УДК 519.2

Г. П. ЧИСТЯКОВ

ОЦЕНКИ СБЛИЖЕНИЯ n-КРАТНЫХ СВЕРТОК ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ С БЕЗГРАНИЧНО ДЕЛИМЫМИ И ПРОБЛЕМА МОМЕНТОВ

Работа посвящена новому подходу к вопросу об аппроксимации n-кратных сверток законов распределения (з. р.) безгранично делимыми (б. д.) з. р. Этот подход связан с одним результатом Ю. В. Прохорова [1] и является попыткой систематического исследования неравномерной аппроксимации n-кратных сверток з. р. б. д. з. р. Рассматриваемая задача является задачей теории вероятностей, в которой, как оказалось, можно эффективно использовать методы классического анализа, связанные с проблемой моментов, задачей о продолжении эрмитово положительных функций. Особо отметим, что будут использованы некоторые идеи Н. И. Ахиезера, памяти которого посвящен настоящий сборник.

Пусть $\boldsymbol{F}$ — множество всех з. р., заданных на вещественной оси $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{F}_+$ — множество з. р. с неотрицательными характеристическими функциями, $\boldsymbol{D}$ — совокупность б. д. з. р. и пусть $\rho(F, G)$ — равномерное расстояние между з. р. F и G, т. е.

$$\rho(F, G) = \sup_{x \in \mathbf{R}} | F(x) - G(x) |.$$

В 1955 г. Ю. В. Прохоров [1] доказал, что для любого з. р. F

$$\rho(F^{n*}, \boldsymbol{D}) = \inf_{D \in \mathbf{D}} \rho(F^{n*}, D) \to 0 \ (n \to \infty), \tag{1}$$

где F^{n*} — n-кратная свертка з. р. F. А. Н. Колмогоров [2] обнаружил, что сходимость в (1) к нулю равномерна относительно F во всем классе $\boldsymbol{F}$. Затем последовали работы ряда авторов (история вопроса подробно изложена в [3]), в которых были получены оценки сверху и снизу функций:

$$\psi(n) = \sup_{F \in \mathbf{F}} \rho(F^{n*}, \boldsymbol{D}), \quad \psi_+(n) = \sup_{F \in \mathbf{F}_+} \rho(F^{n*}, \boldsymbol{D}).$$

Окончательный ответ дал Т. В. Арак [4—7], который доказал следующие оценки:

$$c_1 n^{-2/3} \leqslant \psi(n) \leqslant c_2 n^{-2/3}, \quad c_3 n^{-1} \leqslant \psi_+(n) \leqslant c_4 n^{-1}, \tag{2}$$

где c_j $(j = 1, 2, 3, 4)$ — абсолютные положительные постоянные.

Вернемся к результату Ю. В. Прохорова и поставим вопрос возможной скорости убывания к нулю при $n \to \infty$ величины $(F^{n*}, \boldsymbol{D})$ для з. р. $F \notin \boldsymbol{D}$. Обозначим через $I(F)$ — наибольший имметричный относительно нуля отрезок, на котором х. ф. $\varphi(t; F)$ р. $F \notin \boldsymbol{D}$ совпадает с х. ф. некоторого б. д. з. р. Он может ырождаться в точку $\{0\}$. Введем величину: $m(F) = \min\limits_{t \in I(F)} |\varphi(t; F)|$. та величина, очевидно, удовлетворяет неравенству $0 < m(F) \leqslant 1$.

Теорема 1. *Пусть з. р. $F \notin \boldsymbol{D}$ и пусть величина $N_\nu(n)$ $(n \in \boldsymbol{N}$, $> 0)$ определяется соотношением*

$$N_\nu(n) = \inf\left\{x > 0 : F\left(-\frac{x}{n}\right) + 1 - F\left(\frac{x}{n} + 0\right) \leqslant (e^{-\nu} m(F))^n\right\}.$$

огда для любого $\nu > 0$ имеет место неравенство

$$\varliminf_{n \to \infty} (\ln(N_\nu^3(n)\, \rho(F^{n*}, \boldsymbol{D})))/n \geqslant 7 \ln m(F). \tag{3}$$

Следствие 1. *Для з. р. $F \notin \boldsymbol{D}$ такого, что*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|^\delta \, dF(x) < \infty \quad (\exists \delta > 0),$$

дется постоянная $b = b(F) > 0$, что $\rho(F^{n*}, \boldsymbol{D}) \geqslant e^{-bn}$ $(n \in \boldsymbol{N})$.

Теорема 1 допускает уточнение для з. р. F таких, что их симтризации $F_s = F \ast \bar{F}$, где $\bar{F}(x) = 1 - F(-x + 0)$, не являются д. з. р. Предположение $F_s \notin \boldsymbol{D}$ жестче предположения $F \notin \boldsymbol{D}$, скольку существуют з. р. $F \notin \boldsymbol{D}$ и $F_s \in \boldsymbol{D}$. Примером такого з. р. м. [8, с. 47]) служит з. р. с х. ф. вида

$$\exp(e^{-2it} + 2e^{it} - e^{2it} + 3e^{3it} + 3e^{4it} - 8).$$

Теорема 2. *Пусть з. р. F такой, что $F_s \notin \boldsymbol{D}$. Тогда*

$$\varlimsup_{n \to \infty} (-\ln \rho(F^{n*}, \boldsymbol{D}))/n \leqslant -2 \ln m(F_s). \tag{4}$$

Из теоремы 2 извлекаем очевидное следствие.

Следствие 2. *Пусть симметричный з. р. $F \notin \boldsymbol{D}$, тогда для его выполняется соотношение* (4).

Из этого утверждения видим, что величина $\rho(F^{n*}, \boldsymbol{D})$ не может бывать при $n \to \infty$ быстрее экспоненциальной функции для произольных симметричных не б. д. з. р.

Теорема 2 является следствием результата выясняющего как тражается на свойствах х. ф. з. р. F экспоненциальное убывание еличины $\rho(F^{n*}, \boldsymbol{D})$ при $n \to \infty$.

Теорема 3. *Пусть для з. р. F выполняется соотношение*

$$\varlimsup_{n \to \infty} (-\ln \rho(F^{n*}, \boldsymbol{D}))/n > \Delta \quad (0 < \Delta < \infty). \tag{5}$$

Тогда х. ф. з. р. F_s на интервале $(-A_F, A_F)$, где

$$A_F = \sup\{M > 0 : \min_{|t| \leqslant M} |\varphi(t; F)| \geqslant e^{-\Delta/4}\},$$

совпадает с х. ф. некоторого б. д. з. р.

Для теоремы 3 справедливо в известной степени обратное утверждение.

Теорема 4. *Пусть з. р. F таков, что его х. ф. совпадает на некотором отрезке $[-A, A]$ $(0 < A < \infty)$ с. х. ф. некоторого з. р. из $\boldsymbol{D}$. Пусть $D \in \boldsymbol{D}$ — з. р. с х. ф. $\varphi(t; D) \in L^p(-\infty, \infty)$ $(p \geqslant 1)$. Тогда*

$$\varliminf_{n\to\infty} (-\ln \rho(F^{n*} \ast D^{n*}, \boldsymbol{D}))/n \geqslant b \; (e^{-b} = \sup_{|t| \geqslant A} |\varphi(t; D)|).$$

Сузим теперь класс рассматриваемых з. р. до класса $\boldsymbol{F}_+$. Для з. р. $F \in \boldsymbol{F}_+$ и $F \notin \boldsymbol{D}$ справедливы оценки

$$e^{-bn} \leqslant \rho(F^{n*}, \boldsymbol{D}) \leqslant cn^{-1} \quad (n \in \boldsymbol{N}), \tag{6}$$

где $b > 0$ — постоянная зависящая от з. р. F, а c — абсолютная постоянная. Левая часть оценки (6) вытекает из следствия 2, а правая — из оценки (2) величины $\psi_+(n)$. Поставим вопрос о том, какая на самом деле возможна скорость убывания величины $\rho(F^{n*}, \boldsymbol{D})$ при $n \to \infty$ для з. р. $F \in \boldsymbol{F}_+$ и $F \notin \boldsymbol{D}$. Э. Л. Пресман [9] доказал, что существуют з. р. $F \in \boldsymbol{F}_+$ со степенным убыванием порядка один величины $\rho(F^{n*}, \boldsymbol{D})$. Следующая теорема о существовании з. р. $F \in \boldsymbol{F}_+$ с любым степенным убыванием величины $\rho(F^{n*}, \boldsymbol{D})$.

Теорема 5. *Для $k = 2, 3, \ldots$ существуют з. р. $F \in \boldsymbol{F}_+$ такие, что*

$$b_1 (n^k \ln^{3k+3}(n+1))^{-1} \leqslant \rho(F^{n*}, \boldsymbol{D}) \leqslant b_2 n^{-k} \quad (n \in \boldsymbol{N}),$$

где b_1, b_2 — положительные постоянные, зависящие лишь от з. р. F.

Теорема 4 и следствие 2 позволяют построить з. р. $F \in \boldsymbol{F}_+$ с экспоненциальным убыванием $\rho(F^{n*}, \boldsymbol{D})$.

Теорема 6. *Существуют з. р. $F \in \boldsymbol{F}_+$, для которых*

$$\varliminf_{n\to\infty} (-\ln \rho(F^{n*}, \boldsymbol{D}))/n > 0,$$

$$\varlimsup_{n\to\infty} (-\ln \rho(F^{n*}, \boldsymbol{D}))/n < \infty.$$

З.р. F из теоремы 6, как это следует из теоремы 3, таковы, что их х.ф. в некоторой окрестности нуля совпадают с х.ф.б.д.з.р. Ответ на вопрос о существовании з.р. $F \in \boldsymbol{F}_+$ с более чем степенным убыванием величины $\rho(F^{n*}, \boldsymbol{D})$ дает

Теорема 7. *Для любого $\gamma_0 > 0$ существуют з. р. $F \in \boldsymbol{F}_+$ такие, что*

$$\gamma_0 \ln^2 n \leqslant -\ln \rho(F^{n*}, \boldsymbol{D}) = o(n) \quad (n \to \infty). \tag{7}$$

Если отказаться от условия симметричности з.р. F, то теорема 7 допускает уточнение.

Теорема 8. *Для любого* $\alpha_0 \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$ *существуют з.р. (несимметричные) такие, что правая часть оценки* (7) *сохранится, а левая часть заменится на* n^{α_0}.

При доказательстве теорем 5, 7, 8 используются методы, связанные с проблемой моментов и задачей о продолжении с отрезка эрмитово положительных функций.

§ 1. Доказательство теорем 1—4. Предварительно докажем лемму.

