УДК 517.53

А. Ф. ГРИШИН, М. Л. СОДИН

РОСТ ПО ЛУЧУ, РАСПРЕДЕЛЕНИЕ КОРНЕЙ ПО АРГУМЕНТАМ ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА И ОДНА ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ

В работе исследована связь между ростом целой функции конечного порядка по фиксированному лучу и распределением ее корней по аргументам. Введены и исследованы классы функций, характеризующиеся регулярностью роста более слабой, чем полная регулярность роста в смысле Б. Я. Левина — А. Пфлюгера. В качестве иллюстрации рассмотрены целые функции с корнями на луче и функции с «периодическим» предельным множеством в смысле В. С. Азарина. Получена новая теорема единственности для целых функций конечного порядка.

Без пояснений используем стандартные обозначения теории целых и мероморфных функций [1, 2]. Через E_ρ обозначаем класс целых функций нормального типа при порядке $\rho > 0$.

Далее, мы, как правило, предполагаем для простоты, что $f \in E_\rho$. В конце § 1 кратко остановимся на изменениях, которые необходимо проделать, чтобы перейти к функциям нормального типа относительно произвольного ненулевого уточненного порядка.

Через $\cos^* \rho\theta$ (ρ — нецелое) и θ^* обозначаем 2π-периодическое продолжение этих функций с интервалов $[-\pi, \pi]$ и $[0, 2\pi)$ соответственно.

§ 1. Интегральные формулы типа Карлемана. В основе работы лежат интегральные представления целых функций, близкие представления использовались ранее Ж. Валироном [3], А. А. Гольдбергом [4] и В. Фуксом [5].

Лемма 1.1. *Пусть f — целая функция, $z_n = r_n e^{i\psi_n}$ — ее корни, $R > 1$, $\rho > 0$. Тогда справедливо равенство*

$$2\rho \sin \pi\rho \int_1^R \ln |f(re^{i\varphi})| \left(\frac{1}{r^\rho} - \frac{r^\rho}{R^{2\rho}}\right) \frac{dr}{r} +$$

$$+ \frac{2\rho}{R^\rho} \int_0^{2\pi} \ln |f(Re^{i\theta})| \cos^* \rho (\theta - \varphi - \pi)\, d\theta =$$

$$= 2\pi \sum_{1<r_n<R} \cos^* \rho (\psi_n - \varphi - \pi) \left(\frac{1}{r_n^\rho} - \frac{r_n^\rho}{R^{2\rho}}\right) + O(1). \qquad (1.1)$$

Для доказательства этой леммы необходимо применить вторую формулу Грина ([2], с. 9, формула (1.1)) в разрезанном кольце $K_{R,\varphi} = \{z : 1 < |z| < R, \varphi < \arg z < \varphi + 2\pi\}$ к функциям $u(z) = \ln|f(z)|$, $v(z) = \left(\frac{1}{|z|^\rho} - \frac{|z|^\rho}{R^{2\rho}}\right) \cos^* \rho (\arg z - \varphi - \pi)$.

При целых значениях ρ лемма 1.1 не дает выражения для интересующего нас интеграла

$$J_f(R, \varphi) = \int_1^R \frac{\ln|f(re^{i\varphi})|}{r^{\rho+1}} dr,$$

так как числовой коэффициент при нем в (1.1) равен нулю. Поэтому при целом ρ нам понадобится другая формула.

Лемма 1.2. *Пусть f — целая функция, $z_n = r_n e^{i\psi_n}$ — ее корни, $R > 1$, $\rho > 0$ — целое число. Тогда справедливо равенство*

$$2\pi\rho \int_1^R \ln|f(re^{i\varphi})| \left(\frac{1}{r^\rho} - \frac{r^\rho}{R^{2\rho}}\right) \frac{dr}{r} -$$

$$- 2\rho \int_1^R \frac{dr}{r} \left(\frac{1}{r^\rho} - \frac{r^\rho}{R^{2\rho}}\right) \int_0^{2\pi} \ln|f(re^{i\theta})| \cos \rho (\theta - \varphi) d\theta -$$

$$- \frac{2\rho}{R^\rho} \int_0^\pi \ln|f(\mathrm{Re}^{i\theta})| (\theta - \varphi)^* \sin \rho (\theta - \varphi) d\theta =$$

$$= -2\pi \sum_{1<r_n<R} (\psi_n - \varphi)^* \sin \rho (\psi_n - \varphi) \left(\frac{1}{r_n^\rho} - \frac{r_n^\rho}{R^{2\rho}}\right) + O(1), \quad R \to \infty. \quad (1.2)$$

Для доказательства этой леммы нужно применить вторую формулу Грина в том же разрезанном кольце $K_{R,\varphi}$ к функциям $u(z) = \ln|f(z)|$, $v(z) = -\left(\frac{1}{r^\rho} - \frac{r^\rho}{R^{2\rho}}\right) (\theta - \varphi)^* \sin \rho (\theta - \varphi)$, $z = re^{i\theta}$.

Лемма 1.3. *Пусть $f \in E_\rho$, ρ — целое число. Тогда справедливо асимптотическое равенство*

$$\frac{1}{\pi} \int_1^R \frac{dz}{r} \left(\frac{1}{r^\rho} - \frac{r^\rho}{R^{2\rho}}\right) \int_0^{2\pi} \ln|f(re^{i\theta})| \cos \rho (\theta - \varphi) d\theta =$$

$$= \frac{1}{\rho} \sum_{1<r_n<R} \frac{1}{r_n^\rho} \ln \frac{R}{r_n} \cos \rho (\psi_n - \varphi) +$$

$$+ 2\mathrm{Re}\,(c_\rho e^{-i\rho\varphi}) \ln R + O(1), \quad R \to \infty,$$

где $c_\rho = \frac{d^\rho}{dz^\rho} \ln f(z) |_{z=0}$.

