|d\xi dxdydz+$$

$$+\sum_{\overline{k}=0}^{\ell^3-1}\sum_{\overline{j}=0}^{\ell^3-1}\sum_{\overline{s}=0}^{\ell^3-1}\int_{\overline{x_{\overline{k}}}}^{\overline{x_{\overline{k}+1}}}\int_{\overline{y_{\overline{j}}}}^{\overline{y_{\overline{j}+1}}}\int_{\overline{z_{\overline{s}}}}^{\overline{z_{\overline{s}+1}}}\int_{\overline{y_{\overline{j}}}}^{\overline{y_{\overline{j}+1}}}\left|f^{(0,r,0)}(\overline{x_{\overline{k}}},\eta,z)\right|\left|\overline{G}_{2\overline{j}}(y,\eta,r)\right|d\eta+$$

$$+\sum_{\overline{k}=0}^{\ell^3-1}\sum_{\overline{j}=0}^{\ell^3-1}\sum_{\overline{s}=0}^{\ell^3-1}\int_{\overline{x_{\overline{k}}}}^{\overline{x_{\overline{k}+1}}}\int_{\overline{y_{\overline{j}}}}^{\overline{y_{\overline{j}+1}}}\int_{\overline{z_{\overline{s}}}}^{\overline{z_{\overline{s}+1}}}\int_{\overline{z_{\overline{s}}}}^{\overline{z_{\overline{s}+1}}}\left|f^{(0,0,r)}(\overline{x_{\overline{k}}},\overline{y_{\overline{j}}},\zeta)\right|\left|\overline{G}_{3\overline{s}}(z,\zeta,r)\right|d\zeta dxdydz\le$$

$$\le 3M\ell^3\ell^3\ell^3\Delta_2\Delta_2\frac{2\Delta_2^{\,r+1}}{(r+2)!}=\frac{6}{(r+2)!}M\frac{1}{\ell^{3r}}.$$

Теорема доведена.

7. Про переваги кубатурних формул з використанням інтерфлетації функцій

Проведемо порівняльний аналіз кубатурних формул $\Phi_{\mu}^{3}(m,n,p)$, $\tilde{\Phi}_{\mu}^{3}(m,n,p)$, $\mu=1,2,3$.

Теорема 3. Нехай задано $N=\left(\ell^3+1\right)^3=O\left(\ell^9\right)$ значень функції $f(x,y,z)$. Кубатурні формули $\tilde{\Phi}_{\mu}^{3}(m,n,p)$, $\mu=1,2,3$ для наближеного обчислення $I_{\mu}^{3}(m,n,p)$, $\mu=1,2,3$ та досягнення точності $O\left(\frac{1}{\ell^{3r}}\right)$ використовують всі $N=\left(\ell^3+1\right)^3=O\left(\ell^9\right)$ значень функції $f(x,y,z)$. Кубатурні формули $\tilde{\Phi}_{\mu}^{3}(m,n,p)$, $\mu=1,2,3$, побудовані з використанням інтерфлетації функцій, використовують в $O\left(\sqrt{\ell^7}\right)$ раз менше значень функції $f(x,y,z)$ для досягнення тої ж похибки наближення $O\left(\frac{1}{\ell^{3r}}\right)$.

Доведення. З теорем 1 та теореми 2 випливає, що похибка наближення інтегралів $I_{\mu}^{3}\left(m,n,p\right)$, $\mu=1,2,3$ за допомогою кубатурних формул $\Phi_{\mu}^{3}(m,n,p)$, $\tilde{\Phi}_{\mu}^{3}(m,n,p)$, $\mu=1,2,3$ має однаковий порядок наближення $O\left(\frac{1}{\ell^{3r}}\right)$.

Кубатурні формули $\tilde{\Phi}_{\mu}^{3}(m,n,p)$, $\mu=1,2,3$, побудовані за допомогою класичної інтерполяції вимагають $N=\left(\ell^3+1\right)^3=O\left(\ell^9\right)$ значень функції $f_{\overline{k}\,\overline{j}\,\overline{s}}=f\left(x_{\overline{k}},y_{\overline{j}},z_{\overline{s}}\right)$, $\overline{k},\overline{j},\overline{s}=\overline{0,\ell^3}$. Кубатурні формули $\Phi_{\mu}^{3}(m,n,p)$, $\mu=1,2,3$, які використовують оператор-інтерполянт, побудований на основі оператора-інтерфлетанта, вимагає $Q=O\left(6\left(\ell^3+1\right)\left(\ell^{3/2}+1\right)\left(\ell+1\right)\right)=O\left(\ell^{11/2}\right)$ значень функції.

Таким чином, кубатурні формули $\Phi_{\mu}^{3}(m,n,p)$, $\mu=1,2,3$ потребують в

$$O\left(\frac{N}{Q}\right)=O\left(\frac{\ell^9}{\ell^{11/2}}\right)=O\left(\ell^{9-11/2}\right)=O\left(\ell^{7/2}\right)$$

раз менше значень функції $f(x,y,z)$ для досягнення похибки наближення $O\left(\frac{1}{\ell^{3r}}\right)$. Теорема доведена.

8. Чисельний експеримент

В таблиці 1 для функції $f(x,y,z)=\sin(x+y+z)$ наведені результати наближеного обчислення інтегралу $I_1^3(m,n,p)$ при різних m,n,p за кубатурними формулами $\Phi_1^3(m,n,p)$ та $\tilde{\Phi}_1^3(m,n,p)$.

Введемо позначення: $\varepsilon=\left|I_1^3(m,n,p)-\Phi_1^3(m,n,p)\right|$, $\tilde{\varepsilon}=\left|I_1^3(m,n,p)-\tilde{\Phi}_1^3(m,n,p)\right|$, кількість значень функції $f(x,y,z)$, що використовують в своїй побудові кубатурні формули $\Phi_1^3(m,n,p)$ та $\tilde{\Phi}_1^3(m,n,p)$, відповідно позначаються Q та N.

Наведемо точні значення наближуваних інтегралів:

$$I_1^3(1,2,3)=0.000043384641833,\quad I_1^3(2,3,4)=0.000010588186623,$$
$$I_1^3(3,4,5)=0.00000421272284,\quad I_1^3(4,5,6)=0.000002101912063,$$
$$I_1^3(5,6,7)=0.000001199811142.$$

Табл.1

m	n	p	ℓ	ε	Q	$\tilde{\varepsilon}$	N
1	2	3	4	$2.8\cdot10^{-9}$	2048	$2.6\cdot10^{-9}$	262144
2	3	4	4	$7.1\cdot10^{-10}$	2048	$6.4\cdot10^{-10}$	262144
3	4	5	4	$2.8\cdot10^{-10}$	2048	$2.5\cdot10^{-10}$	262144
4	5	6	4	$1.5\cdot10^{-10}$	2048	$1.2\cdot10^{-10}$	262144
7	8	9	4	$9.8\cdot10^{-11}$	2048	$7.3\cdot10^{-11}$	262144

З результатів таблиці 1 можна зробити висновок, що для отримання похибки $\varepsilon=O\left(\frac{1}{\ell^{3r}}\right)$ кубатурна формула $\Phi_1^3(m,n,p)$ є більш ефективною, ніж $\tilde{\Phi}_1^3(m,n,p)$ з точки зору використаних значень функції $f(x,y,z)$.

9. Висновки за результатами та подальші дослідження

В даній роботі досліджуються кубатурні формули обчислення коефіцієнтів Фур'є функції трьох змінних $f(x,y,z)$, які використовують в своїй побудові оператори сплайн-інтерфлетації функцій на класі диференційовних функцій. Вхідні дані – це значення функції у вузлових точках. Отримана оцінка похибки наближеного обчислення 3 D коефіцієнтів Фур'є. Запропоновані кубатурні формули мають переваги над відомими, так як для досягнення заданої точності використовують менше значень функції $f(x,y,z)$. Чисельний експеримент підтверджує теоретичні результати.

Метою подальших досліджень – питання якості побудованих кубатурних формул наближеного обчислення 3 D коефіцієнтів Фур'є. Необхідно довести,

що кубатурні формули обчислення коефіцієнтів Фур'є функції трьох змінних $f(x,y,z)$, які використовують в своїй побудові оператори сплайн-інтерфлетації функцій, є оптимальними за порядком точності.

ЛІТЕРАТУРА

1. Литвин О.М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування. -Харків.: Основа, 2002. -544 с.
2. Литвин О.М., Удовиченко В.М. Оператори фінітного тривимірного перетворення Фур'є. Радиоэлектроника и информатика №4(29), 2004. Харьковский национальный университет радиоэлектроники. – С. 130-133.
3. Литвин О.М., Удовиченко В.М. Оператори фінітного тривимірного дискретно-неперервного перетворення Фур'є на основі методу Файлона та трилінійних сплайнів, точні на тригонометричних поліномах заданого порядку. // Інформаційно-керуючі системи на залізничному транспорті.1,2 (51,52)' 2005. УкрДАЗТ. – С. 19-23.
4. Литвин О.М., Удовиченко В.М. Тривимірні фінітні перетворення Фур'є та Хартлі з використанням інтерфлетації функцій. Вестник Национального технического университета «ХПИ». Сборник научых тудов. Темтический выпуск, «Автоматика и приборостроение», 38' 2005, Харьков 2005, С. 90-130.
5. Литвин О.М., Гулік Л.І. Інтерфлетація функцій при розв'язуванні тривимірної задачі теплопровідності. – Київ.: Наукова думка, 2011. – 210 с.
6. Нечуйвітер О.П. Про похибку наближеного обчислення 3 D коефіцієнтів Фур'є кубатурними формулами з використанням інтерполянта, побудованого на основі сплайн-інтерфлетанта. Праці міжнародної молодіжної математичної школи "Питання оптимізації обчислень (ПОО-XXXVII)" Київ: Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, 2011. – С. 133.
7. Литвин О.М., Нечуйвітер О.П. Кубатурна формула для обчислення 2 D коефіцієнтів Фур'є з використанням інтерлінації функцій // Вісник Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна. Збірник наукових праць. Серія: «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». – Харків, № 926, 2010 р. – С. 153-160.

Надійшла – 25.10.2011.

УДК 517.946.9

Температурное поле бесконечного цилиндра с движущимся источником тепла

В. П. Ляшенко
Кременчугский национальный университет им. Михаила Остроградского, Украина

В работе рассмотрена математическая модель температурного поля бесконечного цилиндра, разогреваемого движущимся, рассредоточенным на конечном отрезке источником тепла. Этот источник представлен с помощью единичной функции Хевисайда. Математическая модель построена в виде нелинейной краевой задачи на сопряжение для уравнения теплопроводности. Путем преобразований, задача сведена к решению системы краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка с условиями сопряжения. В линейном случае получено решение задачи и построен график температурного распределения.

Ключевые слова: *подвижная система координат, рассредоточенный движущейся источник тепла, температурное распределение, уравнение теплопроводности.*

В роботі розглянута математична модель температурного поля нескінченного циліндра, що разігрівається рухомим, розосередженим на скінченому відрізку джерелом тепла, яке записано за допомогою одиничної функції Хевісайда. Математична модель побудована у вигляді нелінійної крайової задачі на спряження для рівняння теплопровідності. Шляхом перетворень, задача зведена до розв'язання системи крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь 2-го порядка з умовами спряження. В лінійному випадку отримано розв'язок задачі і побудовано графік температурного розподілу.

Ключові слова: *рухома система координат, розосереджене рухоме джерело тепла, температурне розподіл, рівняння теплопровідності.*

The mathematical model of temperature field of an infinite cylinder considered. The cylinder is heated by a moving dispersed on a finite interval heat source. Mathematical model in the form of a non-linear boundary value problem for the heat equation for the pair built. A conjugating problem is solved. In the linear case, the solution obtained. Graph of the temperature distribution is built.

Key words: *moving coordinate system, distributed moving heat source, temperature distribution, heat equation.*

1.Введение.

Процессы термической обработки длиномерных изделий таких как проволока, лента, профилей различной конфигурации, осуществляются путем пропускания через изделие электрического тока. Он подводится к изделию с помощью контактов или индуктора на конечном участке [1]. Для обеспечения стабильных физико - механических свойств металла необходимо в зоне нагрева поддерживать и контролировать заданную температуру. Этого можно достчь с помощью построения соответствующих математических моделей [2]. В существующих математических моделях рассматривается температурное распределение в зоне нагрева движущейся проволоки и не исследуется температурное поле вокруг нее [3–5]. Во многих случаях знание такого распределения представляет значительный научный и практический интерес.

© Ляшенко В. П.,2013

2.Цель работы.

Целью работы есть построение температурного поля в бесконечной цилиндрической области, с постоянно или периодически действующим внутри нее рассредоточенным, на конечном отрезке, движущемся источником тепла.

3. Материалы и результаты исследований.