Лемма 1. *Пусть для з.р.* F *найдется последовательность* $\{n\}$*-натуральных чисел, что выполнено соотношение*

$$\rho(F^{n*}, \boldsymbol{D}) \leqslant \varepsilon_n < 1, \ \varepsilon_n \downarrow 0 \ (n \to \infty). \tag{1.1}$$

Тогда существует последовательность б.д.з.р. $\{D_n\}$ *такая, что для любых* $M_n > 0$ *справедлива оценка*

$$\int\limits_{|t| \leqslant A_n} (|\varphi(t; F)|^2 - |\varphi(t; D_n)|^2)^2 \, dt \leqslant 32\pi A_n \varepsilon_n^{1-4(n-1)/M_n},$$

где A_n — *любое положительное число, не превосходящее* $\alpha_n = \sup(M > 0: \min\limits_{|t| \leqslant M} |\varphi(t; F)| \geqslant \varepsilon_n^{1/M_n})$.

Доказательство. В силу соотношения (1.1) найдется последовательность б.д.з.р. $\{D_n\}$ такая, что $\rho(F^{n*}, D_n) \leqslant 2\varepsilon_n$. Для симметризаций F_s, D_{ns} соответственно з.р. F, D_n в силу последнего неравенства имеем

$$\rho(F_s^{n*}, D_{ns}^{n*}) \leqslant \rho(F_s^{n*}, F^{n*} \ast \overline{D}_n^{n*}) + \rho(F^{n*} \ast \overline{D}_n^{n*}, D_{ns}^{n*}) \leqslant$$
$$\leqslant \rho(\overline{F}^{n*}, \overline{D}_n^{n*}) + \rho(F^{n*}, D_n^{n*}) \leqslant 4\varepsilon_n. \tag{1.2}$$

Обозначим $V_n = (F_s^{n*} - D_{ns}^{n*})^{2*} \ast Q_{2A_n}$, где Q_{2A_n} — з.р. с х.ф. вида

$$\varphi(t; Q_{2A_n}) = \begin{cases} 1 - |t|/(2A_n), & |t| \leqslant 2A_n, \\ 0 & |t| > 2A_n. \end{cases} \tag{1.3}$$

С помощью формулы обращения (см. [8, с. 13]) имеем

$$V_n(x) - V_n(-x) =$$
$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_{-2A_n}^{2A_n} \frac{\sin xt}{t} (\varphi^n(t; F_s) - \varphi^n(t; D_{ns}))^2 \varphi(t; Q_{2A_n}) \, dt. \tag{1.4}$$

Поскольку на отрезке $[-A_n, A_n]$ $|\varphi(t; F)| \geqslant \varepsilon_n^{1/M_n}$, то на нем справедлива очевидная оценка:

$$(\varphi^n(t; F_s) - \varphi^n(t; D_{ns}))^2 =$$
$$= (\varphi(t; F_s) - \varphi(t; D_{ns}))^2 \Big(\sum_{m=0}^{n-1} \varphi^{n-m-1}(t; F_s) \varphi^m(t; D_{ns})\Big)^2 \geqslant$$
$$\geqslant \varepsilon_n^{4(n-1)/M_n} (\varphi(t; F_s) - \varphi(t; D_{ns}))^2. \tag{1.5}$$

Положим в формуле (1.4) $x = \pi/(4A_n)$, тогда с помощью неравен (1.2), (1.5) и неравенства $\sin u \geqslant (2/\pi)\, u$ $(0 \leqslant u \leqslant \pi/2)$ легко получа

$$16\varepsilon_n \geqslant \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{A_n} \frac{\sin(\pi t/(4A_n))}{t} \left(\varphi^n(t;\ F_s) - \varphi^n(t;\ D_{ns})\right)^2 \varphi(t;\ Q_{2A_n})\, dt \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2\pi A_n}\, \varepsilon_n^{4(n-1)/M_n} \int\limits_0^{A_n} \left(|\varphi(t;\ F)|^2 - |\varphi(t;\ D_n)|^2\right)^2 dt,$$

откуда выводим утверждение леммы 1.

Доказательство теоремы 3. Из соотношения (5) следует, что для з.р. F выполняются условия леммы 1 с $\varepsilon_n = \exp(-(\Delta + \eta)\, n)$ $(\exists \eta > 0)$, а n пробегает некоторую последовательность натуральных чисел. Тогда в силу леммы 1 найдется последовательность б.д.з.р. $\{D_n\}$ такая, что справедливы неравенства для некоторой последовательности натуральных чисел $\{n\}$ $(n \to \infty)$ и любых $\tilde{A}_F \in (0, A_F)$:

$$\int\limits_{|t| \leqslant \tilde{A}_F} \left(|\varphi(t;\ F)|^2 - |\varphi(t;\ D_n)|^2\right)^2 dt \leqslant 32\pi \tilde{A}_F e^{-\eta n}. \tag{1.6}$$

Действительно для этого достаточно положить $M_n = 4n(\Delta + \eta)/\Delta$ и заметить, что $A_F = \alpha_n$. Покажем теперь, что из последователь ности б.д.з.р. $\{D_{ns}\}$ $(D_{ns} = D_n \ast \overline{D}_n)$ можно выделить слабо сходя щуюся подпоследовательность. Для этого проверим, что для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N_\varepsilon > 0$ такое, что

$$\sup_n \left(D_{ns}(-N_\varepsilon) + 1 - D_{ns}(N_\varepsilon)\right) \leqslant \varepsilon. \tag{1.7}$$

В самом деле, с помощью неравенства Гельдера получаем из (1.6)

$$\int\limits_{|t| \leqslant \tilde{A}_F} |\varphi(t;\ F_s) - \varphi(t;\ D_{ns})|\, dt \leqslant \sqrt{32\pi}\, \tilde{A}_F e^{-\eta n/2}, \tag{1.8}$$

а из хорошо известного неравенства для оценки «хвостов» з.р. (см. [8, с. 108]) имеем

$$\int\limits_{|x| \geqslant 1/u} dD_{ns}(x) \leqslant \frac{7}{u} \int\limits_0^u \left(1 - \varphi(t;\ D_{ns})\right) dt \quad (u > 0).$$

Из последних двух неравенств легко извлекаем неравенство (1.7), из которого следует слабая компактность последовательности з.р. D_{ns}. Слабо сходящуюся подпоследовательность б.д.з.р. будем обозначать по-прежнему $\{D_{ns}\}$. Таким образом, $D_{ns} \Rightarrow D$ $(n \to \infty)$, где D — б.д.з.р. Поскольку (1.6) имеет место для любого сколь угодно близкого к A_F числа $\tilde{A}_F < A_F$, то получаем $\varphi(t;\ F_s) = \varphi(t;\ D)$ $(t \in (-A_F,\ A_F))$, что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 2. Если бы соотношение (4) не выполнялось, то соотношение (5) выполнялось бы для $\Delta = -2\ln m(F_s) + \eta$ с некоторым $\eta > 0$. Тогда в силу теоремы 3 на отрезке $[-A_F, A_F] \supset I(F_s)$ х.ф.з.р. F_s совпадает с х.ф. некоторого б.д.з.р., что противоречит выбору отрезка $I(F_s)$.

Доказательство теоремы 1. Пусть неравенство (3) не имеет места. Тогда найдется последовательность б.д.з.р. $\{D_n\}$ ($\{n\}$ — бесконечная подпоследовательность натуральных чисел) такая, что для некоторого $\eta \in (0, \nu)$ и всех n справедливы оценки

$$\rho(F^{n*}, D_n^{n*}) \leqslant N_\nu^{-3}(n) \; (e^{-\eta/7} m(F))^{7n}. \tag{1.9}$$

Обозначим $W_n = F^{n*} - D_n^{n*}$, $-\overline{W}_n(x) = W_n(-x+0)$, тогда

$$|\varphi^n(t;\ F) - \varphi^n(t;\ D_n)|^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d(W_n \ast \overline{W}_n)(x).$$

По формуле обращения имеем

$$(W_n \ast \overline{W}_n \ast Q_a)(x) - (W_n \ast \overline{W}_n \ast Q_a)(-x) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_{-a}^{a} \frac{\sin xt}{t} \left| |\varphi(t;\ F)|^n e^{in\arg\varphi(t;\ F)} -\right.$$

$$\left. - |\varphi(t;\ D_n)|^n e^{in\arg\varphi(t;\ D_n)} \right|^2 \varphi(t;\ Q_a)\, dt, \tag{1.10}$$

где функция $\varphi(t;\ Q_a)$ определяется формулой (1.3), непрерывные однозначные ветви аргументов х.ф.з.р. F и D_n выделяются условиями $\arg\varphi(0;\ F) = \arg\varphi(0;\ D_n) = 0$. Поскольку из (1.9) следует оценка

$$\rho(F_s^{n*}, D_{ns}^{n*}) \leqslant 2N_\nu^{-3}(n)\,(m(F))^{7n} e^{-\eta n},$$

то аналогично доказательству леммы 1 приходим к следующей оценке для всех рассматриваемых n:

$$\int\limits_{-A}^{A} (|\varphi(t;\ F)|^n - |\varphi(t;\ D_n)|^n)^2\, dt \leqslant cAN_\nu^{-3}(n)\,(m(F))^{5n} e^{-4\eta n/5}, \tag{1.11}$$

где A выбрано так, что отрезок $[-A, A] \supset I(F)$ и для $t \in [-A, A]$ выполняется оценка $|\varphi(t;\ F)| \geqslant e^{-\eta/10} m(F)$; c — абсолютная постоянная. Всюду ниже под c будем понимать положительные абсолютные постоянные не всегда одни и те же. Полагая в формуле (1.10) $a = 2A$, $x = \pi/(4A)$ и пользуясь неравенствами (1.9), (1.11), выводим неравенство

$$\int\limits_{-A}^{A} |\varphi(t;\ F)|^{2n} |e^{in\arg\varphi(t;\ F)} - e^{in\arg\varphi(t;\ D_n)}|^2\, dt \leqslant cAN_\nu^{-3}(n)\,(m(F))^{5n} e^{-4\eta n/5}.$$

Из него извлекаем нижнюю оценку:

$$\int_{-A}^{A} | e^{in\arg\varphi(t;\, F)} - e^{in\arg\varphi(t;\, D_n)} |^2\, dt \leqslant cAN_\nu^{-3}(n)\,(m(F))^{3n} e^{-3\eta n/5} = \varepsilon_{n1}. \quad (1.12)$$

Отсюда получаем, что вне множества e_{n1} ($\operatorname{mes} e_{n1} \leqslant \varepsilon_{n1}^{1/3}$) на отрезке $[-A, A]$ подынтегральное выражение в (1.12) не превосходит $\varepsilon_{n1}^{2/3}$. Таким образом, в каждой точке $t \in E_{n1} = [-A, A] \setminus e_{n1}$ справедлива оценка

$$| n(\arg\varphi(t;\, F) - \arg\varphi(t;\, D_n)) + 2\pi l_n(t) | \leqslant c\varepsilon_{n1}^{1/3}, \quad (1.13)$$

где $l_n(t)$ — целочисленная функция.