Доказательство этой леммы немедленно следует из известных формул для коэффициентов Фурье функции $\ln|f(re^{i\theta})|$ (см., например, [2], гл. 1, (2.6)) и классической теоремы Линделефа о корнях функции $f\in E_\rho$ при целом ρ ([1], гл. 1).

Лемма 1.4. *Пусть $f\in E_\rho$, $\alpha<\rho$. Тогда равномерно по $\varphi\in[0, 2\pi]$ выполняется*

$$\frac{1}{R^{\rho-\alpha}}\int_1^R \frac{|\ln|f(re^{i\varphi})||}{r^{\alpha+1}}\,dr = O(1),\ \ R\to\infty.$$

Доказательство этой леммы следует, например, из известной оценки Р. Неванлинны ([2], гл. 1, теорема 7.2).

Пусть $f\in E_\rho$. Тогда большинство слагаемых в формулах (1.1) и (1.2) ограничены по модулю, отбросим их, оставив лишь члены, растущие, вообще говоря, как $\ln R$ при $R\to\infty$.

Теорема 1.1. *Пусть $f\in E_\rho$, $z_n=r_n e^{i\psi_n}$ — корни функции f. Тогда при нецелом ρ справедлива формула*

$$J_f(R,\varphi) = \frac{\pi}{\rho\sin\pi\rho}\sum_{1<r_n<R}\frac{\cos^*\rho(\psi_n-\varphi-\pi)}{r_n^\rho} + O(1). \tag{1.3}$$

В случае целого ρ выполняется

$$J_f(R,\varphi) = \frac{1}{\rho}\sum_{1<r_n<R}\frac{1}{r_n^\rho}\Big\{(\psi_n-\varphi)^*\sin\rho(\varphi-\psi_n) + \cos\rho(\psi_n - \varphi)\ln\frac{R}{r_n}\Big\} + 2\mathrm{Re}\,(c_\rho e^{-i\rho\varphi})\ln R + O(1),\ \ R\to\infty. \tag{1.4}$$

Доказательство этой теоремы сразу же следует из лемм 1.1—1.4.

Закончим этот параграф двумя замечаниями.

1. Утверждение теоремы 1.1, как и дальнейшие следствия из нее, справедливы (в несколько измененном виде) и для произвольных целых функций конечного порядка. Остановимся вкратце на этом.

Пусть $\rho(t)$ — уточненный порядок функции f. Справедлива следующая известная лемма, доказательство которой опускаем.

Лемма 1.5. *Пусть $\rho(t)$ — произвольный уточненный порядок, а функция $\tilde\rho(t)$ определяется равенством*

$$t^{\tilde\rho(t)-\rho} = \frac{t}{\pi}\int_0^\infty \frac{s^{\rho(s)-\rho}}{s^2+t^2}\,ds.$$

Тогда выполняются соотношения $t^k\ln t\,\tilde\rho^{(k)}(t)\to 0$, $t\to\infty$, $k=1, 2, 3, \ldots$ **(1.5)**; $t^{\rho(t)-\tilde\rho(t)}\to 1$, $t\to\infty$.

Поэтому, далее, не снижая общности, считаем, что условие (1.5) выполнено. Примем для простоты, что ρ — нецелое число. Тогда аналог леммы 1.1 для уточненного порядка получается изменением функции $v(z)$ из леммы 1.1 на $\tilde{v}(re^{i\theta}) = r^{\rho-\rho(r)} v(re^{i\theta})$. Поэтому справедлива формула, аналогичная (1.4):

$$\int_1^R \frac{\ln|f(re^{i\varphi})|}{r^{\rho(r)+1}}\,dr =$$

$$= \frac{\pi}{\rho \sin \pi\rho} \sum_{1<r_n<R} \frac{\cos^* \rho(\psi_n - \varphi - \pi)}{r_n^{\rho(r_n)+1}} + o(\ln R), \quad R \to \infty.$$

2. «Весовую считающую функцию», стоящую в правой части соотношений (1.3) и (1.4), можно представить в несколько ином виде. Для краткости рассмотрим лишь случай нецелого ρ, случай целого ρ рассматривается аналогично.

Зафиксируем значение φ и положим

$$c_\varphi(r, f) = \sum_{r_n<r} \frac{\pi \cos^* \rho(\psi_n - \varphi - \pi)}{\rho \sin \pi\rho}, \quad \varphi \leqslant \psi_n < \varphi + 2\pi.$$

Эта считающая функция последовательности корней функции f аналогична неванлинновской считающей функции для полуплоскости ([2], гл. 1, § 5). $\Big($При $\rho > \frac{1}{2}$ некоторые корни дают отрицательный вклад в $c_\varphi(r, f)\Big)$. Тогда (1.3) можно записать в виде

$$J_f(R, \varphi) = \int_1^R \frac{c_\varphi(r, f)}{r^{\rho+1}}\,dr + O(1). \tag{1.3a}$$

В случае полуплоскости, кроме неванлинновской считающей функции, имеется близкая к ней считающая функция Левина — Цудзи, возникающая при использовании интегральной формулы Б. Я. Левина ([1], гл. 4; [2], гл. 1). В этой считающей функции все корни учитываются с весом, равным их кратности, однако исчерпание полуплоскости ведется по кругам $\left\{z : \left|z - i\frac{R}{2}\right| \leqslant \frac{R}{2}\right\}$. Аналогично можно ввести считающую функцию и в нашем случае.

