ЗАПИСКИ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА
ХАРЬКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА им. А. М. ГОРЬКОГО
И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXIX. Серия 4 1963

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ПО И. Г. ПЕТРОВСКОМУ СИСТЕМ С РАСТУЩИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В. С. Рыжий

1. Для параболических по И. Г. Петровскому систем дифференциальных уравнений порядка p вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = P\left(t,\ x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u$$

$$u = (u_1,\ \ldots,\ u_N),\ x = (x_1,\ \ldots,\ x_n),\ 0 \leqslant t \leqslant T$$

с ограниченными коэффициентами в работе [1] установлена единственность решения задачи Коши в классе функций, удовлетворяющих оценкам

$$\| D_x^k u(x,\ t) \| \leqslant e^{\beta r h(r)}$$

$$\int\limits_1^\infty \frac{dr}{h^{p-1}(r)} = \infty, \tag{1}$$

где $h(r)$ — положительная монотонно возрастающая функция,

$$r = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} > 1, \quad \| u \| = \sum_{i=1}^N | u_i |,$$

$$D_x^k = \frac{\partial^k}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} (k = 0, 1,\ \ldots,\ p-1).$$

Ранее тот же результат был получен в работе [2] для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (-1)^{b-1} \frac{\partial^{2b} u(x,\ t)}{\partial x^{2b}}.$$

Целью настоящей работы является установление аналогичного результата для параболических по И. Г. Петровскому систем, коэффициенты которых зависят от пространственных переменных и при не старших по порядку дифференцирования членах имеют на бесконечности степенной рост, зависящий от порядка системы и от порядка производной, при которой стоит данный коэффициент.

2. Рассмотрим параболическую по И. Г. Петровскому [3] систему линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial u(x,\ t)}{\partial t} = \sum_{j=0}^p P_j\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x,\ t), \tag{2}$$

где $u = (u_1,\ \ldots,\ u_N)$, $x = (x_1,\ \ldots,\ x_n)$, p — четное; элементами матрицы $P_j\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ служат дифференциальные операторы порядка $p-j$. Пусть коэффициенты системы (2) удовлетворяют условиям:

а) коэффициенты в операторе $P_0\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ и все их производные до порядка $p+1$ являются непрерывными и ограниченными функциями $x(-\infty < x_i < \infty,\ i = 1, 2, \ldots, n)$,

б) коэффициенты в операторе $P_j\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ $(j = 1, 2, \ldots, p)$ и их производные первого порядка по $x_1, \ldots, x_n$ непрерывны и ограничены по абсолютной величине функцией

$$K_0\left(\sum_{s=1}^{n} |x_s|^{k_j} + 1\right),$$

где $K_0 = \mathrm{const} > 0$, $-\infty < x_s < \infty$,

$$k_j < \frac{jp'}{p} = \frac{j}{p-1} \left(j = 1, 2, \ldots, p;\ \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right).$$

В работе [4] установлено, что система (2), удовлетворяющая условиям а) и б), имеет фундаментальную матрицу $\Phi(x, \xi, t, t_0)$, для которой справедливы оценки

$$\| D_x^m \Phi(x, \xi, t, t_0) \| \leqslant \frac{A}{(t-t_0)^{\frac{n+m}{p}}} e^{-\frac{C \sum\limits_{s=1}^{n} |x_s - \xi_s|^{p'}}{(t-t_0)^{\frac{1}{p-1}}} + B \sum\limits_{s=1}^{n} |\xi_s|^{p'}}, \tag{3}$$

$$0 \leqslant t_0 < t \leqslant T,\ -\infty < x_s,\ \xi_s < \infty;\ m = 0, 1, \ldots, p;$$

положительные постоянные A, B и C зависят от T. Оценкам (3) удовлетворяет также фундаментальная матрица $\Phi^*(x, \xi, t, t_0)$ системы

$$L'u \equiv \left[-\frac{\partial}{\partial t} - \sum_{j=0}^{p} P_j^1\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\right] u = 0,$$

сопряженной с системой (2).

3. Будем искать решение системы (2), удовлетворяющее начальному условию

$$u(x, t_0) \equiv 0. \tag{4}$$

Теорема. Пусть коэффициенты системы (2) удовлетворяют условиям а) и б). Тогда решение задачи Коши (2)—(4) единственно в классе функций, удовлетворяющих оценкам (1).