Для расчета температурного распределения $T(P,t)$ предполагается, что бесконечный цилиндр с постоянными теплофизическими характеристиками λ, c, ρ_n нагревается в зоне нагрева длиной $l = z_2 - z_1,\ z_1 < z < z_2$ источником $W(P,T) = W(r,z,t,T)$, который движется вдоль оси Oz в положительном направлении со скоростью $v(t)$. Начальная температура равна $\lim\limits_{z\to\pm\infty} T = T_0$. Теплообмен поверхности цилиндра с окружающей средой осуществляется по законам Ньютона и Стефана - Больцмана[5].

В начальной стадии имеет место переходной процесс нагрева, т.е. переменной является скорость и плотность источников тепла, причем температура в конце зоны нагрева должна быть постоянной. В установившемся режиме плотность $W(P,T) = W(r,z,t,T)$ источников и скорость $v(t)$ их движения постоянны

$$W(z,t,T) = w(t,T)\left[\eta\left(z - z_1(t)\right) - \eta\left(z - z_2(t)\right)\right], \tag{1}$$

где $\eta\left(z - z_i(t)\right)$ – единичная функция Хевисайда.

$$w(t,T) = w(T)\,f(t) = \frac{I^2 \rho_0 (1+\beta T)}{\pi^2 r_0^4} f(t),\ z_1(t) = -\frac{l}{2} + v(t)t,\quad z_2(t) = \frac{l}{2} + v(t)t.$$

Описанной выше физической модели процесса нагрева соответствует в области $\Omega \times t = \{0 < r < r_0, z < \infty, t > 0\}$ следующая математическая модель

$$\lambda \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \lambda \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right) - c\rho_n \frac{\partial T}{\partial t} =$$

$$= -W(r,z,t,T) = -\frac{I^2 \rho_0 (1+\beta T)\, f(t)}{\pi^2 r_0^4}\left[\eta\left(z - z_1(t)\right) - \eta\left(z - z_2(t)\right)\right], \tag{2}$$

$$T(r,z,0) = T_0, \tag{3}$$

$$\lambda \frac{\partial T(r_0,z,0)}{\partial r} = f(t)\left[\alpha\left(T_0 - T\right) + \varepsilon\sigma\left(T^4{}_0 - T^4\right)\right],\quad \frac{\partial T(0,z,0)}{\partial r} = 0. \tag{4}$$

Функция $f(t)$ кусочно-монотонная [3]. Перейдем к рассмотрению упрощенной модели. Положим в задаче (1)–(4) функцию $f(t) = 1$ и рассмотрим усредненное, по радиусу, температурное поле [6].

$$u(z,t,T) = \frac{2}{r_0^2}\int_0^{r_0} T(r,z,t,T)r\,dr. \tag{5}$$

В результате преобразования уравнения (2) с учетом (5) задача в области $\Omega \times t = \{, z < \infty, t > 0\}$ записывается в следующем виде

$$+\lambda\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - c\rho_n\frac{\partial T}{\partial t} + \left\{w\beta f(t)\left[\eta(z - z_1(t)) - \eta(z - z_2(t))\right] - \frac{2\alpha}{r_0}\right\}u$$
$$\frac{2\varepsilon\sigma}{r_0}u^4 = -wf(t)\left[\eta(z - z_1(t)) - \eta(z - z_2(t))\right] - \frac{2\alpha T_0}{r_0} - \frac{2\varepsilon\sigma}{r_0}T_0^4 \tag{6}$$

$$u(z,0) = T_0, \quad \lim_{z\to\pm\infty} u = T_0, \tag{7}$$

где $w = \dfrac{I^2\rho_0}{\pi^2 r_0^4}$.

В задаче удобно перейти к безразмерным величинам, параметрам и критериям Био, Старка, Померанцева [5]

$$x = \frac{z}{l}, \tau = \frac{a^2 t}{l^2}, \mu = \frac{l}{r_0}, W = \frac{I^2\rho_0}{\pi^2 r_0^4}, \nu = \beta T_0, Bi = 2\alpha l/\lambda, S = 2\varepsilon\sigma l^2 T_0^3/(\lambda r_0),$$
$$Po = wl^2/(\lambda T_0), a^2 = \lambda/(c\rho_n), \theta_0 = 0, \psi(\tau) = \frac{l}{a^2}\nu\left(\frac{l}{a^2}\tau\right), \theta = \frac{u - T_0}{T_0}. \tag{8}$$

После подстановки (8) в уравнение (6), начальное условие и условие регулярности (7), задача (6)-(7) становится однородной

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} - \frac{\partial\theta}{\partial\tau} + \left\{\nu Po\left[\eta\left(x + \frac{1}{2} - \psi(\tau)\tau\right) - \eta\left(x - \frac{1}{2} - \psi(\tau)\tau\right)\right] - \mu Bi\right\}\theta -$$
$$-S\left(1 + \theta^4\right) = -(1 - \nu)Po\left[\eta\left(x + \frac{1}{2} - \psi(\tau)\tau\right) - \eta\left(x - \frac{1}{2} - \psi(\tau)\tau\right)\right] - S \tag{9}$$

$$\theta(x,0) = 0, \;\; \theta(x,\tau) = 0, x \to \pm\infty \tag{10}$$

В связи с тем, что температурное поле цилиндрической области, нагреваемой внутренними источниками тепла, зависит от большого числа физических параметров, переход от анализа влияния каждого параметра в отдельности на температурное распределение к анализу влияния комплексов параметров имеет целый ряд преимуществ. Прежде всего, это уменьшение числа анализируемых факторов. Анализ температурного поля в обобщенных координатах позволяет сделать выводы о проявлении внутренних связей при нагреве вне зависимости от теплофизических характеристик, диаметра, т.е. определить наиболее общие закономерности, характерные для всего класса нагреваемых материалов, имеющих общую физическую природу.

В случае если источник тепла движется с постоянной скоростью ψ, то после перехода к подвижной системе координат $y = x - \psi\tau$ задача для неоднородного параболического уравнения (9)–(10) превращается в задачу для

квазилинейного обыкновенного дифференциального уравнения с условием регулярности на бесконечности

$$\frac{d^2\theta}{dy^2}+\psi\frac{d\theta}{dy}+b(y)\theta+S(1+\theta)^4=-f(y)-S,\ |y|>0 \qquad (11)$$

$$\theta(y)=0,\ \ y\to\pm\infty \qquad (12)$$

Дифференциальное уравнение (11) является уравнением с кусочно-постоянным коэффициентом и правой частью

$$b(y)=\begin{cases}-\mu Bi, \forall|y|>\dfrac{1}{2}\\ \nu Po-\mu Bi, \forall|y|\le\dfrac{1}{2}\end{cases}, \qquad (13)$$

$$f(y)=\begin{cases}(1+\nu)Po,\ \ \forall|y|\le\dfrac{1}{2}\\ 0,\ \forall|y|>\dfrac{1}{2}\end{cases} \qquad (14)$$

Это позволяет получить ее аналитическое решение в явном виде. Для этого рассмотрим задачу (11)–(12) как задачу на сопротивление. В таком случае уравнение (11) распадается на три уравнения с условиями сопряжения на границах.

Остановимся на рассмотрении линейного случая, когда в уравнении (11) – (12) нелинейной составляющей можно пренебречь. Тогда задача (11)–(12) принимает вид

$$\theta''+\psi\theta'-\mu Bi\theta=0,\ -\infty<y<\frac{1}{2} \qquad (15)$$

$$\theta(-\infty)=0, \qquad (16)$$

$$\theta''+\psi\theta'+(\nu Po-\mu Bi)\theta=-(1+\nu)Po,\ \ |y|\le\frac{1}{2} \qquad (17)$$

$$\theta''+\psi\theta'-\mu Bi\theta=0,\ \ y>\frac{1}{2} \qquad (18)$$

$$\theta(\infty)=0, \qquad (19)$$

$$\theta\left(-\frac{1}{2}+0\right)=\theta\left(-\frac{1}{2}-0\right),\ \ \theta\left(\frac{1}{2}-0\right)=\theta\left(\frac{1}{2}+0\right),$$
$$\theta'\left(-\frac{1}{2}+0\right)=\theta'\left(-\frac{1}{2}-0\right),\ \ \theta'\left(\frac{1}{2}-0\right)=\theta'\left(\frac{1}{2}+0\right). \qquad (20)$$

Общее решение задачи (15)–(16), (18)–(19) выписывается в виде

$$\theta(y) = C_1 e^{k_1 y}, \quad y < -\frac{1}{2} \tag{21}$$

$$\theta(y) = C_4 e^{k_2 y}, \quad y > \frac{1}{2} \tag{22}$$

где $k_{1,2} = -\dfrac{\psi}{2} \pm \sqrt{\dfrac{\psi^2}{4} + \mu Bi}$ – корни характеристического уравнения для уравнений (15),(18).

Общее решение неоднородного уравнения (17) записывается следующим образом

$$\theta(y) = C_2 e^{m_1 y} + C_3 e^{m_2 y} + \frac{(1+\nu)Po}{\nu Po - \mu Bi}, \quad |y| < \frac{1}{2} \tag{23}$$

где $m_{1,2} = -\dfrac{\psi}{2} \pm \sqrt{\dfrac{\psi^2}{4} + \mu Bi - \nu Po}$ – корни соответствующего уравнению (17) характеристического уравнения.

Для определения коэффициентов $C_1 \div C_4$ воспользуемся условием сопряжения (20), что приводит к решению следующей системы линейных уравнений относительно постоянных $C_1 \div C_4$

$$\begin{cases} C_1 e^{-k_1/2} - C_2 e^{-m_1/2} - C_3 e^{-m_2/2} = \theta^* \\ -C_1 e^{-k_1/2} + C_2 m_1 e^{-m_1/2} + C_3 m_2 e^{-m_2/2} = 0 \\ C_2 e^{m_1/2} + C_3 e^{m_2/2} - C_4 e^{k_2/2} = 0 \\ C_2 m_1 e^{m_1/2} + C_3 m_2 e^{m_2/2} - C_4 k_2 e^{k_2/2} = 0 \end{cases} \tag{24}$$

где $\theta^* = \dfrac{(1+\nu)Po}{\nu Po - \mu Bi}$.

Решение системы (24) по формулам Крамера [7] записывается в виде

$$C_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, C_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, C_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}, C_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta}, \tag{25}$$

где $\Delta = \begin{vmatrix} e^{-k_1/2} & -e^{-m_1/2} & e^{-m_2/2} & 0 \\ -k_1 e^{-k_1/2} & -m_1 e^{-m_1/2} & -m_2 e^{-m_2/2} & 0 \\ 0 & e^{m_1/2} & e^{m_2/2} & -e^{-k_2/2} \\ 0 & m_1 e^{m_1/2} & m_2 e^{m_2/2} & -k_2 e^{k_2/2} \end{vmatrix}$,

$$\Delta_1=\theta^*\left[e^{(k_2+m_1-m_2)/2}\left(m_1\left(m_2-k_2\right)+m_2\left(k_2-m_1\right)\right)+k_2\left(m_1-m_2\right)e^{(k_2-m_1-m_2)/2}\right],$$

$$\Delta_2=\theta^*\left[k_1k_2e^{(-k_1+k_2+m_2)/2}-k_2\left(k_1+m_2\right)e^{(-k_1+k_2-m_2)/2}\right],$$

$$\Delta_3=\theta^*\left[k_1\left(k_2-m_1\right)e^{(k_2+m_1-k_1)/2}-k_2\left(k_1-m_2\right)e^{(k_2-m_1-k_1)/2}\right],$$

$$\Delta_4=\theta^*\left[k_1\left(m_2-m_1\right)e^{(-k_1+m_1+m_2)/2}e^{(-k_1+m_1-m_2)/2}\left(m_2\left(m_1-k_1\right)-m_1\left(m_2-k_1\right)\right)\right]$$

Таким образом, подставив (25) в (21)–(23) получим температурное распределение в бесконечном цилиндре с движущимся рассредоточенным (на длине l) источником тепла.

Так как $|k_2|>k_1$ в решениях (21), (23), то имеет место более резкий подъем температур перед движущимся источником тепла. В инженерной практике этот результат позволяет подобрать усилия волочения таким образом, чтобы избежать обрывов при протягивании проволоки.

Если скорость движения мала, то профиль температурной кривой относительно прямой $y=1/2$ близкий к симметричному (Рис.1). При больших скоростях, когда $\varphi^2/4\gg\mu Bi$, наблюдается наиболее резкое падение температуры перед движущимся источником тепла.

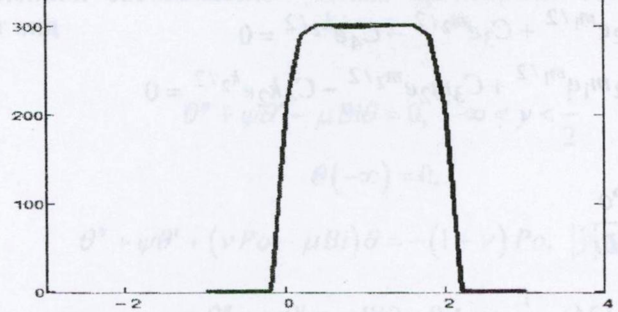

Рис. 1.–Температурное распределение в окрестности действия рассредоточенного источника тепла.