Пусть γ_φ — замкнутая кривая, задаваемая в полярных координатах (t, φ) уравнением $\gamma_\varphi = \{t = |\cos^* \rho(\psi - \varphi - \pi)|\}$. Через G_φ обозначим открытое множество, ограниченное кривой γ_φ; при $\rho > \frac{1}{2}$ кривая γ_φ имеет самопересечения и G_φ состоит из нескольких компонент — «лепестков». Положим

$$G_\varphi(+) = \left\{re^{i\psi} \in G_\varphi : \frac{\cos^* \rho(\psi - \varphi - \pi)}{\sin \pi\rho} > 0\right\}.$$

Таким образом, из двух соседних лепестков — компонент G_φ — один попадает в $G_\varphi(+)$. Через tG_φ обозначим гомотетию множества G_φ с коэффициентом t относительно начала координат.

Пусть $\nu_\varphi(t, f)$ — число корней функции f (с учетом кратности), попавших в tG_φ, при этом корень засчитывается со знаком «+», если он попал в $tG_\varphi(+)$, и со знаком «—» в противоположном случае. Тогда можно убедиться, что для $f \in E_\rho$ выполняется

$$\int_1^R \frac{c_\varphi(r, f)}{r^{\rho+1}}\,dr = \int_1^R \frac{\nu_\varphi(r, f)}{r^{\rho+1}}\,dr + O(1),\ R \to \infty.$$

Таким образом, в силу (1.3а) выполняется

$$J_f(R, \varphi) = \int_1^R \frac{\nu_\varphi(r, f)}{r^{\rho+1}}\,dr + O(1),\ R \to \infty.$$

§ 2. ρ-индикатор и целые функции ρ-регулярного роста. Положим

$$H_\rho(\varphi) = \limsup_{R \to \infty} \frac{J_f(R, \varphi)}{\ln R},\ f \in E_\rho. \tag{2.1}$$

Еще Валирон [3] заметил, что $H_\rho(\varphi)$ является ρ-тригонометрически выпуклой функцией. Ясно, что $H_\rho(\varphi) \leqslant h(\varphi)$, где $h(\varphi)$ — (обычный) индикатор роста функции f. В отличие от индикатора $h(\varphi)$ ρ-индикатор $H_\rho(\varphi)$ весьма просто выражается через корни функции f. Следующие формулы немедленно следуют из теоремы 1.1.

Пусть $f \in E_\rho$, $\rho > 0$, $z_n = r_n e^{i\psi_n}$ — корни функции f. Тогда при нецелом ρ выполняется

$$H_\rho(\varphi) = \limsup_{R \to \infty} \frac{\pi}{\rho \sin \pi\rho \ln R} \sum_{1 < r_n < R} \frac{\cos^* \rho(\psi_n - \varphi - \pi)}{r_n^\rho}, \tag{2.2}$$

а при целом ρ

$$H_\rho(\varphi) = \limsup_{R \to \infty} \frac{1}{\rho \ln R} \sum_{1 < r_n < R} \frac{1}{r_n^\rho}\Big\{(\psi_n - \varphi)^* \sin \rho(\varphi - \psi_n) + \cos \rho(\psi_n - \varphi) \ln \frac{R}{r_n}\Big\} + 2\mathrm{Re}\,(c_\rho e^{-i\rho\varphi}), \tag{2.3}$$

где $c_\rho = \dfrac{d^\rho}{dz^\rho} \ln f(z)\,|_{z=0}$.

Равенства (2.2) и (2.3) и оценка $h(\varphi) \geqslant H_\rho(\varphi)$ влекут точные оценки снизу индикатора $h(\varphi)$ функции $f \in E_\rho$ через ее корни. Равенство в этих оценках достигается, например, для функций вполне регулярного роста в смысле Б. Я. Левина — А. Пфлюгера ([1], гл. III) на луче $\arg z = \varphi$, так как нетрудно показать, что для таких функций $h(\varphi) = H_\rho(\varphi)$.

Определение. *Функция $f \in E_\rho$ имеет ρ-регулярный рост на луче* $\arg z = \varphi$, *если существует предел*

$$H_\rho(\varphi) = \lim_{R \to \infty} \frac{1}{\ln R} \int_1^R \frac{\ln |f(re^{i\varphi})|}{r^{\rho+1}}\,dr.$$

Из теоремы 1.1 сразу же следует, что необходимым и достаточным условием ρ-регулярности роста на фиксированном луче $\arg z = \varphi$ является существование предела в правой части (2.2) при нецелом ρ и в правой части (2.3) при целом ρ.

Отметим, что ρ — регулярность роста -- более слабое свойство, чем полная регулярность роста в смысле Левина — Пфлюгера на фиксированном луче, поэтому полученное условие является необходимым условием регулярности роста в смысле Левина — Пфлюгера на одном луче. Наглядные необходимые и достаточные условия полной регулярности роста функции на фиксированном луче в терминах ее корней неизвестны.

Определение. *Функция $f \in E_\rho$ имеет ρ-регулярный рост во всей плоскости, если она имеет ρ-регулярный рост на каждом луче* $\arg z = \varphi$, $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Поясним смысл определения. Считаем, что сходится интеграл

$$\int_0 \frac{\ln|f(re^{i\varphi})|}{r^{\rho+1}}\,dr, \quad \varphi \in [0, 2\pi).$$

Выполнения этого условия можно добиться, домножая функцию f на подходящую функцию вида $z^{-m} \exp Q(z)$, где $Q(z)$ — полином степени не большей чем ρ.

Рассмотрим субгармоническую функцию:

$$U_\rho(z) = \int_0^1 \frac{\ln|f(tz)|}{t^{\rho+1}}\,dt = R^\rho \int_0^R \frac{\ln|f(te^{i\varphi})|}{t^{\rho+1}}\,dt, \quad z = \mathrm{Re}^{i\varphi}$$

и функцию сравнения $V(R) = R^\rho \ln R$. Тогда ρ-регулярность роста функции f эквивалентна полной регулярности роста U_ρ относительно $V(R)$.