Покажем, что для $t \in E_{n1}$ и достаточно больших $n \geqslant n_0$ функция $l_n(t) \equiv 0$. Вернемся к неравенству (1.9). Из него следует оценка

$$|F^{n*}(-N_\nu(n)) - F^{n*}(N_\nu(n)+0) - D_n^{n*}(-N_\nu(n)) + D_n^{n*}(N_\nu(n)+0)| \leqslant \leqslant 2(N_\nu(n))^{-3}(m(F))^{7n} e^{-\eta n}. \quad (1.14)$$

С помощью следующего легко усматриваемого неравенства

$$F^{n*}(-N_\nu(n)) + 1 - F^{n*}(N_\nu(n)+0) \leqslant n(F(-N_\nu(n)/n) + + 1 - F(N_\nu(n)/n + 0),$$

учитывая определение параметра $N_\nu(n)$, имеем

$$F^{n*}(-N_\nu(n)) + 1 - F^{n*}(N_\nu(n)+0) \leqslant n(e^{-\nu} m(F))^n.$$

Отсюда и из (1.14) извлекаем оценку

$$D_n^{n*}(-N_\nu(n)) + 1 - D_n^{n*}(N_\nu(n)+0) \leqslant 2n(e^{-\eta} m(F))^n.$$

Теперь замечаем, что для х.ф. любого з.р G верна оценка

$$| \varphi(t+h;\, G) - \varphi(t;\, G) | \leqslant 2 \int\limits_{|x|>N_\nu(n)} dG(x) + \Big| \int\limits_{|x|\leqslant N_\nu(n)} e^{itx}(e^{ihx}-1) \times \times dG(x) \Big| \leqslant G(-N_\nu(n)) + 1 - G(N_\nu(n)) + N_\nu(n)\, h \ \ (t,\ h \in \boldsymbol{R}).$$

Применяя ее к з.р. F^{n*}, D_n^{n*} для $t \in \boldsymbol{R}$ и для $|h| \leqslant c\varepsilon_{n1}^{1/3}$, получаем неравенство

$$|\varphi^n(t+h;\, F) - \varphi^n(t;\, F)| + |\varphi^n(t+h;\, D_n) - \varphi^n(t;\, D_n)| \leqslant \leqslant cn(A+1)(m(F))^n e^{-\eta n/5} = \varepsilon_{n2}. \quad (1.15)$$

Из последнего неравенства для $t \in [-A, A]$ и $h \in [-2\varepsilon_{n1}^{1/3}, 2\varepsilon_{n1}^{1/3}]$ таких, что $t + h \in [-A, A]$, следует соотношение для достаточно больших $n \geqslant n_0$:

$$| n(\arg\varphi(t+h;\, F) - \arg\varphi(t;\, F)) + 2\pi l_{n1}(t,\, h)| \leqslant e^{-\eta n/12}, \quad (1.16)$$

где $l_{n1}(t, h)$ — целочисленная функция. Так как $\arg\varphi(t+h;\, F)$ — непрерывная для рассматриваемых t, h функция, то из (1.16) для $n \geqslant n_0$ и указанных выше значений t, h следует $l_{n1}(t, h) \equiv m_1$ ($m_1 \in \boldsymbol{Z}$). Поскольку $\arg\varphi(0;\, F) = 0$, то $m_1 = 0$.

Соотношение, аналогичное (1.16), имеет место и для $\arg\varphi(t; D_n)$ для достаточно больших n. Действительно, в силу неравенства (1.11) для $t\in[-A, A]\setminus e_{n2}$ ($\operatorname{mes} e_{n2}\leqslant c(A+1)(N_\nu(n))^{-1}(m(F))^{5n/3}\times e^{-4\eta n/15}=\varepsilon_{n3}$) выполняется оценка

$$||\varphi(t;\ F)|^n-|\varphi(t;\ D_n)|^n|\leqslant\varepsilon_{n3} \qquad (1.17)$$

и потому для указанных t и достаточно больших n: $|\varphi(t;\ D_n)|^n\geqslant\frac{1}{2}(e^{-\eta/10}m(F))^n$. В силу неравенства (1.15) с учетом неравенства $\varepsilon_{n3}\leqslant c\varepsilon_{n1}^{1/3}$ замечаем, что оценка $|\varphi(t;\ D_n)|^n\geqslant\frac{1}{4}(e^{-\eta/10}m(F))^n$ справедлива для всех $t\in[-A;\ A]$. Тогда из соотношения (1.15) легко извлекаем соотношение, справедливое для $t, t+h\in[-A,\ A]$, $h\in[-2\varepsilon_{n1}^{1/3}, 2\varepsilon_{n1}^{1/3}]$ и достаточно больших n:

$$|\arg\varphi(t+h;\ D_n)-\arg\varphi(t;\ D_n)|\leqslant e^{-\eta n/12}. \qquad (1.18)$$

Вернемся к соотношению (1.13). Из неравенств (1.16), (1.18) следует, что для $t\in E_{n1}$ функция $l_n(t)\equiv m_2$ ($m_2\in\mathbf{Z}$). Поскольку в ближайшей к точке нуль точке t_0 из множества E_{n1} выполняется $|\arg\varphi(t_0;\ F)-\arg\varphi(t_0;\ D_n)|\leqslant 2e^{-\eta n/12}$, то из (1.13) следует $m_2=0$ для достаточно больших $n\geqslant n_0$. Поэтому для $n\geqslant n_0$ справедлива оценка

$$|\arg\varphi(t;\ F)-\arg\varphi(t;\ D_n)|\leqslant\varepsilon_{n1}^{1/3}\quad(t\in E_{n1}). \qquad (1.19)$$

Из оценок (1.17), (1.19) извлекаем для $n\geqslant n_0$ неравенство

$$\int\limits_{|t|\leqslant A}|\varphi(t;\ F)-\varphi(t;\ D_n)|\,dt\leqslant e^{-\eta n/12}. \qquad (1.20)$$

Отсюда по аналогии с доказательством теоремы 3 получаем существование последовательности б.д.з.р. $\{D_{n'}\}$, слабо сходящейся к з.р. $D\in\mathbf{D}$. Из (1.20) тогда следует, что $\varphi(t;\ F)=\varphi(t;\ D)$ ($|t|\leqslant A$), что приводит нас к противоречию (для этого достаточно вспомнить, что $[-A,\ A]\supset I(F)$). Теорема 1 доказана.

Утверждение следствия 1 сразу следует из теоремы 1, если заметить, что величина $N_\nu(n)$ в предположении следствия допускает оценку: $N_\nu(n)\leqslant\exp(b_1n)$ ($n\in\mathbf{N}$, $\exists b_1=b_1(F)>0$).

Доказательство теоремы 4. Пусть з.р. $D_0\in\mathbf{D}$ и его х.ф. совпадает на отрезке $[-A,\ A]$ с х.ф.з.р. F. С помощью формулы обращения имеем оценку

$$\rho((F\ast D)^{n*},\ (D_0\ast D)^{n*})\leqslant\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\geqslant A}|t|^{-1}|\varphi(t;\ D)|^n|\varphi^n(t;\ F)-$$
$$-\varphi^n(t;\ D_0)|\,dt\leqslant\frac{2}{\pi A}e^{-b(n-p)}\int\limits_{|t|\geqslant A}|\varphi(t;\ D)|^p\,dt.$$

Из этой оценки следует утверждение теоремы 4.

§ 2. Доказательство теоремы 5. При доказательстве этой теоремы будут существенно использоваться некоторые идеи Э. Л. Пресмана (см. [3, с. 180—190]). В частности, доказываемые ниже леммы 2, 4—7 являются переработанными для наших целей аналогами соответствующих лемм Э. Л. Пресмана.

Пусть $k=2, 3, \ldots$. Введем в рассмотрение х.ф. $\varphi(t; F_\delta)$, допускающую в окрестности нуля разложение

$$\varphi(t; F_\delta) = \exp\left(-\frac{1}{2}t^2 + (-1)^{k-1}\delta t^{2k}(1+O(t))\right). \tag{2.1}$$

Х.ф. $\varphi(t; F_\delta)$ — $2k$ раз дифференцируемая и первые $2k$ моментов $m_0, m_1, \ldots, m_{2k-1}$ з.р. F_δ совпадают с первыми $2k$ моментами стандартного нормального з.р. Φ $s_0, s_1, \ldots, s_{2k-1}$. Из исследования проблемы моментов (см. [10, с. 35]) хорошо известно, что если $\delta>0$ в (2.1) брать достаточно малым, то найдутся з.р. F_δ с не более чем $k+1$ точкой роста и такие, что для их х.ф. выполняется (2.1). Такие з.р. F_δ и будем рассматривать ниже.

Рассмотрим з.р. $F=\Phi * F_\delta * \overline{F}_\delta$ и покажем, что для него имеет место

$$\rho(F^{n*}, \boldsymbol{D}) \leqslant bn^{-k+1} \quad (n\in \boldsymbol{N}). \tag{2.2}$$

Впредь под b, b_1, b_2 будем понимать положительные постоянные, зависящие лишь от з.р. F. При этом символ b будет использоваться для обозначения как одинаковых, так и различных постоянных в тех случаях, когда нас не интересует их численное значение. Обозначим через Φ_{0,σ^2} — нормальный з.р. с математическим ожиданием нуль и дисперсией σ^2. Тогда с помощью формулы обращения получаем

$$\rho(F^{n*}, \Phi_{0,3n}) \leqslant \sup_x \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\sin tx}{t}\right| e^{-nt^2/2}\,||\varphi(t;\ F_\delta)|^{2n}-e^{-nt^2}|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant b\sup_x \int_{-1}^{1}\left|\frac{\sin tx}{t}\right| e^{-nt^2/2}\left(|e^{3\delta nt^{2k}}-1|+|e^{-3\delta nt^{2k}}-1|\right)dt +$$

$$+ b\int_{|t|\geqslant 1} e^{-nt^2/2}dt \leqslant b\sup_x \int_{-1}^{1}\left|\frac{\sin tx}{t}\right| nt^{2k}e^{-nt^2/4}dt + be^{-n/2} \leqslant$$

$$\leqslant bn\int_{-1}^{1}|t|^{2k-1}e^{-nt^2/4}dt + be^{-n/2},$$

откуда следует (2.2).

Теперь покажем, что для з.р. F имеет место оценка снизу:

$$\rho(F^{n*}, \boldsymbol{D}_s) \geqslant bn\,(n\ln^3(n+1))^{-k} \quad (n\in \boldsymbol{N}), \tag{2.3}$$

где $\boldsymbol{D}_s$ — множество всех симметричных б.д.з.р.