Доказательство. Пусть $u(x, t) = \{u_1(x, t), \ldots, u_N(x, t)\}$ является решением системы (2), удовлетворяющей условиям а) и б), непрерывным вместе со своими производными до порядка p в цилиндре

$$r = |x| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant l,\ 0 \leqslant t_0 < t \leqslant T$$

и непрерывным при $t = t_0$, причем выполнены неравенства

$$\| u(x, t_0) \| \leqslant K_1 (r \leqslant l), \tag{5'}$$

$$\| D_x^m u(x, t) \| \leqslant K_2 (r = l,\ 0 \leqslant t_0 < t \leqslant T,\ m = 0, 1, \ldots, p-1).$$

Покажем, что тогда в цилиндре

$$r < ql\ (q \text{ — любое, } 0 < q < 1),\ 0 \leqslant t_0 < t \leqslant T$$

имеет место оценка

$$\| u(x, t) \| \leqslant K e^{nBl^{p'}} \left[K_1 + \frac{P_q\left(\frac{1}{l-r}\right)}{(l-r)^{p'}} K_2 e^{-\alpha \frac{(l-r)^{p'}}{(t-t_0)^{\frac{1}{p-1}}}}\right], \tag{5}$$

где K и α — абсолютные для нашей системы постоянные, P_q — полином степени $\leqslant p$ с коэффициентами, зависящими от q.

Для доказательства этого утверждения, воспользуемся следующей формулой для решения $u(x, t)$ [5] в случае цилиндра $|\xi| = l$, $0 \leqslant t_0 < t \leqslant T$:

$$u(x, t) = \int\limits_{|\xi| \leqslant l} \Phi(x, \xi, t, t_0)\, u(\xi, t_0)\, d\xi +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t} \int\limits_{|\xi| = l} \sum_{i=1}^{n} B^i [\Phi(x, \xi, t, \tau),\ u(\xi, \tau)]\, d\tau \cos(\overline{n}, \xi_i)\, d\sigma, \tag{6}$$

где $B^i[\Phi, u]$ — столбец, элементы которого являются билинейными формами от элементов матрицы Φ и компонент $D_x^m u$ $(m = 0, 1, \ldots, p-1)$.

Справедливость этого представления вытекает из формулы Грина

$$\int\limits_{t_0}^{t} \int\limits_{|\xi| \leqslant l} [vLu - (L'v')'u]\, d\xi\, d\tau = \int\limits_{|\xi| \leqslant l} [vu]_{\tau = t_0}^{\tau = t}\, d\xi +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t} \int\limits_{|\xi| = l} \sum_{i=1}^{n} B^i [v, u] (-1)^i \frac{d\xi_1 \ldots d\xi_n}{d\xi_i}\, d\tau$$

и оценок (3). Из (6) получаем

$$\| u(x, t) \| \leqslant \widetilde{A} [K_1 \int\limits_{|\xi| \leqslant l} \| \Phi(x, \xi, t, t_0) \|\, d\xi +$$

$$+ K_2 \max_{1 \leqslant k \leqslant p-1} \int\limits_{t_0}^{t} \int\limits_{|\xi| = l} \| D_x^k \Phi(x, \xi, t, \tau) \|\, d\sigma d\tau].$$

Из оценок (3) следует

$$\int\limits_{|\xi| < l} \| \Phi(x, \xi, t, t_0) \|\, d\xi \leqslant A \int\limits_{|\xi| < l} \frac{1}{(t - t_0)^{\frac{n}{p}}} e^{-\frac{C}{(t-t_0)^{\frac{p'}{p}}} \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - \xi_i|^{p'} + B \sum\limits_{i=1}^{n} |\xi_i|^{p'}}\, d\xi =$$

$$= A \prod_{i=1}^{n} \int\limits_{-l}^{l} \frac{1}{(t - t_0)^{\frac{1}{p}}} e^{-\frac{C'}{(t-t_0)^{\frac{p'}{p}}} |x_i - \xi_i|^{p'} + B|\xi_i|^{p'}}\, d\xi_i \leqslant$$

$$\leqslant A_1 e^{nBl^{p'}} \prod_{i=1}^{n} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-|s|^{p'}}\, ds = A_2 e^{nBl^{p'}}. \tag{7}$$