Определение. *Корни функции f ρ — правильно распределены, если для всех значений θ_1, θ_2, $o \leqslant \theta_1 < \theta_2 \leqslant 2\pi$, за исключением, быть может, счетного множества, существует предел*

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{\ln R} \int_1^R \frac{n(r;\,\theta_1, \theta_2;\, f)}{r^{\rho+1}}\,dr,$$

где $n(r;\, \theta_1, \theta_2;\, f)$ — число корней функции f в секторе $|z| \leqslant r$, $\theta_1 < \arg z < \theta_2$, а в случае целого ρ дополнительно существует предел

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{\ln R} \sum_{|z_n|<R} \frac{1}{z_n^\rho} \ln \frac{R}{|z_n|}.$$

Лемма 2.1. *ρ-правильная распределенность корней функции $f \in E_\rho$ эквивалентна правильной распределенности риссовской меры μ_ρ субгармонической функции U_ρ относительно функции $V(R)$.*

Доказательство этой леммы сводится к непосредственной проверке, которую опускаем.

Лемма 2.1 в сочетании с теоремой Левина — Пфлюгера [1, 6], примененной к функции U_ρ, позволяет установить следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Функция $f \in E_\rho$ имеет ρ-регулярный рост во всей плоскости тогда и только тогда, когда ее корни ρ — правильно распределены.*

§ 3. Функции слабо регулярного роста. Введем класс функций, промежуточный между функциями вполне регулярного роста на луче и функциями ρ-регулярного роста.

Определение. *Назовем функцию $f \in E_\rho$ функцией слабо регулярного роста на луче* $\arg z = \varphi$, *если она является функцией ρ-регулярного роста на этом луче, причем $H_\rho(\varphi) = h(\varphi)$, где $h(\varphi)$ — индикатор функции f.*

Теорема 3.1. *Для того чтобы функция $f \in E_\rho$ имела слабо регулярный рост на луче* $\arg z = \varphi$, *необходимо и достаточно, чтобы для каждого $\Delta > 0$ множество $E_\Delta = \{r \geqslant 1 : \ln|f(re^{i\varphi})| < (h(\varphi) - \Delta) r^\rho\}$* **(3.1)** *имело логарифмическую плотность нуль*.*

Для доказательства теоремы 3.1 нам понадобятся две леммы, которые по аналогии с «леммой о малых дугах» А. Эдрея и В. Фукса (см., например, [2], гл. 1, теорема 7.3) можно назвать леммами о малых интервалах.

Для множества $E \subset [1, \infty)$ положим $E(R) = E \cap [1, R)$.

Лемма 3.1. *Пусть f — мероморфная функция, $E \subset [1, \infty)$. Тогда*

$$\frac{1}{r} \int\limits_{E(r)} \ln^+ M(t, f)\, dt \leqslant C \frac{k}{k-1} \left(\frac{\operatorname{mes} E(r)}{r} \ln \frac{2r}{\operatorname{mes} E(r)} \right) T(kr, f), \quad (3.2)$$

где C — абсолютная постоянная.

Доказательство этой леммы дословно повторяет доказательство леммы Эдрея — Фукса, и мы его опускаем.

Лемма 3.2. *Пусть E — множество нулевой логарифмической плотности, f — мероморфная функция нормального типа при порядке ρ. Тогда*

$$\lim_{R \to \infty} \frac{1}{\ln R} \int\limits_{E(r)} \frac{\ln^+ M(r, f)}{r^{\rho+1}}\, dr = 0. \quad (3.3)$$

Доказательство леммы 2.2. Положим $E_k = E \cap [2^k, 2^{k+1})$. Тогда

$$\frac{1}{\ln R} \int\limits_{E(r)} \frac{\ln^+ M(r, f)}{r^{\rho+1}}\, dr \leqslant \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{E_k} \frac{\ln^+ M(r, f)}{r^{\rho+1}}\, dr, \quad (3.4)$$

где $n = [\log_2 R] + 1$.

Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$. Натуральное число k назовем числом I-го типа, если $\operatorname{mes} E_k \leqslant \varepsilon 2^k$, в противном случае будем

---

* Множество $E \subset [1, \infty)$ имеет логарифмическую плотность нуль, если
$$\int_{E(R)} \frac{dt}{t} = o(\ln R), \ R \to \infty.$$
Напомним, что для полной регулярности роста функции f на луче $\arg z = \varphi$ необходимо и достаточно, чтобы для каждого $\Delta > 0$ множество E_Δ имело нулевую плотность.

говорить, что число k — II-го типа. Символы $\sum^{(I)}$ и $\sum^{(II)}$ означают, что суммирование ведется по значениям k I- и II-го типов соответственно.

В силу оценки (3.2) имеем

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}{}^{(I)}\int_{E_k}\frac{\ln^+ M(r,f)}{r^{\rho+1}}\,dr\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}{}^{(I)}2^{-k(\rho+1)}\int_{E_k}\ln^+ M(r,f)\,dr\leqslant$$

$$\leqslant\frac{c}{n}\sum_{k=1}^{n}{}^{(I)}2^{-k\rho}\,\varepsilon\ln\frac{4}{\varepsilon}\,T(2^{k+2},f)\leqslant\frac{C(\rho)}{n}\,\varepsilon\ln\frac{4}{\varepsilon}\,n=C(\rho)\,\varepsilon\ln\frac{4}{\varepsilon}. \qquad (3.5)$$

Оценим сверху величину $q(n)$ — число чисел $k\in[1,n]$ II-го типа:

$$\frac{\varepsilon q(n)}{n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}{}^{(II)}2^{-k}(\varepsilon 2^k)\leqslant\frac{C}{n}\sum_{k=1}^{n}{}^{(II)}\int_{E_k}\frac{dt}{t}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{C}{\ln R}\int_{E(R)}\frac{dt}{t}=o(1),\ R\to\infty, \qquad (3.6)$$

так как E — множество логарифмической плотности ноль.