Сначала докажем ряд вспомогательных лемм. Далее под $Q(F, h)$ будем понимать функцию концентрации з.р. F, т. е.

$$Q(F,\ h) = \sup_x \{F(x+h+0) - F(x)\},\ h \geqslant 0.$$

Лемма 2. *Пусть з.р.* $D \in \boldsymbol{D}_s$, *т. е. его х.ф. имеет вид*

$$\varphi(t;\ D) = \exp\left(\int_{-\infty}^{\infty} (\cos tx - 1)\frac{1+x^2}{x^2}\, dG_D(x)\right),$$

где G_D — *неубывающая ограниченная функция. Пусть* D_L — *б.д.з.р. с х.ф.:*

$$\varphi(t;\ D_L) = \exp\left(\int_{-L}^{L+0} (\cos tx - 1)\frac{1+x^2}{x^2}\, dG_D(x)\right).$$

Тогда для любого з.р. H имеем

$$\rho(H,\ D_L) \leqslant 5\rho(H,\ D) + 2(1 - Q(H,\ 2L)).$$

Доказательство леммы 2. Представим з.р. D в виде: $D = D_L \divideontimes D_{L,1}$. Тогда для б.д.з.р. $D_{L,1}$, очевидно, выполняется оценка $\rho(D_{L,1},\ E) \leqslant 1 - \exp(-a_L)$, где E — единичный з.р. с точкой роста нуль, а

$$a_L = \int_{|x|>L} \frac{1+x^2}{x^2}\, dG_D(x).$$

Отсюда получаем неравенство

$$\rho(F,\ D_L) \leqslant \rho(F,\ D) + \rho(D_L \divideontimes D_{L,1},\ D_L) \leqslant \rho(F,\ D) + 1 - e^{-a_L}. \quad (2.4)$$

Б.д.з.р. $D_{L,1}$ представим в виде

$$D_{L,1} = \sum_{m=0}^{\infty} e^{-a_L}\frac{a_L^m}{m!}G_{L,1}^{m*},$$

где $G_{L,1}$ — симметричный з.р. с точками роста вне отрезка $(-L, L)$. Поскольку для з.р. $G_{L,1}$ справедливо $Q(G_{L,1},\ 2L) \leqslant 1/2$, то имеем оценку

$$Q(D,\ 2L) \leqslant Q(D_{L,1},\ 2L) \leqslant \sum_{m=0}^{\infty} e^{-a_L}\frac{a_L^m}{m!}Q(G_{L,1}^{m*},\ 2L) \leqslant$$

$$\leqslant e^{-a_L} + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty} e^{-a_L}\frac{a_L^m}{m!} \leqslant e^{-a_L} - \frac{1}{2}(1 - e^{-a_L}) \leqslant 1 - \frac{1}{2}(1 - e^{-a_L}),$$

из которой следует, что $2(1-Q(D,\ 2L)) \geqslant 1-\exp(-a_L)$. Учтывая, что $Q(F,\ 2L)-Q(D,\ 2L) \leqslant 2\rho(F,\ D)$, получаем тогда неравенство

$$1-e^{-a_L} \leqslant 4\rho(F,\ D)+2(1-Q(F,\ 2L)),$$

применяя которое к (2.4), приходим к утверждению леммы.

Лемма 3. *(Неравенство Бернштейна). Если для моментов* m_s $(s=0,\ 1,\ \ldots)$ *з.р.* H *выполнены соотношения* $m_1=0$, $|m_s| \leqslant \leqslant \alpha m_2 \tau^{s-2} s!\ \left(s=3,\ 4,\ \ldots,\ \alpha \geqslant \frac{1}{2},\ \tau>0\right)$, *то для* $x>0$

$$\max\{H^{n*}(-x),\ 1-H^{n*}(x)\} \leqslant \begin{cases} e^{-x^2/(4m_2 n)}, & 0 \leqslant x \leqslant m_2 n/(2\alpha\tau), \\ e^{-x/(8\alpha\tau)}, & x>m_2 n/(2\alpha\tau). \end{cases}$$

Доказательство см. в [3, с. 37]. Обозначим через τ_δ наибольшую точку роста з.р. $F_\delta \divideontimes \overline{F}_\delta$. Тогда для з.р. $H=F_\delta \divideontimes \overline{F}_\delta$ неравенство Бернштейна выполняется с параметрами $\alpha=1$, $\tau=\tau_\delta$. Введем параметр $\widetilde{L}=b_1\sqrt{n\ln(n+1)}$, где $b_1=10k(\tau_\delta+1)$. Определим теперь классы б.д.з.р.:

$$\boldsymbol{D}_{n,\,F}=\left\{D:\varphi(t;\ D)=\exp\left(\int\limits_{-\widetilde{L}}^{\widetilde{L}+0}(\cos tx-1)\frac{1+x^2}{x^2}\,dG_D(x),\right.\right.$$

$$\left.\rho(D,\ F^{n*})<b_2 n\,(n\ln^3(n+1))^{-k}\right\}\ (n\in \boldsymbol{N})$$

(здесь постоянная b_2 — достаточно мала и ее выбор определяется нижеследующими рассуждениями). Классы $\boldsymbol{D}_{n,\,F}$ могут быть пустыми.

Лемма 4. *Если все классы* $\boldsymbol{D}_{n,\,F}$ $(n \geqslant b)$ *пустые, то для з.р.* F *справедлива оценка* (2.3).

Доказательство леммы 4. В силу предположения леммы для любого з.р. $D \in \boldsymbol{D}_s$ с учетом леммы 2 $(H=F)$ выполняется цепочка неравенств:

$$b_2 n\,(n\ln^3(n+1))^{-k} \leqslant \rho(D_{\widetilde{L}},\ F^{n*}) \leqslant 5\rho(D,\ F^{n*})+$$

$$+2(1-Q(F^{n*},\ 2\widetilde{L})) \leqslant 5\rho(D,\ F^{n*})+4(1-F^{n*}(\widetilde{L}))\ \ (n \geqslant b). \quad (2.5)$$

Поскольку верна простая оценка

$$1-F^{n*}(\widetilde{L}) \leqslant 2(1-(F_\delta \divideontimes \overline{F}_\delta)^{n*}(\widetilde{L}/2))+2(1-\Phi^{n*}(\widetilde{L}/2))\ \ (n\in \boldsymbol{N}),$$

то в силу леммы 3 и неравенства

$$1-\Phi^{n*}(x)=1-\Phi\left(x/\sqrt{n}\right) \leqslant \sqrt{\frac{n}{2\pi}}\,e^{-x^2/(2n)}\frac{1}{x}\ \ (x>0)$$

получаем

$$1-F^{n*}(\widetilde{L}) \leqslant bn^{-k-1}\ \ (n\in \boldsymbol{N}). \quad (2.6)$$

Применяя эту оценку к (2.5), приходим для достаточно больших $n \geqslant b$ к неравенству (2.3), откуда следует утверждение леммы.

Лемма 5. *Существует такая постоянная* b, *что если* $D \in \boldsymbol{D}_{n,\,F}$, *где* $n \geqslant b$, *то* $1 - D(x) \leqslant c\exp(-x/\tilde{L})$ $(x > 0)$.

Доказательство. Для х.ф.з.р. $D \in \boldsymbol{D}_{n,\,F}$ справедлива формула

$$\varphi(iy;\ D) = \exp\left(\int_{-\tilde{L}}^{\tilde{L}+0} (\operatorname{ch}(yx) - 1)\,\frac{1+x^2}{x^2}\,dG_D(x)\right) \quad (y \in \boldsymbol{R}).$$

Из нее легко извлекаем неравенство

$$e^{\sigma^2 y^2/2} \leqslant \varphi(iy;\ D) \leqslant \exp\left(\frac{1}{2}\sigma^2 y^2 e^{\tilde{L}|y|}\right), \tag{2.7}$$

где σ^2 — второй момент з.р. D. Для любых $T > L > 0$ и $y > 0$ имеем

$$\varphi(-iy;\ D) = \int_{-L}^{L} e^{yx}dD(x) + \int_{L \leqslant |x| \leqslant T} \ldots + \int_{|x| > T} \ldots \leqslant$$
$$\leqslant e^{yL} + 2e^{yT}(1 - D(L)) + e^{-yT}(\varphi(-2iy;\ D) + 1).$$

Отсюда с учетом оценки (2.7) выводим

$$2(1 - D(L)) \geqslant e^{-yT}\varphi(-iy;\ D) - e^{y(L-T)} - e^{-2yT}(\varphi(-2iy;\ D) + 1) \geqslant$$
$$\geqslant e^{-yT + \sigma^2 y^2/2} - e^{y(L-T)} - \exp(-2yT + 2\sigma^2 y^2 e^{2\tilde{L}y}) - e^{-2yT}.$$

Положим в этом неравенстве $L = \tilde{L}$, $T = e^{10}\sigma$, $y = 4/\sigma$, предполагая, что $\sigma^2 > 2\tilde{L}^2$. Тогда находим, что $1 - D(\tilde{L}) \geqslant b$. С другой стороны, в силу определения класса $\boldsymbol{D}_{n,\,F}$ и оценки (2.6) имеем

$$1 - D(\tilde{L}) \leqslant 1 - F^{n*}(\tilde{L}) + \rho(F^{n*},\ D) \leqslant bn^{-k+1},$$

что для достаточно больших $n \geqslant b$ противоречит предыдущему неравенству. Таким образом, справедлива оценка $\sigma^2 \leqslant 2\tilde{L}^2$. Поскольку из (2.7) следует $\varphi(-i/\tilde{L};\ D) \leqslant c$, то получаем искомую оценку:

$$1 - D(x) \leqslant \varphi(-i/\tilde{L};\ D)\,e^{-x/\tilde{L}} \leqslant ce^{-x/\tilde{L}} \quad (x > 0).$$

Лемма 6. *Справедлива оценка:* $1 - F^{n*}(x) \leqslant c\,(e^{-x/(2\tilde{L})} + e^{-x^2/(8n)})$ $(x > 0,\ n \in \boldsymbol{N})$.

Доказательство. Имеем

$$1 - F^{n*}(x) \leqslant 2\,(1 - \Phi^{n*}(x/2) + 1 - (F_\delta \ast \overline{F}_\delta)^{n*}(x/2) \leqslant$$
$$\leqslant ce^{-x^2/(8n)} + 2e^{-x/(2\tilde{L})}\int_{-\infty}^{\infty} e^{u/\tilde{L}}d\,(F_\delta \ast \overline{F}_\delta)^{n*}(u) \leqslant$$
$$\leqslant ce^{-x^2/(8n)} + 2e^{\left(-\frac{1}{2}x\tilde{L} + \tau_\delta^2 n\right)\big/\tilde{L}^2} \leqslant c\,(e^{-x^2/(8n)} + e^{-x/(2\tilde{L})}),$$

что и требовалось доказать.

Лемма 7. *Существует постоянная b (не зависящая от параметра b_2), что для з.р. $D \in \boldsymbol{D}_{n,F}$ $(n \geqslant b + b_2^{-1})$ справедливы оценки*

$$|\varkappa_{2k}(D) - \varkappa_{2k}(F^{n*})| \leqslant bb_2 n, \tag{2.8}$$

где $\varkappa_{2k}(D)$, $\varkappa_{2k}(F^{n*})$ — семиинварианты $2k$ порядка соответственно з.р. D и F^{n*}.

