УДК 517

А. Л. РОНКИН

ИЗВЛЕЧЕНИЕ КОРНЯ ИЗ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ СУММ (СЛУЧАЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ)

В статье автора [1] рассматривалась целая функция $f(\xi)$, $\xi \in C$, такая, что некоторая натуральная степень l ее представима в виде конечной экспоненциальной суммы:

$$(f(\xi))^l = \sum_{k=0}^{r} c_k(\xi) \exp(a_k \xi^p), \tag{1}$$

где $p \in N$, $a_k \in C$ и коэффициенты $c_k(\xi)$ — целые функции не более чем минимального типа при порядке p. Было доказано, что такая функция $f(\xi)$ сама является конечной суммой типа (1).

В настоящей заметке обобщается приведенное утверждение на случай функций нескольких переменных. При доказательстве основных результатов будет использована следующая теорема.

Теорема А [1]. *Пусть целая функция* $f(\xi)$, $\xi \in C$ *такова, что*

$$(f(\xi))^l = \sum_{k=0}^{r} a_k(\xi) \exp(\lambda_k \xi^p),$$

где l, $p \in N$; $a_k(\xi)$ — целые функции не более чем минимального типа при порядке p. Пусть далее $\operatorname{Re} \lambda_0 > \operatorname{Re} \lambda_k$ при $k > 0$.

Тогда существует такая целая функция $\varphi(\xi)$, что $(\varphi(\xi))^l = a_0(\xi)$ и

$$f(\xi) = \varphi(\xi) \exp\left(\frac{1}{l} \lambda_0 \xi^p\right) \left(\sum_{k=0}^{R} d_k(\xi) \exp(\gamma_k \xi^p) \right), \tag{2}$$

где $\sum_{k=0}^{R} d_k(\xi)\exp(\gamma_k \xi^p)$ — отрезок* ряда, полученного путем подстановки суммы $\sum_{k=0}^{r} d_k(\xi)(a_0(\xi))^{-1}\exp((\lambda_k-\lambda_0)\xi^p)$ в биномиальный ряд

$$(1+u)^l = 1+\frac{1}{l}u+\frac{\frac{1}{l}\left(\frac{1}{l}-1\right)}{2!}u^2+\cdots+C^k_{\frac{1}{l}}u^k+\cdots \tag{3}$$

и последующим упорядочиванием получаемых при этом слагаемых по убыванию действительных частей показателей экспонент γ_k.

Замечание. Нетрудно видеть, что в представлении (2) показатели γ_k являются линейными комбинациями чисел $\{\lambda_j\}_{j=0}^r$ с целыми коэффициентами, а функции $d_k(\xi)$ получены из функций $\{a_j(\xi)\}_{j=0}^r$ и $(\varphi(\xi))^{-1}$ при помощи конечного числа операций сложения, умножения и умножения на рациональное число.

Для облегчения изложения и записи в дальнейшем мы будем придерживаться следующих обозначений и определений: $\xi \in C$, $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in C^n$, G_p^n — множество целых функций $f(z)$ не более чем минимального типа при порядке p, т. е. таких, что либо $f(z)\equiv 0$, либо $\overline{\lim\limits_{z\to\infty}}|z|^{-p}\ln|f(z)|=0$. Назовем G_p^n-квазиполиномом целую функцию, представимую в виде конечной суммы $\sum a_k(z)\exp(\lambda_k(z))$, где $a_k(z)\in G_p^n$, а $\lambda_k(z)$ — полиномы степени не более чем p.

Очевидно, что каждый G_p^n-квазиполином имеет представление $\sum a_k(\xi)\exp(\lambda_k(z))$, где $a_k \in G_p^n$, $\lambda_k(z)$ — различные однородные полиномы степени p. Таким образом, G_p^1 — квазиполином от переменной ξ имеет вид $\sum a_k(\xi)\exp(\lambda_k\xi^p)$, что совпадает с определением, данным в [1]. С другой стороны, если фигурирующие в определении G_p^n-квазиполинома коэффициенты $c_k(z)$ являются полиномами, то такой G_p^n-квазиполином принадлежит специальному классу A_n экспоненциальных сумм, рассмотренному в [3], и для которого был поставлен и остался открытым вопрос о возможности извлечения корня в классе.