Используя оценки (3.2) (с $E=[2^k,2^{k+1})$) и (3.6), имеем

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}{}^{(II)}\int_{E_k}\frac{\ln^+ M(r,f)}{r^{\rho+1}}\,dr\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}{}^{(II)}\int_{2^k}^{2^{k+1}}\frac{\ln^+ M(r,f)}{r^{\rho+1}}\,dr\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}{}^{(II)}2^{-k\rho}\frac{1}{2^k}\int_{2^k}^{2^{k+1}}\ln^+ M(r,f)\,dr\leqslant\frac{C\,q(n)}{n}=o(1),\ n\to\infty. \qquad (3.7)$$

Объединяя неравенства (3.4), (3.5) и (3.7), получаем искомую оценку (3.3). Лемма 3.2 доказана.

Доказательство теоремы 3.1. Пусть функция f имеет слабо регулярный рост на луче $\arg z=\varphi$, т. е. выполняется

$$\int_1^R\frac{\ln|f(re^{i\varphi})|}{r^{\rho+1}}\,dr=(h(\varphi)+\varepsilon(R))\ln R,\ \varepsilon(R)\to 0. \qquad (3.8)$$

Покажем, что тогда

$$\sigma_\Delta(R)=\frac{1}{\ln R}\int_{E_\Delta(R)}\frac{dt}{t}=o(1),\ R\to\infty. \qquad (3.9)$$

По наперед заданному $\delta>0$ выберем число r_δ так, чтобы $\forall r\geqslant r_\delta$ $\ln|f(re^{i\varphi})|\leqslant(h(\varphi)+\delta)r^\rho$ (3.10). Тогда в силу (3.8) и (3.10) выполняется

$$(h(\varphi)+\varepsilon(R))\ln R = O(1) + \int\limits_{r_\delta}^{R} \frac{\ln|f(re^{i\varphi})|}{r^{\rho+1}}\,dr \leqslant$$

$$\leqslant O(1) + \int\limits_{E_\Delta(R)} \frac{h(\varphi)-\Delta}{r}\,dr + \int\limits_{CE_\Delta(R)} \frac{h(\varphi)+\delta}{r}\,dr \leqslant$$

$$\leqslant O(1) + (h(\varphi)+\delta)\ln R - \Delta\,\sigma_\Delta(R)\ln R,\ R\to\infty,$$

где $CE_\Delta(R)=[1,R)\setminus E_\Delta(R)$. Таким образом, $\Delta\,\sigma_\Delta(R)\leqslant\delta-\varepsilon(R)+O\left(\frac{1}{\ln R}\right)\leqslant\delta+o(1)$, $R\to\infty$, в силу произвольности δ отсюда следует (3.9).

Обратно, пусть для каждого $\Delta>0$ справедливо (3.9), убедимся в справедливости (3.8). В силу (3.9), (3.10) и леммы 3.2 имеем

$$(h(\varphi)+\delta)\ln R + O(1) \geqslant \int\limits_{1}^{R} \frac{\ln|f(re^{i\varphi})|}{r^{\rho+1}}\,dr =$$

$$= \left(\int\limits_{E_\Delta(R)} + \int\limits_{CE_\Delta(R)}\right) \frac{\ln|f(re^{i\varphi})|}{r^{\rho+1}}\,dr \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{E_\Delta(R)} \frac{\ln|f(re^{i\varphi})|}{r^{\rho+1}}\,dr + (h(\varphi)-\Delta)(1-\sigma_\Delta(R))\ln R \geqslant$$

$$\geqslant o(\ln R) + (h(\varphi)-\Delta)\ln R,\ R\to\infty,$$

ввиду произвольности чисел $\delta>0$ и $\Delta>0$ получаем (3.8). Теорема 3.1 доказана.

Функции слабо регулярного роста применяются при исследовании функций $f\in E_\rho$ с тригонометрическим индикатором внутри угла раствора π/ρ. Следующая теорема дополняет известные теоремы М. Картрайт и Б. Я. Левина ([1], гл. III, IV).

Теорема 3.2. *Для того чтобы у функции $f\in E_\rho$ был тригонометрический индикатор $h(\varphi)$ внутри угла $\alpha\leqslant\arg z\leqslant\beta$, $\beta=\alpha+\frac{\pi}{\rho}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие два условия:*

а) *для каждого $\varepsilon>0$ выполняется*

$$\int\limits_{1}^{R} \frac{n(r;\alpha+\varepsilon,\beta-\varepsilon)}{r^{\rho+1}}\,dr = o(\ln R),\ R\to\infty,$$

где $n(r;\varphi_1,\varphi_2)$ — число корней функции f в секторе $\{z:|z|\leqslant r,\ \varphi_1<\arg z<\varphi_2\}$;

б) *функция f имеет слабо регулярный рост на лучах $\arg z=\alpha$ и $\arg z=\beta$.*

В сторону достаточности теорему 3.2 можно усилить, заменив условие б) более слабым условием: б′) $h(\alpha)=H_\rho(\alpha)$, $h(\beta)=H_\rho(\beta)$.

В частности, получаем условия, необходимые и достаточные для того, чтобы индикаторная диаграмма целой функции экспоненциального типа являлась отрезком.

Доказательство теоремы 3.2 следует из формулы Карлемана, и мы его опускаем.