Доказательство. Подчеркнем, что постоянные b, фигурирующие при доказательстве леммы 7, от параметра b_2 не зависят. Пусть $M = 10k\tilde{L}\ln(n+1)$. Тогда с помощью интегрирования по частям находим следующие неравенства для моментов $2s$-го порядка $m_{2s}(D)$, $m_{2s}(F^{n*})$ $(s = 1, \ldots, k)$ соответственно з.р. D, F^{n*}:

$$|m_{2s}(D) - m_{2s}(F^{n*})| \leqslant 2s \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{2s-1} |D(x) - F^{n*}(x)|\, dx \leqslant$$

$$\leqslant cs \int_{|x|>M} |x|^{2s-1} \left(e^{-x^2/(8n)} + e^{-|x|/(2\tilde{L})}\right) dx + cM^{2s}\rho(D, F^{n*}) \leqslant$$

$$\leqslant c\,(2s+1)!\,\tilde{L}^{2s} n^{-2k} + b \cdot b_2 n\,(n \ln^3(n+1))^{s-k}. \tag{2.9}$$

Из определения семиинварианты $\varkappa_{2s}(F^{n*})$ видим, что она допускает представление

$$\varkappa_{2s}(F^{n*}) = \sum_{2l_1+\ldots+2l_p=2s} A_{l_1,\ldots,l_p} m_{2l_1}(F^{n*}) \ldots m_{2l_p}(F^{n*}), \tag{2.10}$$

где $A_{l_1,\ldots,l_p}$ — коэффициенты, по модулю не превосходящие постоянной, зависящей лишь от s. Запишем

$$m_{2l_1}(F^{n*}) = m_{2l_1}(D) + w_{2l_1}, \ \ldots, \ m_{2l_p}(F^{n*}) = m_{2l_p}(D) + w_{2l_p}.$$

Тогда имеем формулу

$$m_{2l_1}(F^{n*}) \ldots m_{2l_p}(F^{n*}) = m_{2l_1}(D) \ldots m_{2l_p}(D) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{p} w_{2l_j} m_{2l_1}(D) \ldots m_{2l_{j-1}}(D)\, m_{2l_{j+1}}(D) \ldots m_{2l_p}(D) + \ldots + w_{2l_1} \ldots w_{2l_p}. \tag{2.11}$$

Эта формула является представлением произведения моментов $m_{2l_j}(F^{n*})$ $(j = 1, \ldots, p)$ в виде суммы слагаемых, каждое из которых является суммой произведений фиксированного числа q $(q = 0, 1, \ldots, p)$ множителей w_{2l_j} на $p - q$ множителей вида $m_{2l_j}(D)$. Поскольку з.р. F — симметричный, то для его моментов $m_{2s}(F^{n*})$ $(s = 1, \ldots, k)$ справедлива простая оценка: $m_{2s}(F^{n*}) \leqslant (bn)^s$. Такая же оценка в силу (2.9) имеет место и для моментов $m_{2s}(D)$ $(s = 1, \ldots, k)$. В силу той же оценки (2.9) величины w_{2l_j} $(j = 1, \ldots, p)$

превосходят по модулю величин $b \cdot b_2 n (n \ln^3 (n+1))^{l_j - k}$ при $\geq b + b_2^{-1}$, поэтому из формулы (2.11) легко получаем неравенства

$$|m_{2l_1}(F^{n*}) \ldots m_{2l_p}(F^{n*}) - m_{2l_1}(D) \ldots m_{2l_p}(D)| \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{p} |w_{2l_j}| m_{2l_1}(D) \ldots m_{2l_{j-1}}(D) m_{2l_{j+1}}(D) \ldots m_{2l_p}(D) + \ldots +$$

$$+ \prod_{j=1}^{p} |w_{2l_j}| \leq \sum_{j=1}^{p} b^s n^{s-l_j} b_2 n (n \ln^3 (n+1))^{l_j - k} + \ldots +$$

$$+ (b \cdot b_2)^s (n \ln^3 (n+1))^{s-kp} n^p \leq b \cdot b_2 n.$$

Эти неравенства, примененные к формуле (2.10), приводят к оценке (2.8), что и требовалось доказать.

Теперь уже нетрудно показать, что имеет место (2.3). Для этого достаточно показать, что все классы $\boldsymbol{D}_{n,F}$ $(n \geq b)$ пусты для столь малых b_2, что в оценке (2.8) $b \cdot b_2 < \delta$. Действительно, с одной стороны, имеет место оценка (2.8). С другой стороны, по определению з.р. F его $2k$ — семиинварианта $\varkappa_{2k}(F)$ равна $-2\delta(2k)!$ в то время как $2k$ — семиинварианта любого б.д.з.р. $D \in \boldsymbol{D}_{n,F}$ неотрицательна. Поэтому имеем оценку $\delta(2k)! \leq b \cdot b_2 < \delta$, приводящую к противоречию, если бы классы $\boldsymbol{D}_{n,F}$ $(n \geq b)$ не были пусты.

Остается заметить, что, как легко видеть, оценка (2.3) сохраняется, если класс $\boldsymbol{D}_s$ заменить на класс всех б.д.з.р. $\boldsymbol{D}$.

§ 3. Доказательство теорем 6—8. Сначала докажем теорему 6. Рассмотрим з.р. Q_A с х.ф. вида (1.3) и по нему построим искомый з.р. F. х.ф.з.р. F имеет вид

$$\varphi(t;\ F) = \begin{cases} \exp(-2|t|/A), & |t| \leq A, \\ e^{-1}(2 - |t|/A)\exp(-|t|/A), & A \leq |t| \leq 2A, \\ 0, & |t| \geq 2A. \end{cases}$$

То, что это х.ф., сразу следует из хорошо известной теоремы Г. Полиа:

Пусть $\varphi(t)$ — неотрицательна, четна, непрерывна, выпукла книзу при $t < 0$, $\varphi(0) = 1$ и $\varphi(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Тогда $\varphi(t)$ — х.ф.

Из этой же теоремы следует, что является х.ф. также функция $\psi(t) = \varphi(t;\ F)\exp(|t|/A)$. Кроме того, функция $\psi(t)$ совпадает на отрезке $[-A,\ A]$ с б.д.х.ф. $\exp(-|t|/A)$. Применяя к з.р. F теорему 4 $(\varphi(t;\ D) = \exp(-|t|/A))$, получаем, что для з.р. F выполняется первое из соотношений теоремы 6. Второе из соотношений теоремы 6 вытекает из теоремы 3. Действительно, если бы оно не выполнялось, то из теоремы 3 следовало бы, что з.р. $F \in \boldsymbol{D}$. А это не так, поскольку $\varphi(t;\ D) = 0$ для $|t| \geq 2A$.

Доказательство теоремы 7. Пусть $F_{\text{л}\gamma}$ — логнормальный з.р. с х.ф. вида

$$\varphi(t;\ F_{\text{л}\gamma}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma}} \int_0^\infty e^{itx - (\ln x)^2/(2\gamma)} \frac{dx}{x} \quad (\gamma > 0).$$

Моменты $m_k(F_{л\gamma})$ порядка k $(k=0,\ 1,\ \dots)$ з.р. $F_{л\gamma}$ легко подсчитываются:

$$m_k(F_{л\gamma})=\frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma}}\int\limits_0^\infty x^k e^{-(\ln x)^2/(2\gamma)}\frac{dx}{x}=\frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma}}\int\limits_{-\infty}^\infty e^{ku-\frac{u^2}{2\gamma}}du=e^{\gamma k^2/2}.$$

Рассмотрим з.р. $F_{л\gamma s}=F_{л\gamma}\ast\overline{F}_{л\gamma}$. Легко видеть, что з.р. $F_{л\gamma s}$ — абсолютно непрерывный и для его плотности $p(x)$ справедлива оценка

$$p(x)=\frac{1}{2\pi\gamma}\int\limits_0^{|x|}e^{-(\ln^2(|x|-u)+\ln^2 u)/(2\gamma)}\frac{du}{(|x|-u)\,u}\geqslant\frac{1}{2\pi\gamma}\int\limits_{|x|/4}^{|x|/2}\dots\,du\geqslant$$

$$\geqslant\frac{b}{|x|}e^{-2(\ln|x|)^2/\gamma}\quad(x\in\boldsymbol{R}/\{0\}).\tag{3.1}$$

Здесь и в дальнейшем при доказательстве теоремы 7 через b обозначаем положительные постоянные не всегда одни и те же, зависящие лишь от параметра γ. Для моментов $m_{2k}(F_{л\gamma s})$ $(k=0,\ 1,\ \dots)$ з.р. $F_{л\gamma s}$ нетрудно проверить справедливость оценки

$$m_{2k}(F_{л\gamma s})\leqslant\sum_{l=0}^{2k}C_{2k}^l e^{\frac{1}{2}\gamma((2k-l)^2+l^2)}\leqslant e^{2\gamma k^2}\sum_{l=0}^{2k}C_{2k}^l=2^{2k}e^{2\gamma k^2}.\tag{3.2}$$

Из оценки (3.1) следует, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}(1+x^2)^{-1}\ln p(x)\,dx>-\infty,$$

тогда, как было показано М. Г. Крейном (см. [10, с. 112]), последовательность $\{m_k(F_{л\gamma s})\}_{k=0}^\infty$ порождает неопределенную проблему моментов. Р. Неванлинной было дано полное описание всех решений неопределенной проблемы моментов. Напомним его. Обозначим через $P_k(z)$, $Q_{k+1}(z)$ — ортогональные полиномы степени k соответственно первого и второго рода, отвечающие неопределенной проблеме моментов $\{m_k(F_{л\gamma s})\}_{k=0}^\infty$. Полиномы $P_k(z)$, $Q_k(z)$ — вещественные на вещественной оси и для них ряды

$$\sum_{k=0}^\infty|P_k(z)|^2,\ \sum_{k=0}^\infty|Q_k(z)|^2$$

сходятся всюду в открытой комплексной плоскости $\boldsymbol{C}$. Обозначим

$$\rho(z)=\Big(\sum_{k=0}^\infty(P_k(z))^2\Big)^{-1},\ \rho_n(z)=\Big(\sum_{k=0}^n(P_k(z))^2\Big)^{-1}\ (n\in\boldsymbol{N}).$$

Далее определим четверку функций формулами

$$A(z)=z\sum_{k=0}^\infty Q_k(0)\,Q_k(z),\ B(z)=-1+z\sum_{k=0}^\infty Q_k(0)\,P_k(z),$$

$$C(z)=1+z\sum_{k=0}^\infty P_k(0)\,Q_k(z),\ E(z)=z\sum_{k=0}^\infty P_k(0)\,P_k(z).$$

Как было установлено М. Риссом (см. [10, с. 75]), функции $A(z)$, $B(z)$, $C(z)$, $E(z)$ являются целыми функциями не выше минимального типа порядка один.