Замечая, что

$$\sum_{s=1}^{n} |x_s - \xi_s|^{p'} \geqslant \widetilde{C} \left[\sum_{s=1}^{n} (x_s - \xi_s)^2 \right]^{\frac{p'}{2}}$$

и воспользовавшись оценками (3), получим

$$\int\limits_{t_0}^{t} \int\limits_{|\xi| = l} \| D_x^k \Phi(x, \xi, t, \tau) \|\, d\sigma d\tau \leqslant$$

$$\leqslant A \int\limits_{t_0}^{t} \int\limits_{|\xi| = l} \frac{1}{(t - \tau)^{\frac{n+k}{p}}} e^{-2\alpha \left[\frac{\rho}{(t-\tau)^{\frac{1}{p}}} \right]^{p'} + B \sum\limits_{i=1}^{n} |\xi_i|^{p'}}\, d\sigma d\tau < A e^{nBl^{p'}} \cdot I_k, \tag{8}$$

где $\rho = \sqrt{\sum\limits_{s=1}^{n} (x_s - \xi_s)^2}$,

$$I_k = \int\limits_{t_0}^{t} \int\limits_{|\xi|=l} \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{n+k}{p}}} e^{-2\alpha \left[\frac{\rho}{(t-\tau)^{\frac{1}{p}}}\right]^{p'}} d\sigma d\tau \leqslant \frac{A_1}{(l-r)^{k+1+p'}} e^{-\alpha\left[\frac{l-r}{(t-t_0)^{\frac{1}{p}}}\right]^{p'}}$$

(оценку I_k см. в работе [1]).
Из (7) и (8) вытекает справедливость оценки (5).

Пусть

$$h_1(r) = \left[h^{p-1}(r) + \frac{r}{C_1}\right]^{\frac{1}{p-1}}, \tag{9}$$

где $h(r)$ — функция, удовлетворяющая условиям (1), $C_1 = \left(\frac{1-\gamma}{2nB}\right)^{p-1}$, γ — любое фиксированное число, $0 < \gamma < 1$.

Покажем, что из расходимости интеграла

$$\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dr}{h^{p-1}(r)} \tag{10}$$

следует расходимость интеграла

$$\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dr}{h_1^{p-1}(r)}, \tag{11}$$

или, что то же самое, из сходимости интеграла (11) следует сходимость интеграла (10). Пусть

$$\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dr}{h^{p-1}(r) + \frac{r}{C_1}} < \infty,$$

тогда

$$\frac{r}{h^{p-1}(r)} \to 0 \text{ при } r \to \infty. \tag{12}$$

Действительно, если условие (12) не выполняется, то найдется возрастающая последовательность $\{r_i\}$ с предельной точкой на бесконечности, для которой

$$\frac{r_i}{h^{p-1}(r_i)} > d > 0 \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

Выберем из нее подпоследовательность $\{r'_i\}$ такую, что $r'_i < (1-\delta)\, r'_{i+1}$, где δ — произвольное фиксированное число, $0 < \delta < 1$.

Тогда

$$\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dr}{h^{p-1}(r) + \frac{r}{C_1}} \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} \int\limits_{r'_i}^{r'_{i+1}} \frac{dr}{h^{p-1}(r) + \frac{r}{C_1}} \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} \frac{r'_{i+1} - r'_i}{h^{p-1}(r'_{i+1}) + \frac{r'_{i+1}}{C_1}} =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{r'_{i+1} - r'_i}{r'_{i+1}\left[\frac{h^{p-1}(r'_{i+1})}{r'_{i+1}} + \frac{1}{C_1}\right]} > \sum_{i=1}^{\infty} \frac{r'_{i+1} - r'_i}{r'_{i+1}\left[\frac{1}{d} + \frac{1}{C_1}\right]} = C_2 \sum_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{r'_i}{r'_{i+1}}\right).$$

Но $1 - \frac{r'_i}{r'_{i+1}} > \delta$ и, следовательно, ряд $\sum_{i=1}^{\infty}\left(1 - \frac{r'_i}{r'_{i+1}}\right)$ расходится, а вместе с ним расходится также интеграл (11), вопреки предположению. Итак, условие (12) выполнено, значит,

$$\lim_{r\to\infty}\left[\frac{h^{p-1}(r) + \frac{r}{C_1}}{h^{p-1}(r)}\right] = 1,$$

поэтому интеграл (10) сходится, что и требовалось.