§ 4. Целые функции с корнями на луче. Пусть все корни функции $f \in E_\rho$ лежат на отрицательном луче. В случае целого ρ это по теореме Линделефа означает, что сходится интеграл

$$\int^{\infty} \frac{n(r, f)}{r^{\rho+1}} dr;$$

далее для краткости рассматриваем лишь случай нецелого ρ. Тогда равенство (1.3) принимает вид

$$J_f(R, \varphi) = \frac{\pi \cos \rho\varphi}{\sin \pi\rho} \int_1^R \frac{n(r, f)}{r^{\rho+1}} dr + O(1), \quad R \to \infty. \tag{4.1}$$

Близкое равенство использовалось И. В. Островским*.

Из формулы (4.1) следует, что функция f имеет ρ-регулярный рост на лучах $\arg z = \theta$, где θ — произвольный нуль функции $\cos^* \rho\varphi$, и

$$H_\rho(\varphi) = \limsup_{R \to \infty} \frac{\pi \cos^* \rho\varphi}{\rho \sin \pi\rho} \frac{1}{\ln R} \int_1^R \frac{n(r, f)}{r^{\rho+1}} dr,$$

в частности $H_\rho(\varphi)$ — кусочно-трогонометрическая функция. По-видимому, неизвестно, каким может быть индикатор $h(\varphi)$ у целой функции $f \in E_\rho$ с корнями на луче.

В заключение этого краткого параграфа сделаем два замечания.

1. Равенство (4.1) позволяет исследовать распределение по аргументам a-точек функции $f \in E_\rho$ с корнями на отрицательном луче. Оказывается, что a — точки ($a \in \boldsymbol{C} \setminus \{0\}$) в определенном смысле равномерно тяготеют к лучам, соответствующим изломам функции $(\cos \rho\varphi \operatorname{cosec} \pi\rho)^+$, $\varphi \in [-\pi, \pi]$.

2. Результаты, аналогичные результатам этого параграфа, справедливы для целых функций, имеющих в определенном смысле мало корней внутри некоторого угла.

§ 5. Целые функции с «периодическим» предельным множеством. Далее будем использовать понятия теории предельных множеств целых и субгармонических функций конечного порядка, развитой В. С. Азариным [6].

Для функции $f \in E_\rho$ положим $u = \ln |f|$ и рассмотрим семейство субгармонических функций

$$u_s(z) = \frac{u(sz)}{s^\rho}, \quad s \geqslant 1.$$

---

* *Островский И. В.* О некоторых асимптотических свойствах целых функций с вещественными отрицательными нулями // Зап. мех.-мат. ф-та Харьк. ун-та и Харьк. мат. об-ва.— 1961.— 28.— С. 23—32.

Это семейство нормально в топологии пространства обобщенных функций Л. Шварца D'. Множество предельных при $s \to \infty$ субгармонических функций обозначим через A_f. Для целых функций вполне регулярного роста в плоскости множество A_f состоит из одной функции: $A_f = \{r^\rho h(\varphi)\}$. Естественно выделять классы функций f, для которых A_f имеет простую структуру. Рассмотрим такие функции $f \in E_\rho$, для которых $A_f = \{v_t(z) : 1 \leqslant t \leqslant T\}$ **(5.1)**, где v — субгармоническая функция, которая удовлетворяет тождеству $v(Tz) = T^\rho v(z)$ **(5.2)**.

Теорема 5.1. *Пусть у функции $f \in E_\rho$ предельное множество имеет вид* (5.1). *Тогда она имеет ρ-регулярный рост во всей плоскости, при этом*

$$H_\rho(\varphi) = \lim_{R \to \infty} \int\limits_R^{TR} \frac{\ln|f(re^{i\varphi})|}{r^{\rho+1}}\, dr. \tag{5.3}$$

Для доказательства теоремы 5.1 нам потребуются некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 5.1. *Пусть $v(z)$ удовлетворяет тождеству* (5.2). *Тогда* $\forall \tau \in [1, T]$ *выполняется:*

$$k_v(\varphi) := \int\limits_1^T \frac{v(re^{i\varphi})}{r^{\rho+1}}\, dr = \int\limits_1^T \frac{v_\tau(re^{i\varphi})}{r^{\rho+1}}\, dr, \tag{5.4}$$

причем функция $k_v(\varphi)$ суть ρ-тригонометрически выпуклая функция.

Доказательство. В силу тождества (5.2) выполняется

$$\int\limits_{T^k}^{T^{k+1}} \frac{v(re^{i\varphi})}{r^{\rho+1}}\, dr = \int\limits_1^T \frac{v(re^{i\varphi})}{r^{\rho+1}}\, dr,$$

поэтому

$$k_v(\varphi) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \int\limits_1^{T^N} \frac{v(re^{i\varphi})}{r^{\rho+1}}\, dr = \lim_{R \to \infty} \frac{\ln T}{\ln R} \int\limits_1^R \frac{v(re^{i\varphi})}{r^{\rho+1}}\, dr,$$

откуда следует ρ-тригонометрическая выпуклость функции k_v. Далее, $\forall \tau \in [1, T]$:

$$\int\limits_1^T \frac{v_\tau(re^{i\varphi})}{r^{\rho+1}}\, dr = \int\limits_\tau^{T\tau} \frac{v(re^{i\varphi})}{r^{\rho+1}}\, dr = \left(\int\limits_\tau^T + \int\limits_T^{T\tau}\right) \frac{v(re^{i\varphi})}{r^{\rho+1}}\, dr =$$

$$= \int\limits_1^T \frac{v(re^{i\varphi})}{r^{\rho+1}}\, dr,$$

что и требовалось доказать.

Лемма 5.2. *Пусть $f \in E_\rho$ — целая функция с предельным множеством A_f вида* (5.1). *Тогда существует предел*

$$\lim_{R\to\infty} \int_R^{TR} \frac{\ln|f(re^{i\varphi})|}{r^{\rho+1}}\,dr = k_v(\varphi), \tag{5.5}$$

где $v \in A_f$.