4. Выводы.

Построена математическая модель температурного поля неограниченной цилиндрической области, в которой действует постоянный или переменный движущийся источник тепла. Получено решение упрощенной задачи, построены температурные распределения. Качественный анализ решения (21)–(23) позволяет сделать вывод о характере температурного поля в неограниченной проволоке, разогреваемой рассредоточенным источником тепла.

Математическая модель может быть использована при разработке систем управления процессами термообработки длинномерных изделий внутренними источниками тепла.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коврев Г.С. Электроконтактный нагрев при обработке цветных металлов. – М.: Металлургия, 1975. 312 с.
2. Ляшенко В.П. Математична модель температурного поля рухомого ізотропного середовища / В.П. Ляшенко, О.Б. Кобильська // Вісник Запорізького національного університету, Серія «Фізико-математичні науки». – 2008. – № 1. – С. 130–135.
3. Ляшенко В. П. Дослідження температурних розподілів рухомого середовища з імпульсними джерелами тепла / В.П. Ляшенко, О.Б.Кобильська // Вісник Харківського національного університету, Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління».- 2010.-№ 890. –вип.13.– С.15-120
4. Ляшенко В.П. Задачі для рівняння теплопровідності у порошковій металургії./ В.П. Ляшенко, В.А. Ванін / Вісник НТУ «ХПІ» Математичне моделювання в техніці та технологіях, 2010. – Вип. 68. – С. 108 – 113.
5. Ляшенко В. П. Задачі термодифузії та методи їх розв'язку./під ред. Ляшенка В.П./ Кременчук, міська друк., 2012. 112 с.
6. Лыков А.В. Теория теплопроводности. / А.В. Лыков /– М.: Высшая школа, 1966. – 600 с.
7. Курош А.Г. Курс высшей алгебры./ А.Г. Курош / – М.: Наука, 1971. – 432 с.

Надійшла у першій редакції 04.03.2013, в останній - 11.03.2013.

УДК 517.929.7:681.3

Визначення параметрів керування температурним полем за допомогою оберненої задачі Стефана

В. П. Ляшенко

Кременчуцький національний університет ім. Михайла Остроградського, Украина

У вигляді нелінійної задачі Стефана розглянута математична модель температурного поля циліндричної області з рухомою межею та діючим у цій області змінним внутрішнім джерелом тепла Розв'язок нелінійної задачі знайдено чисельно-аналітичним методом, шляхом зведення крайової задачі до нелінійного інтегрального рівняння типу Гаммерштейна з ядром у вигляді функції Гріна та застосуванням методу ітерацій. На основі розв'язку оберненої задачі визначений параметр керування температурним полем, що дозволяє підтримувати на одній із границь області сталу температуру. В роботі визначено умови при яких температурне поле рухомої області буде сталим.

Ключові слова: *математична модель, рівняння теплопровідності, задача Стефана, інтегральне рівняння типу Гаммерштейна, функція Гріна, ітераційний алгоритм*

В виде нелинейной задачи Стефана рассмотрена математическая модель температурного поля цилиндрической области с движущейся границей и действующим в этой области переменным внутренним источником тепла. Решение нелинейной задачи найдено численно-аналитическим методом, путем ее сведения к нелинейному интегральному уравнению типа Гаммерштейна с ядром в виде функции Грина и последующего применения метода итераций. Используя решение обратной задачи определен параметр управления температурным полем, который позволяет поддерживать на одной из границ области постоянную температуру. В работе определено условие, при котором температурное поле движущейся области будет постоянным.

Ключевые слова: *математическая модель, уравнение теплопроводности, задача Стефана, интегральное уравнение типа Гаммерштейна, функция Грина, итерационный алгоритм.*

In the form of a nonlinear Stefan problem mathematical model of temperature field in a cylindrical area with moving abroad and working in the area variable internal heat source considered. Simplified formulation of the problem considered. For them, the analytical solutions are obtained. The solution of the nonlinear problem by numerically-analytical method found. Nonlinear problem to a nonlinear integral equation of Hammerstein type with the kernel in the form of the Green's function has been reduced, then the iterative method was applied. Control paramcter temperature field, which allows you to maintain one of the boundaries of the constant temperature was determined from the inverse problem. A condition that allows you to maintain a constant temperature of a moving area is defined.

Key words: *mathematical model, the heat equation, Stefan problem, the integral equation of Hammerstein type, Green function, iteration algorithm.*

1. Вступ

У порошковій металургії виробництво стрічки та дроту із тугоплавких металів, наприклад вольфраму, відбувається одночасно з процесом підігрівання металу [1]. Це викликано тим, що більшість тугоплавких металів не деформується при кімнатній температурі. Перед пластичною деформацією дріт, що рухається через зону нагрівання довжиною $\xi(t) = L - v(t)t$ зі швидкістю

© Ляшенко В. П., 2013

$v(t) \neq 0$, розігрівається електричним струмом I_0 до технологічної температури T_l, а потім потрапляє у пристрій для деформування. При цьому до одного кінця зони нагрівання підведений нерухомий струмопідвід, а до іншого рухомий. Розглянемо дріт у вигляді рухомого ізотропного середовища зі сталими теплофізичними характеристиками, що рухається через зону нагрівання зі швидкістю $v(t) \neq 0$ і нагрівається внутрішніми джерелами тепла у вигляді електричного струму, що через нього пропускається.

Проблема керування температурним полем, полягає у визначенні потужності джерел тепла $w(T,t) = \dfrac{I(t)^2 \rho_0 (1+\beta T)}{\pi^2 r_0^4}$ коли зона нагрівання зменшуючись прямує до нуля, а температура у кінці зони нагрівання повинна залишатися сталою. У цьому випадку для підтримки сталого значення температури основним параметром керування є сила струму $I(t)$. Задача визначення температурного розподілу в області межі, якої змінюються і прямують до нуля відноситься до задачі Стефана без зміни фазового стану середовища.

Задачам Стефана де досліджується зміна фазового стану на межі двох середовищ присвячено багато робіт [2,3]. Для рухомих середовищ такого типу задачі зустрічаються досить рідко.

2. Мета роботи

Метою роботи є визначення температурного розподілу у зоні нагрівання, довжина якої є змінною величиною $\xi(t) = L - v(t)t$, $0 < t < t_0$ та визначення такого параметра керування температурним полем при якому температура у кінці зони нагрівання весь час буде залишатися сталою.

3. Матеріали і результати досліджень

Для визначення температурного поля розглядається задача для лінійного рівняння теплопровідності у циліндричній системі координат (r,φ,z) в області $\Omega \times t$: $\{0 < z < \xi(t), \quad 0 < r < r_0 \quad 0 < t < t_0\}$. Зважаючи на фізичну природу діючих джерел тепла $w(T,t)$ та симетрію поля по координаті φ розглядається в області $\Omega \times t$: $\{0 < z < \xi(t), \quad 0 < r < r_0 \quad 0 < t < t_0\}$ наступна задача

$$\lambda \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \lambda\frac{\partial T}{\partial z} - v(t)c\rho\frac{\partial T}{\partial z} - c\rho\frac{\partial T}{\partial t} = -w(T,t), \quad (1)$$

$$T(r,z,0) = T, \quad (2)$$

$$T(r,0,t) = T, T(r,\xi(t),t) = T, \quad (3)$$

$$\lambda\frac{\partial T(r_0,z,t)}{\partial r} = -\alpha(T-T_c) - \varepsilon\sigma(T^4 - T_c{}^4), \qquad \frac{\partial T(0,z,t)}{\partial r} = 0, \quad (4)$$

де $w(T,t)=\dfrac{I(t)^2\rho_0(1+\beta T)}{\pi^2 r_0^4}$ - щільність діючих у циліндричному середовищі джерел тепла, $\lambda, c, \rho_0, \rho_n, \varepsilon$ - теплофізичні характеристики області, T_c – температура навколишнього середовища, σ – стала Стефана – Больцмана, $v(t)$ - швидкість руху середовища через зону нагрівання. Час t_0 визначається із умови $L-v(t)t=0$. Функції $w(T,t)$, $v(t)\in C^1$ - неперервні, додатно визначені.

Задача керування полягає у визначенні функції $w(T,t)$ у циліндричній області $\Omega\times t$, та умов при яких температура зони нагрівання буде сталою.

Температурне поле циліндра є змінною величиною, що залежить від параметра керування $I(t)$. З математичної точки зору визначення параметра керування $I(t)$, приводить до розв'язання оберненої задачі до задачі (1)-(4). Для цього необхідно щоб був відомий температурний розподіл у зоні нагрівання у будь-який момент часу.

На першому етапі дослідження вважаємо, що температурне поле невідоме. Для рівняння теплопровідності ставляться природні крайові умови теплообміну поверхні з навколишнім середовищем – ставиться крайова задача третього роду з не лінійністю у крайовій умові.

Якщо температурний розподіл уздовж радіуса циліндра не суттєвий, то можна перейти до розгляду усередненого температурного поля. При цьому враховується теплообмін поверхні з навколишнім середовищем [3].

Застосувавши до рівняння (1) оператор усереднення

$$u(z,t)=\frac{2}{r_0^2}\int_0^{r_0} T(r,z,t)\,r\,dr \tag{5}$$

і врахувавши умови теплообміну на границі області (4) отримаємо задачу

$$\lambda\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-v(t)c\rho_n\frac{\partial u}{\partial z}+u\left(\frac{I^2\rho_0\beta}{\pi^2 r_0^4}-\frac{2\alpha}{r_0}\right)+\frac{I^2\rho_0}{\pi^2 r_0^4}+\frac{2\alpha}{r_0}T_c-\frac{2\varepsilon\sigma}{r_0}(u^4-T_c^4)=c\rho_n\frac{\partial u}{\partial t}, \tag{6}$$

$$0<z<\xi(t)=L-v(t)t,\ 0\le t\le t_0$$

$$u(z,0)=T_0, \tag{7}$$

$$u(0,t)=T_0,\ u(\xi(t),t)=T_l,\ \xi(t)=L-v(t)t. \tag{8}$$

Розв'язок задачі шукаємо у два етапи. Спершу розв'язується задача (1)-(4) при умові $v(t)=v=const$, $\xi(t)=L=const, t>0$, та визначається сила струму I_0, що необхідна для підтримки у кінці зони нагрівання рухомого середовища температури T_l. Потім, вважаючи, що температурний розподіл у зоні нагрівання відомий розв'язується обернена задача та визначається сила струму $I(t)$, що необхідна для підтримки температури T_l коли довжина зони нагрівання прямує до нуля.

Маємо початково-крайову задачу для квазілінійного рівняння теплопровідності, аналітичний розв'язок якої отримати неможливо.

Розв'яжемо рівняння (6) при умові $v(t) = v = const$, $\xi(t) = L = const, t > 0$ та знайдемо температурний розподіл у зоні нагрівання.

Шукаємо розв'язок задачі у безрозмірних координатах

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} - V\frac{\partial\theta}{\partial x} - b(((T_l - T_c)\theta + T_c)^4 - T_c{}^4) + g_1\theta + Po(\tau)n = Pe\frac{\partial\theta}{\partial\tau}, \tag{9}$$

$$0 < x(\tau) < 1, \quad \tau > 0$$

$$\theta(x,0) = 0, \tag{10}$$

$$\theta(0,\tau) = 0, \theta(\xi(\tau),\tau) = 1,$$

де

$$x(\tau) = \frac{z(\tau)}{L}, \tau = \frac{t}{t_0}, n = \beta T_c + 1, \theta = \frac{u - T_0}{T_l - T_0}, Pe = \frac{c\rho_n L^2}{\lambda\tau_0}, \mu = \frac{2\alpha L^2}{\lambda r_0}, b = \frac{2\varepsilon\sigma\cdot L^2}{r_0\lambda(T_l - T_c)},$$

$$V(\tau) = \frac{v(\tau)c\rho_n L^2}{\lambda L}, Po(\tau) = \frac{I(\tau)^2\rho_0 L^2}{\lambda(T_l - T_c)\pi^2 r_0^4}, m = \beta(T_l - T_c), g_1 = (-\mu + Po(\tau)m).$$

Коли $\tau > 1$ то швидкість руху через зону нагрівання стала. В цьому випадку похідна за часом в рівнянні (9) зникає і ми приходимо до розв'язання крайової задачі для квазілінійного диференціального рівняння.

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - V\frac{d\theta}{dx} + g\theta = f(\theta), \tag{11}$$

$$0 < x < 1, \tau > 1$$

$$\theta(0) = 0, \theta(1) = 1, \tag{12}$$

$$f(\theta) = \omega + b(((T - T)\theta + T) - T),$$

$$\text{де } b = \frac{2\varepsilon\sigma\cdot l}{r\lambda(T - T)}, g = (-\mu + Pom), \omega = -Pon.$$

Розв'язок задачі (11)-(12) шукаємо у вигляді розв'язку нелінійного інтегрального рівняння типу Гаммерштейна з ядром у вигляді функції Гріна [4,5]. Побудуємо функцію Гріна для лінійного оператора задачі (11)-(12).