Основному результату заметки теореме 2 предпошлем следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть Ω — область в C^n и $f(z,\xi)$ — голоморфная в $\Omega\times C$ функция. Пусть далее l, $p\in N$ и*

$$(f(z,\xi))^l = \sum_{k=0}^{r} a_k(z,\xi)\exp(\lambda_k(z)\xi^p), \tag{4}$$

где $a_k(z,\xi)$, $\lambda_k(z)$ — голоморфные функции соответственно в $\Omega\times C$ и C, причем $\lambda_j(z)\not\equiv\lambda_i(z)$ при $j\neq i$, а $a_k(z,\xi)$ при каждом фиксированном z, как функция ξ принадлежит G_p^1

* Доказательство того, что остаток $\sum_{k>R} d_k(\xi)\exp(\gamma_k\xi^p)$ соответствующего ряда тождественно равен нулю, опирается на теорию специальных асимптотических рядов, изложенную в [3].

Тогда существует такой номер m и такая голоморфная в $\Omega\times C$ функция $\varphi(z, \xi)$, что $(\varphi(z, \xi))^l = a_m(z, \xi)$ и $f(z, \xi) = \sum_{k=0}^{R} b_k(z, \xi) \times \exp(\beta_k(z)\xi^p)$, где функции $b_k(z, \xi)$ получены из функций $\{a_j(z, \xi)\}$ и $(\varphi(z, \xi))^{-1}$ с помощью конечного числа операций умножения, сложения, умножения на скаляр, а $\beta_k(z)$ — линейные комбинации показателей $\lambda_k(z)$ с рациональными коэффициентами.

Доказательство. Поскольку $\lambda_i(z) \not\equiv \lambda_j(z)$ при $i \neq j$, то существуют такие индекс m, область $\Omega_1 \subset \Omega$ и положительное число d, что $\operatorname{Re}\lambda_m(z) - \operatorname{Re}\lambda_k(z) > d$ при $m \neq k$ и $z \in \Omega_1$. Не уменьшая общности, можно считать, что $m=0$ и $\lambda_0(z) \equiv 0$. Тогда $\operatorname{Re}\lambda_k(z) < -d$ при $k \geqslant 1$, $z \in \Omega_1$. С учетом сделанных упрощающих предположений перепишем равенство (4) в виде

$$(f(z, \xi))^l = a_0(z, \xi)\left(1 + \sum_{k=1}^{r} \frac{a_k(z, \xi)}{a_0(z, \xi)} \exp(\lambda_k(z)\xi^p)\right).$$

Зафиксировав в этом равенстве $z \in \Omega_1$, мы попадаем в ситуацию, описанную в условиях теоремы 1. Значит, существует такая целая (по переменной ξ) функция $\varphi_z(\xi) = \varphi(z, \xi)$, что $(\varphi(z, \xi))^l = a_0(z, \xi)$ и $f(z, \xi) = \varphi(z, \xi)\left(\sum_{k=0}^{R(z)} d_k(z, \xi)\exp(\gamma_k(z)\xi^p)\right)$, где $\sum_{k=0}^{R(z)} \ldots$ — отрезок ряда, полученного после формальной подстановки $\sum_{k=1} \frac{a_k(z, \xi)}{a_0(z, \xi)} \times \exp(\lambda_k(z)\xi^p)$ в ряд (3) и упорядочивания членов по убыванию действительных частей показателей $\gamma_k(z)$. Покажем, что множество V всех возможных конечных экспоненциальных сумм такого типа (суммы сложным образом зависят от зафиксированного z) не более чем счетно.

Обозначим через V_L множество конечных сумм, возникающих при применении теоремы А, показатели $\gamma_k(z)$ которых удовлетворяют условию $\operatorname{Re}\gamma_k(z) > -L$. Очевидно, что $V = \bigcup_{L=0}^{\infty} V_L$. Поэтому для доказательства счетности множества V достаточно доказать конечность каждого из множеств V_L.