Доказательство. Положим $u = \ln|f|$. Тогда

$$\int_R^{TR} \frac{\ln|f(re^{i\varphi})|}{r^{\rho+1}}\,dr = \int_1^{T} \frac{u_R(re^{i\varphi})}{r^{\rho+1}}\,dr.$$

Величину

$$\int_1^{T} \frac{w(re^{i\varphi})}{r^{\rho+1}}\,dr$$

можно рассматривать, как функционал на субгармонических функциях. Нетрудно показать, что этот функционал непрерывен в D'. Поэтому (и в силу компактности A_f в D') имеем

$$\limsup_{R\to\infty} \int_1^{T} \frac{u_R(re^{i\varphi})}{r^{\rho+1}}\,dr = \sup_{v\in A_f} k_v(\varphi),$$

$$\liminf_{R\to\infty} \int_1^{T} \frac{u_R(re^{i\varphi})}{r^{\rho+1}}\,dr = \inf_{v\in A_f} k_v(\varphi).$$

Учитывая, что в силу леммы 5.1

$$\sup_{v\in A_f} k_v(\varphi) = \inf_{v\in A_f} k_v(\varphi),$$

получаем равенство (5.5).

Доказательство теоремы 5.1. Пусть T — число из правой части (5.1), $N = [\log_T R]$. Тогда в силу леммы 5.2

$$\frac{\ln T}{\ln R}\int_1^{R} \frac{\ln|f(re^{i\varphi})|}{r^{\rho+1}}\,dr = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\int_{T^m}^{T^{m+1}} \frac{\ln|f(re^{i\varphi})|}{r^{\rho+1}}\,dr + o(1) =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\{k_v(\varphi)+o(1)\} + o(1) = k_v(\varphi) + o(1),\ R\to\infty,\ v\in A_f,$$

что и требовалось доказать.

В заключение этого параграфа приведем, не останавливаясь на деталях, несколько важных примеров целых функций с предельным множеством вида (5.1).

1. С. К. Балашовым [7] (см. также [6]) были введены и исследованы целые функции вполне регулярного роста на кривых правильного

вращения. Остановимся для простоты на случае, когда кривая правильного вращения — это логарифмическая спираль $L_\alpha(\theta) = \{\zeta = te^{i\alpha \ln t + i\theta}\}$. Пусть у функции $f \in E_\rho$ — вполне регулярный рост на спиралях $L_\alpha(\theta)$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, с индикатором $h_\alpha(\theta)$. Тогда с необходимостью функция $r^\rho h_\alpha(\theta - \alpha \ln r)$ субгармоническая и $A_f = \{v_s(z),\ 1 \leqslant s < \exp \frac{2\pi}{\alpha}\}$.

Этот факт вместе с доказательством авторам сообщил В. Б. Гинер.

2. Пусть P — нелинейный многочлен. Уравнение Пуанкаре* $f(mz) = P[f(z)]$, $P[f(0)] = f(0)$, $|m = P'[f(0)]| > 1$, имеет целое решение f порядка $\rho = \frac{\ln|m|}{\ln \deg P}$. Если мультипликатор m таков, что для некоторого натурального n m^n — положительное число (т. е. $\arg m$ — соизмерим с 2π), то можно показать, что A_f удовлетворяет (5.1). Из результатов Валирона следует, что функция f не является функцией вполне регулярного роста.

3. А. Э. Еременко, дополняя известный результат Н. У. Аракеляна ([2], гл. IV), недавно построил [8] целую функцию f произвольного порядка $\rho > \frac{1}{2}$ с наперед заданным счетным множеством неванлинновских дефектных значений $D_N(f)$. Анализ этой функции, проведенный в [8], показывает, что она также имеет предельное множество вида (5.1). Таким образом, ρ — регулярность роста (в отличие от полной регулярности, когда множество $D_N(f)$ конечно) не накладывает ограничений на структуру множества $D_N(f)$.

§ 6. Связь между ростом целой функции и распределением ее корней по аргументам. Одна теорема единственности. Пусть $h(\varphi)$ — индикатор роста функции $f \in E_\rho$. Свяжем с ним неотрицательную меру $ds_f(\varphi)$ на окружности:

$$s(\varphi) = h'(\varphi - 0) + \rho^2 \int^{\varphi} h(\theta)\, d\theta. \tag{6.1}$$

(При $\rho = 1$ $s(\varphi)$ есть длина дуги границы индикаторной диаграммы функции f от некоторой фиксированной точки до точки опоры опорной прямой, отвечающей направлению φ ([1] гл. I, § 19).

Теорема 6.1. *Пусть $f \in E_\rho$, $z_n = r_n e^{i\psi_n}$ — корни функции f, $k(\theta)$ — произвольная ρ-тригонометрически выпуклая функция. Тогда*

$$\limsup_{R\to\infty} \frac{1}{\ln R} \sum_{1 < r_n < R} \frac{k(\psi_n)}{r_n^\rho} \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k(\varphi)\, ds_f(\varphi). \tag{6.2}$$

Доказательство. Из (2.2) следует, что при нецелом ρ выполняется

$$\frac{\pi}{\rho \sin \pi\rho} \sum_{1<r_n<R} \frac{\cos^* \rho(\psi_n - \varphi - \pi)}{r_n^\rho} \leqslant (h(\varphi) + o(1)) \ln R. \tag{6.3}$$

---

* См., например, Валирон Ж. Аналитические функции.— М.: Гостехиздат, 1957.— 235 с.