Функція Гріна для крайової задачі (11),(12) має вигляд

$$G(x,s) = \begin{cases} \phi(s)e^{k_1 x}, & \text{при } 0 \le x \le s, \\ \psi(s)e^{k_2(x - \xi(j))}, & \text{при } s \le x \le 1, \end{cases}$$

де функції $\varphi(s)$ і $\psi(s)$ визначаються з умов $\psi(s)e^{k_1 x} = \varphi(s)k_2 e^{k_2(x-\xi(j))}$, $\theta_1'(x)\psi(s) - \theta_2'(x)\varphi(s) = 1$.

$$G(x,s)=\begin{cases}\dfrac{e^{k_1(x-s)}}{(k_2-k_1)}, & \text{при } 0\le x\le s,\\ \dfrac{e^{k_2(x-s)}}{(k_2-k_1)}, & \text{при } s\le x\le 1,\end{cases}$$

Підставивши функцію Гріна у інтегральне рівняння будемо мати

$$y(x)=\int_0^1 G(x,s)f(s)ds=\int_0^x \frac{e^{k_1(x-s)}}{(k_2-k_1)}f(s)ds+\int_x^1 \frac{e^{k_2(x-s)}}{(k_2-k_1)}f(s)ds, \tag{13}$$

де $f(x)=\omega+b\left(\left((T_l-T_c)\theta(x)+T_c\right)^4-T_c^4\right)$.

Розв'язок рівняння (13) шукаємо методом ітерацій оскільки умова збіжності процесу виконується умова

$$q=\left(\int_0^1\int_0^1 |G(x,s)|^2 dsdx\right)^{\frac{1}{2}}<1.$$

Скориставшись рекурентною формулою для побудови послідовності функцій $\theta_k(x)$

$$\theta_{k+1}(x)=\int_0^1 G(x,s)f_k(s)ds, \tag{14}$$

де $f_k(x)=\omega+b\left(\left((T_l-T_c)\theta_k{}^j(x)+T_c\right)^4-T_c^4\right)$

отримаємо чисельні розрахунки значень функції $\theta(x)$ – температурний розподіл у зоні нагрівання при сталих значеннях параметрів I_0 та L.

Для знаходження функції $I(t)$ розглянемо частинний спрощений випадок задачі (6)-(8). Розв'яжемо задачу (6)-(8) знехтувавши перерозподілом температури у зоні нагрівання за рахунок теплопровідності випромінювання поклавши $\lambda=0$, $\varepsilon=0$. В такому випадку маємо задачу Коші для рівняння в частинних похідних, розв'язок якої можна отримати методом характеристик

$$\frac{\partial u}{\partial t}+v(t)\frac{\partial u}{\partial z}-u\psi-\chi=0, \tag{15}$$

$$u(x,0)=\phi_1(x),\ u(0,0)=T_0, \tag{16}$$

де $\psi=\dfrac{I^2\rho_0\beta}{\pi^2 r_0{}^4 c\rho_n}-\dfrac{2\alpha}{r_0 c\rho_n}$, $\chi=\dfrac{I^2\rho_0}{\pi^2 r_0{}^4 c\rho_n}+\dfrac{2\alpha}{r_0 c\rho_n}T_c$.

Тут перша з умов (16) взята із розв'язку задачі (15), (16) при умові що $v(t)=v=const$, і частинна похідна за часом зникає. Маємо задачу Коші для звичайного диференціального рівняння першого порядку

$$\frac{du}{dz}=F_1(z,u(z)),\ 0<z<L \tag{17}$$

$$u(0) = T_0, \tag{18}$$

де $F_1\left(z,u(z)\right) = u\psi_1 + \chi_1, \psi_1 = \dfrac{I^2\rho_0\beta}{\pi^2 r_0^4 c\rho_n v} - \dfrac{2\alpha}{r_0 c\rho_n v}, \quad \chi_1 = \dfrac{I^2\rho_0}{\pi^2 r_0^4 c\rho_n v} + \dfrac{2\alpha}{r_0 c\rho_n v}T_c.$

Її розв'язок має вигляд

$$u(z) = \left(\frac{\chi_1}{\psi_1} + T_0\right)e^{\psi_1 z} - \frac{\chi_1}{\psi_1}. \tag{19}$$

Розв'язок задачі (15)-(16) при цьому має вигляд

$$u(z,t) = -\frac{1}{\psi_1} e^{-\psi_1\left(z - \frac{kt^2}{2} + t\right)} \frac{1}{\left(T_0\psi_1 + \chi_1\right)} - \frac{\chi_1}{\psi_1}. \tag{20}$$

Обидва отриманих розв'язки аналітичні, але визначити параметр I_0 з них у явному вигляді неможливо.

Визначимо функцію $I(t)$ скориставшись розв'язком (19) або (20). Для цього скористаємося умовою $0 < z < \xi(t) = L - v(t)t, 0 \le t \le t_0$. Розбивши відрізок $0 \le t \le t_0$ на k частин та підставляючи у формули (19) або (20) замість z значення $z = \xi(t) = L - v(t)\tau_k$, $\tau_k = \dfrac{t_0}{k}$, визначимо методом прогонки значення параметра $I(t)$.

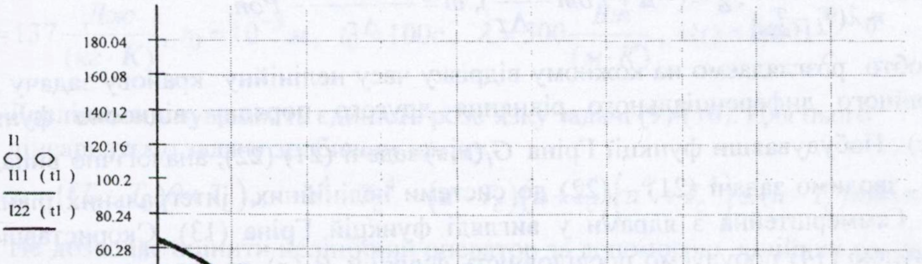

Рис. 1 Залежність сили струму $I(t)$ від часу t_i для підтримки сталої температури T_l.

На рис.1 зображено графіки функцій $I(t)$ знайдені із розв'язків (18) та (19), відповідно функції $I_{11}(t_1)$ та $I_{22}(t_1)$.

Точки лінії I_1 показують значення сили струму $I(t)$, що необхідна для підтримки сталої температури T_l у кінці зони нагрівання коли її довжина прямує до нуля.

Далі повернемося до розв'язання задачі (9)-(10) для $0<\tau<1$. Замінимо стале значення сили струму I знайденою функцією $I(t)$, при цьому швидкість руху через зону нагрівання стає змінною. Розв'язок задачі (9)-(10) шукаємо методом Роте, який базується на дискретизації за часом [3]. Для цього введемо в області Ω: $\{0<x<\xi(\tau),\quad 0<t<t_0\}$ рівномірну за часом сітку $\varpi_{\Delta\tau}=\left\{\tau_j=j\Delta\tau,\, j=0,1...j_0\right\}$. На кожному часовому шарі підставляємо відповідні значення $I(\tau)$, отримані із розв'язків (18), (19). Для цього замінюємо похідну за часом різницевою похідною і поставимо у відповідність задачі (9)-(10) систему диференціально - різницевих задач Коші для звичайних диференціальних рівнянь другого порядку.

$$\frac{d^2\theta^j}{dx^2}-V_j\frac{d\theta^j}{d\partial x}+g\theta^j=f(\theta), \tag{21}$$

$$0<x<1,\quad 0<\tau<1,$$

$$\theta^0=\theta_0,\quad \theta^j(0)=\theta^j(\xi(j))=1. \tag{22}$$

$$f(\theta)=\omega+b\left(\left((Tl-Tc)\theta^j+Tc\right)^4-Tc^4\right),$$

де $b=\dfrac{2\varepsilon\sigma\cdot l^2}{r_0\lambda(T_l-T_c)}$, $g=(-\mu+Pom-\dfrac{Pe}{\Delta\tau})$, $\omega=\dfrac{-Pe\theta^{j-1}}{\Delta\tau}-Pon.$

Тобто розглядаємо на кожному відрізку часу нелінійну крайову задачу для звичайного диференціального рівняння другого порядку відносно функції $\theta^j(x)$. Побудувавши функції Гріна $G_i(x,s)$ задачі (21)-(22), аналогічно випадку $\tau>1$, зводимо задачі (21) – (22) до системи нелінійних інтегральних рівнянь типу Гаммерштейна з ядрами у вигляді функцій Гріна (13). Скориставшись формулою (14) побудуємо послідовність функцій $\theta_k(x)$ та отримаємо чисельні значення функції $\theta(x)$.

Графіки температурних розподілів, що отримані під час чисельних розрахунків на границі області є близькими до T_l на протязі часу $0\le t\le t_0$.

Пряма $u(x,t)$ на рис.2 описує температурний розподіл через 50 секунд після початку процесу при керуванні температурним полем змінним значенням параметра $I(t)$. Пряма $u_2(x,t)$ на рис.2 описує температурний розподіл через 50 секунд після початку процесу при керуванні температурним полем за допомогою сталого значенням параметра I_0, що в свою чергу приводить до певного зниження температури під час процесу нагрівання.

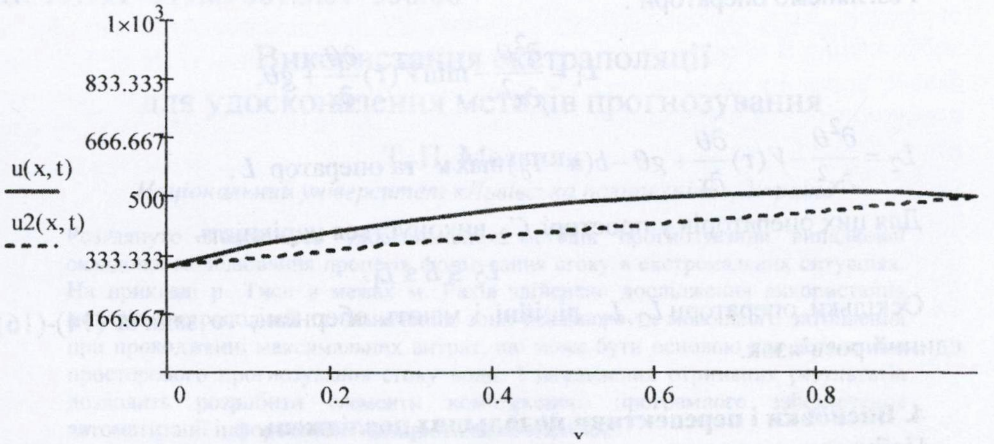

Рис.2 Графіки температурних розподілів в залежності від довжини $\xi(t)$ при $t = 50 секунд$.

Крива $u(x,t)$ описує температурний розподіл при значенні параметра $I(t)$, а крива $u_2(x,t)$ - при сталому значенні параметра I.

$$T_0 = 300K, \quad T_c = 330K, \quad \beta = 48\cdot 10^{-4}, \quad \alpha = 0,0001\frac{Вт}{(м^2K)}, \quad \rho_n = 19.1\cdot 10^3\frac{кг}{м^3},$$

$$c = 137\frac{Дж}{(кг\cdot K)}, \quad r_0 = 10^{-3}\, м, \quad t_0 = 100c, \quad \lambda = 500\frac{Вт}{(м\cdot K)}, \quad v(t) = 0.001\frac{м}{c}.$$

Дослідимо існування та єдиність розв'язку задачі (9)-(10). Для цього лінеаризуємо задачу зробивши заміну

$$u = \left((T_l - T_c)\theta + T_c\right), \qquad u^4 - T_c^{\,4} = (u - T_c)(u + T_c)\left(u^4 + T_c^{\,4}\right) \le (u - T_c)\max u.$$

Це дозволяє оцінити нелінійний оператор за допомогою лінійних операторів, які є обмежені і мають обернені.

Введемо позначення

$$L\theta = \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} - V(\tau)\frac{\partial\theta}{\partial x} + g\theta - b(u^4 - T_c^{\,4}).$$

Розглянемо сепарабельний простір $U_{\Delta\tau} \subset C_2[0;1]$ з нормою $\|u(x)\| = \max\limits_{x\in[a;b]} |u(x)|$.

Теорема. Нехай виконуються умови $V(\tau), P_o(\tau) > 0$, причому функції $\|V(\tau)\| \le N_1$, $\|P_0(\tau)\| \le N_2$ -обмежені, де N_1, N_2 - $const$.

Тоді існує єдиний, неперервний по τ розв'язок $\theta(x,\tau) \in C_2$ задачі(14)-(16).

Доведення.