Понятно, что для любого L найдется такое $M \in N$, что $dM > L$. Все возможные слагаемые, составляющие суммы из V_L, содержатся в экспоненциальной сумме:

$$\sum_{k=0}^{M} C_{\frac{1}{l}}^{k} \left(\sum_{j=1}^{r} \frac{a_j(z, \xi)}{a_0(z, \xi)} \exp(\lambda_k(z)\,\xi)^p\right)^k. \tag{5}$$

Действительно, подстановка $\sum \frac{a_j}{a_0}\exp(\lambda_j \xi^p)$ в остальные члены ряда (3) будет давать слагаемые с показателями $\gamma_s(z)$, удовлетворяющими условию $\operatorname{Re}\gamma_s(z) < M(-d) < -L$.

В сумме (5) число слагаемых, полученных после возведений в степени, конечно (не более чем Mr^M). Значит, и число различных выборок конечно (не более чем 2^{Mr^M}), т. е. множества V_L — конечны при любом L и, следовательно, множество V — не более чем счетно. Значит, существует такой шар $\Omega_2 \subset \Omega_1$ и такое число $R \in N$, что на плотном в Ω_2 множестве Ω_3 значений z тождественно по ξ выполняется равенство

$$f(z, \xi) = \varphi(z, \xi) \left(\sum_{k=0}^{R} d_k(z, \xi) \exp(\gamma_k(z) \xi^p) \right), \tag{6}$$

где функции $d_k(z, \xi)$, $\gamma_k(z)$ получены описанным ранее способом. Рассмотрим теперь мероморфную в $\Omega \times C$ функцию $\psi(z, \xi)$, определенную равенством

$$\psi(z, \xi) = \frac{f(z, \xi)}{\sum_{k=0}^{R} d_k(z, \xi) \exp(\gamma_k(z) \xi^p)} . \tag{7}$$

Согласно (6) при $(z, \xi) \in \Omega_3 \times C$ имеем $\varphi(z, \xi) = \psi(z, \xi)$. Поскольку $(\varphi(z, \xi))^l = a_0(z, \xi)$ при $(z, \xi) \in \Omega_3 \times C \subset \Omega_1 \times C$, то

$$(\psi(z, \xi))^l = a_0(z, \xi) \tag{8}$$

при $(z, \xi) \in \Omega_3 \times C$. Но $\Omega_3 \times C$ — множество единственности. Следовательно, последнее равенство выполняется при $(z, \xi) \in \Omega \times C$. Таким образом, равенство (7) с учетом справедливости (8) дает нам искомое представление функции $f(z, \xi)$. Требуемые свойства показателей $\gamma_k(z)$ и коэффициентов $d_k(z, \xi)$ легко вытекают из замечания к теореме А. Теорема 1 доказана.

Следующая теорема является непосредственным обобщением на случай многих переменных теоремы А.

Теорема 2. *Если $f(z)$ — целая функция в C^n и $(f(z))^l$ — G_p^n-квазиполином, то и сама функция $f(z)$ является G_p^n-квазиполиномом.*

Доказательство. G_p^n-квазиполином $(f(z))^l$ представим в виде $(f(z))^l = \sum_{k=0}^{r} a_k(z) \exp \lambda_k(z)$, где $a_k(z) \in G_p^n$, $\lambda_k(z)$ — различные однородные полиномы степени p. Заменим в этом равенстве z на произведение $z\xi$, где $\xi \in C$. Тогда имеем

$$(f(z\xi))^l = \sum_{k=0}^{r} a_k(z\xi) \exp(\lambda_k(z) \xi^p).$$

Ясно, что

$$\varlimsup_{|\xi| \to \infty} \frac{\ln |a_k(z\xi)|}{|\xi|^p} = \varlimsup_{|z\xi| \to \infty} |z|^p \frac{\ln |a_k(z\xi)|}{|z\xi|^p} = 0$$