По теореме Р. Неванлинны (см. [10, с. 124—125]) формула

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(u)}{u-z} = -\frac{A(z)\,\varphi(z) - C(z)}{B(z)\,\varphi(z) - E(z)} \tag{3.3}$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между совокупностью V всех решений $\sigma(u)$ рассматриваемой проблемы моментов и совокупностью всех функций $\varphi(z)$ класса Неванлинны (определение функций класса Неванлинны см. [10, с. 117]), пополненного константой ∞. Конечные вещественные постоянные по определению входят в этот класс функций. Нас будет интересовать только решение проблемы моментов, отвечающее функции $\varphi(z) \equiv 0$. Это решение будем обозначать через $\sigma_0(u)$. З.р. σ_0 является дискретным с точками роста, расположенными в нулях функции $E(z)$. Как известно [10], нули этой функции — вещественные кратности один. Наша ближайшая задача — показать, что нули функции $E(z)$ расположены очень редко.

Лемма 8. *Функция $E(z)$ допускает оценку*

$$|E(z)| \leqslant b \exp\left(\frac{7}{\gamma} \ln^2(|z|+1)\right) \quad (z \in \boldsymbol{C}).$$

Доказательство. Зададимся $T > 0$ и введем функцию

$$f_{nT}(z) = \int_0^T (\rho_n(t+z))^{-1}\,dt.$$

Оценим эту функцию для вещественных z. Сначала заметим, что для любого решения $\sigma(u)$ рассматриваемой проблемы моментов и $n \in \boldsymbol{N}$ справедливо неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+u^2)^{-1} (\rho_n(u))^{-1}\,d\sigma(u) \leqslant b. \tag{3.4}$$

Это неравенство принадлежит Н. И. Ахиезеру (см. [10, с. 69—70]). Из (3.4) получаем для $z > 0$ с учетом оценки (3.1)

$$b \geqslant \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)\,dx}{(1+x^2)\,\rho_n(x)} \geqslant \int_0^T \frac{p(x+z)\,dx}{(1+(x+z)^2)\,\rho_n(x+z)} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{b f_{nT}(z)}{1+(T+z)^3} e^{-\frac{6}{\gamma}(\ln^2 z + \ln^2(T+1))}.$$

Отсюда имеем нужную оценку для $z > 0$:

$$0 \leqslant f_{nT}(z) \leqslant b\,(1+(T+z)^3)\, e^{6(\ln^2 z + \ln^2(T+1))/\gamma}.$$

В комплексной плоскости с разрезом по положительному лучу C_+ рассмотрим функцию

$$f_{nT1}(z) = f_{nT}(z) \exp(-7 (\ln z)^2/\gamma),$$

причем однозначную ветвь $\ln z$ выбираем условием, что на верхнем берегу разреза $\operatorname{Im} \ln z = 0$. Функция $f_{nT1}(z)$ в C_+ — однозначная аналитическая непрерывная вплоть до границы. На обоих берегах разреза ее модуль не превосходит $b(1+T)^3 \exp(6(\ln(T+1))^2/\gamma)$. Так как функция $f_{nT1}(z)$ в C_+ растет, очевидно, не быстрее полинома 1-й степени, то в силу принципа Фрагмена — Линделефа (см. [11, с. 211]) получаем в C_+ неравенство

$$|f_{nT1}(z)| \leqslant b(1+T)^3 \exp(6(\ln(T+1))^2/\gamma),$$

что влечет за собой нужную оценку:

$$|f_{nT}(z)| \leqslant b(1+T)^3 \exp((7\ln^2|z| + 6\ln^2(T+1))/\gamma) \quad (z \in C_+). \tag{3.5}$$

Поскольку $f_{nT}(z)$ — аналитическая в круге $|z| \leqslant 1$ функция, то из (3.5) следует $|f_{nT}(z)| \leqslant b(1+T)^3 \exp\left(\frac{6}{\gamma}\ln^2(T+1)\right)$ $(|z| \leqslant 1)$. Из последних двух оценок с помощью формулы Коши для $f_{nT}^{(1)}(z)$ легко получаем оценку

$$|f_{nT}^{(1)}(z)| \leqslant b(1+T)^3 \exp((14\ln^2(|z|+1) + 6\ln^2(T+1))/\gamma) \quad (z \in C). \tag{3.6}$$

Теперь воспользуемся формулой

$$f_{nT}^{(1)}(z) = \int_0^T \frac{d}{dt} \frac{1}{\rho_n(t+z)}\, dt = \frac{1}{\rho_n(T+z)} - \frac{1}{\rho_n(z)}. \tag{3.7}$$

Так как $1/\rho_n(0) \leqslant b$, то, полагая в (3.7) $z=0$, получаем с помощью (3.6) оценку

$$|\rho_n(T)|^{-1} \leqslant b(1+T)^3 \exp\left(\frac{6}{\gamma}\ln^2(T+1)\right) \quad (T \geqslant 0,\ n \in N).$$

Поэтому эта оценка сохранится для функции $1/\rho(T)$ $(T \geqslant 0)$. Из (3.7) и определения функции $E(z)$ имеем для $T \geqslant 0$

$$|E(T)| \leqslant \frac{1}{2} T \sum_{k=0}^{\infty} (P_k^2(0) + P_k^2(T)) \leqslant \frac{1}{2} T \left(\frac{1}{\rho(0)} + \frac{1}{\rho(T)}\right) \leqslant$$
$$\leqslant b|T|(1+|T|)^3 \exp\left(\frac{6}{\gamma}\ln^2(|T|+1)\right).$$

Аналогично такие же оценки доказываются для $T < 0$.

Вспомним, что по теореме М. Рисса функция $E(z)$ — целая не выше минимального типа порядка один. Поэтому к функции $E_1(z) = E(z)\exp\left(-\frac{7}{\gamma}\ln^2 z\right)$ (однозначная ветвь $\ln z$ выбирается условием $\operatorname{Im}\ln z = 0,\ z > 0$) в верхней и нижней полуплоскостях применим принцип Фрагмена — Линделефа. Из него сразу следует, что функция $E(z)$ в $\boldsymbol{C}$ допускает оценку $|E(z)| \leqslant b\exp\left(\frac{7}{\gamma}\ln^2(|z|+1)\right)$, что и требовалось доказать.

Обозначим через $n(r)$ число нулей функции $E(z)$ в круге $|z| \leqslant r$. Отметим, что, как легко усматривается из определения функций $C(z)$, $E(z)$, функция $E(z)$ — нечетная, а функция $C(z)$ — четная. Отсюда следует симметричность з.р. σ_0.

Лемма 9. *Пусть* $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ $(y_k \uparrow \infty)$ — *положительные корни функции* $E(z)$. *Найдется такое число* $b > 1$ *и бесконечная подпоследовательность положительных корней* $\{y_{k'}\}$ *такие, что* $y_{k'+1}/y_{k'} \geqslant b > 1$.

Доказательство. Допустим, что утверждение леммы 9 неверно. Тогда для любого фиксированного $\varepsilon > 0$, начиная с некоторого k_0, зависящего, конечно, от ε, выполняется $y_{k+1} < (1+\varepsilon)y_k$. Поскольку функция $E(z)$ — нечетная, это означает, что функция $n(t)$ для $t \geqslant t_0(\varepsilon)$ допускает оценку $n(t) \geqslant (\ln t)/\ln(1+\varepsilon)$. Для функции $E_0(z) = E(z)/z$ справедливо хорошо известное неравенство Иенсена [11, с. 221]:

$$\ln M(r,\ E_0) - \ln E_0(0) \geqslant \int_0^r \frac{n(t)-1}{t}\,dt. \tag{3.8}$$

Здесь $M(r,\ E_0) = \max_{|z|=r}|E_0(z)|$. Из этой формулы, учитывая оценку снизу функции $n(t)$ и оценку сверху функции $E(z)$, даваемую леммой 8, приходим к неравенству для больших $r > t_0(\varepsilon)$:

$$\frac{7}{\gamma}\ln^2(r+1) + b \geqslant \frac{1}{\ln(1+\varepsilon)}\int_{t_0(\varepsilon)}^{r}\frac{(\ln t)-1}{t}\,dt \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{2}\ln^2 r - \frac{1}{2}\ln^2 t_0(\varepsilon) - \ln\frac{r}{t_0(\varepsilon)}\right).$$

Очевидно, что для достаточно малых $\varepsilon \leqslant b$ приходим к противоречию. Лемма 9 доказана.

Перейдем к построению з.р. $F \in \boldsymbol{F}_+$, удовлетворяющего неравенствам (7). Определим $F = (\Phi \divideontimes \sigma_0)^{2*}$. Сначала покажем, что для этого з.р. F выполняется левое из неравенств (7). Как было показано Ториным [12], логнормальный з.р. $F_{л\gamma}$ является б.д., поэтому з.р. $(\Phi \divideontimes F_{\text{л}\gamma s})^{(2n)*}$ тоже является б.д. С помощью формулы обращения имеем

$$\rho\left(F^{n*},\ \left(\Phi^{2*} \divideontimes F^{2*}_{\text{л}\gamma s}\right)^{n*}\right) \leqslant \sup_x \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-nt^2} \left|\frac{e^{ixt}-1}{t}\right| \left|\varphi^{2n}(t;\ \sigma_0) -\right.$$

$$\left. - \varphi^{2n}(t;\ F_{\text{л}\gamma s})\right| dt \leqslant \sup_x \frac{n}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-nt^2} \left|\frac{e^{ixt}-1}{t}\right| \left|\varphi(t;\ \sigma_0) - \varphi(t;\ F_{\text{л}\gamma s})\right| dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{n}{\pi}\left(\sup_x \int\limits_{|t|<\delta_n} \left|\frac{e^{ixt}-1}{t}\right| \left|\varphi(t;\ \sigma_0) - \varphi(t;\ F_{\text{л}\gamma s})\right| dt + \right.$$

$$\left. + 4 \int\limits_{|t|>\delta_n} \delta_n^{-1} e^{-nt^2} dt\right) = \frac{n}{\pi}(I_{1n} + I_{2n}), \qquad (3.9)$$

где $\delta_n = (\ln n)/\sqrt{\gamma n}$. По формуле Тейлора

$$\varphi(t;\ \sigma_0) - \varphi(t;\ F_{\text{л}\gamma s}) = \frac{1}{k!}\left(\varphi^{(k)}(\theta t;\ \sigma_0) - \varphi^{(k)}(\theta t;\ F_{\text{л}\gamma s})\right) t^k$$

$$\left(t \in [-\delta_n,\ \delta_n],\ \frac{1}{2} k = \left[\frac{1}{4\gamma} \ln n\right],\ 0 < \theta < 1\right). \qquad (3.10)$$

С помощью формулы (3.10) и оценки (3.2) легко получаем для достаточно больших $n \geqslant b$

$$I_{1n} \leqslant \frac{4}{k!} m_k(F_{\text{л}\gamma s})\, \delta_n^k \leqslant \frac{4}{k!} 2^k e^{\gamma k^2/2} \delta_n^k \leqslant e^{-\frac{1}{8\gamma} \ln^2 n}.$$

Кроме того, для больших $n \geqslant b$ имеем

$$I_{2n} = \frac{4}{\delta_n \sqrt{n}} \int\limits_{|t|>\delta_n\sqrt{n}} e^{-t^2} dt \leqslant e^{-(\delta_n\sqrt{n})^2} = e^{-\frac{1}{\gamma} \ln^2 n}.$$

Применяя две последние оценки к неравенству (3.9), получаем левую часть неравенства (7), если в качестве γ_0 брать $(10\gamma)^{-1}$.