Розглянемо оператори :

$$L_1 = \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} - \min V(\tau)\frac{\partial\theta}{\partial x} + g\theta,$$

$$L_2 = \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} - V(\tau)\frac{\partial\theta}{\partial x} + g\theta - b(u - T_c)\max u$$ та оператор L.

Для цих операторів у просторі C_2 виконується нерівність

$$L_2 \le L \le L_1.$$

Оскільки оператори L_2, L_1 лінійні і мають обернені, то задача (14)-(16) має єдиний розв'язок.

4. Висновки і перспективи подальших досліджень

Побудовано математичну модель у вигляді нелінійної нестаціонарної задачі Стефана для рівняння теплопровідності з діючим внутрішнім джерелом тепла, що описує температурний розподіл рухомої області, один із параметрів якої є змінною величиною $\xi(t) = L - v(t)t$, $0 < t < t_0$. Отримано аналітичні розв'язки спрощених задач та визначено функцію $I(t)$–параметр керування температурним полем на основі розв'язку оберненої задачі Стефана.

Ця модель дозволяє враховувати під час обчислення температурних розподілів усі втрати тепла з поверхні. Розв'язки можуть бути використані для проектування системи автоматичного контролю температури дроту та стрічки під час термічної обробки та пластичної деформації металу. Усі розрахунки і графіки виконані в середовищі Mathcad.

ЛІТЕРАТУРА

1. Крупин А. В. Соловьев В.Я. Пластическая деформация тугоплавких метал лов. М. : Металлургия 1971. 352с.
2. Березовская Л.М. Кучеренко В.И. К расчету тепловых полей в охлаждаемых струях расплава. – В кн.. Физико-технические приложения краевых задач. Киев: Наук. Думка. – 1978, с. 169–176.
3. Ляшенко В. П. Задача типу Стефана для циліндричної області /О. Б. Кобильська, В.П. Ляшенко // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – Львів : Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача, 2010. – Випуск 12. – С. 122–127.
4. Агошкин В.И., Дубовский П.Б. Шутяев В.П. Методы решения задач математической физики. –М.: Физматлит , 2002, 320с.
5. Лизоркин П. И. Курс дифференциальных и интегральных уравнений с дополнительными главами анализа / П. И. Лизоркин – М.: Наука, 1981. – 216 с.

Надійшла – 19.03.2013.

УДК 19.711+519.6+681.3.01+556:06

Використання екстраполяції для удосконалення методів прогнозування

Т. П. Мельник

Національний університет «Львівська політехніка», Україна

Розглянуто можливість удосконалення методів прогнозування випадкової складової моделювання процесів формування стоку в екстремальних ситуаціях. На прикладі р. Тиси в межах м. Рахів здійснено дослідження використання методів екстраполяції та визначення зони реального та можливого затоплення при проходженні максимальних витрат, що може бути основою для детального просторового прогнозування стоку води. Узагальнення отриманих результатів дозволить розробити елементи комплексного програмного забезпечення автоматизації інформаційно-вимірювальної системи.

Ключові слова: *екстраполяція, прогнозування, стохастичне моделювання, максимальний стік, зони затоплення.*

Рассмотрена возможность усовершенствования методов прогнозирования случайной составляющей моделирования процессов формирования стока в экстремальных ситуациях. На примере р. Тисы в пределах г. Рахов проведено исследование использования методов экстраполяции и определения зоны реального и возможного затопления при прохождении максимальных расходов, что может быть основой для детального пространственного прогнозирования стока воды. Обобщение полученных результатов позволит разработать элементы комплексного программного обеспечения автоматизации информационно-измерительной системы.

Ключевые слова: *экстраполяция, прогнозирование, стохастическое моделирование, максимальный сток, зоны затопления.*

The possibility of improving methods of forecasting random component modeling of runoff processes in extreme situations. On the example of the river within the city of Rahim by using research methods of extrapolation and determine areas of real and possible flooding during the passage of the maximum cost that can be the basis for a detailed spatial prediction of water flow. Generalization of the results will allow the development of complex software elements automation of information-measuring systems.

Keywords: *extrapolation, forecasting, stochastic modeling, maximum flow, flood zone.*

1. Постановка проблеми

Максимальний стік відноситься до розряду катастрофічних явищ природи. Найбільше значення має зазвичай максимальна витрата, яка визначає висоту підняття рівня води, тобто зону затоплення, швидкість течії, розмиваючу здатність потоку в цілому. При розрахунку максимального стоку використовували біноміальні криві, а також криві трьохпараметричного гама-розподілу або при розрахунку дощових паводків логарифмічно-нормальні криві забезпеченості. Г.П. Калінін [1, 2] запропонував використати узагальнені криві забезпеченості, які відображають характерні умови формування для конкретного регіону максимального стоку річок. Ці методи також не дають точного результату і є усередненими. Вони не відображають часткових особливостей певного розрахункового водозбору. Є.В. Болдаков запропонував екстраполяції біноміальних кривих забезпеченості до певного стоку, який відповідає нульовій

© Мельник Т. П., 2013

забезпеченості. Цю границю вибирають довільно, так як зазвичай дуже важко отримати його фізичне обґрунтування. В результаті витрати води малої забезпеченості можуть бути перебільшені по забезпеченості на цілий порядок. Більш коректно задача про визначення розрахункових значень паводкового стоку може бути розв'язана шляхом використання способу композиції розподілу ймовірносних максимумів стоку по розподілу ймовірностей визначаючих його факторів (С.Н.Крицкий, М.Ф.Менкель) [3]. Недоліком такого методу є наявність корелятивної залежності між факторами і відсутність достатньо надійних кривих забезпеченості цих факторів, що ускладнює використання. У 1990 році створено розподілену концептуальну модель на основі рівняння Сен-Венану. З 2002 року використовують розподілену модель на основі ГІС даних басейну зокрема р.Тиса. О.І. Лук'янець і М.М.Сусідко [4] розглянули науково-методичні засади створення басейнових прогностичних систем. На прикладі басейну р. Тиси вони показали застосування математичних моделей формування стоку води як основи методичної бази системи та її функціональних складових.

На даний час проблема прогнозування потоків русла і математичного моделювання оптимізації режиму роботи протипаводкових систем в умовах Закарпаття лишається однією з найбільш важливих задач. Оцінка параметрів підтоплень і затоплень має наукове і практичне значення.

2. Обґрунтування актуальності вирішення

Найбільш поширеними методами прогнозування на сьогодні є експертиза і фактографічні методи. Найчастіше на практиці використовуються екстраполяція, інтерполяція, тренд-аналіз, які є недостатньо опрацьованими у вирішенні проблеми затоплення території Закарпаття з точки зору прогнозування випадкової складової моделювання процесів формування стоку в екстремальних ситуаціях паводку. Не завжди дослідження базуються на розрахунках засобами програмного забезпечення ЕОМ, що є необхідним для більш точного і термінового вирішення ситуації. Варто, також, зупинитися на зручності та ефективності інтерполяції, що дає змогу визначити граничні умови, описати залежності з розривами функцій та їх похідні, правильно організувати введення та виведення даних при математичному моделюванні, виконати аналіз одержаних результатів, порівняти результати з експериментальними даними.

3. Мета та загальна постановка задачі

Мета дослідження – розробити математичне забезпечення для аналізу умов і процесів формування паводкового стоку. Перевірити розрахунками достовірність результатів та здійснити наукове обґрунтування прогнозування можливих зон затоплень із врахуванням імовірності процесу формування стоку.

4. Виклад основних елементів досліджень щодо реалізації мети

На підставі наявних матеріалів на ділянку проведення моніторингу [5-8]виконано гідравлічні розрахунки проходження паводків різної водозабезпеченості (1 %, 5 %, 10 %) та отримано такі характеристики: горизонти поверхні води, швидкості течії у руслі та на заплавах (табл. 1). Розрахункові рівні наведено на поздовжньому профілі р. Тиси (див. картосхему).

Таблиця 1.

Характер затоплення заплави р.Тиси паводком з витратами 1 % водозабезпеченості в межах м. Рахова

Номер поперечника ПК+	Шар затоплення (сторона); м	Ширина затоплення (сторона); м	Наявність захисних споруд	Характеристика заплави
ПП 50 – ПП 47 ПК62+77…ПК59+87	обох брівок	-	-	-
ПП 47 – ПП 46 ПК59+87…ПК58+01	лівої брівки – до 2,6	лівої брівки – до 35	-	вільна від забудови, поросла чагарником
ПП 46 – ПП 45 ПК58+01…ПК56+53	ліва брівки до 1,3	лівої брівки до 80	-	вільна від забудови, поросла чагарником
ПП 45 – ПП 41 ПК56+53…ПК51+91	лівої брівки – до 2,0 правої - до 0,3	лівої брівки – до 80 права – до 30	на правому березі – підпірна стінка	ліва – свердловини водозбору, права – пролягає автодорога
ПП 41 – ПП 37 ПК51+91…ПК47+63	лівої брівки – до 2,0	лівої брівки – до 80	на правому березі – захисна дамба, укісне габіонове кріплення	ліва – розташовані свердловини водозабору
ПП 37 – ПП 35 ПК47+63…ПК46+23	обох бровок	-	на обох берегах – захисні дамби, укісне габіонове кріплення	-
ПП 35 – ПП32 ПК46+23…ПК42+58	обох брівок	-	на лівому березі – захисна дамба з кріпленням, на правому – підпірна стінка	-
ПП 32 – ПП 29 ПК42+58…ПК39+78	обох брівок	-	на лівому – захисна дамба, укісне габіонове кріплення	-

ПП 29 – ПП 28 ПК39+78…ПК38+70	правої – брівки до 0,3	правої брівки – до 30	на лівому березі – захисна дамба з кріпленням, на правому – підпірна стінка	права – пролягає автодорога
ПП 28 – ПП 26 ПК38+70…ПК 36+37	лівої брівки – до 1,5 правої – до 0,6	лівої брівки – до 110, правої – до 30	на правому березі – підпірна стінка	ліва – забудована; права – пролягає автодорога
ПП 26 – ПП 18 ПК36+37…ПК28+49	лівої брівки – до 1,7	лівої брівки – до 170	підпірні стінки на обох берегах	ліва – промислова та житлова забудови
ПП 18 – ПП 15 ПК28+49…ПК25+53	лівої брівки – до 1,7	лівої брівки – до 150	на лівому березі – укісне кріплення мостінням, на правому – підпірна стінка	ліва – промислова та житлова забудови
ПП 15 – ПП 13 ПК25+53…ПК23+25	лівої брівки – до 1,7	лівої брівки – до 150	підпірні стінки на обох берегах	ліва – промислова та житлова забудови
ПП 13 – ПП 3 ПК23+25…ПК3+58	лівої брівки – до 1,8 правої – до 1,9	лівої брівки – до 150 права – до 220	на лівому березі – укісне кріплення	промислова та житлова забудови
ПП 3 – ПП 1 ПК3+58…ПК 0	лівої брівки – до 0,8	лівої брівки – до 50	на лівому березі – укісне кріплення	вільна від забудови

*Дані Державного проектно-пошукового інституту «Львівдіпроводгосп»

В основу підрахунків покладено виміряні витрати води у період вільного русла. Використано такі залежності [9]:

$$Q = Q(H)\,, \tag{1}$$

середніх швидкостей:

$$v = v(H) \tag{2}$$

і площ водного перетину:

$$w = w(H)\,. \tag{3}$$

У період паводку слід здійснити екстраполяцію кривої $Q = Q(H)$ і це є необхідною умовою при проектуванні гідротехнічних споруд, коли проектовані рівні перевищують високі рівні води.

Екстраполяція вважається надійною, якщо крива $Q = Q(H)$ зростає до 0,2($(H_{max} - H_{min})$ і спадає до 0,5($(H_{max} - H_{min})$.

Зокрема, в цьому дослідженні використано екстраполяцію за Фрудом. Використано дані вимірів і визначено число Фруда:

$$Fr = \alpha v^2 /(gh_{mt}), \quad (4)$$

де α – коефіцієнт Коріоліса, який прирівнюють до 1.

Побудуємо графік залежності $Fr = Fr(H)$. Ця залежність наближатиметься до лінійної. Екстраполюючи її до необхідного рівня, обчислимо середню швидкість потоку:

$$v = \sqrt{Frgh_{mt}}, \quad (5)$$

де витрата води:

$$Q = wv. \quad (6)$$

У деяких випадках доцільно для екстраполяції використати формули Шезі (або продовживши криву, або екстраполюючи по кривих $w = w(H)$ та $v = v(H)$.