и, значит, коэффициенты $a_k(z\xi)$ при любом фиксированном $z \in C^n$ как функции от ξ принадлежат G_p^1. Поэтому, согласно теореме 1, существует такой индекс m и такая целая функция $\varphi(z, \xi)$, что $(\varphi(z, \xi))^l = a_m(z\xi)$. Полагая в этом равенстве $z = z\xi$, $\xi = 1$, получим $(\varphi(z\xi, 1))^l = a_m(z\xi)$. Значит, $(\varphi(z\xi, 1))^l = (\varphi(z, \xi))^l$ и поскольку

$\varphi(z, \xi)$ — целая функция, то последнее возможно лишь при условии, что $\varphi(z, \xi) = \varphi(z\xi, 1)e^{\frac{2\pi k}{l}i}$, $k \in \{0, 1, \ldots, l-1\}$. Беря в этом равенстве $\xi = 1$, получаем $k = 0$ и, следовательно,

$$\varphi(z, \xi) = \varphi(z\xi, 1). \tag{9}$$

Далее, согласно теореме 1,

$$f(z\xi) = \varphi(z, \xi)\exp\left(\frac{1}{l}\lambda_m(z)\xi^p\right)\left(\sum_{k=0}^{R} d_k(z, \xi)\exp(\gamma_k(z)\xi^p)\right),$$

где функции $d_k(z, \xi)$ получены из функций $\{\overline{a}_i(z\xi)\}_{i=0}^{r}$, $(\varphi(z, \xi))^{-1}$ с помощью конечного числа операций умножения, сложения и умножения на скаляр. Учитывая (9), заключаем, что $d_k(z, \xi) \equiv d_k(z\xi, 1)$. Наконец, ввиду того что $\lambda_k(z)$ — однородные полиномы, а по теореме 1 $\gamma_i(z)$ — их линейные комбинации, то $\gamma_k(z)\xi^p \equiv \gamma_k(z\xi)$. Таким образом,

$$f(z\xi) = \varphi(z\xi, 1)\exp\left(\frac{1}{l}\lambda_m(z\xi)\right)\left(\sum_{k=0}^{R} d_k(z\xi, 1)\exp(\gamma_k(z\xi))\right).$$

Проводя в этом равенстве обратную подстановку $z\xi \to z$, получаем представление

$$f(z) = \sum_{k=0}^{R} \hat{d}_k(z)\exp(\gamma_k(z)).$$

Для завершения доказательства теоремы 2 остается доказать, что $\hat{d}_k(z)$ — целые функции.

Нетрудно понять, что $\hat{d}_k(z)$ — мероморфные функции и более того, что

$$\hat{d}_k(z) = \frac{\overline{d}_k(z)}{(\varphi(z))^{m_k}}, \tag{10}$$

где $\overline{d}_k(z) \in G_p^n$ и $m_k \in N$. Предположим, что какой-то коэффициент $\hat{d}_j(z)$ не является целой функцией. Обозначим тогда через Γ какую-нибудь неприводимую компоненту полярного множества функции $\hat{d}_j(z)$. Ввиду (10) $\varphi(z) = 0$ на Γ. Теперь из известных теорем о связи между ростом объема дивизора и ростом целой функции с заданным дивизором (см., например, [4]) следует, что существует функция $g(z) \in G_p^n$, нулевое множество которой совпадает с Γ. Таким образом, $\varphi(z) = (g(z))^s\Phi(z)$, где $s \in N$; целая функция $\Phi(z)$ принадлежит G_p^n и не обращается в ноль в какой-нибудь точке z_0, принадлежащей Γ. Значит, коэффициенты $\hat{d}_k(z)$ представимы в виде

$$\hat{d}_k(z) = \frac{d_k(z)}{(g(z))^{t_k}(\Phi(z))^{m_k}},$$

где $t_k \in N$; $\overline{d}_k(z) \in G_p^n$ и нулевое множество функций $\overline{d}_k(z)$ не содержит Γ. Поскольку Γ — компонента полярного множества функции