Рассмотрим произвольную неотрицательную меру $d\nu(\varphi)$ на $[0,2\pi)$ и проинтегрируем неравенство (6.3) по этой мере, разделим полученное неравенство на $2\pi \ln R$ и перейдем к верхнему пределу при $R \to \infty$. Получим

$$\limsup_{R\to\infty} \frac{1}{\ln R} \sum_{1<r_n<R} \frac{1}{r_n^\rho} \frac{1}{2\rho \sin \pi\rho} \int_0^{2\pi} \cos^*\rho(\psi_n - \varphi - \pi)\, d\nu(\varphi) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\varphi)\, d\nu(\varphi). \qquad (6.4)$$

Напомним, что при нецелом ρ существует взаимно однозначное соответствие между неотрицательными мерами $d\nu(\varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ и ρ-тригонометрически выпуклыми функциями ([1], гл. 1, § 16), при этом переход от функции к мере осуществляется по (6.1) и, наоборот, функция $k(\varphi)$, отвечающая мере $d\nu(\varphi)$, строится по формуле

$$k(\psi) = \frac{1}{2\rho \sin \pi\rho} \int_0^{2\pi} \cos^*\rho(\psi - \varphi - \pi)\, d\nu(\varphi).$$

Поэтому

$$\int_0^{2\pi} h(\varphi)\, d\nu(\varphi) = \int_0^{2\pi} k(\varphi)\, ds_f(\varphi)$$

и (6.2) следует из неравенства (6.4).

То же доказательство проходит и при целом ρ с тем лишь исключением, что на меру $d\nu(\varphi)$ нужно накладывать дополнительное условие:

$$\int_0^{2\pi} e^{-i\rho\varphi} d\nu(\varphi) = 0.$$

Теорема 6.1 доказана.

Отметим, что доказанное неравенство (6.2) — точное. Знак равенства в нем достигается, например, для целых функций вполне регулярного роста на замкнутом носителе меры ν, ассоциированной с функцией $k(\varphi)$.

Смысл этой теоремы состоит в том, что коль скоро субгармоническая функция $\ln|f|$ асимптотически мажорируется субгармонической функцией $h(\varphi) r^\rho$, то в определенном смысле мажорация сохраняется и для риссовских масс этих функций, т. е. распределение корней функции f «мажорируется» мерой вида $dr^\rho \cdot ds_f(\varphi)$.

С функцией $k(\varphi)$ удобно связывать считающую функцию корней $\{z_n\}$:

$$n_k(r, f) := \sum_{r_n<r} k(\psi_n), \quad z_n = r_n e^{i\psi_n}.$$

Тогда оценку (6.2) можно переписать в виде

$$\limsup_{R\to\infty}\frac{1}{\ln R}\int_1^R \frac{n_k(r, f)}{r^{\rho+1}}\,dr \leqslant \frac{1}{2\pi\rho}\int_0^{2\pi} k(\varphi)\,ds_f(\varphi). \tag{6.5}$$

Из этой оценки следует теорема единственности, запрещающая целой функции $f\in E_\rho$ с заданным индикатором иметь «слишком много» нулей в определенных направлениях. Первые утверждения такого рода были установлены в классических работах Ф. Карлсона, Т. Карлемана, Ф. и Р. Неванлинны. Дальнейшие теоремы были получены Б. Я. Левиным ([1], гл. IV, §§ 2, 3). Случай положительных корней и $\rho=1$ был с достаточной полнотой разобран в работах В. Фукса, Ж. П. Кахана, Л. Рубела и П. Маявэна*. Эти теоремы находят применения в вопросах полноты систем аналитических функций, в аналитическом продолжении степенных рядов и во многих других задачах анализа.

Теорема 6.2. *Пусть $f\in E_\rho$, $f|_\Lambda=0$, где $\Lambda=\{r_ne^{i\psi_n}\}$, $k(\varphi)$ — произвольная неотрицательная ρ-тригонометрически выпуклая функция. Предположим, что*

$$\limsup_{R\to\infty}\frac{1}{\ln R}\int_1^R \frac{n_k(r, \Lambda)}{r^{\rho+1}}\,dr > \frac{1}{2\pi\rho}\int_0^{2\pi} k(\varphi)\,ds_f(\varphi). \tag{6.6}$$

Тогда $f\equiv 0$.

Несущественно изменив доказательство, левую часть оценки (6.6) можно изменить на

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{R\to\infty}\frac{1}{\ln\frac{1}{\varepsilon}}\int_{\varepsilon R}^R \frac{n_k(r, \Lambda)}{r^{\rho+1}}\,dr,$$

при этом заключение теоремы 6.2 остается в силе. Это же замечание относится и к другим результатам работы.

Список литературы: 1. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. — М.: ГИТТЛ, 1956. — 632 с. 2. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. — М.: Наука, 1970. — 592 с. 3. *Valiron G.* Sur les directions de Borel des fonctions meromorphes d'ordre finie // J. math. pure et appl. — 1931.— 10.— P. 457 —480. 4. *Гольдберг А. А.* О росте целой функции по лучу // Теория функций, функцион. анализ и их прил. — 1965. — 1. — С. 164—175. 5. *Fuchs W. H. J.* On the growth of meromorphic functions on rays // Studies in Pure Math. To the Memory of Paul Turan. Budapest, 1983. — P. 219—229. 6. *Азарин В. С.* Об асимптотическом поведении субгармонических функций конечного порядка // Мат. сб. — 1979. — 108: 2. — С.147—167. 7. *Балашов С. К.* О функциях вполне регулярного роста по кривым правильного вращения // Изв. АН СССР.— 1976.— 40, № 3.— С. 338 — 354. 8. *Еременко А. Э.* О множестве дефектных значений целой функции конечного порядка // Укр. мат. журн.— 1987.— 39.— С. 30—37.

Поступила в редколлегию 08.07.86

---

* См., например, Malliavin P. Rubel L. A. On small entire functions of exponential type with given zeros// Bull. Soc. Math. France.— 1961.— 89.— P. 175—206, в которой имеются ссылки на предыдущие работы.