Приступим для з.р. F к доказательству правой части неравенства (7). Для этого достаточно показать, что х.ф.з.р. F ни на каком симметричном относительно нуля отрезке (невырожденном) не совпадает с х.ф.б.д.з.р. Действительно, если это будет доказано, то из того, что для некоторой последовательности индексов $n_k \to \infty$: $\rho(F^{n_k *},\ \boldsymbol{D}) \leqslant \exp(-\Delta n_k)$ $(\exists \Delta > 0)$ следует в силу теоремы 3, что х.ф.з.р. F совпадает на некотором отрезке $[-a,\ a]$ $(a > 0)$ с х.ф. некоторого б.д.з.р., что невозможно.

В свою очередь, искомое свойство х.ф. $\varphi(t;\ F)$ является следствием факта, что функция $\varphi(t;\ F_1)$, где з.р. $F_1 = \Phi \divideontimes \sigma_0$, допускает с любого отрезка $[-a,\ a]$ $(a > 0)$ единственное непрерывное эрмитово положительное продолжение. В этом случае из совпадения х.ф. $\varphi(t;\ F)$ на некотором отрезке $[-a,\ a]$ $(a>0)$ с х.ф. какого-нибудь б.д.з.р. D следует, что на этом же отрезке $\varphi(t;\ F_1) = \varphi^{1/2}(t;\ D) = \varphi(t;\ D_1)$ $(D_1 \in \boldsymbol{D})$. Отсюда заключаем, что $F_1 \in \boldsymbol{D}$ и для $t \in \boldsymbol{R}$ имеет место

$$e^{-t^2/2}\varphi(t,\ \sigma_0) = \varphi(t;\ D_1)\exp\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\cos tx - 1)\frac{1+x^2}{x^2}\,dG_{D_1}(x)\right),$$

где G_{D_1} — неубывающая, ограниченная функция. Из этого представления следует, что б.д.з.р. D_1 имеет гауссову компоненту Φ. Но тогда из этого же представления получаем, что з.р. $\sigma_0 \in \boldsymbol{D}$. Поскольку з.р. σ_0 — симметричный дискретный со скачками в точках $\{-y_k\}_{k=1}^{\infty} \cup \{0\} \cup \{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ и в силу леммы 9 для некоторой бесконечной последовательности индексов k' выполняется $y_{k'+1} \geqslant b y_{k'}$ $(\exists b > 1)$, то легко видеть, что з.р. σ_0 не может быть б.д. Таким образом, доказательство правой части неравенства (7) свелось к доказательству единственности решения задачи М. Г. Крейна о продолжении с любого фиксированного отрезка $[-a,\ a]$ $(a > 0)$ эрмитово положительной непрерывной функции $\varphi(t;\ F_1)$.

Вопрос о единственности продолжения х.ф. $\varphi(t;\ F_1)$ с любого отрезка $[-a,\ a]$ $(a>0)$ связан с поведением функции Мергеляна $W_{ma}(x,\ F_1)$ (см. [13, с. 192—227]), определяемой следующим образом: $W_{ma}(x,\ F_1) = \sup|f(x)|^2$, где sup берется по множеству всех целых функций вида

$$f(z) = \int\limits_0^a e^{izt}\varphi(t)\,dt,\ \ \varphi \in L^2([0,\ a]) \tag{3.11}$$

удовлетворяющих неравенству

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\,dF_1(x) \leqslant 1. \tag{3.12}$$

Как установлено в [13, с. 202—227], если х.ф. $\varphi(t;\ F_1)$ допускает неединственное непрерывное эрмитово положительное продолжение с отрезка $[-a,\ a]$, то $W_{ma}(x,\ F_1)$ $(x \in \boldsymbol{R})$ является непрерывной функцией и такой, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}(1+x^2)^{-1}\ln^+ W_{ma}(x,\ F_1)\,dx < \infty$$

(для $y>0$ $\ln^+ y = \max(\ln y,\ 0)$). Поэтому нужное утверждение следует из такой леммы.

Лемма 10. *Для з.р. F_1 имеет место соотношение*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}(1+x^2)^{-1}\ln^+ W_{ma}(x,\ F_1)\,dx = +\infty \ \ (0 < a \leqslant 1).$$

Доказательство. Воспользуемся одним приемом Де Бранжа — П. Куусиса [14, с. 235—237]. Из леммы 9 следует, что з.р. σ_0 — симметричный дискретный с точками роста во множестве $\{-y_k\}_{k=1}^{\infty} \cup \{0\} \cup \{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ ($y_k > 0$, $y_k \uparrow \infty$) и для некоторой бесконечной последовательности индексов k' выполняется неравенство $y_{k'+1} > by_{k'}$ ($\exists b > 1$). Построим функцию $\omega(x)$ следующим образом. Для $x \geqslant 0$ она равна нулю вне отрезков $[(b+3)y_{k'}/4,\ (3b+1)y_{k'}/4]$, а на каждом из таких отрезков $\omega(x)$ совпадает с ломаной линией с вершинами $((b+3)y_{k'}/4,\ 0)$, $((b+1)y_{k'}/2,\ (b-1)y_{k'}/4)$, $((3b+1)y_{k'}/4,\ 0)$. Для $x<0$ положим $\omega(x)=\omega(-x)$. Рассмотрим функцию $W(x)=\exp(\omega(x))$. Эта функция $W(x)\geqslant 1$ и удовлетворяет условию $|\ln(W(x_2)/W(x_1))| \leqslant c|x_2-x_1|$ для всех $x_1, x_2 \in \boldsymbol{R}$. Следуя П. Куусису, введем функцию $f_x(z)=\cos\left(\frac{a}{2}\sqrt{(z-x)^2-R^2}\right)$, где $R=(\ln W(x))/\sqrt{c^2+a^2/4}$, $z\in \boldsymbol{C}$, $x\in R$. Это — целая функция экспоненциального типа $\leqslant a/2$, для которой

$$|f_x(x)| \geqslant \frac{1}{2}(W(x))^{a/\sqrt{4c^2+a^2}} \quad (x\in \boldsymbol{R}), \tag{3.13}$$

$$|f_x(u)| \leqslant W(u) \quad (u\in \boldsymbol{R}) \tag{3.14}$$

(см. [14, с. 235—236]). Далее, не уменьшая общности, считаем $W(x)=1$ ($|x|\leqslant b_0$, b_0 — достаточно большая постоянная). Покажем, что

$$W_{ma}(x) \geqslant \frac{1}{10^3x^2}(W(x))^{a/\sqrt{4c^2+a^2}} \quad \Big(x\in \bigcup_{y_{k'}\geqslant b_0} I_{k'}\Big), \tag{3.15}$$

где $I_{k'}=[(b+2)y_{k'}/3,\ (2b+1)y_{k'}/3]$. Для этого рассмотрим функцию $\tilde f_x(z)=e^{iaz/2}(f_x(z)-f_x(0))/10z$ ($z\in \boldsymbol{C}$) и проверим, что она содержится во множестве целых функций, определяющем функцию Мергеляна $W_{ma}(x, F_1)$. Функция $\tilde f_x(z)$, очевидно, имеет вид (3.11) и для нее, как легко убедиться с помощью (3.14), справедлива оценка: $|\tilde f_x(u)| \leqslant (W(u)+1)/(10|u|)$ ($|u|\geqslant 1$). Кроме того, очевидно, $|\tilde f_x(u)|\leqslant 1/10$ ($|u|\leqslant 1$). Поэтому имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde f_x(u)|^2\, dF_1(u) \leqslant \frac{1}{100}+\frac{1}{50}\int_{|u|\geqslant 1} u^{-2}dF_1(u) + $$
$$+2\sum_{y_{k'}\geqslant b_0}\frac{1}{100}\int_{I_{k'}} u^{-2}(W(u)+1)^2\,dF_1(u). \tag{3.16}$$

Плотность з.р. F_1 на каждом отрезке $I_{k'}$ допускает следующую простую оценку:

$$F_1'(u) \leqslant \mathrm{e}^{-(u-y_{k'})^2/4}+e^{-(u-y_{k'+1})^2/4} \leqslant 2e^{-bu^2}.$$

Поскольку $W(u) \leqslant \exp(c|u|)$ $(u \in \boldsymbol{R})$, то

$$\sum_{y_{k'} \geqslant b_0} \int_{I_{k'}} u^{-2} (W(u) + 1)^2 dF_1(u) \leqslant \sum_{y_{k'} \geqslant b_0} 2 \int_{I_{k'}} e^{cu - bu^2} du \leqslant 1.$$

Применяя полученную оценку к (3.16), получаем неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}_x(u)|^2 dF_1(u) \leqslant 1,$$

что и требовалось доказать. Теперь искомое неравенство (3.15), очевидно, следует из неравенства (3.13). На каждом отрезке $I_{k'}$ справедлива оценка $\ln W(x) \geqslant b|x|$, поэтому из неравенства (3.15) извлекаем оценку

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + x^2)^{-1} \ln^+ W_{ma}(x, F_1) dx \geqslant \frac{a}{\sqrt{4c^2 + a^2}} \sum_{y_{k'} \geqslant b_0} \int_{I_{k'}} \frac{b|x|dx}{1 + x^2} -$$

$$- c \int_{-\infty}^{\infty} (1 + x^2)^{-1} \ln(|x| + 1) dx = +\infty,$$

из которой следует утверждение леммы 9.