5. Приклади реалізації

Таблиця 2

Результати обчислень швидкості течії річки

Номер поперечника	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***	***9***	***10***
Швидкість, м/с										
середня в руслі	**3,74**	**2,93**	**3,21**	**3,81**	**3,84**	**3,36**	**3,37**	**3,32**	**3,21**	**3,81**
максимальна в руслі	**5,78**	**4,53**	**4,98**	**5,90**	**5,94**	**5,19**	**5,22**	**5,15**	**4,96**	**5,89**
Середня в заплаві 1	**0,00**	**0,93**	**0,00**	**0,73**	**0,00**	**0,73**	**0,91**	**0,54**	**0,00**	**0,00**
максимальна в заплаві 1	**0,00**	**1,53**	**0,00**	**1,23**	**0,00**	**1,28**	**1,51**	**0,91**	**0,00**	**0,00**
середня в заплаві 2	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,38**	**0,41**	**0,14**	**0,01**	**0,43**	**0,46**
максимальна в заплаві 2	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,65**	**0,70**	**0,25**	**0,03**	**0,75**	**0,80**
середня між пунктами	**3,81**	**2,77**	**3,34**	**3,55**	**3,27**	**2,29**	**2,58**	**2,86**	**1,73**	**2,00**

Номер поперечника	***11***	***12***	***13***	***14***	***15(1)***	***15***	***16***	***17***	***18***	***19***
Швидкість, м/с										
середня в руслі	3,77	3,88	3,98	3,34	3,79	3,12	3,37	3,68	4,08	3,72
максимальна в руслі	5,83	6,00	6,15	5,14	5,88	4,81	5,20	5,68	6,28	5,74
середня в заплаві 1	0,45	0,12	0,22	0,28	0,00	0,00	0,72	0,59	0,49	0,49
максимальна в заплаві 1	0,76	0,22	0,40	0,49	0,00	0,00	1,20	1,00	0,83	0,84
середня в заплаві 2	0,30	0,11	0,14	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
максимальна в заплаві 2	0,54	0,21	0,25	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
середня між пунктами	2,66	3,28	3,19	2,79	10,68	3,52	2,75	2,86	3,15	2,86
Номер поперечника	***20***	***21***	***22***	***23***	***24***	***25***	***26***	***27***	***27(1)***	***27(2)***
Швидкість, м/с										
середня в руслі	3,52	3,76	3,91	3,39	3,30	4,13	4,76	4,09	4,57	3,44
максимальна в руслі	5,44	5,82	6,05	5,24	5,11	6,38	7,36	6,30	7,05	5,30
середня в заплаві 1	0,21	0,17	0,04	0,30	0,26	0,00	0,28	0,52	0,70	0,54
максимальна в заплаві 1	0,38	0,30	0,08	0,53	0,45	0,01	0,50	0,88	1,17	0,91
середня в заплаві 2	0,00	0,00	0,10	0,31	0,36	0,00	0,00	0,97	1,22	1,30
максимальна в заплаві 2	0,00	0,00	0,18	0,52	0,62	0,00	0,00	1,55	1,95	2,05
середня між пунктами	3,30	3,81	4,94	2,82	3,50	4,31	5,25	3,78	6,30	2,23
Номер поперечника	***27.3***	***28***	***29***	***30***	***31***	***32***	***33***	***34***	***35***	***36***
Швидкість, м/с										
середня в руслі	3,58	4,07	2,96	2,74	3,45	3,52	4,58	2,60	2,75	3,53

максимальна в руслі	5,51	6,27	4,57	4,24	5,34	5,44	7,09	4,02	4,26	5,48
середня в заплаві 1	0,38	0,33	0,19	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
максимальна в заплаві 1	0,64	0,57	0,32	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
середня в заплаві 2	1,39	1,41	1,09	0,00	0,68	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
максимальна в заплаві 2	2,19	2,23	1,73	0,00	0,10	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
середня між пунктами	2,89	4,15	3,00	3,03	3,46	3,98	5,59	2,68	3,10	3,88
Номер поперечника	***37***	***38***	***39***	***40***	***41***	***42***	***43***	***44***	***45***	***46***
Швидкість, м/с										
середня в руслі	4,29	4,37	3,74	3,64	2,91	2,99	3,00	3,22	3,55	3,50
максимальна в руслі	6,66	6,77	5,78	5,62	4,49	4,63	4,65	5,00	5,49	5,43
середня в заплаві 1	0,00	0,00	1,07	1,13	0,83	0,90	0,92	0,80	0,63	0,00
максимальна в заплаві 1	0,00	0,00	1,76	1,86	1,37	1,49	1,52	1,34	1,07	0,00
середня між пунктами	4,33	4,88	3,52	3,67	2,30	2,36	2,47	2,71	3,17	3,56
Номер поперечника	***47***	***48***								
Швидкість, м/с										
середня в руслі	3,62	5,36								
максимальна в руслі	5,61	8,29								
середня між пунктами	4,32									

На основі чого було здійснено нанесення на схему меж прогнозованого затоплення території дослідження.

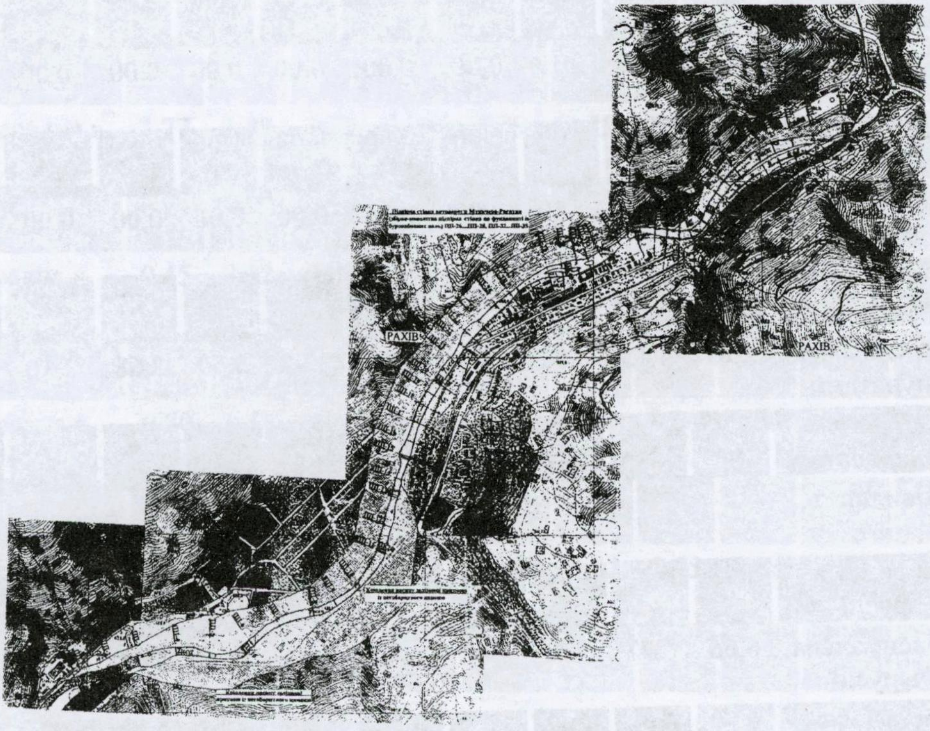

Рис. Схема характеру затоплення заплави р. Тиси паводком з витратами 1 % водозабезпеченості в межах м. Рахова

6. Практична цінність результатів, перспективи подальших досліджень

Аналіз отриманих даних [9] дозволяє визначити зони та рівень затоплюваності заплави р. Тиси під час паводків різної водозабезпеченості. Характеристику проходження паводка 1 % водозабезпеченості з точки зору підтоплення території м. Рахова наведено в табл. 2.

Варто відмітити, що даний метод дає прогнозну точкову оцінку і більш ефективно використовується при короткостроковому прогнозуванні. Перевага даного методу полягає в тому, що він простий у застосуванні і не вимагає великої інформаційної бази.

Наукові засади та методичні розрахунки можуть бути використані проектними інститутами. Узагальнення отриманих результатів дозволить удосконалити розрахунок визначення зон можливих затоплень, розробити елементи комплексного програмного забезпечення автоматизації інформаційно-вимірювальної системи.

ЛІТЕРАТУРА

1. Калинин Г.П. Проблемы глобальной гидрологии. – Л.:Гидрометеоиздат, 1968.–377 с.

2. Бефани Н.Ф., Калинин Г.П. Упражнения и методические разработки по гидрологическим прогнозам. – Л.:Гидрометеоиздат, 1965.–441 с.
3. Крицкий С.Н., Менкель М.Ф. Гидрологические основы управления речным стоком.– М.: Наука, 1981.–255с.
4. Сусідко М.М., Лук'янець О.І. Карпати - паводконебезпечний регіон України. Комплексна басейнова система прогнозування паводків у Закарпатті: методична та технологічна база її складових - Український науково-дослідний гідрометеорологічний інститут. - К: Ніка-Центр, Наукова думка, 2009. - 88 с.
5. Приплесь А.Й, Зубач В.М., Мельник Т.П. Топографо-геодезичні дослідження з метою регулювання русла р. Тиси в межах м. Рахів // Materialy IV miezynarodowej naukowi – praktycznej konferencji "Naykowym progres na rubiezy tesiacleci – 2008" –Tym 17. Chemia i chemiczne technologie. Ekologia. Geografia i geologia.: Przemysl, Nauka i studia. – S.72-76.
6. Приплесь А.Й., Шучак М.Д. Мельник Т.П. Фізико-географічні та геоморфологічні умови р. Тиси в межах м. Рахів з точки зору розв'язання проблеми паводконебезпечних ситуацій на Закарпатті // Materialy IV miezynarodowej naukowi – praktycznej konferencji "Aktualne problemy nowoczesnych nauk - 2008" –Tym 20. Chemia i chemiczne technologie. Ekologia. Geografia i geologia.Weterynaria: Przemysl, Nauka i studia. – S.83-86.
7. Якушев А.І., Зубач В.М., Мельник Т.П. Гідроморфологічний моніторинг стоку річок басейну р. Тиси і її приток. . – Рівне: Волинські обереги, 2009. – 64 с.
8. Б. Волосецький, Т. Мельник Топографо-геодезичні обстеження для дослідження екзогенних процесів р. Тиси в межах м. Рахів з погляду вирішення проблеми тало-дощових паводків Збірник наукових праць «Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва», – Вип.І (17), – С.163-171, – Львів, – 2009р.
9. Мельник Т.П. Аналіз змін характеристик впливу оптимізації протипаводкових заходів басейну р. Тиса на основі дослідження та стохастичного моделювання процесів формування стоку. – Рівне: Волинські обереги, 2009. –216 с.

Надійшла – 31.03.2013.

УДК (519.6+004.05):004.075

Моделі та характеристики обчислювального кластера, які допомагають визначати напрямки його подальшого розвитку

В. О. Міщенко

Харківській національний університет імені В. Н. Каразіна, Україна

Розглянуто кластерну систему з неоднаковими у загальному випадку багатопроцесорними вузлами, яка потребує з часом послідовного поповнення або реконструкції за умови економічної доцільності. Проаналізовано математичні моделі функціонування такої системи, і розроблено відповідні метрики якості. Обґрунтовуються гіпотези про корисність цих метрик для осіб, що приймають рішення стосовно поповнення кластерних систем з метою підвищення якості їх роботи. Зокрема розроблено метод пошуку оптимальних у певному сенсі рішень за допомогою обчислювального експерименту. Реальним прикладом для ілюстрації прогнозів послугував міні-кластер факультету комп'ютерних наук Харківського національного університету ім. В. Н. Каразіна.

Ключові слова: *обчислювальний кластер, метрики якості, математична модель, оптимізація, обчислювальний експеримент.*

Рассмотрена кластерная система с разными, как правило, многопроцессорными узлами, которая требует со временем последовательного пополнения или реконструкции при условии экономической целесообразности. Проанализированы математические модели функционирования такой системы, и разработаны соответствующие метрики качества. Обосновываются гипотезы о полезности этих метрик для лиц, принимающих решения о пополнении кластерных систем с целью повышения качества их работы. В частности, разработан метод поиска оптимальных в определенном смысле решений с помощью вычислительного эксперимента. Реальным примером для иллюстрации прогнозов послужил мини-кластер факультета компьютерных наук Харьковского национального университета им. В. Н. Каразина.

Ключевые слова: *вычислительный кластер, метрики качества, математическая модель, оптимизация, вычислительный эксперимент.*

We considered cluster system with different, usually multiprocessor nodes, which require of replenishment or reconstruction if feasible. The mathematical models of the functioning of such a system were considered, and appropriate quality metrics were developed. We have argued the hypothesis of the usefulness of these metrics for decision-makers on the replenishment of cluster systems in order to improve the quality of their work. In particular, the method of finding optimal solutions by the help of computer simulation was developed. A real world example to illustrate the predictions was shown. It was the predictions for the mini-cluster of Computer Science faculty of V. N. Karazin Kharkiv National University.

Key words: *computing cluster, quality metrics, mathematical model, optimization, numerical experiment.*

1. Вступ

Кластери різного складу та архітектури за останнє десятиліття стали звичним полігоном для виконання обчислювальних експериментів, які до донедавна були неможливі на персональних комп'ютерах в наслідок браку пам'яті та часу [1].