$\tilde{d}_j(z)$, то $T = \max\limits_{0<k<R} t_k \geqslant 1$. Обозначим также $\max\limits_{0<k<R} m_k$ через M. Теперь сумма $\sum\limits_{k=0}^{R} \hat{d}_k(z) \exp(\hat{\gamma}_k(z))$ после соответствующей перегруппировки и преобразования может быть представлена в виде

$$\frac{1}{(g(z))^{T-1}(\Phi(z))^M}\left(\sum_{i\in I}\tilde{d}_i(z)\exp(\tilde{\gamma}_i(z)) + \sum_{k\in J}\frac{\tilde{d}_k(z)}{g(z)}\exp(\tilde{\gamma}_k(z))\right),$$

где $\tilde{d}_k(z) \in G_p^n$; I, J — непересекающиеся множества индексов, причем J не пусто и $\tilde{d}_k(z) \neq 0$ на Γ для любого $k \in J$. Следовательно, домножая обе части равенства

$$\left(\sum_{k=0}^{R}\hat{d}_k(z)\exp(\hat{\gamma}_k(z))\right)^l = \sum_{k=0}^{r} a_k(z)\exp(\lambda_k(z))$$

на функцию $F(z) = ((g(z))^{T-1}(\Phi(z))^M)^l \in G_p^n$, получим

$$\left(\sum_{i\in I}\tilde{d}_i(z)\exp(\tilde{\gamma}_i(z)) + \sum_{k\in J}\frac{\tilde{d}_k(z)}{g(z)}\exp(\tilde{\gamma}_k(z))\right)^l =$$

$$= \sum_{k=0}^{r}\tilde{a}_k(z)\exp(\tilde{\lambda}_k(z)). \qquad (11)$$

Не уменьшая общности, можно считать, что найдется такой индекс j_0, для которого при любых $k \in J$, $j_0 \neq k$ неравенство $\operatorname{Re}\tilde{\gamma}_{j_0}(z) > \operatorname{Re}\tilde{\gamma}_k(z)$ выполняется в некоторой области $V \subset C^n$.

После возведения в степень и приведения подобных (слагаемых с равными показателями экспонент) в левой части равенства (11) справа и слева окажутся экспоненциальные суммы, которые должны совпадать почленно. Рассмотрим коэффициент при показателе $l\tilde{\gamma}_{j_0}(z)$ в левой части равенства. Ввиду соотношения между $\operatorname{Re}\tilde{\gamma}_k(z)$ и $\operatorname{Re}\tilde{\gamma}_{j_0}(z)$ при $k \in J$ этот коэффициент, являясь целой функцией (см. правую часть равенства), в то же время может быть представлен в виде

$$\left(\frac{\tilde{d}_{j_0}(z)}{g(z)}\right)^l + \frac{D(z)}{(g(z))^{l-1}},$$

где $D(z) \in G_p^n$. Но в этом случае целой должна быть и функция

$$\frac{(\tilde{d}_{j_0}(z))^l}{g(z)} + D(z),$$

которая имеет полюсы на Γ, поскольку $\tilde{d}_{j_0}(z) \neq 0$ на Γ. Значит, предположение о наличии полюсов у функций $d_k(z)$ ложно.

Теорема 2 доказана.

Список литературы: 1. *Ронкин А. Л.* Об извлечении корня из экспоненциальных сумм//Сиб. мат. журн. 1987. **XXVIII**, № 3. С. 193—198. 2. *Henson C. W., Rubel L. A., Singer M. E.* Alqebraic Properties of the Rings of General Exponential Polynomials. 1987. Preprint. 3. *Левин Б. Я., Ронкин А. Л.* Асимптотические ряды и алгеброидные функции//Докл. АН СССР. 1985. **280**, № 2. С.288—291. 4. *Lelong P., Gruman L.* Entire Function of Several Complex Variables. Berlin Heidelberg, 1986. 120 S.

Поступила в редколлегию 20.12.90