Доказательство теоремы 8. Зададимся числом $2\alpha \in \left(\frac{99}{100}, 1\right)$ и рассмотрим б.д.з.р. F_α с х.ф. вида

$$\varphi(t; F_\alpha) = \exp\left(\int_0^{\infty} (e^{itx} - 1) e^{-x^\alpha} dx\right) = e^{-c_\alpha} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{f_\alpha^q(t)}{q!}, \qquad (3.17)$$

где

$$f_\alpha(t) = \int_0^{\infty} e^{itx - x^\alpha} dx, \quad c_\alpha = \int_0^{\infty} e^{-x^\alpha} dx.$$

Оценим моменты з.р. F_α. Прежде всего замечаем, что

$$f_\alpha^{(k)}(0) = i^k \int_0^{\infty} x^k e^{-x^\alpha} dx = \frac{i^k}{\alpha} \int_0^{\infty} x^{\frac{k+1}{\alpha} - 1} e^{-x} dx = i^k \Gamma\left(\frac{k+1}{\alpha}\right) \alpha^{-1}.$$

Поскольку имеет место формула

$$(f_\alpha^q(t))^{(k)} = \sum_{k_1 + \ldots + k_q = k} \frac{k!}{k_1! \ldots k_q!} f_\alpha^{(k_1)}(t) \ldots f_\alpha^{(k_q)}(t),$$

в которой число слагаемых не превосходит C_{k+q-1}^{k}, то с помощью предыдущего соотношения и формулы Стирлинга легко получаем оценку

$$|(f_{\alpha}^{q}(t))^{(k)}| \leqslant \left(\frac{e}{\alpha}\right)^{q} k! \sum_{k_1+\ldots+k_q=k} e^{\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)(k_1+1)\ln(k_1+1)} \times$$

$$\times e^{\left(1-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha}\ln\alpha\right)(k_1+1)} \ldots e^{\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)(k_q+1)\ln(k_q+1)+\left(1-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha}\ln\alpha\right)(k_q+1)} \leqslant$$

$$\leqslant C_{k+q}^{k}\left(\frac{e}{\alpha}\right)^{q} k!\, e^{\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)k\ln(k+1)+\left(1-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha}\ln\alpha\right)(k+q)+q\ln(k+1)} \leqslant$$

$$\leqslant 2\pi(k+1)^{q+1} e^{\frac{1}{\alpha}k\ln(k+1)+\left(2\ln 2-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha}\ln\alpha\right)k} e^{\left(2+\ln 2-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha}\ln\alpha\right)q} \quad (q \geqslant 1).$$

Эта оценка позволяет оценить моменты з.р. F_{α}. Действительно, с ее помощью из формулы (3.17) выводим

$$m_k(F_{\alpha}) \leqslant b(k+1)\, e^{\frac{1}{\alpha}k\ln(k+1)+ck} \quad (k=0,\ 1,\ \ldots). \tag{3.18}$$

Здесь и далее через b обозначаем положительные постоянные не всегда одни и те же, зависящие лишь от параметра α.

Теперь рассмотрим симметричный з.р. $F_{\alpha s}$, задаваемый для $x>0$ формулой $F_{\alpha s}(x)=\frac{1}{2}(F_{\alpha}(x^2)+1)$ и для $x<0$ — формулой $F_{\alpha s}(x)=$ $=\frac{1}{2}(1-F_{\alpha}(x^2))$. Как и при доказательстве теоремы 7, с помощью критерия М. Г. Крейна устанавливаем, что последовательность моментов $\{m_k(F_{\alpha s})\}_{k=0}^{\infty}$ порождает неопределенную последовательность моментов. Так же, как при доказательстве теоремы 7, выберем решение этой проблемы моментов, отвечающее функции $\varphi(z)\equiv 0$ из формулы Неванлинны (3.3). Это решение — з.р. σ_0 является симметричным дискретным з.р. Определим з.р. $\tilde{\sigma}_0(u)=0$ для $u\leqslant 0$ и $\tilde{\sigma}_0(u)=\sigma_0(\sqrt{u})-\sigma_0(-\sqrt{u})$ для $u>0$. З.р. $\tilde{\sigma}_0$ является решением проблемы моментов $\{m_k(F_{\alpha})\}_{k=0}^{\infty}$.

Покажем теперь, что з.р. $F=\Phi \divideontimes \tilde{\sigma}_0$ является искомым. С помощью формулы обращения имеем

$$\rho(F^{n*},\ (\Phi \divideontimes F_{\alpha})^{n*}) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{x}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-nt^2/2}\left|\frac{e^{itx}-1}{t}\right| |\varphi^{n}(t;\ \tilde{\sigma}_0)-\varphi^{n}(t;\ F_{\alpha})|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{n}{2\pi}\sup_{x}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-nt^2/2}\left|\frac{e^{itx}-1}{t}\right| |\varphi(t;\ \tilde{\sigma}_0)-\varphi(t;\ F_{\alpha})|\,dt=\frac{n}{2\pi}I_n. \tag{3.19}$$

Из формулы Тейлора для функций $\mathrm{Re}(\varphi(t;\ \tilde{\sigma}_0)-\varphi(t;\ F_{\alpha}))$, $\mathrm{Jm}\times$ $\times(\varphi(t;\ \tilde{\sigma}_0)-\varphi(t;\ F_{\alpha}))$ легко получаем оценку

$$|\varphi(t;\ \tilde{\sigma}_0)-\varphi(t;\ F_{\alpha})| \leqslant \frac{4}{k!} m_k(F_{\alpha})\,|t|^{k}\ (t\in \boldsymbol{R}),$$

справедливую для любого $k \in \boldsymbol{N}$. Будем считать $k=[n^{\alpha_0}]$, $0<\alpha_0<\alpha/(2-\alpha)$. Используя эту опенку, выводим для достаточно больших n

$$I_n \leqslant \frac{b}{k!} m_k(F_\alpha) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-nt^2/2} |t|^{k-1} dt \leqslant \frac{b}{k!} m_k(F_\alpha) \left(\frac{1}{2} n\right)^{-k/2} \Gamma(k/2) \leqslant$$

$$\leqslant b \exp\left\{ck + \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2}\right) k \ln(k+1) - \frac{1}{2} k \ln n\right\} \leqslant$$

$$\leqslant b \exp\left\{cn^{\alpha_0} + \left(\alpha_0\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\right)(n^{\alpha_0} - 1) \ln n\right\} \leqslant \frac{1}{n} \exp(-n^{\alpha_0}).$$

Применяя последнее неравенство к (3.19), приходим к нужной оценке сверху величины $\rho(F^{n*}, \boldsymbol{D})$.

Правая часть неравенства (7) для з.р. $F \notin \boldsymbol{D}$ следует из теоремы 1. Действительно, поскольку у з.р. F существуют k-е ($k=1$, 2, ...) моменты, то для величины $N_\nu(n)$ справедлива оценка: $N_\nu(n) \leqslant \exp(\eta\nu n)$ для $\forall \eta > 0$ и $n \geqslant n_0(\eta, F)$. Кроме того, у з.р. F величина $m(F)=1$. Чтобы это доказать, достаточно показать, что х.ф. $\varphi(t; F)$ ни на каком отрезке $[-a, a]$ $(a>0)$ не совпадает с х.ф. некоторого б.д.з.р. D. Поскольку х.ф. $\varphi(t; F)$ допускает аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость $\mathrm{Jm}\, t>0$, то из совпадения $\varphi(t; F)$ на каком-нибудь отрезке $[-a, a]$ $(a>0)$ с х.ф. некоторого б.д.з.р. D следует в силу теоремы П. Леви — И. Марцинкевича (см. [8. с. 38—39]), что х.ф. $\varphi(t; D)$ допускает аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость $\mathrm{Jm}\, t>0$. Так как функции $\varphi(t; F)$, $\varphi(t; D)$ к тому же непрерывны в полуплоскости $\mathrm{Jm}\, t \geqslant 0$, то в силу теоремы единственности они совпадают всюду на вещественной прямой. Поэтому, чтобы доказать правую часть неравенства (7), как это уже отмечалось при доказательстве теоремы 7, достаточно показать, что з.р. $\tilde{\sigma}_0 \notin \boldsymbol{D}$. Вспомним, что з.р. $\tilde{\sigma}_0$ — дискретный со скачками в точках $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ $(x_k \uparrow +\infty)$, где x_k по построению з.р. σ_0 нули целой функции $E(z)$ из формулы (3.3). Как известно (см. [10]), $E(z)$ имеет только вещественные нули. Поскольку $E(z)$ — целая функция не выше минимального типа порядка один, то из формулы (3.8) легко следует, что найдется подпоследовательность точек $\{x_{k'}\}_{k'=1}^{\infty}$ $(x_{k'} \uparrow +\infty)$ такая, что для любого $d>0$ найдется $k'(d) \in \boldsymbol{N}$, что для $k' \geqslant k'(d)$ $x_{k'+1} - x_{k'} > d$. Отсюда сразу получаем, что $\tilde{\sigma}_0 \notin \boldsymbol{D}$, ибо в противном случае должно было найтись такое число $d_1 > 0$, что на каждом отрезке длины d_1 найдется скачок з.р. $\tilde{\sigma}_0$. Тем самым теорема 8 доказана.

Список литературы: 1. *Прохоров Ю. В.* О суммах одинаково распределенных величин // Докл. АН СССР. 1955. **105**, № 4. С. 645—647. 2. *Колмогоров А. Н.* Две равномерные предельные теоремы для сумм независимых слагаемых // Теория вероятн. и ее применение. 1956. **1**, № 4. С. 426—436. 3. *Арак Т. В.*, *Зайцев А. Ю.* Равномерные предельные теоремы для сумм независимых случайных величин // Тр. МИАН. 1986. **174**. С. 3—214. 4. *Арак Т. В.* О сближении *n*-кратных сверток распределений, имеющих неотрицательную характеристическую функцию, с сопровождающими законами // Теория вероятн. и ее применение. 1980. **25**,

№ 4. С. 225—246. 5. *Арак Т. В.* О скорости сходимости в равномерной предельной теореме Колмогорова. I, II // Теория вероятн. и ее применение. 1981. **26**, № 2. С. 225—245, № 3. С. 449—463. 6. *Арак Т. В.* Уточнение нижней оценки для скорости сходимости в равномерной предельной теореме Колмогорова // Теория вероятн. и ее применение. 1982. **27**, № 4. С. 767—772. 7. *Арак Т. В.* Об аппроксимации n-кратных сверток распределений, имеющих неотрицательную характеристическую функцию, безгранично делимыми распределениями // Тр. Таллин. политехн. ин-та. 1980. № 482. С. 81—85. 8. *Линник Ю. В., Островский И. В.* Разложения случайных величин и векторов. М., 1972. 480 с. 9. *Пресман Э. Л.* О сближении биномиальных и безгранично делимых распределений // Теория вероятн. и ее применение. 1983. **28**, № 2. 372—382. 10. *Ахиезер Н. И.* Классическая проблема моментов. М., 1961. 310 с. 11. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций. 2. М., 1968. 624 с. 12. *Thorin O.* On the Infinite Divisibility of the Lognormal Distribution // Scand. Actuarial I. 1977. 3. P. 121—148. 13. *Кацнельсон В. Э.* Методы J-теории в континуальных интерполяционных задачах анализа. Ч. I.— Деп. ВИНИТИ, № 171, 1983. 250 с. 14. *Koosis P.* The logarithmic integral I. Cambridge univ. press, 1987. 602 p.

Поступила в редколлегию 16.11.89