© Мищенко В. О., 2013

Поперах коштовність їхнього облаштування і складність налаштування були настільки високими, що здебільшого ставали можливими лише під спеціальні проекти [2]. Згодом, зокрема в наслідок появи у складі комп'ютерів багатопроцесорних ядер, доступних звичайним фахівцям і у навчанні, ситуація змінилась. При цьому є *актуальним* питання про нарощування існуючих міні-кластерів до потужних ферм, модернізація існуючих учбових кластерів і т.п. [3]. Об'єктивною основою вирішення таких питань повинні слугувати показники потенціальної якості роботи кластера, залежні лише від його компоновки та режиму функціонування. Таким чином виникає *постановка задачі* про розробку метрик кластеру на основі обраної математичної моделі його роботи. Вибір моделі обумовлює конкретний варіант постановки. При цьому можна спиратись на доволі широкий спектр існуючих математичних моделей процесу обчислень у кластері, з яких нашу увагу звернули близькі до академічних інтересів типи моделей, розглянутих у [4-9]. Дві різні моделі, одна, що відбиває класичні уявлення про паралельну обробку даних, та друга, що акцентує увагу на обробці потоків завдань, які надходять із зовні, послугували базою дослідження нашої роботи. Вони відповідають наступним, де в чому протилежним, точкам зору:

- робота кластера тим краща, чим якісніше відбувається обчислень користувачів, тобто більш рівномірно завантажуються всі процесори обчислювальної системи (хоч як мало чи багато завдань обслуговується);
- робота кластера тим краща, чим повніше забезпечується зовнішній запит на проходження через кластер доволі щільного потоку обчислювальних завдань користувачів (без відносно того, яка б не була якість розпаралелювання обчислень цих завдань, що є турботою самих користувачів).

2. Моделювання якості розподілених обчислень у кластері

Дотримуючись першої точки зору, доцільно надати відомій формулі прискорення обчислень системою функціональних пристроїв (ФП) [4] вигляд:

$$R = \frac{\sum_{k=1}^{N} p_k \pi_k}{max\{\pi_k\}_k} = \left(\sum_{k=1}^{N} p_k \frac{\pi_k}{\sum_l \pi_l} \right) \cdot \frac{\sum_{k=1}^{N} \pi_k}{max\{\pi_k\}_k} = p \cdot \frac{\sum_{k=1}^{N} \pi_k}{max\{\pi_k\}_k} \quad (1)$$

де R- міра прискорення обчислення відносно відповідного простого пристрою;
p_k - завантаженість k-го з N пристоїв системи;
π_k - пікова продуктивність k-го з пристоїв системи;
p - так звана завантаженість системи (див. (2.2) у [4]).

Оскільки для системи з даними піковими продуктивностями ФП величина

$$\Pi = \frac{\sum_{k=1}^{N} \pi_k}{N\, max\{\pi_k\}_k}, \quad (0 < \Pi \le 1) \quad , \quad (2)$$

відіграє роль *середньої відносної продуктивності* (СВП), то з (1) отримуємо

$$R = N \cdot p \cdot \Pi \quad (3)$$

де N – число ФП, p - завантаженість системи при обчисленні [4], а – СВП (2).

Ми можемо розглядати прискорення обчислень математичного алгоритму за рахунок розподілення обчислень (1), як головну якість кластерного обчислення. Тоді (3) дозволяє трактувати цю якість, як результат рівної дії одного фактору, залежного від якості розподілення обчислень по процесорних ядрах, і двох факторів, залежних тільки від кластеру – загальної кількості ядер і СВП, яка відбиває неоднорідність системи процесорів.

Нехай роль ФП відіграють процесорні вузли кластеру. Тоді у типовій для невеликих навчальних підрозділів ситуації (факультети, кафедри, лабораторії), коли кластерна система складалась поступово, залученням до неї комп'ютерів різних поколінь, СВП стає важливою метрикою кластеру. Вона потребує розрахунку, в різних варіантах поповнення кластеру приймає різні значення і може грати нетривіальну роль при виробці рішень щодо поповнення.

Поряд з режимами, для яких характерним є розпаралелювання програм лише у межах одного вузла, кластер може працювати в режимах, коли суттєвим є розподіл обчислень однієї програми між вузлами. Тоді роль ФП відіграватимуть вузли. Якщо тактові частоти процесорних ядер можна вважати хоча б приблизно однаковими, то СВП практично визначається розподілом вузлів за кількістю їхніх ядер, тобто формується дуже наглядно для осіб, що приймають рішення.

Перевіримо якісну адекватність метрики (2) на практичному прикладі. З міркувань здорового глузду, доти, доки ми додаємо новий ФП, продуктивність якого π_{N+1} не є малою та не перевищує попередніх, додавання збільшує якість кластеру. Але, якщо ми додамо ФП із набагато більшим значенням пікової продуктивності, ніж у попередніх ФП, то за принципом «не варто на старе ліпити заплат із нової тканини», якість варто вважати погіршеною. Формально

$$\pi_{N+1} \le \pi_{max} \;\Rightarrow\; \Pi_{new} = \Pi + (\theta - \Pi)/(N+1)\ ,$$

$$\pi_{N+1} > \pi_{max} \;\Rightarrow\; \Pi_{new} = \Pi - \Pi \cdot \theta^{-1}/(N+1) - \left(\Pi \cdot (1-\theta^{-1}) - (N+1)^{-1}\right) \quad (4)$$

де $\theta = \pi_{N+1}/\pi_{max}$ -відношення пікових продуктивностей.

Звідси випливає твердження, цілком узгоджене з наведеними міркуваннями:

Лема 1. Якщо відношення пікової продуктивності доданого вузла до максимуму пікової продуктивності попередніх вузлів не більше від 1 та достатньо велике, то числове значення СВП зросте. Та якщо це відношення більше за 1 і має достатньо велике значення, то значення СВП зменшиться.

Доведення першого твердження очевидне. Для доведення другого достатньо додатково зауважити, що $\Pi > N^{-1}$. Тоді для останньої складової формули (4):

$$\Pi \cdot (1-\theta^{-1}) - (N+1)^{-1} > \theta^{-1} \cdot N^{-1} \cdot (1-\theta^{-1}) - (N+1)^{-1} > 0, \text{ якщо}$$
$$\pi_{N+1} > (N+1)\pi_{max}\ .$$

На відміну від якісних міркувань, СВП дозволяє знайти точний рубіж для відношення продуктивностей θ, за яким додавання вузла погіршує якість!

Формула (3) вказує також на доцільність метрики режиму обчислень, основаної на завантаженості системи. Зазначимо, що безпосередньо p для цього непридатна, оскільки її визначено як миттєву величину [4], байдуже, що із словами «в середньому» (за припущеннями моделі питання взаємодії ФП

ігноруються). Доповнимо класичну модель системи ФП припущенням про те, що для запобігання мертвих блокувань і перманентного гальмування окремих обчислень (їх «підвисання») завдання на обчислення у кластері об'єднуються в пакети. Байдуже зараз, чи об'єднує пакет програми різних користувачів, чи паралельні процеси однієї програми. Важливо лише, щоб завдання у межах пакету у кожний момент із значною ймовірністю потребували різних ресурсів та якомога повніше їх використовували! Кілька пакетів можуть виконуватись у кластері водночас, та це посилює ризик їх небажаної взаємодії.

Нехай на відрізку часу від T до $T+\Delta$ виконувалось S пакетів завдань, причому для кожного, s–го пакета ($s = 1 ... S$) у моменти часу τ_k вимірювалась завантаженість кластера p. Позначимо початок виконання s–го пакету як t_0^s, а кінець, як t_n. Надалі вважатимемо, що

$$t_0^s < ... < t_n^s \quad \left(n = n(s)\right), \tag{5}$$

$$\tau_k^s = \frac{t_k^s + t_{k+1}^s}{2} \quad (k = 1 ... n-1), \quad p_k^s = p(\tau_k^s) \tag{6}$$

і введемо *середню завантаженість кластера* (СЗК) у даний період як величину

$$p_{cl}\left(T, T+\Delta\right) = \left(\sum_s \left(t_{n(s)}^s - t_0^s\right)\right)^{-1} \cdot \sum_s \sum_{i=1}^{n(s)} p_i^s \cdot \left(t_i^s - t_{i-1}^s\right) \tag{7}$$

причому перекриття процесів виконання пакетів, може призвести до того, що,

$$\sum_s \left(t_{n(s)}^s - t_0^s\right) > \Delta \tag{8}$$

Демонстрацію адекватності обмежимо простим, але важливим прикладом автоматичного врахування ризиків. Розглянемо 2 варіанти завантаження кластера протягом часу Δ=3 двома пакетами. Нехай

$$t_0^s = 0.0\ , \quad t_1^s = 0.5\ , \quad t_2^s = 1.5\ , \quad t_3^s = 2.5\ , \quad t_3^s = 3.0 \quad (s{=}1{,}2) \tag{9}$$

Приклад 1. У першому варіанті виконання кластер у перші 1.5 одиниць часу завантажено на 1.0 першим пакетом, а у другі 1.5 одиниць – тільки другим. У другому варіанті перший та другий пакети монопольно і повністю завантажують кластер у першу та відповідно – у останню одиницю часу, а у середню – кожний завантажує на 0.5 . В обох варіантах кластер увесь час повністю завантажено, але перший варіант кращий за другий, оскільки не несе ризику неконтрольованої взаємодії пакетів. Розрахунок СЗК узгоджується з цим міркуванням :

$$p_{cl}^1\left(0.0, 3.0\right) = \quad 1.0 \quad > \quad p_{cl}^2\left(0.0, 3.0\right) = \quad 0.75\ . \tag{10}$$

Залишається заперечення, що мовляв, оскільки міра СЗК означена як апостеріорна, а виконання пакетів успішно відбулось, то різниці в результатах оцінки СЗК для обох варіантів не повинно бути. Та ця аргументація має логічну прогалину. А звідки відомо, що «успішно»? Очевидно, що на інтервалі часу від 1.5 до 2.5 кожний з них потребував би на своє виконання у режимі

монопольного завантаження лише по 0.5 одиниць часу, а у наслідок конкуренції за ресурси фактичне виконання тих самих обчислень затягнулось на 1.5 часу!

3. Якість GRID орієнтованого обслуговування

Тепер звернімось до моделі багатоканальної системи масового обслуговування (СМО) з обмеженою чергою [9], у яку в режимі випадкового процесу надходять заявки на виконання обчислювальних завдань. До таких моделі нашу увагу привернули робота [6], в якій за її допомогою вирішено іншу задачу. Зауважимо, що так само, як у попередньому розділі можливість оцінювання та змістовної інтерпретації показників якості кластера на основі формальної моделі, передбачає певний режим роботи і потребує ідеалізуючих припущень. По перше, поняття «завдання» матиме сенс програми (або її частини, або комплексу програм), що виконується на одному вузлі, причому монопольно, протягом випадкового часу з певним математичним очікуванням. Тобто програми, які вірогідно виконуються швидко, не потребуючи великого об'єму оперативної пам'яті, треба об'єднувати в одне завдання, а програми, що потребують розподілення по кількох вузлах, і виконуються довго, треба представляти частинами, що розглядатимуться як окремі завдання. Далі зважимо на те, що прості, зручні для математичного аналізу моделі СМО потребують припущення про статистичну незалежність термінів виконання завдань, а також наявності експоненційного закону розподілу для термінів надходження заявок і для термінів їх виконання. Послаблення цих вимог можливе [5]. Однак, ми приймемо для моделі СМО кластера припущення про марківський характер [9].

Нехай на вхід СМО (тобто кластера), котрий має m каналів обслуговування (тобто вузлів), надходить пуасонівський потік заявок з інтенсивністю λ, інтенсивність обслуговування заявок кожним каналом, дорівнює μ, а максимальне число місць очікування у черзі це n (всі заявки, котрі надходить у СМО при черзі з n заявок, не приймаються і надалі ніколи не обслуговується).

Параметри навантаження кластера та його довільного вузла, обчислюватимемо як відповідні навантаження на СМО за формулами [9]:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}, \quad \rho_m = \frac{\lambda}{m\,\mu} \tag{11}$$

Ми використовуватимемо наступні відомі формули для розрахунку параметрів усталеного режиму функціонування СМО типу M|M|m|n (математично доведено, що в такій моделі цей режим існує [9]).

Ймовірність простою системи P_0 – складає

$$P_0 = \left[\sum_{i=0}^{m} \frac{(\rho)^i}{i!} + \frac{(\rho)^{m+1}}{m!} \cdot \frac{1-\rho^n}{1-\rho}\right]^{-1}. \tag{12}$$

Тоді ймовірність P_+ обслуговування є

$$P_+ = 1 - \frac{1}{m^n \cdot m!} \cdot P_0, \tag{13}$$

а пропускна здатність системи γ складає

$$\gamma = \lambda \cdot P_+ \qquad (14)$$

Середній час очікування у черзі W дорівнює

$$W = \frac{m\pi_m}{\mu(m-\rho)^2} \cdot \left(1-(n+1)(\rho_m)^n + n(\rho_m)^{n+1}\right). \qquad (15)$$

Введемо міри для характеристики кластера з зовнішнього боку і з середини.