Как и в работе [1], положим теперь

$$l_i = 2^i \quad (i = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$t_i = \left(\frac{\alpha}{1+\beta}\right)^{p-1} \frac{(l_i - l_{i-1})^p}{[l_i h_1(l_i)]^{p-1}} = \left(\frac{\alpha}{1+\beta}\right)^{p-1} \frac{1}{2^p}\frac{l_i}{[h_1(l_i)]^{p-1}}, \tag{13}$$

где α и β — константы, которые входят соответственно в неравенства (1) и (5). Пусть $\varepsilon > 0$ и $R > 0$ — любые числа, m — наименьшее целое число, для которого одновременно имеем

$$l_{m-1} > R \quad \text{и} \quad \frac{KL}{e^{\gamma l_m h_1(l_m)} - K} < \varepsilon,$$

где

$$L = \max_{m\leqslant i}\frac{P_q\left(\frac{1}{l_i - l_{i-1}}\right)}{(l_i - l_{i-1})^{p'}} = \frac{P_q\left(\frac{1}{l_{m-1}}\right)}{l_{m-1}^{p'}},$$

γ — то же число, что и в (9);
M — наименьшее целое число, для которого

$$\sum_{i=m}^{M} t_i \geqslant \frac{1}{2^p}\left(\frac{\alpha}{1+\beta}\right)^{p-1}\int_{l_m}^{l_{M+1}}\frac{dr}{h_1^{p-1}(r)} \geqslant T. \tag{14}$$

Соотношение (14) возможно в силу того, что

$$\frac{l_i}{h_1^{p-1}(l_i)} \geqslant \int_{l_i}^{l_{i+1}}\frac{dr}{h_1^{p-1}(r)},$$

а интеграл (10), по предположению, расходится.

Если $u(x, t)$ — решение задачи Коши (2) — (4), удовлетворяющее условиям (1), то $u(x, t)$ удовлетворяет, очевидно, также оценке

$$\| D_x^m u(x, t)\| \leqslant e^{\beta r h_1(r)} \quad (m = 0, 1, \ldots, p-1). \tag{15}$$

Пусть $t_0 = 0$ и $u(x, 0) \equiv 0$, тогда в (5') $K_1 = 0$ и, в силу (15), при $r < l_M$ имеем $K_2 = e^{\beta l_M h_1(l_M)}$.

При этом оценка (5) в области $r < l_M$, $0 < t < t_M$ дает

$$\| u(x, t)\| \leqslant Ke^{nBl_M^{p'}}\frac{P_q\left(\frac{1}{l_M - r}\right)}{(l_M - r)^{p'}} e^{\beta l_M h_1(l_M) - \alpha\frac{(l_M - r)^{p'}}{t^{\frac{1}{p-1}}}},$$

откуда в силу (13) в области $r < l_{M-1}$, $0 < t < t_M$ получаем

$$\| u(x, t)\| \leqslant KLe^{nBl_M^{p'} - l_M h_1(l_M)}. \tag{16}$$

Применив оценку (5) к области $r < l_{M-1}$, $t_M < t < t_M + t_{M-1}$, $(K_1 = KLe^{nBl_M^{p'} - l_M h_1(l_M)}$, $K_2 = e^{\beta l_{M-1} h_1(l_{M-1})})$, получим

$$\| u(x, t) \| \leqslant Ke^{nBl_{M-1}^{p'}} [KLe^{nBl_M^{p'} - l_M h_1(l_M)} +$$

$$+ \frac{P_q\left(\frac{1}{l_{M-1} - r}\right)}{(l_{M-1} - r)^{p'}} e^{\beta l_{M-1} h_1(l_{M-1}) - \alpha \frac{(l_{M-1} - r)^{p'}}{(t - t_M)^{\frac{1}{p-1}}}}],$$