Дефект допустимого простою (ДДП) вказує на відхилення стаціонарного режиму експлуатації кластера в складі грід від тієї вимоги, що середній час очікування завдань у черзі на виконання повинен складати задану долю («відсоток») від середнього часу виконання завдань:

$$\Delta = \vartheta / \mu - W, \qquad (16)$$

де Δ - числове значення метрики ДДП;

ϑ – задана доля очікування у черзі від середнього часу виконання завдань;

μ та W – вище означена інтенсивність обслуговування заявок вузлами та середній час очікування (15).

Відносна продуктивність розширення (ВПР) показує наскільки виросте пропускна здатність стаціонарного режиму при поповненні кластеру на 1 вузол при плановій оптимізації черг:

$$E = (\gamma - \gamma_0)/\gamma_0, \qquad (17)$$

де E - числове значення метрики ВПР;

γ – пропускна здатність кластера після його розширення та оптимізації довжини черги;

γ_0 – поточна пропускна здатність кластера (наявна або очікувана за планом).

Для пошуку узгодженого оптимального розширення кластера, що відповідає простій марківській СМО, створено Ада програму Markov_Claster. Запустивши її, вводимо очікувані інтенсивності завдань та обслуговування одним вузлом, існуючу кількість вузлів, апріорно задану мінімальну довжину черги очікування завдань, максимум можливої кількості вузлів, максимально можливу довжину черги та рекомендовану границю часу простою у черзі відносно середнього терміну виконання. На виході буде кількість вузлів, на якій досягається максимум приросту ВПР, орієнтовна границя часу простою, відповідна оптимальна відносно ДДТ довжина черги та навантаження на кластер (очікуване у разі визначеного розширення).

4. Апробація СВП як засобу підготовки прийняття рішень

Проаналізуємо варіанти поповнення мини-кластеру ФКН ХНУ ім. В.Н. Каразіна за станом на 2010 р. [3]. Він складався з двох груп вузлів (група 3 ядерного комп'ютера і група двох 4 ядерних). Для планування можливого поповнення міні-кластеру на основі середньої відносної продуктивності (2) було намічено 4 варіанти придбання комп'ютерів приблизно з однаковою сумарною пам'яттю. Варіанти вважались приблизно економічно рівноцінними.

Варіанти поповнення визначались кількістю однорідних груп вузлів; кількістю ядер у вузлах по групах та кількісним складом груп (табл. 3.1).

Таблиця 3.1. Оцінка варіантів, що відрізняються за групами вузлів

№	Кількість груп	Ядерність вузлів	Кількість у групах	СВП
1	3	2, 3, 4	4, 1, 1	0.68
2	2	3, 4	4, 2	0.83
3	2	3, 4	1, 4	0.95
4	3	3, 4, 8	1, 2, 1	0.59

Висновок полягав у тому, що нарощування існуючої РС-ферми із збереженням існуючих вузлів забезпечить вищу якість у розумінні СВП, якщо всі додані вузли будуть 4 ядерними. Звертає увагу те, що найбільш привабливий, з огляду на новизну, варіант придбання 8 ядерного комп'ютеру отримав найгірший прогноз щодо впливу на якість кластеру. Це демонструє обмеженість СВП рамками зроблених припущень. Наприклад, цей варіант може здатися кращим з точки зору доступу більшості процесорів до пам'яті у ході обчислень.

На практиці у академічних кластерах водночас виконується кілька завдань і, навіть, кілька пакетів завдань. Зокрема так буває, якщо це учбові завдання, або якщо вони надходять з грід. Ми продовжимо аналіз наприкінці наступного розділу, використавши відповідні міри ефективності роботи кластера.

5. Прогноз ефекту нарощування РС-ферми, що працює у режимі СМО

Є сенс віртуально нарощувати кластер, додаючи черговий вузол, оптимально плануючи за мінімумом ДДТ нову максимальну довжину черги завдань, розраховуючи після цього ВПР та знов додаючи вузол. При цьому значення метрики ВПР з кожним доданням чергового вузла змінюватиметься, причому спочатку ці значення зростатимуть, а надалі зменшуватимуться. Звісно, що кількість вузлів, яка відповідає максимумові, об'єктивно є границею поповнення. Цю границю знаходить і рекомендує за найякісніший варіант поповнення програма Markov_Claster, вхідний інтерфейс якої ми вище описали.

Приклад 2 (суто демонстраційний). Нехай інтенсивності потоків завдань та термінів виконання однакові (1.0 та 1.0), існують 2 вузли, встановлено довжину черги 1. Запустимо Markov_Claster і введемо ці та подальші дані відповідно до інтерфейсу програми, описаному у розділі 3. З рис. 1 бачимо, що оптимальна кількість вузлів 3 (якщо більше, то приріст ВПР в результаті додання вузла різко зменшується), оптимальна довжина черги була б 6. В такому разі буде отримано приріст пропускної здатності від 0.917 практично до 1.0 (і нема чого далі поповнювати кластер при збереженні прийнятих умов).

Приклад 3 (демонстраційний). Змінивши умови, отримаємо оптимум, що відповідає поповненню на 2 вузли. Результати і вихідний інтерфейс - на рис. 2.

```
 *** Markov_Claster  ***
Put Lambda (jobs): 1.0
Put    Mu  (terms): 1.0
Put    M0  (nodes): 2
Put    N0  (queue): 1
Put    M2  (.. M2): 6
Put    N2  (.. N2): 12
Put max of W/mu**(-1): 0.1
It's recomended queue length to be 1 -- dW =  1.667E-02
   * Max_Prodactivity *
m= 2 => 9.16667E-01
   M    Wmin   N   (G-G0)/G0
   2  8.33E-02  1 0.00000E+00
   3  4.17E-02  6 9.08282E-02
   4  4.24E-02  6 7.06963E-05
   5  5.97E-02  6 3.27827E-06
   6  7.10E-02  6 1.78814E-07
  *end Max_Prodactivity*
It's recomended nodes number to be 3 -- dG/G =  9.083E-02
Then the prodactivity will be  9.999E-01
 ***End of Markov_Claster***
```

Рис. 1. Результати автоматичного пошуку програмою Markov_Claster оптимальної кількості вузлів для поповнення кластера

```
 *** Markov_Claster  ***
Put Lambda (jobs): 0.1
Put    Mu  (terms): 0.01
Put    M0  (nodes): 5
Put    N0  (queue): 1
Put    M2  (.. M2): 8
Put    N2  (.. N2): 12
Put max of W/mu**(-1): 0.05
It's recomended queue length to be 2 -- dW = -8.560E+01
   * Max_Prodactivity *
m= 5 => 9.99998E-02
   M    Wmin   N   (G-G0)/G0
   5  4.43E+00  2 0.00000E+00
   6  2.22E+00  1 5.21542E-07
   7  2.70E+00  1 1.11759E-06
   8  2.79E+00  1 1.49012E-07
  *end Max_Prodactivity*
It's recomended nodes number to be 7 -- dG/G =  1.118E-06
Then the prodactivity will be  1.000E-01
 ***End of Markov_Claster***
```

Рис. 2. Приклад оптимального поповнення кластеру з 5 до 7 вузлів. При цьому його максимальна пропускна здатність збільшується у 10 разів.

Приклад 3 (практичний). Тепер розглянемо перспективи розширення міні-кластера ФКН за умови підключення до грід за різних варіантів вимог. Врахуємо, що наш мини кластер має невелику потужність, і розберемо приклад,

коли навантаження на нього складає 0.2. Показові результати вміщено у табл.2. Бачимо, що потреба у максимальному поповненні проявляє себе тільки тоді, коли існуючий кластер працює з оптимальною чергою. При порівняно невеликій варіації даних можна отримати рекомендацію і на мінімальне поповнення (до 4 вузлів), і на значніше (до 5), і на максимальне (у нас 6). З цього виводимо, що для великих кластерів оптимум поповнення треба шукати засобами багатовимірної оптимізації (у 3-D просторі, враховуючи зміну навантаження).

Таблиця 2. Розширення до границі максимізації приросту ВПР за різних умов взаємодії з грід.

№ варіанту	Наванта-ження ρ	Спершу вузлів m_0	Довж. черги n	Очікування $W(15)$	Треба вузлів m
1	0.2	3	0	0.2	4
2	0.2	3	0	0.25	5
3	0.2	3	1	0.25	6
4	0.2	3	2	0.2	6

Зіставлення табл. 2 з результатом розділу 4, показує, що нарощування розглянутого мини-кластеру ФКН від 3 до 6 вузлів, додаючи однакові 4-ядерні, забезпечить при кожному нарощуванні максимальний приріст метрик якості СЗК і ВПР. Цей план був обраний за робочий, одначе відповідно до спеціалізації кластеру на експериментах з математичного моделювання складних фізичних процесів і обробці даних наукових експериментів при модернізації кластеру було обрано напрямок оснащення існуючих комп'ютерів картками CUDA [10]. З великою натяжкою це можна розглядати як додавання у вузли ядер великої пікової продуктивності або як певне підвищення продуктивності вузлів. Якщо можна, то неважко упевнитись, що цей варіант також призводить до суттєвого приросту метрики якості ВПР.

5. Висновки

Строго поставлено і розв'язано для різних режимів експлуатації задачу про підвищення якості неоднорідного обчислювального кластера при його поповненні. Ключові результати стосуються визначення і обґрунтування на основі моделей та прикладів наступних метрик якості кластерної системи: середня відносна продуктивність (СВП), середня завантаженість кластера (СЗК) у заданий період часу, дефект допустимого простою (ДДП), відносна продуктивность розширення (ВПР). Метод використання передбачає автоматичний аналіз варіантів відносно ВПР. Застосування розглянуто на прикладі міні-кластера факультету комп'ютерних наук Харківського національного університету ім. В. Н. Каразіна.

Важливим напрямком розвитку моделей роботи обчислювальних кластерів і створення відповідних метрик якості, є врахування у складі комп'ютерів спеціальних, насамперед графічних, процесорів.

Інший напрямок розвитку результатів роботи полягає у створенні інформаційних технологій підготовки рішень щодо способів вдосконалення кластер них систем на основі системи метрик.

ЛИТЕРАТУРА

1. Воеводин Вл.В., Жуматий С.А. "Вычислительное дело и кластерные системы".- М.: Изд-во МГУ, 2007. - 150 с..

2. Voronko M. V. LCG Middleware at the KIPT CMS Linux Cluster / M. V. Voronko, S. S. Zub, L. G. Levchuk, D. V. Soroka // Bulletin of V. Karazin Kharkiv National University. – 2005. – № 703. – P. 74-86. – (Series: Mathematical Modelling. Information Technology. Automated Control Systems; no. 5).

3. Mishchenko V.O. Towards the questions on planning the development of the Department computer cluster / Victor O. Mishchenko, Oleksandr U. Baiev, Ievgen V. Didenko, Valentine T. Lazurik // CONFERENCE PROCEEDINGS ICT in Education, Research, and Industrial Applications: Integration, Harmonization, and Knowledge Transfer (4-8 may 2011)», - Kherson, 2011, P. 27.

4. Воеводин В. В., Воеводин Вл. В. Параллельные вычисления / БХВ-Петербург, 2002. – С-Пб. – 608 с.

5. Морозов Е. В., Румянцев А. С. Вероятностные модели многопроцессорных систем: стационарность и моментные свойства // Информатика и ее применения. 2012. Т. 6, № 3. С. 99–106.

6. Куланов С. А. Применение математического аппарата теории систем массового обслуживания для оценки стоимостных показателей grid-систем / С. А. Куланов, В. С Харченко. // Вісник Харківського національного університету: Зб. наук. праць. – Х., – 2007. – № 780. – С. 143-150. (Серія: Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління; вип. 8).

7. Куланов С.А. Теоретико-множественная модель потока задач в grid-системах / С. А. Куланов // Радіоелектронні і комп'ютерні системи. – 2008. – № 5. – С. 32-36.

8. Куланов С.А. Метод планирования задач и распределения ресурсов в грид на основе процедур прогнозирования / С. А. Куланов // Радіоелектронні і комп'ютерні системи. – 2010. – № 6. – С. 68-72.

9. Дудин А. Н. Практикум на ЭВМ по теории массового обслуживания / А. Н. Дудин, Г. А. Медведев, Ю. В. Меленец [Электронный ресур]: Учебное пособие. – Мн.: "Электронная книга БГУ", 2003. – Режим доступа: http://anubis.bsu.by/publications/elresources/AppliedMathematics/dudin.pdf . — Электрон. версия печ. публикации, 2000. – PDF формат, версия 1.4.

10. Боресков А. В., Харламов А. А. Основы работы с технологией CUDA. М.: ДМК Пресс, 2010. 232 с.

Надійшла у першій редакції 22.04.2013, в останній - 01.05.2013