а это при $r < l_{M-2}$, $t_M < t < t_M + t_{M-1}$ дает

$$\| u(x, t) \| \leqslant Ke^{nBl_{M-1}^{p'}} [KLe^{nBl_M^{p'} - l_M h_1(l_M)} + Le^{-l_{M-1} h_1(l_{M-1})}] =$$

$$= L \{K^2 e^{nB\left(\frac{1}{2p'} + 1\right) l_M^{p'} - l_M h_1(l_M)} + Ke^{nBl_{M-1}^{p'} - l_{M-1} h_1(l_{M-1})}\}. \tag{17}$$

Объединяя оценки (16) и (17), получаем, что оценка (17) выполняется в области

$$r < l_{M-2}, \quad 0 < t < t_M + t_{M-1}.$$

Аналогично в области

$$r < l_{M-3}, \; 0 < t < t_M + t_{M-1} + t_{M-2}$$

получим

$$\| u(x, t) \| \leqslant L \{K^3 e^{nB\left[\left(\frac{1}{2p'}\right)^2 + \frac{1}{2p'} + 1\right] l_M^{p'} - l_M h_1(l_M)} +$$

$$+ K^2 e^{nB\left(\frac{1}{2p'} + 1\right) l_{M-1}^{p'} - l_{M-1} h_1(l_{M-1})} + Ke^{nBl_{M-2}^{p'} h_1(l_{M-2})}\}.$$

Замечая, что

$$\sum_k \frac{1}{2^{p'k}} \leqslant \frac{1}{1 - 2^{\frac{1}{p'}}} \leqslant 2$$

и продолжая этот процесс, после $M - m + 1$-го шага в области

$$r < l_{m-1}, \; 0 < t < \sum_{i=m}^{M} t_i$$

получим

$$\| u(x, t) \| \leqslant L \sum_{i=m}^{M} K^{i-m+1} e^{2nBl_i^{p'} - l_i h_1(l_i)} = L \sum_{i=0}^{M-m} K^{i+1} e^{2nBl_{m+i}^{p'} - l_{m+i} h_1(l_{m+i})}.$$

Поскольку функция $h_1(r)$, определенная в (9), удовлетворяет неравенству

$$\frac{1}{h_1^{p-1}(r)} < \frac{C_1}{r},$$

то

$$2nBl_i^{p'} - l_i h_1(l_i) < -\gamma l_i h_1(l_i)$$

и, значит,

$$\| u(x, t) \| < KL \sum_{i=0}^{M-m} K^i e^{-\gamma l_{m+i} h_1(l_{m+i})} \leqslant KL \sum_{i=0}^{M-m} K^i e^{-\gamma (i+1) l_m h_1(l_m)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{KLe^{-\gamma l_m h_1(l_m)}}{1 - Ke^{-\gamma l_m h_1(l_m)}} = \frac{KL}{e^{\gamma l_m h_1(l_m)} - K} < \varepsilon.$$

Итак, $\| u(x, t) \| < \varepsilon$ в области

$$r \leqslant R, \; 0 \leqslant t \leqslant \min\left(T, \; \sum_{i=m}^{M} t_i\right).$$

Так как ε и R выбраны произвольно, то $u(x, t) \equiv 0$.

В заключение пользуюсь случаем принести благоприятность В. М. Борок за постановку задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Н. Золотарев. О единственности решения задачи Коши для систем, параболических в смысле И. Г. Петровского. «Изв. высш. учебн. завед.», Математика, 2 (1958).

2. S. Täcklind. Sur les classes quasianalytiques des solutions des équations aux derives partielles du type parabolique, Nord Acta Regial Sosietatis Scientarum Upsaliensis, **4**, vol. 10 (1936).

3. С. З. Брук. Фундаментальные решения систем дифференциальных уравнений параболического типа. «Докл. АН СССР», **60**, № 1 (1948).

4. Я. И. Житомирский. Задача Коши для параболических систем линейных уравнений в частных производных с растущими коэффициентами. «Изв. высш. учебн. завед.», Математика, 1 (1959).

5. С. Д. Эйдельман. О задаче Коши для параболических систем. «Матем. сб.», **78** (80), вып. 1 (1956).